Exercício Programa 1 - Decomposição LU para Matrizes Tridiagonais

Mateus Bonelli Salomão 11914789
Pedro Pimentel Fuoco 11804313

May 2, 2022

1 Introdução

O objetivo final deste exercício-programa é resolver um sistema linear tridiagonal cíclico de n por n equações, $Ax = d$. Para isso, deve-se primeiramente fazer a decomposição LU da matriz tridiagonal $A_{(n-1)x(n-1)}$, resolvendo-se então dois sistemas auxiliares não cíclicos de mesma ordem.

2 Tarefa

2.1 Matriz tridiagonal

Implementou-se em primeiro lugar uma função que tem como parâmetros as diagonais principais da matriz que se deseja decompor. Assim, dada A_{nxn} tridiagonal, buscou-se encontrar L $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ l_2 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & l_{n-1} & 1 & 0 \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix}$ e U $= \begin{bmatrix} u_1 & u_{12} & & & \\ 0 & u_2 & u_{22} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & u_3 & u_{(n-1)(n-1)} \\ & & & 0 & u_4 \end{bmatrix}$ tal que A = LU. Aplicando-se o algoritmo da eliminação de Gauss à matriz A e representando-a por suas diagonais $a = [0, a_2, ..., a_{n-1}, a_n]$, $b = [b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n]$ e $c = [c_1, c_2, ..., c_{n-1}, 0]$ (os zeros no início de a e fim de c foram incluídos para manter os três vetores com mesma dimensão), obtém-se $u_{i\ i+1} = c_i,\ i \in 1, \dots, n-1$, bem como $u_1 = c_1$ e $l_i = a_i/u_{i-1},\ u_i = b_i - l_i c_i,\ i \in 2, \dots, n$. Foi implementado assim um simples laço, como descrito no enunciado, armazenando os vetores u e l em matrizes linha do numpy.

2.2 Sistema não-cíclico

De posse de L e U (representadas em l, u e c), procedeu-se então à resolução do sistema não-cíclico, isto é, $Ax = LUx = d$. Isso é trivial, pois tanto L como U são bidiagonais. Fazendo-se Ux=y , inicializou-se $y_1 = d_1$ e implementou-se primeiro o laço que resolve Ly = d, com $y_i = d_i - l_i y_{i-1}$, para i de 2 a n. A partir disso, é possível achar o vetor x "de trás para a frente", fazendo-se $x_n = \frac{y_n}{u_n}$ e $x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{u_i}$, com $i \in n-1, \dots, 1$.

2.3 Sistema cíclico

Nesse caso, a matriz dos coeficientes não é mais tridiagonal pois há elementos em seus cantos superior direito e inferior esquerdo. Assim implementou-se uma função que, recebendo os vetores a, b, c e d, resolve os dois subsistemas conforme indicado no enunciado. Construiu-se primeiramente os vetores v, w e $\tilde{d}$ como matrizes coluna e a matriz tridiagonal $T = A_{(n-1)x(n-1)}$ foi armazenada nos vetores a_T, b_T e c_T. Assim, resolveu-se primeiro os sistemas não cíclicos $T\tilde{y} = \tilde{d}$ e $T\tilde{z} = v$, com o algoritmo apresentado nas seções anteriores. A fim de se calcular os resíduos $r_{\tilde{y}}$ e $r_{\tilde{z}}$, implementou-se uma função que gera a matriz T na sua forma integral. A partir disso, partiu-se para a determinação de x, calculando-se primeiramente x_n como indicado e implementando o cálculo de $\tilde{x}$ de forma vetorizada.

3 Resultados

Todos os resultados apresentados nessa seção foram obtidos a partir da matriz A_{20x20}.

3.1

A decomposição LU da matriz T forneceu:

u = (2, 1.859375, 1.85994398, 1.86278709, 1.86411491, 1.8647705, 1.86513724, 1.86536322, 1.86551249, 1.86561631, 1.86569147, 1.86574764, 1.86579072, 1.8658245, 1.86585147, 1.86587334, 1.86589134, 1.86589134, 1.86591891)

l = (0, 0.1875, 0.22408964, 0.23522214, 0.23522214, 0.24587182, 0.2489774, 0.25132199, 0.25315296, 0.25315296, 0.25582577, 0.25582577, 0.25768181, 0.25841208, 0.25904544, 0.25959998, 0.26008953, 0.26052488, 0.26091455)

3.2

A resolução dos sistemas $T\tilde{y} = \tilde{d}$ e $T\tilde{z} = v$ forneceu:

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0.37843963 \\ 0.32399649 \\ 0.33299023 \\ 0.32407657 \\ 0.31066096 \\ 0.28495119 \\ 0.24376482 \\ 0.1834894 \\ 0.1027449 \\ 0.0036052 \\ -0.10669377 \\ -0.21474018 \\ -0.30109351 \\ -0.34346605 \\ -0.320406 \\ -0.22656567 \\ -0.05642858 \\ 0.09885073 \\ 0.38501251 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{d} - T\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0.00000000e+00 \\ 1.11022302e-16 \\ 1.11022302e-16 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 5.55111512e-17 \\ -6.07153217e-18 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ -1.11022302e-16 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 2.77555756e-17 \\ 0.00000000e+00 \\ 1.11022302e-16 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} 1.35222221e-01 \\ -2.72592563e-02 \\ 6.09628742e-03 \\ -1.43065951e-03 \\ 3.45232504e-04 \\ -8.48513229e-05 \\ 2.11773807e-05 \\ -5.52440818e-06 \\ 2.11184782e-06 \\ -3.05990019e-06 \\ 9.74604319e-06 \\ -3.44953868e-05 \\ 1.23495926e-04 \\ -4.43747837e-04 \\ 1.59880578e-03 \\ -5.77380667e-03 \\ 2.08934629e-02 \\ -7.57421523e-02 \\ 2.75016182e-01 \end{bmatrix}$$

$$v - T\tilde{z} = \begin{bmatrix} 6.93889390e-18 \\ 0.00000000e+00 \\ 4.33680869e-19 \\ 0.00000000e+00 \\ 2.71050543e-20 \\ -6.77626358e-21 \\ 0.00000000e+00 \\ 8.47032947e-22 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 1.35525272e-20 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ -1.73472348e-18 \\ 3.03576608e-18 \\ 1.04862381e-17 \\ 0.00000000e+00 \end{bmatrix}$$

3.3

A função que resolveu o sistema cíclico teve como resultado:

$$x = \begin{bmatrix} 0.33031512 \\ 0.33369784 \\ 0.33082061 \\ 0.32458573 \\ 0.3105381 \\ 0.28498139 \\ 0.24375728 \\ 0.18349137 \\ 0.10274415 \\ 0.00360629 \\ -0.10669724 \\ -0.2147279 \\ -0.30113746 \\ -0.34330813 \\ -0.32097501 \\ -0.22451082 \\ -0.0638644 \\ 0.12580676 \\ 0.28713644 \\ 0.35589205 \end{bmatrix}$$

Implementou-se também uma função geradora da matriz A fornecida, e calculou-se o resíduo associado a x, obtendo-se:

$$d - Ax = \begin{bmatrix} 0.00000000e+00 \\ -1.11022302e-16 \\ -2.22044605e-16 \\ -2.22044605e-16 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 8.15659908e-18 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 1.11022302e-16 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00] \end{bmatrix}$$