ESCOLA POLITÉCNICA
PUCRS

CÁLCULO I

Tópico 1 – Funções

Notas de Aula

Tópico 1. Funções

1.1– FUNÇÕES: DEFINIÇÃO, REPRESENTAÇÕES E DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO

O conceito de função, junto com sua representação gráfica, é certamente um dos mais importantes em Matemática e tem lugar de destaque em outras áreas do conhecimento. Frequentemente, se observa que uma grandeza é função de outra e, então, tenta-se encontrar uma fórmula razoável para representar essa função. A busca de uma função que representa uma determinada situação é chamada modelagem matemática (e a função escolhida é o modelo matemático).

Inicialmente, estudaremos as ideias intuitivas ligadas à noção de função, e em seguida, iremos estudar mais formalmente esse importante conceito.

Exemplo 1. O número de litros de gasolina e o preço a pagar.

Suponha que o preço do litro da gasolina seja $R\$$ 5,00. Complete a tabela e represente as informações graficamente.

Número de litros	Preço a pagar
0	
1	
2	
$\vdots$	$\vdots$
x	$P =$

Representação gráfica:

Nessa situação, o preço a pagar é calculado ***em função*** do número de litros. Assim temos que:

- O número de litros é a ***variável*** ....
- O preço a pagar é a ***variável*** ....

Uma ***função***, de uma variável x, é uma relação que associa a cada valor de x um único número $f(x)$, chamado de valor da função em x. A variável x é chamada de ***variável independente***. O conjunto dos valores que a variável independente pode assumir é chamado de ***domínio*** da função. A ***imagem*** da função é o conjunto de valores que a função assume.

Exemplo 2. Um retângulo tem 450 m² de área. Seja x a medida de um dos lados do retângulo. Expresse o perímetro em função de x e o determine domínio contextual dessa função.

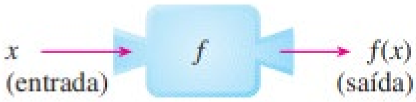
Exemplo 3. Deseja-se construir uma caixa sem tampa, de base quadrada, a partir de uma folha de papel cartaz quadrada de lados medindo 50 cm. Para a construção da caixa, é necessário retirar de cada canto da folha de papel cartaz um quadrado de lado x. Qual o volume da caixa em função de x? Quais são os valores permitidos para variável x nesse contexto?

NOTAÇÃO, REPRESENTAÇÕES E ZEROS

Como o valor y é determinado a partir do valor de x, dizemos que y é função de x e escrevemos $y = f(x)$, onde

- ✓ f é o nome da função,
- ✓ x é a variável independente e
- ✓ y a variável dependente.

Uma função possui várias representações: gráfico, lei, fórmula, tabela ...

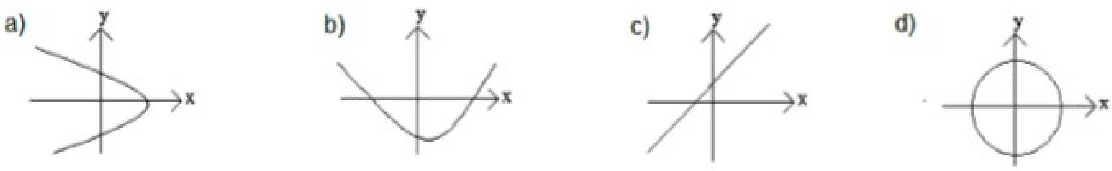


É interessante pensar na função como uma *máquina*. Se x estiver no domínio da função, quando x entra na máquina ele será aceito como entrada e a máquina produzirá uma saída f(x) de acordo com a regra que define a função.

Observe que nem toda curva no plano cartesiano será o gráfico de uma função. Lembre-se que no conceito de função, temos que para cada valor de x temos um único valor de y relacionado. Portanto, nenhuma reta vertical poderá cruzar o gráfico de uma função mais de uma vez.

Chamamos de zeros ou raízes da função os valores de x, para os quais temos f(x) = 0.

Exemplo 4. Observe os gráficos e verifique quais podem ou não representar funções.



Exemplo 5. Sendo $f : R \to R$ a função definida por $f(x) = 3x - 5$, determine:

a) $f(-1)$

b) $f(4)$

c) x tal que f(x) = 4.

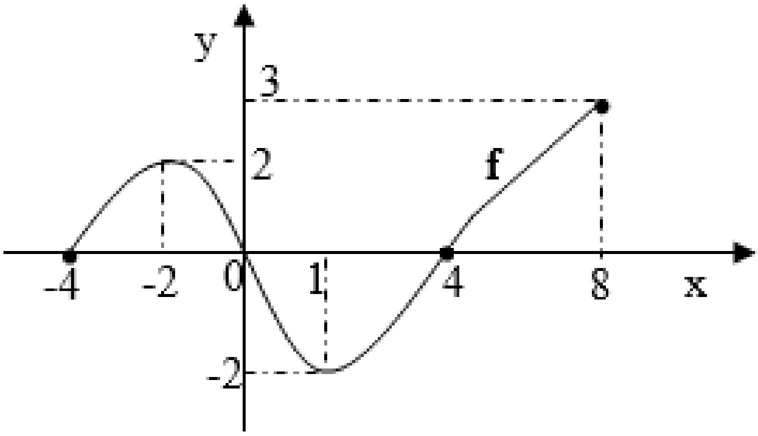
DOMÍNIO E IMAGEM

O *domínio da função* é um conjunto de possíveis valores da variável independente e a *imagem* é o conjunto correspondente de valores da variável dependente.

Os domínios e as imagens de muitas funções são intervalos ou combinações de intervalos. Esses intervalos podem ser abertos, fechados ou semi-abertos e finitos ou infinitos. Complete a tabela abaixo (com alguns exemplos):

Notação de conjunto	Representação na reta	Notação de intervalo
A = {x ∈ IR / 1 ≤ x ≤ 5}		
B = {x ∈ IR / 1 < x < 5}		
C = {x ∈ IR / x > 5}		
D = {x ∈ IR / x ≤ 2}		

Exemplo 6. Considere a função cujo gráfico é representado abaixo.



Determine:

a) os zeros da f.

b) f(-2).

c) x, tal que f(x) = -2.

d) x, tal que f(x) < 0.

e) o domínio e a imagem de f.

DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO

Para determinar o domínio de uma função é fundamental lembrar que, no conjunto dos reais (IR),

- ✓ uma divisão só existe quando o denominador é ≠ 0; e
- ✓ uma raiz de índice par só existe quando o radicando é ≥ 0

Exemplo 7. Determine o domínio (campo de existência) das seguintes funções:

$a)\ f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

$b)\ f(x) = x^2 + 1$

$c)\ f(x) = \sqrt{2x-5}$

$d)\ f(x) = \dfrac{3x+4}{\sqrt{3-2x}}$

ATIVIDADES DE AULA

1) O preço da passagem do ônibus urbano comum na Cidade de Porto Alegre é de R$ 4,80. Com base nesse dado, complete a tabela a seguir:

Número de passagens	1	2	6	9
Valor a ser pago				

Agora responda as questões.

(a) É possível determinar o número de passagens vendidas, se o valor pago foi R$ 273,60?

(b) O que é constante nesse problema?

(c) O que é variável nesse problema?

(d) Se representarmos por y o valor a ser pago e por x o número de passagens vendidas, escreva a relação matemática que modela essa situação (a equação que fornece y em função de x).

2) O preço a pagar por uma corrida de táxi depende da distância percorrida. A tarifa P é composta por duas partes: uma parte taxa, denominada bandeirada e uma parte variável que depende do número de quilômetros rodados. Suponha que a bandeirada custe R$ 10,00 e o quilômetro rodado, R$ 1,20.

(a) Quanto se pagará por uma corrida em que o táxi rodou 10 km?

(b) Sabendo que a corrida custou R$ 72,40, calcule a distância percorrida pelo táxi.

(c) Expresse o preço P em função da distância d percorrida.

3) Um automóvel vai percorrer a distância de 480 km, em uma trajetória retilínea, utilizando uma velocidade constante. Preencha a tabela abaixo e responda as questões a seguir:

Tempo (horas)	2	3	4	5
Velocidade (Km/h)				

(a) O que acontece com a velocidade quando se dobra ou triplica o tempo?

(b) O que é constante nesse problema?

(c) O que é variável nesse problema?

(d) Se representarmos por v a velocidade em km/h, e por t o tempo em horas, escreva a relação matemática que modela essa situação (a equação que fornece v em função de t).

4) Um corpo é considerado em movimento em física, neste caso ele é chamado um móvel, quando sua posição S varia no tempo. Imagine uma trajetória retilínea com 200 metros de comprimento, cujo um dos trechos está esquematizado abaixo:

S_0 em física é a Posição Inicial do móvel, ou seja, o ponto da trajetória de onde ele iniciou o movimento. Vamos, portanto, supor que nosso móvel (o corpo em movimento) iniciou seu movimento na origem da trajetória, 0 metro (Ponto de Referência). Esse movimento foi feito com velocidade constante de 5 m/s até atingir a posição S_4. Baseado nesses, responda as questões seguintes:

(a) Preencha a tabela abaixo.

Tempo de Percurso (s)	4	8	12	16
Posição do móvel				

(b) Se representarmos por S a posição do móvel e por t o tempo de percurso estabeleça a relação matemática que modele a posição do móvel após t segundos.

5) Uma população de bactérias dobra a cada hora. Se inicialmente temos 10 bactérias, então:

a) qual será o número de bactérias após 3 horas?

b) após quantas horas teremos 320 bactérias?

c) se “N” é o número de bactérias daqui a “t” horas, expresse N em função de t.

6) O número de habitantes de uma cidade é hoje igual a 7.000 e cresce a uma taxa de 3% ao ano.

a) Qual o número de habitantes daqui a 2 anos?

b) Qual o número de habitantes daqui a 10 anos?

c) Se “N” é o número de habitantes daqui a “t” anos, expresse N em função de t.

7) Considere um quadrado de lado ℓ, perímetro P e área A. Nessas condições, expresse:

a) P em função de ℓ

b) ℓ em função de P

c) A em função de ℓ

d) A em função de P

8) O volume de um cilindro de raio r e altura h é dado por $V = \pi r^2 h$. Sabendo que esse cilindro é equilátero (h = 2r), expresse:

a) o volume “V” em função do raio “r”.

b) o volume “V” em função da altura “h”.

9) Um retângulo tem uma área de 16 m^2. Expresse o perímetro do retângulo como uma função do comprimento “x” de um de seus lados.

10) Um retângulo tem perímetro 20 m. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento “x” de um de seus lados.

11) Sendo a função real de variável real definida por $f(x) = x^2 - 10x + 8$, determine:

a) f(-1).

b) f(4).

c) x, tal que f(x) = -1.

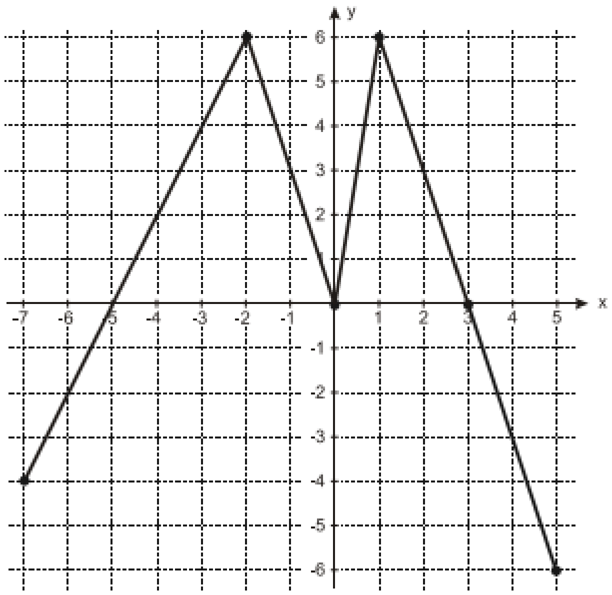
12) Considere as funções $f(x) = 3x^2 - x + 5$ e $g(x) = -2x + 9$, definidas de IR em IR e determine:

a) f(0) + g(1).

b) x, tal que g(x) = 1.

c) x, tal que f(x) = g(x).

13) Considere a função y = f(x) cujo gráfico é representado abaixo.



Determine

a) os zeros da f.

b) f(2).

c) x, tal que f(x) = 6.

d) x, tal que f(x) > 0.

e) o domínio e a imagem de f.

14) Qual o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{2-3x}{7x+14}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{4}$

d) $f(x) = \sqrt{2x-6}$ e) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x} + \dfrac{2x}{\sqrt{x+4}}$

Exercícios Anton H., Bivens I., Davis S. Cálculo. Volume 1 (10ª ed)
Exercícios de compreensão 0.1 (p.11) : 2, 4 e 5 **Exercícios 0.1 (p.14):** 29 e 31

1.2 – Funções Polinomiais

As funções mais simples são as potências de x com expoentes inteiros não negativos

$$1 \ , \ \ x \ , \ \ x^2 \ , \ x^3 \ , \ x^4 , \ldots$$

Se uma quantidade finita delas é multiplicada por constantes e os resultados são somados, obtemos um polinômio

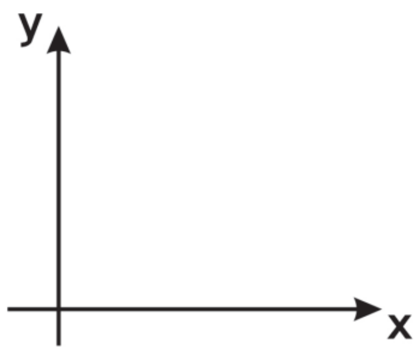
$$\mathrm{P(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

O grau do polinômio é o maior expoente de x que aparece nele; se $a_n \neq 0,$ o grau de P(x) é n.

Nessa secção vamos revisar as funções polinomiais até grau 2.

Introdução: um motoboy cobra para fazer uma entrega R$ 3,00 por cada km percorrido até o local, além de uma taxa fixa de R$ 2,00. Sendo “x” a quantidade de km percorridos e “y” o preço total pago pela entrega, expresse y em função de x, complete a tabela e esboce o gráfico.

Tabela	
x = 0	y =
x = 1	y =
x = 2	y =
x = 3	y =



Função afim: é uma função do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, onde a ∈ IR e b ∈ IR. O “a" é chamado de coeficiente .... e o “b" de coeficiente ....

Exemplos:

a) f(x) = 5x – 4, onde a = ….. e b = …..

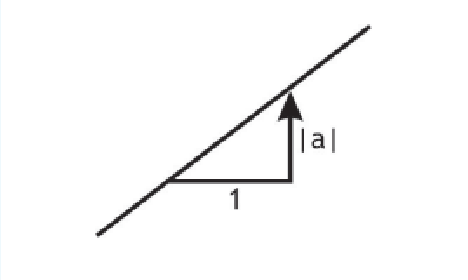
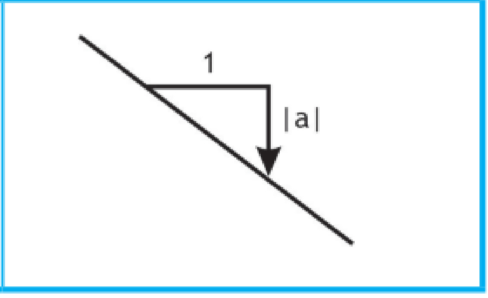
b) f(x) = – x + 3, onde a = ... e b = ...

c) f(x) = – 2x, onde a = ….. e b = …..

d) f(x) = 4, onde a = ... e b = ...

Informações importantes:

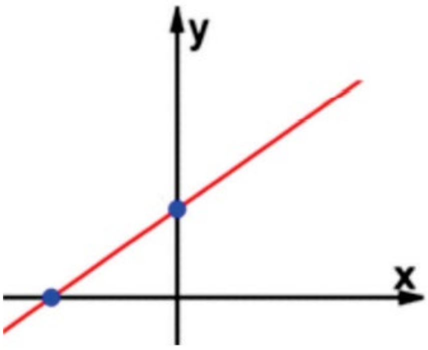
1º) O **coeficiente angular** $\boldsymbol{a}$ é a ***taxa*** segundo a qual a reta sobe (..............) ou desce (.............). Cada vez que **x aumenta 1**, temos que **y aumenta ou diminui** $\boldsymbol{|a|}$ unidades.

a > 0 Função Crescente	**a < 0 Função Decrescente**
	

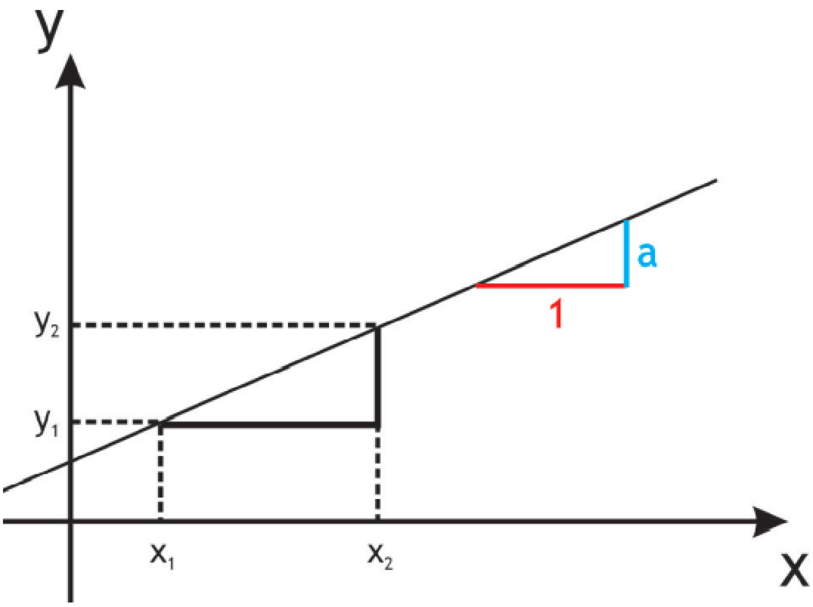
2º) Se o coeficiente angular é zero ($a = 0$), então a função é ....

3º) O **coeficiente linear** $\boldsymbol{b}$ é a altura onde a reta intercepta o eixo ....

4º) O **zero (ou raiz)** da função é geometricamente o ponto onde a reta intercepta o eixo ....



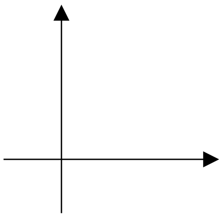
5º) Cálculo do **coeficiente angular** tendo **dois pontos** da reta:

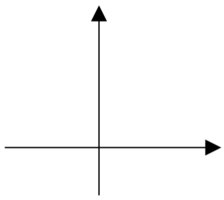


Exemplo 1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

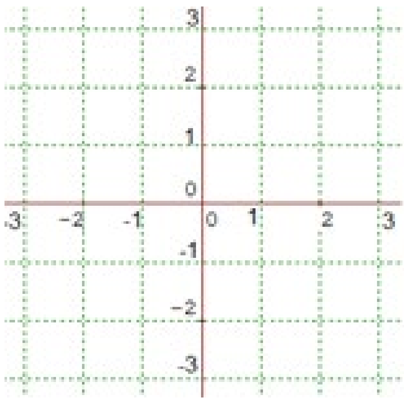
a) y = 3

b) $f(x) = \begin{cases} 2, & se\ x \geq 0 \\ -1, & se\ x < 0 \end{cases}$

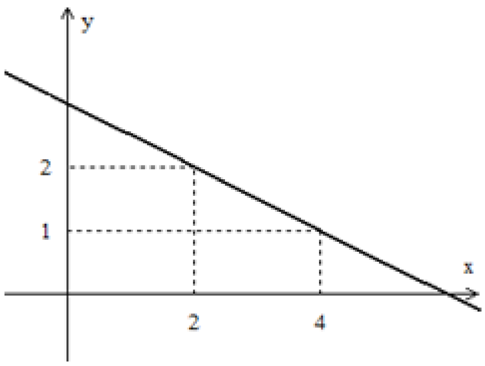




Exemplo 2. Esboce o gráfico da reta y = -2x + 1, mostrando os pontos onde a mesma intercepta os eixos x e y.



Exemplo 3. Determine a equação da reta representada abaixo:

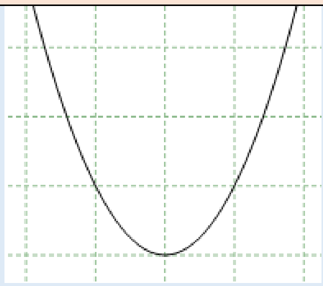
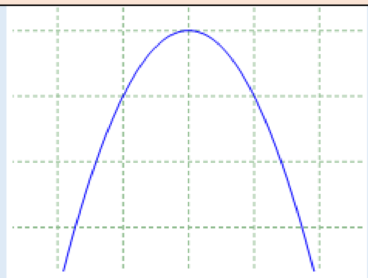


FUNÇÃO QUADRÁTICA

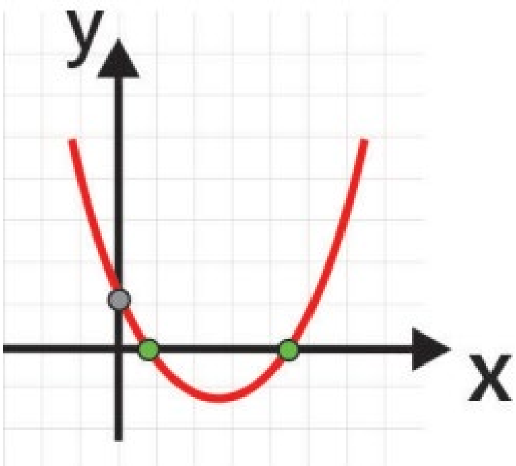
Definição: é uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a ∈ IR*, b ∈ IR e c ∈ IR. O gráfico dessa função é uma curva chamada de **parábola**.

Informações importantes:

(1º) A ***concavidade*** da parábola depende do valor do ***coeficiente "a"***.

• $a > 0$ (côncava para cima)	$a < 0$ (côncava para baixo)
	

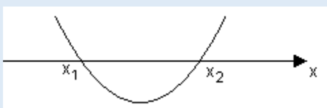
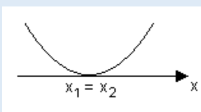
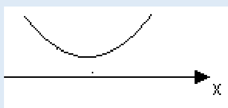
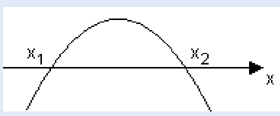
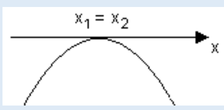
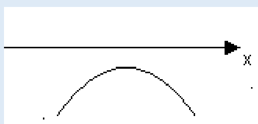
(2º) O ***coeficiente "c"*** é a altura onde a parábola intercepta o ....



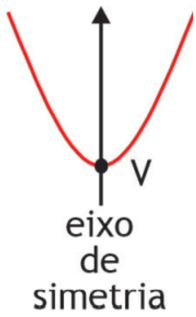
(3º) Os ***zeros ou raízes da função*** da função quadrática são os números reais x tais que $f(x) = 0$. Ou seja, são as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, que são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Geometricamente, as raízes reais são os pontos onde a curva intercepta o eixo x e a quantidade de raízes depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$.

	$\Delta > 0$ 2 raízes reais e distintas	$\Delta = 0$ 2 raízes reais e iguais	$\Delta < 0$ não existem raízes reais
$a > 0$			
$a < 0$			

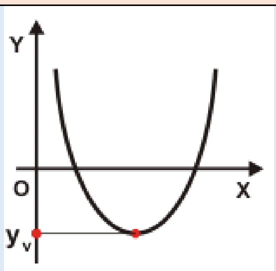
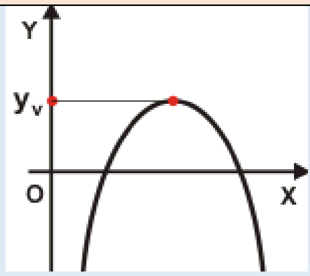
(4º) Toda parábola é composta de dois ramos simétricos em relação a uma reta chamada de eixo de simetria. O ponto comum à parábola e ao eixo de simetria é o ponto V, chamado de ***vértice*** da função quadrática.



As coordenadas do vértice $V(x_V, y_V)$ são dadas por:

$x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = f(x_v)$ ou $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

(5º) ***Imagem e Valores extremos*** da função quadrática

1º caso: $a > 0$	2º caso: $a < 0$
	
Im = $[y_v, +\infty)$	Im = $(-\infty, y_v]$
y_v é o valor mínimo de f(x)	y_v é o valor máximo de f(x)

Exemplo 4. Faça um esboço das funções abaixo mostrando

- os interceptos
- o vértice
- valor máximo ou mínimo
- domínio e imagem.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 10$

Exemplo 5. Resolva as inequações de 2º grau:

a) $x^2 - 4x > 0$

b) $-x^2 + 2x - 10 < 0$

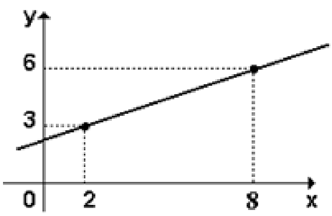
ATIVIDADES DE AULA

1) Faça um esboço do gráfico das funções, mostrando os interceptos de x e y:

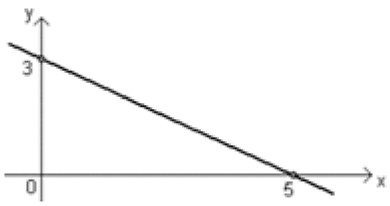
a) $y = -x + 2$ b) $y = x + 4$ c) $y = 2x - 1$

2) Determine a equação das seguintes retas:

a)



b)



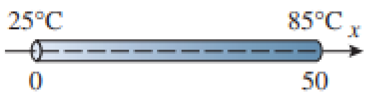
3) A equivalência entre as escalas de temperatura geralmente é obtida por meio de uma função polinomial do 1º grau, ou seja, uma função da forma $y = a.x + b$. Um grupo de estudantes da escola politécnica da PUCRS desenvolveu uma nova unidade de medida para temperaturas: o grau Otavius.

A correspondência entre a escala Otavius (O) e a escala Celsius (C) é a seguinte:

°O	°C
6	18
60	36

Sendo f a função que expressa a temperatura em Celsius (C) em função da temperatura em Otavius) determine a lei dessa função.

4) Uma barra de metal uniforme tenha 50 cm de comprimento e esteja isolada lateralmente, enquanto as temperaturas nos extremos sejam mantidas a 25ºC e 85ºC, respectivamente. Suponha que o eixo x seja escolhido conforme a figura abaixo e a temperatura y em cada ponto desse eixo possa ser determinada em função de x por meio de uma função polinomial do 1º grau, ou seja, uma função da forma $y = ax + b$.



Nessas condições determine a lei da função, para $0 \leq x \leq 50$.

5) A locadora A aluga um carro por R$ 30,00 a diária mais R$ 0,20 por km rodado. A locadora B o faz por R$ 40,00 a diária mais R$ 0,10 por km rodado. Qual locadora você escolheria, se você pretendesse alugar um carro por um dia e pagar o menos possível? Justifique algebricamente e graficamente.

6) Faça o esboço dos gráficos de cada uma das seguintes funções mostrando os interceptos e o vértice.

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 + 2x + 2$ c) $y = -x^2 + 4x - 4$

7) A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que $h(t) = -t^2 + 6t$, onde h é a altura dada em metros e t é o tempo dado em segundos, responda:

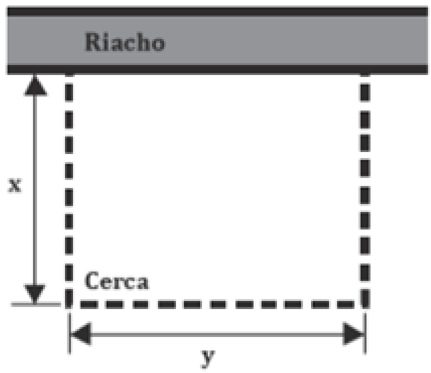
a) Em que instante a bola atinge a altura máxima?

b) Qual a altura máxima atingida pela bola?

8) Um fazendeiro pretende usar 80 metros de cerca para proteger um bosque retangular às margens de um riacho, como mostra a figura.

a) Determine a área da região cercada em função de x, indicando seu domínio.

b) Qual o valor máximo possível para essa área? Represente a graficamente essa função.



9) Sabe-se que o lucro total de uma empresa é dado pela fórmula L = R – C, em que L é o lucro total, R é a receita total e C é o custo total da produção. Numa empresa que produziu x unidades verificou-se que: $R(x) = 6000x - x^2$ e $C(x) = x^2 - 2000x$.

Nessas condições determine:

a) a equação do lucro em função de x.

b) quantas unidades devem ser produzidas para que o lucro seja máximo.

c) o valor do lucro máximo.

10) Construir o gráfico das seguintes funções com mais de uma sentença:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x < 0 \\ 2, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } x \leq 0 \\ -x + 3, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x \leq -2 \\ x, \text{ se } -2 < x < 2 \\ 2, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios 0.1 (p.13): 7, 23 **Exercícios de revisão do capítulo 0 (p.63): 1, 3, 5, 7**

1.3 – OBTENDO NOVAS FUNÇÕES A PARTIR DE ANTIGAS

- **Operações aritméticas sobre funções**

Sendo *f* e *g* funções podemos obter $f+g$, $f-g$, $f.g$ e f/g, ditas, respectivamente, função soma, função diferença, função produto e função quociente, abaixo definidas:

(1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

(2)$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

(3) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

Em todos os casos o domínio da função resultante consiste na intersecção dos domínios das funções f e g. Porém, no caso 4, também devem ser excluídos do domínio os valores de x que anulam a função g.

Exemplo 1. Sendo f(x) = $3x+4$, g(x) = $x-1$ e $h(x)=\frac{2}{x-1}$ (com x ≠ 1), determine as funções pedidas em cada caso indicando seus domínios.

a) (f – g) (x) =

b) (f/g) (x) =

c) (g.h) (x) =

Composição de funções

Outra maneira de se combinar duas funções f e g consiste em substituir $g(x)$ em todas as ocorrências da variável x em $f(x)$. A função resultante é chamada de composta de f(x) e g(x) e denotada por $(f\ o\ g)(x)$ ou $f(g(x))$. O domínio de $f\circ g$ é o conjunto de valores de x tais que x $\in$ Dom_g e g(x) $\in$ Dom_f.

Exemplo 2. Sendo f(x) = 2x + 1 e g(x) = $\sqrt{x}$ (com x ≥ 0), determine:

a) $f(g(4))$ =

b) $f(g(x))$ =

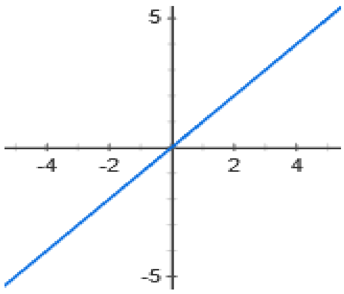
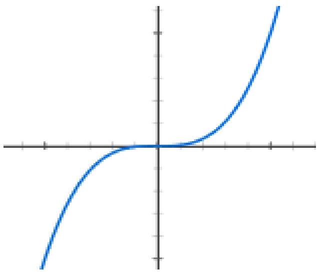
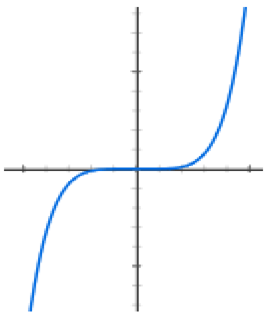
c) $g \; o \; f \; =$

Exemplo 3. Expresse a função h(x) = $(x+1)^2$ como uma composição de duas funções.

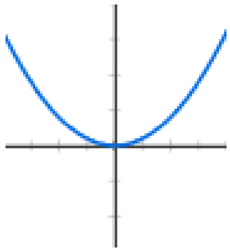
EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios 0.2 (p.24): 27, 29, 31, 35, 37, 39

- **Algumas funções importantes e seus gráficos**

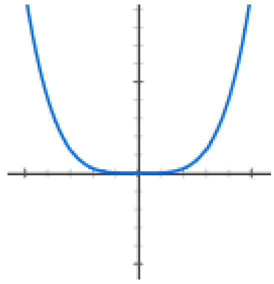
- **A família y = x^p**

$y = x$	$y = x^3$	$y = x^5$
		

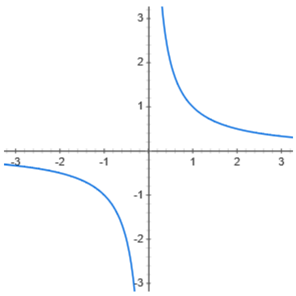
$y = x^2$



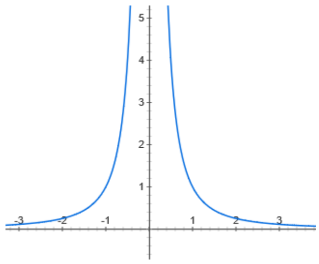
$y = x^4$



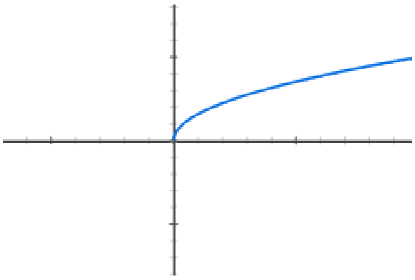
$y = \dfrac{1}{x}$



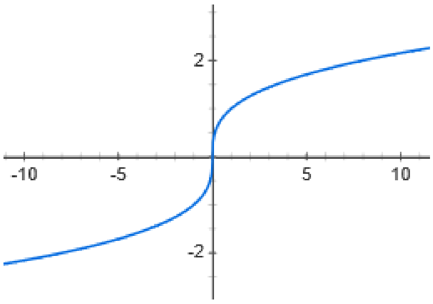
$y = \dfrac{1}{x^2}$



$y = \sqrt{x}$

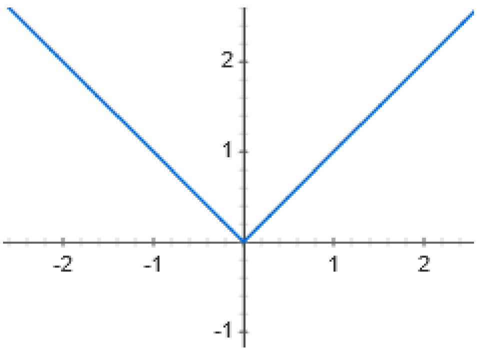


$y = \sqrt[3]{x}$



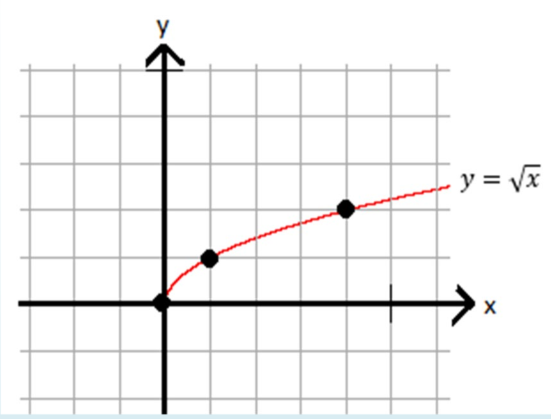
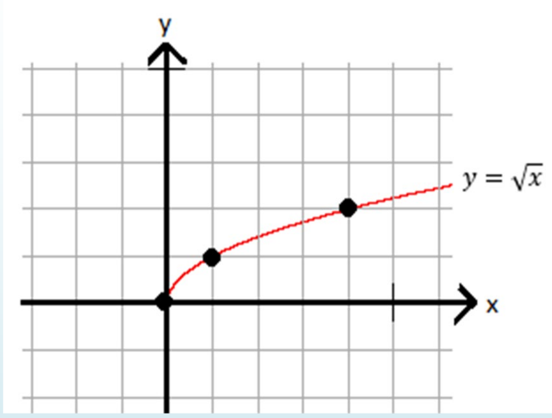
❖ **A função valor absoluto**

$y = |x|$



➢ Movimentos gráficos

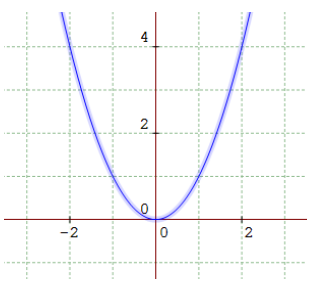
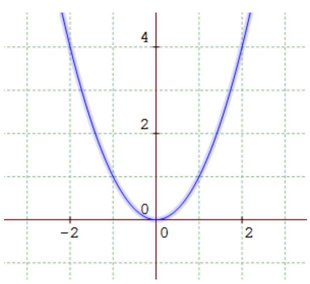
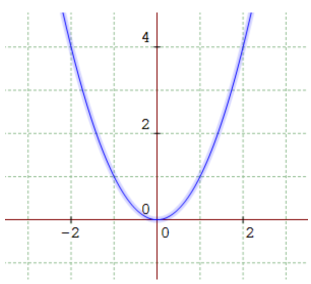
Translações

(a) Vertical	**(b) Horizontal**
Considere a função $y = \sqrt{x}$ e esboce o gráfico de $y = \sqrt{x} + 2$.  	Considere a função $y = \sqrt{x}$ e esboce o gráfico de $y = \sqrt{x + 2}$. 
Como poderíamos obter o gráfico da função $y = \sqrt{x} - 2$?	Como poderíamos obter o gráfico da função $y = \sqrt{x - 2}$? ....

Conclusão: dada uma função y = f(x) e sendo k ∈ IR, uma constante positiva, o gráfico de

- **y = f(x) + k** é obtido transladando o gráfico de f “k” unidades para ....
- **y = f(x) – k** é obtido transladando o gráfico de f “k” unidades para ....
- **y = f(x + k)** é obtido transladando o gráfico de f “k” unidades para ....
- **y = f(x – k)** é obtido transladando o gráfico de f “k” unidades para ....

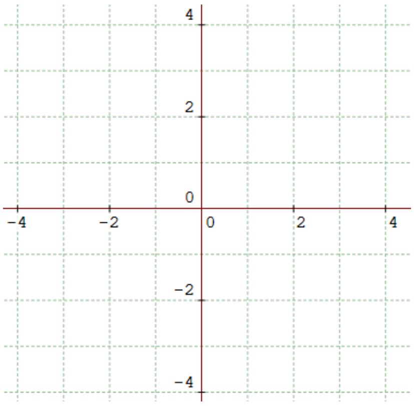
Exemplo 4. A função $f(x) = x^2$ está representada graficamente abaixo. Em cada caso, esboce o gráfico de $y = g(x)$ partindo do gráfico de f .

$g(x) = x^2 - 1$	$g(x) = (x + 2)^2$	$g(x) = (x - 2)^2 + 1$
 	 	

Exemplo 5. Complete a tabela:

	Função mãe	Função filha	Deslocamento na “mãe” que gera a “filha”
a)	$f(x) = \log x$	$g(x) = \log(x+1)$	
b)	$f(x) = \log x$	$g(x) =$	1 unidade para cima
c)	$f(x) = x^3$	$g(x) = x^3 - 2$	
d)	$f(x) = x^3$	$g(x) =$	2 unidades para direita
e)	$f(x) =$	$g(x) = \cos(x-2) + 1$	

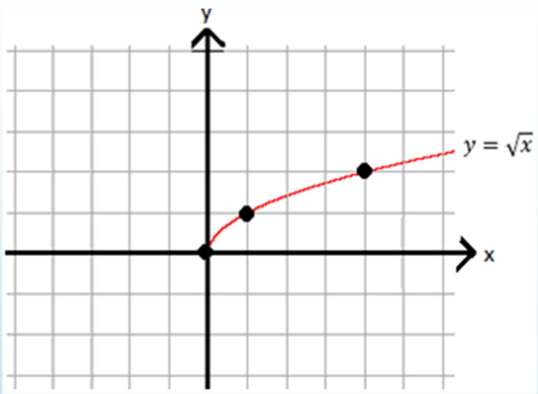
Exemplo 6. Esboce o gráfico da função $g(x) = |x-2| + 1$, partindo do gráfico da função $f(x) = |x|$.



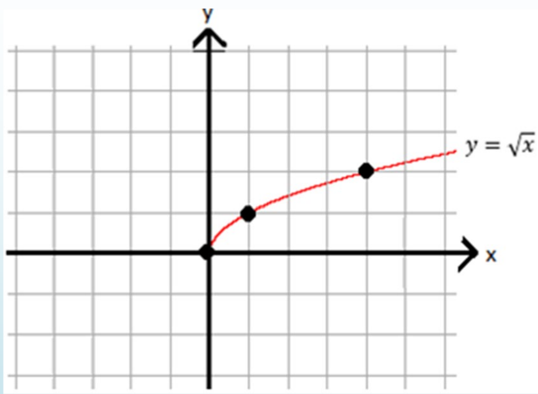
Reflexões

Considere a função $y = \sqrt{x}$ e esboce:

a) o gráfico de $y = -\sqrt{x}$.



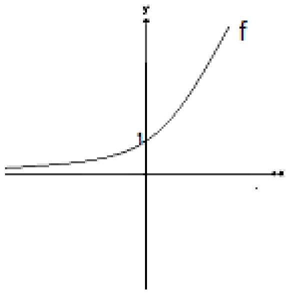
b) o gráfico de $y = \sqrt{-x}$



Conclusão: dada uma função y = f(x), o gráfico de

- **y = – f(x)** é obtido através da reflexão do gráfico de f no eixo ....
- **y = f(–x)** é obtido através da reflexão do gráfico de f no eixo ....

Exemplo 7. Considere a função y = f(x), cujo gráfico está representado abaixo.



Faça o esboço do gráfico das seguintes funções:

a) y = -f(x)

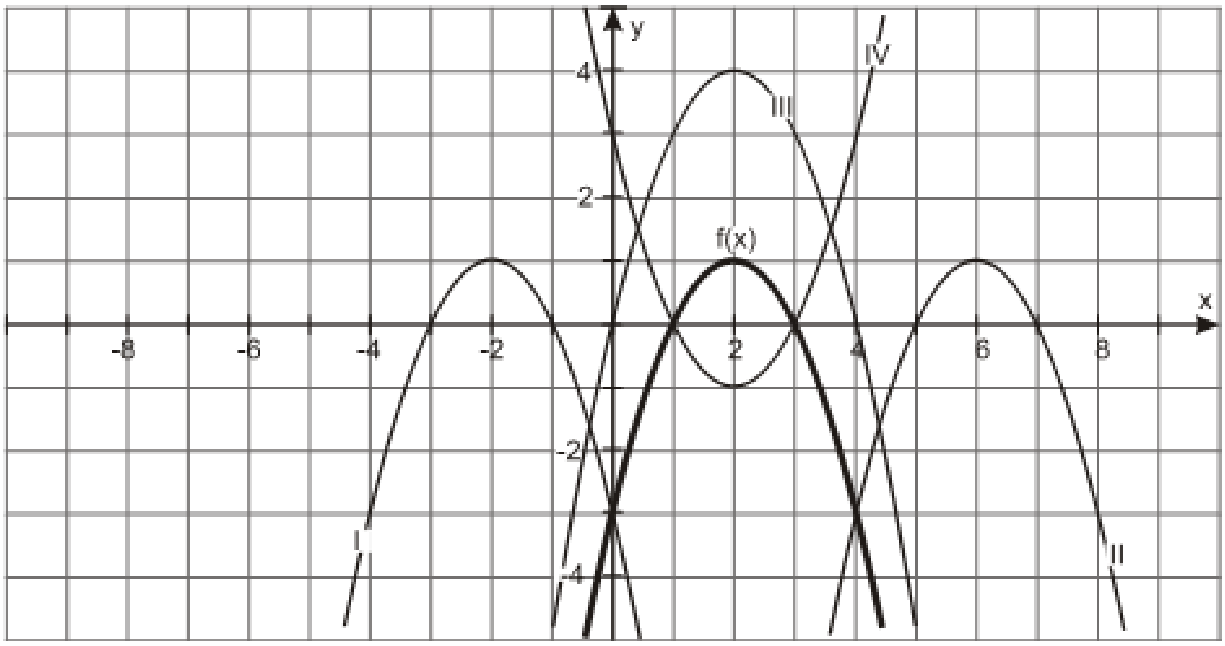
b) y = f(-x)

Exemplo 8. Faça um esboço do gráfico da função y = $-|x| + 1$, partindo do gráfico de y = $|x|$.

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios de compreensão 0.2 (p.24): 3 **Exercícios 0.2 (p.24):** 9, 13, 15, 17, 23

ATIVIDADES DE AULA

1) (Ufsj/2013) Na figura a seguir, são dados os gráficos de $y = f(x)$ (mais escurecido) e de outras quatro funções.



Com base no gráfico, é **CORRETO** afirmar que

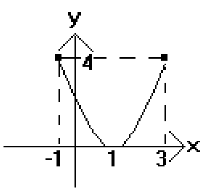
a) (IV) representa a função y = $f(-x)$

b) (II) representa a função y = $f(x)+4$

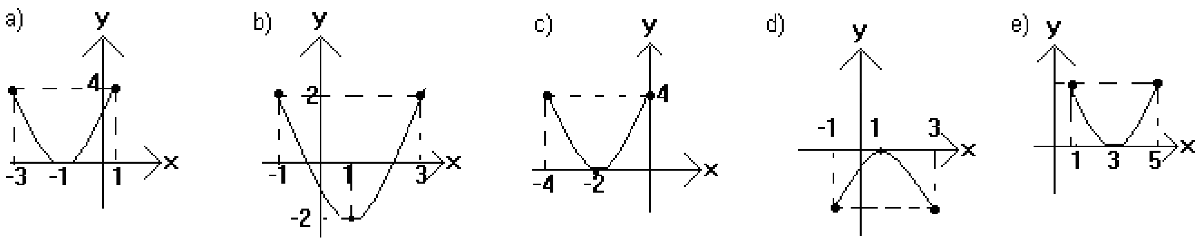
c) (III) representa a função y = $f(x+3)$

d) (I) representa a função y = $f(x+4)$

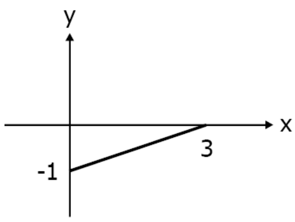
2) (PUCRS) Uma função f cujo domínio é o intervalo [-1,3] é representada abaixo:



O gráfico que melhor representa a função g(x) = f(x + 2):

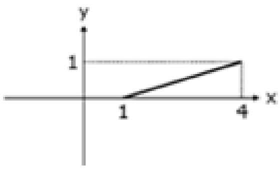


3) (Mack) Na figura abaixo, temos o esboço do gráfico da função y = f(x).

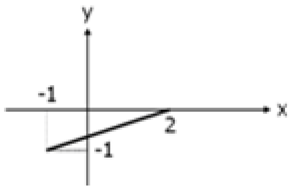


O gráfico que melhor representa y = f(x – 1) + 1 é:

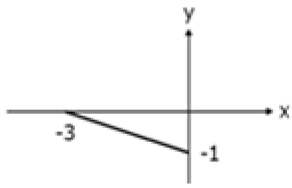
a)



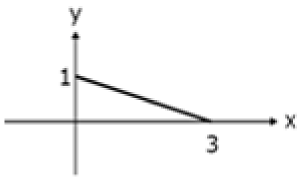
b)



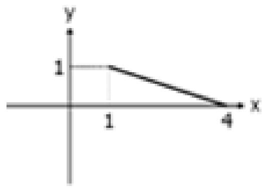
c)



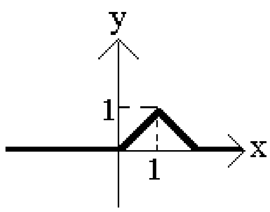
d)



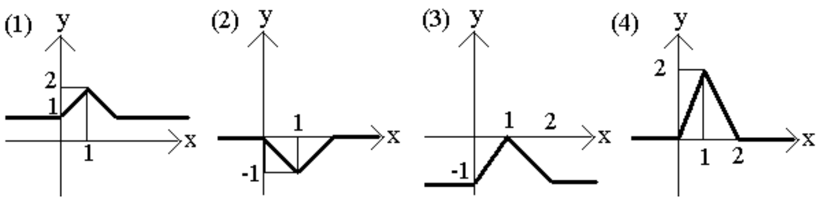
e)



4) (UFRGS) O gráfico abaixo representa a função y = f(x).



Os quatros gráficos abaixo, são obtidos através de uma transformação no gráfico de f:



Numere de 1 até 4 a linha abaixo, fazendo corresponder a cada um dos gráficos acima, sua lei de formação.

( ) y = – f(x) ( ) y = 2.f(x) ( ) y = f(x) + 1 ( ) y = f(x) - 1

A sequência correta é:

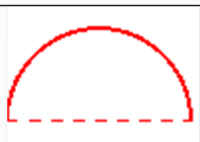
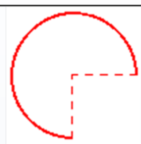
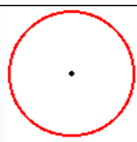
a) 2 – 4 – 1 – 3 b) 2 – 4 – 3 – 1 c) 2 – 1 – 4 – 3

d) 3 – 4 – 1 – 2 e) 1 – 2 – 3 – 4

1.4 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Unidade de medida para ângulos e arcos: usualmente os arcos trigonométricos são representados em graus ou em radianos. O radiano informa a quantidade de raios que "cabem no arco". Temos a seguinte equivalência:

O arco de 1 volta possui **360º** ou **2π rad**.

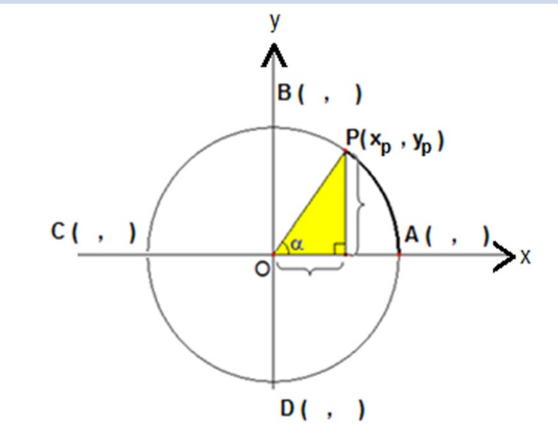
Desenho do arco				
Medida em graus				
Medida em radianos				

Relação usada para transformação: ....º ↔ .... rad

Circunferência trigonométrica:

- É uma circunferência com **centro na origem** do sistema de coordenadas e **raio unitário** (r = ...).
- Todos os arcos trigonométricos tem origem no ponto (1, 0).
- **Arcos positivos** são marcados no sentido .... e **arcos negativos** são marcados no sentido ....

Seno e cosseno de um arco:



sen α =

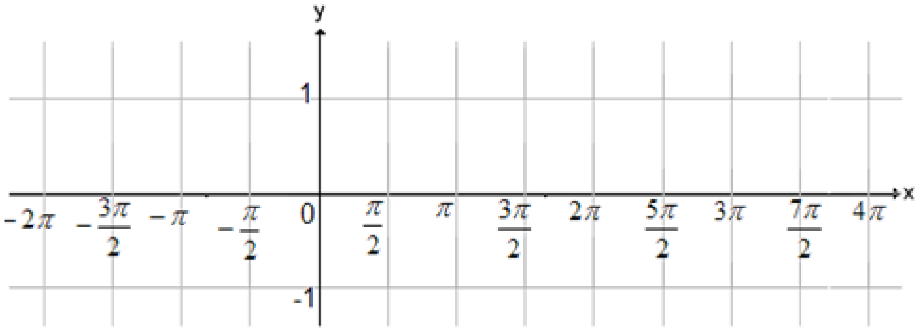
cos α =

<u>Relação fundamental da trigonometria</u>:

Importante:

	0 rad	**π/2 rad**	**π rad**	**3π/2 rad**	**2π rad**
sen					
cos					

Vamos inicialmente esboçar o gráfico da função f(x) = sen x.

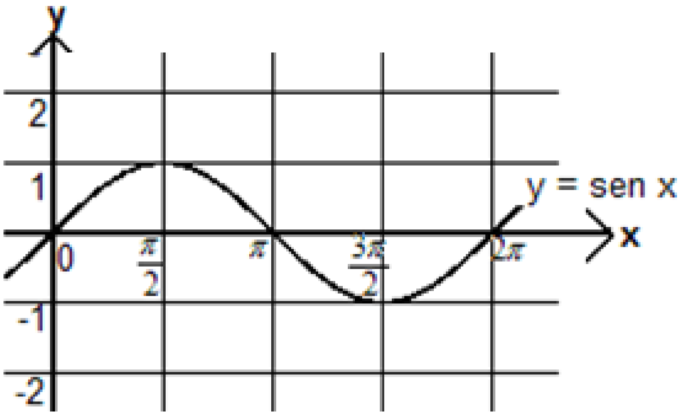


Dom_f = ...

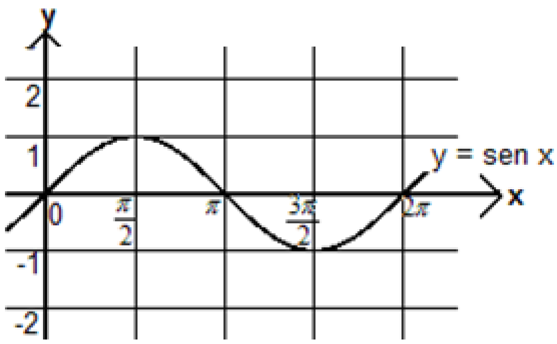
Im_f = ...

p_f = ...

Exemplo 1. Considere a função y = $sen\ x$ e esboce $y = 2\ sen\ x$.



Exemplo 2. Considere a função y = sen x e esboce $y = sen\ (2\ x)$.

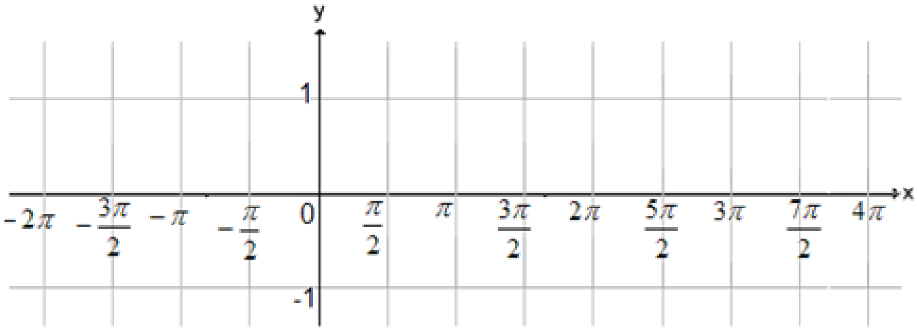


Conclusões sobre o gráfico de y = A.sen (Bx), sendo A e B números positivos.

- o valor de A altera a ...., que fica .... por A.
- o valor de B altera o ...., que fica .... por B.

- **A função cosseno e a família $y = A\,cos\,(Bx)$**

Vamos esboçar o gráfico da função real de variável real f(x) = cos x.



Dom_f = ...

Im_f = ...

p_f = ...

Importante: assim como na função seno, os parâmetros A e B irão alterar a amplitude e o período, respectivamente.

Exemplo 3. Determine a amplitude e o período e faça um esboço do gráfico:

a) f(x) = 5.sen (3x)

b) f(x) = sen (x/2)

c) f(x) = - 2.cos (x)

Observação: mais tarde trabalharemos com outras funções trigonométricas, abaixo definidas.

$$tg\,x = \frac{sen\,x}{\cos x} \qquad cossec\,x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad sec\,x = \frac{1}{\cos x} \qquad cotg\,x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

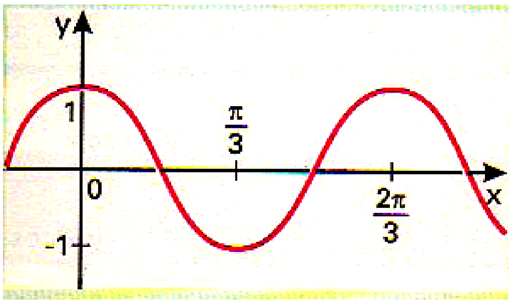
ATIVIDADES DE AULA

1) Associe corretamente as funções com os gráficos correspondentes.

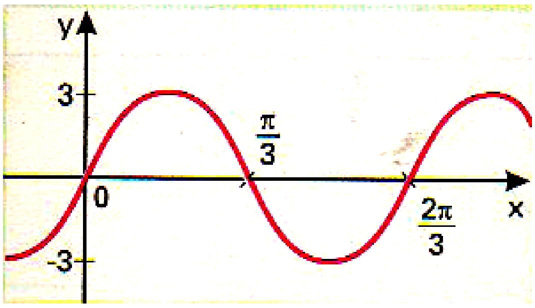
a) $y = 3.\text{sen } x$ b) $y = \cos(3x)$ c) $y = \text{sen}(x/3)$

d) $y = 3.\text{sen}(3x)$ e) $y = 3.\cos x$ f) $y = 3.\cos(3x)$

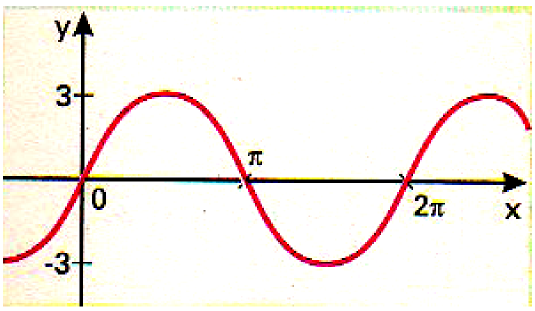
(I)



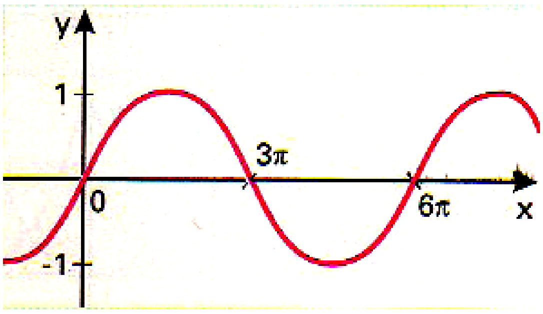
(II)



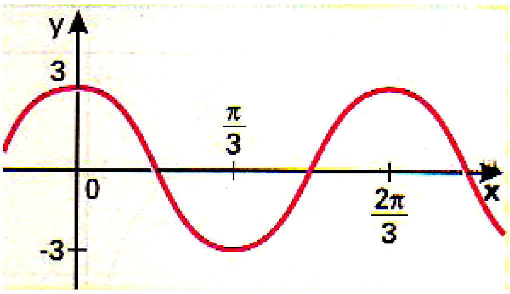
(III)



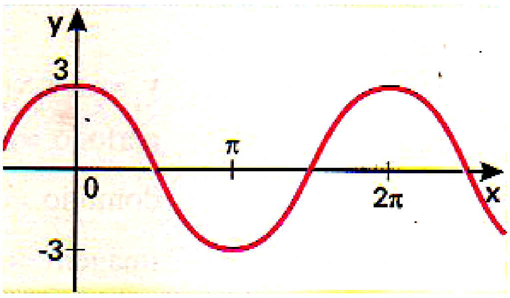
(IV)



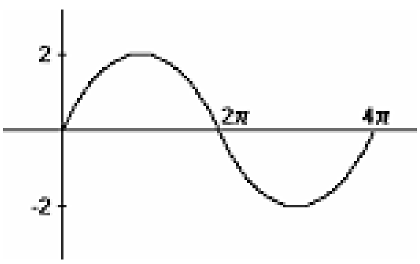
(V)



(VI)

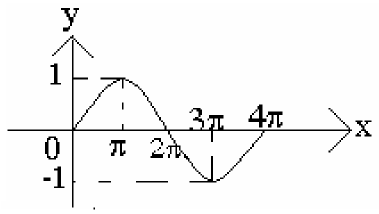


2) (Fuvest) A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:



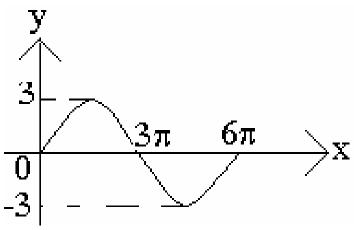
a) sen x
b) 2 sen (x/2)
c) 2 sen x
d) 2 sen 2x
e) sen 2x

3) (UFRGS) A função que melhor se adapta ao gráfico abaixo é:



a) y = sen (x/2)
b) y = cos(x/2)
c) y = sen (2x)
d) y = cos (2x)
e) y = sen x

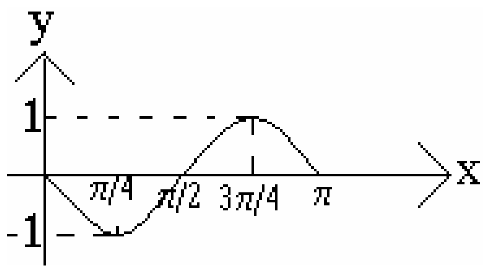
4) (UCS) A função que melhor se adapta ao gráfico abaixo é:



a) y = 3 + senx
b) y = 3 senx
c) y = 3 sen (3x)
d) y = 3 sen (x/2)
e) y = 3 sen(x/3)

5) (Mack) O gráfico a seguir é de uma função do tipo f(x) = a.sen (b.x). Os números a e b são, respectivamente:

a) 1 e 2 b) 1 e –1
c) 2 e –1 d) –1 e –2
e) –1 e 2



Exercícios Anton H., Bivens I., Davis S. Cálculo. Volume 1 (10ª ed)
Exercícios de compreensão 0.3 (p.35): 5
Exercícios 0.2 (p.24): 9, 13, 15, 17, 23
Exercícios 0.3 (p.37): 31 e 35

1.5 – Funções Inversas, Função Exponencial e Função Logarítmica

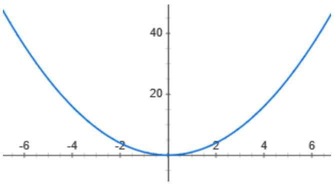
Função Inversa

Uma função tem inversa somente quando é bijetora, isto é:

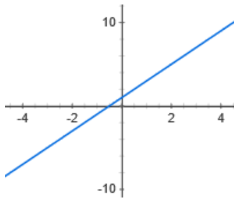
- ✓ cada valor de x está associado a apenas um valor de y; e
- ✓ cada valor de y está associado a apenas um valor de x.

Exemplo 1. Determine se as funções, definidas de IR em IR, tem inversa.

a) $f(x) = x^2$



b) $f(x) = 2x + 1$



A função inversa "desfaz" a operação feita pela função. Isto é, se a função f transforma "a" em "b", então a inversa transforma "b" em "a".

Para encontrarmos a lei da função inversa a partir da lei da função devemos:

- ✓ trocar x por y e y por x;
- ✓ isolar o "novo" y.

Notação: representamos a inversa de $y = f(x)$ por $y = f^{-1}(x)$.

Exemplo 2. Encontre a lei da inversa das seguintes funções:

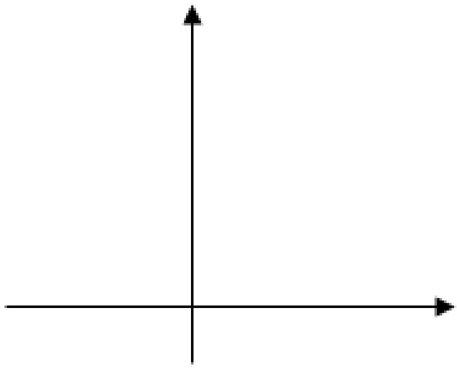
$a)\ f(x) = \dfrac{x+5}{3}$

$b)\ f(x) = x^3 - 1$

<u>FUNÇÃO EXPONENCIAL</u>

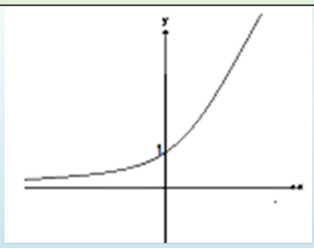
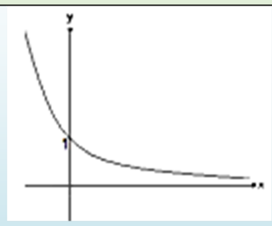
É toda função f: IR $\rightarrow$ (0;+ ∞) definida por $f(x) = b^x$, onde b $\in$ IR, b > 0 e b ≠ 1. Para compreender melhor as características desse tipo de função, vamos fazer o esboço do gráfico de algumas funções exponenciais.

Exemplo 3. Esboce o gráfico de y = b^x sendo b = 2, b = 3, b = 1 e b = 1/2.



Conclusões sobre a função f(x) = b^x

(1) Sobre o crescimento ou decrescimento

Função Crescente $\Leftrightarrow$	Função Decrescente $\Leftrightarrow$ ....
	

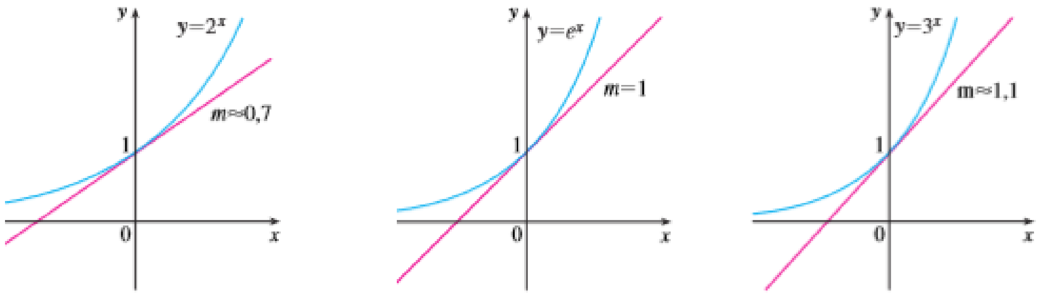
(2) A função sempre intercepta o eixo ...., no ponto (.....,....), e não intercepta o eixo ....

(3) O domínio da função é .... e a imagem é ....

<u>O NÚMERO e</u>

De todas as bases possíveis para função exponencial, há uma mais conveniente para os propósitos de cálculo diferencial e integral: **a base e**. Somente para essa base, a reta tangente em x = 0, tem inclinação (ou coeficiente angular) igual a 1.

Observando os gráficos de y = 2^x e de y = 3^x e as inclinações das tangentes em x = 0, podemos concluir que o valor de **e** está entre 2 e 3.

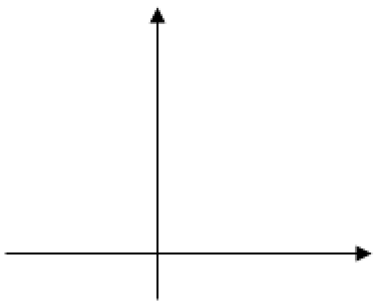


e = 2,71828182845904523536...

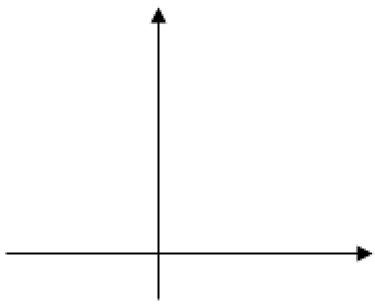
Foi o matemático suiço Leonhard Euler que escolheu usar a letra e para representar essa base, provavelmente por ser a primeira letra da palavra exponencial.
A função $f(x) = e^x$ é chamada de **função exponencial natural**.

Exemplo 4. Faça o esboço do gráfico das funções:

a) y = $(1/3)^x + 1$



b) y = e^{x+1}



LOGARITMOS

Definição: sendo N > 0, b > 0 e b ≠ 1, temos que

Observações:

(1º) Em ***$\log_b N = x$***, "b" é a ...., "N" é o .... e x é o ....

(2º) ***Logaritmos decimais***: são logaritmos de base 10.
Notação:

(3º) ***Logaritmos naturais:*** são logaritmos de base e.
Notação:

Exemplo 5. Calcule os logaritmos:

a) $\log_2 8$ b) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$ c) $\ln\sqrt{e}$

Propriedades operatórias:

(P1) $\log_b(x \cdot y) =$

(P2) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) =$

(P3) $\log_b(x^n) =$

Exemplo 6. Usando log 2 = a e log 3 = b, calcule em função de a e b:

a) log 54

b) log (9/2)

Exemplo 7. Resolva as seguintes equações:

a) log x = 1

b) ln (x + 1) = 5

c) $e^x = 4$, usando que ln 2 = 0,7

APLICAÇÕES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

O crescimento (ou decrescimento) exponencial é característico de certos fenômenos naturais. No entanto, de um modo geral não se apresenta na forma $\mathbf{b^x}$, mas sim modificado por constantes características do fenômeno, como em $\boldsymbol{f(x) = C \cdot e^{kx}}$.

Exemplo 8. Suponha que uma substância radioativa se desintegra de modo que a massa existente após t anos é dada, em gramas, por $Q(t) = 20e^{-0,05t}$. Nessas condições, responda:

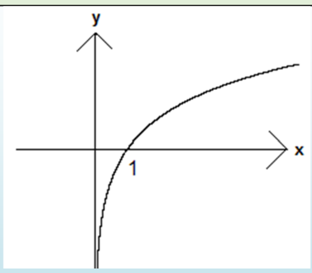
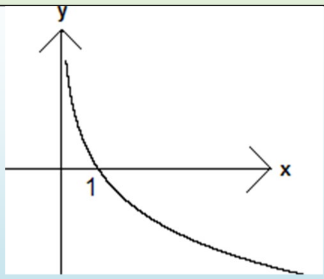
a) qual a quantidade inicial?

b) após quantos anos a massa da substancia será 5 g? (use: ln 0,25 = -1,38)

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

É a função f: (0;+ ∞) $\rightarrow$IR definida por f(x) = $\log_b x$, onde b$\in$IR, b > 0 e b ≠ 1.

(1) Sobre o crescimento ou decrescimento

Função Crescente ⇔	Função Decrescente ⇔ ....
	

(2) A função sempre intercepta o eixo ...., no ponto (.....,....), e não intercepta o eixo ....

(3) O domínio da função é .... e a imagem é ....

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios 0.4 (p.49): 9, 11, 13
Exercícios de compreensão 0.5 (p.61): 1, 3 e 4
Exercícios 0.5 (p.61): 5, 9, 17, 19, 21, 25, 27, 49, 59
Gabarito da questão 50: a) 12 b) ≅9,63 c) ≅12,6 h

ATIVIDADES DE AULA

1) Resolva as equações exponenciais

a) $2^x = 8$ b) $9^x = 27$ c) $5^x = \frac{1}{125}$

d) $10^x = 0{,}01$ e) $2^x = \sqrt{2}$

2) Calcule os logaritmos.

a) $\log_7 49$ b) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$ c) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

d) $\ln e^5$ e) $\log_3 \sqrt{3}$ f) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$

g) $\ln\left(\sqrt[3]{e}\right)$ h) $\ln e$

3) Resolva as equações:

a) $\log(x-1) = 2$ b) $\ln x = 0$ c) $e^x = 3$

4) O valor de uma obra de arte comprada por $R\$\ 1.000{,}00$, t anos após a compra é dado por $V(t) = 1000e^{0,2t}$. Nessas condições, responda:

a. Qual o valor da obra de arte 5 anos após a compra? (use e = 2,72)
b. Após quanto tempo o valor é o dobro do inicial? (use ln 2 = 0,7)

5) A função $S(t) = 500e^{0,04t}$ fornece o saldo de uma caderneta de poupança após t anos. Responda:

a. Qual o valor depositado inicialmente?
b. Após quantos anos o saldo na poupança será o triplo do inicial? (use ln 3 = 1,1)

6) Faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

a) $y = 10^x + 1$

b) $y = 3^{x-1}$

c) $y = -e^x$

d) y = log (x – 1)

e) y = ln (-x)