ESCOLA POLITÉCNICA
PUCRS

Cálculo I

Tópico 3 – Derivadas

2.1 DERIVADA: INTRODUÇÃO E DEFINIÇÃO

Vejamos algumas situações que estão diretamente ligadas com o conceito de derivada.

1ª situação. Seja $s(t)$ a posição de uma partícula no instante t.
A velocidade média dessa partícula no intervalo $[t_0\,, t_1]$ é dada por:

$$velocidade\ média = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

A velocidade instantânea dessa partícula em t_0 pode ser obtida através do limite:

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

$\underbrace{\Delta t \to 0}$

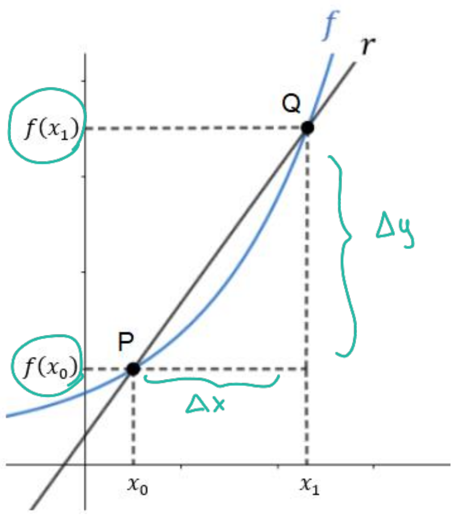
quando o espaço de tempo estiver indo p/ zero: vel. instantânea

Conforme veremos esse limite que fornece a velocidade no instante t_0 é ***a derivada*** da função posição em $t = t_0$.

2ª situação. Seja $y = f(x)$ uma função real, de variável real. Como determinar a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente ao gráfico de f em um ponto $P(x_0, f(x_0))$?

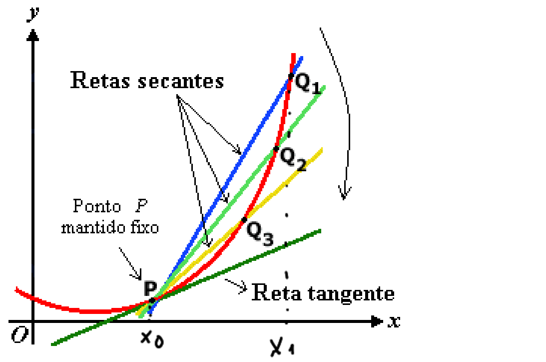
Inicialmente escolhemos um ponto $Q(x_1, f(x_1))$, com $x_1 \neq x_0$ e calculamos a inclinação (coeficiente angular) da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos P e Q:

$$a_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



Observe que se mantivermos x_0 fixo, e fizermos $x_1 \to x_0$, o ponto Q irá se aproximar cada vez mais do ponto P.
Dessa forma, a reta secante se aproxima cada vez mais da reta tangente (posição limite).
Assim, o coeficiente angular da reta tangente em $x = x_0$ pode ser obtido do seguinte limite:

$$a_{tg} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



quando x_1 se aproxima de x_0, Q se aproxima de P.

<u>A definição da derivada de uma função em x = x₀</u>:

Seja $y = f(x)$ uma função real, de variável real.
A taxa média de variação da função f no intervalo $[x_0\,, x_1]$ é dada por:

$$t.m.v. = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

A derivada de f em um ponto x_0, denotada por $f'(x_0)$, representa ***a taxa de variação instantânea*** de y em relação a x no ponto x_0, e é definida por:

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

derivada é a taxa de variação instantânea (que ocorre no momento)

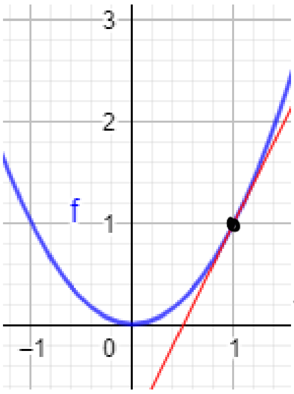
Sendo $x - x_0 = h$, podemos reescrever a definição de derivada da seguinte forma:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A derivada no ponto x_0 existe sempre que o limite acima existir.
Geometricamente, a taxa de variação instantânea em $x = x_0$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de f nesse ponto.
Observe que a ideia de taxa de variação está presente em inúmeras situações:

- se f é uma população, f' é a taxa de crescimento da população (ou taxa de natalidade)
- se f mede preços, f' é a taxa de variação dos preços no tempo (ou inflação).

Exemplo 1. Calcule a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$.



$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1}}{h}$ → fatorar p/ não ficar $\frac{0}{0}$ (já que $h \to 0$)

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}$

$f'(1) = \lim_{h \to 0} 2 + h$

$f'(1) = 2 + 0 = 2$

$\boxed{a_{tg} = 2}$

↳ no ponto $x = 1$!

$f(x) = x^2$

$f(1+h) = (1+h)^2$

$f(1) = 1^2 = 1$

<u>Observação importante</u>: podemos pensar na derivada como uma ***função***. Ela associa a cada entrada x, o número $f'(x)$ que representa a inclinação da reta tangente nesse ponto ou a taxa de variação instantânea nesse ponto.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemplo 2. Usando a definição, encontre a função derivada de:

a) $f(x) = x^2$ $\quad f(x+h) = (x+h)^2$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$

$\boxed{a_{tg} = 2x}$

b) $f(x) = 2x + 1$ $\quad f(x+h) = 2(x+h)+1$

↳ coeficiente angular

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

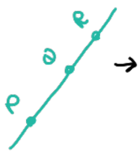
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)+1 - (2x+1)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x} + 2h + \cancel{1} - \cancel{2x} - \cancel{1}}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h}$

$f'(x) = 2$

$\boxed{a_{tg} = 2}$



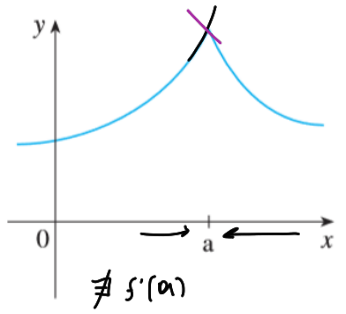
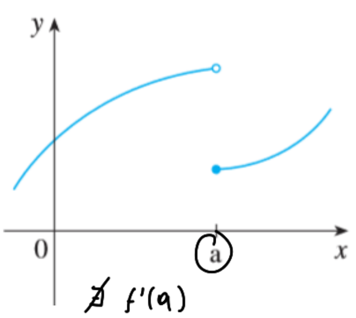
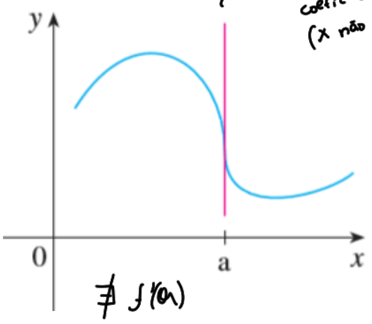
→ a reta é a mesma

derivada é um limite bilateral

<u>DIFERENCIABILIDADE</u>

Quando a derivada de uma função existe em x = a, dizemos que a função é ***diferenciável*** em x = a. Se a derivada existir em todos os pontos dizemos simplesmente que a função é diferenciável.

Vejamos três situações em que a derivada de f não existe em x = a:

(a) uma quina (ou bico)	(b) uma descontinuidade	(c) uma tangente vertical
		

reta vertical não tem coeficiente angular (x não varia)

ATIVIDADES DE AULA

1) Calcule a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$ no ponto x = 3.

2) Calcule a derivada de cada uma das funções **<u>por limites</u>**:

a) $f(x) = 5x + 1$

b) $f(x) = x^2 + 2$

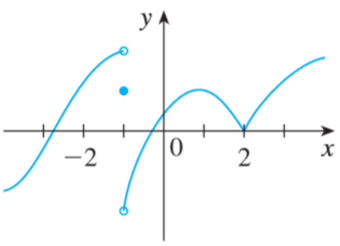
c) $f(x) = x^2 + 4x$

d) $f(x) = -3x + 1$

3) Observe o gráfico da f e determine:

a) em quais pontos do domínio f não é contínua?

b) em quais pontos do domínio f não é diferenciável?



ATIVIDADES DE AULA

1) $f'(3) = 6$

2) a) $f'(x) = 5$ b) $f'(x) = 2x$ c) $f'(x) = 2x + 4$ d) $f'(x) = -3$

3) a) x = -1 b) x = -1 e x = 2.

Observação importante: existem muitas notações diferentes para derivada. Sendo y = f(x), podemos representar sua derivada por:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{df}{dx}; \quad D_x(y); \quad D_x(f(x))$$

desvantagem: não mostra o x ao qual se relaciona

D1) Derivada da função constante

$$\boldsymbol{D_x(c) = 0}$$

Exemplo 1. Calcule a derivada das funções:

a) y = 3	b) f(x) = -2	c) y = 0
$y' = 0$	$f'(x) = 0$	$y' = 0$

D2) Derivada da função potência

$$\boldsymbol{D_x(x^p) = p \cdot x^{p-1}}$$

Exemplo 2. Determine a derivada das funções:

$a)\ y = x^6$	$b)\ y = x^2$	$c)\ f(x) = \frac{1}{x^3}$
$y' = 6 \cdot x^{6-1}$ $y' = 6x^5$	$y' = 2 \cdot x^{2-1}$ $y' = 2x$	$f'(x) = x^{-3}$ $f'(x) = -3 \cdot x^{-3-1}$ $f'(x) = -3x^{-4}$
$d)\ f(x) = \sqrt[3]{x^5}$	$e)\ y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$f)\ f(x) = \pi^4$
$\frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}$ $f'(x) = x^{\frac{5}{3}}$ $f'(x) = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}-1}$ $f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}$	foto	$f'(x) = 0$ ↳ função constante (não tem x!)

D3) Derivada de constante vezes uma função

$$D_x(c \cdot f(x)) = c \cdot f'(x)$$

Exemplo 3. Calcule:

a) $\frac{d}{dx}[4 \cdot x^5] =$ $4.(x^5)' = 4.5.x^4 = 20x^4$

b) $\frac{d}{dx}[\pi \cdot x^2] =$ $\pi.(x^2)' = \pi.2x$

c) $\frac{d}{dt}\left[\frac{t^3}{3}\right] =$ $\frac{1}{3} \cdot [t^3] = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 = t^2$

se livrar da divisão

d) $D_x\left[\frac{4}{x^2}\right] =$ $D_x[4 \cdot x^{-2}] = 4.(-2).x^{-3} = -8x^{-3}$

D4) Derivada de somas e diferenças de funções

$$D_x(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

Observações:

- A derivada da soma é a soma das derivadas.
- A derivada da diferença é a diferença das derivadas.
- Embora tenhamos enunciado a regra para duas funções, a mesma permanece válida para um número finito qualquer de funções.

Exemplo 4. Encontre $\frac{dy}{dx}$ em cada caso:

a) $y = x^4 + x^2$

$y' = (x^4)' + (x^2)'$

$y' = 4x^3 + 2x$

b) $y = 3x^2 - 11x - 5$

$y' = (3x^2)' - (11x)' - (5)'$

$y' = 3.2x - 11.1x^0 - 0$

$y' = 6x - 11 - 0$

$y' = 6x - 11$

Exemplo 5. Considere a função $f(x) = x^2 - 1$ e determine:

a) a inclinação do gráfico (ou coeficiente angular da reta tangente) em $x = 2$.

b) a equação da reta tangente ao gráfico dessa função em $x = 2$.

a)

$f'(x) = (x^2)' - (1)'$

$f'(x) = 2x - 0$

$f'(x) = 2x$

$f'(2) = 2.2 = 4$

atg = 4

b) $y = 4x + b$

$f(x) = (2)^2 - 1 = 3$ $\quad (f(x) = x^2 - 1)$

↓

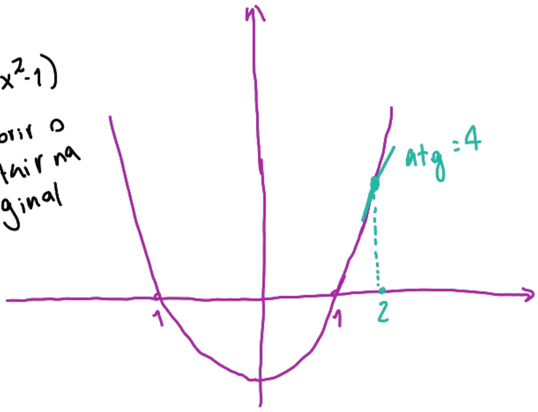
p/ descobrir o y: substituir na f(x) original

$(2,3)$

$3 = 4.2 + b$

$3 - 8 = b \quad b = -5$

$y = 4x - 5$



Derivadas Sucessivas

Seja $f'(x)$ a derivada de $f(x)$. Se calcularmos a função derivada de $f'(x)$, essa função será chamada de derivada segunda de $f(x)$ e será denotada por $f''(x)$. De modo análogo podemos definir a derivada terceira, quarta, etc.

A notação para as derivadas sucessivas é a seguinte:

- $f'(x)$ ou $\dfrac{dy}{dx}$ para a 1ª derivada de f em relação a x;
- $f''(x)$ ou $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ para a 2ª derivada de f em relação a x;
- $f'''(x)$ ou $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$ para a 3ª derivada de f em relação a x;

e assim por diante.

Exemplo 6. Obtenha as sucessivas derivadas da função $f(x) = 3x^4 - x^2$. $\quad f'(x) = (3x^4)' - (x^2)'$

$f'(x) = 3.4x^3 - 2x$

$f'(x) = 12x^3 - 2x^1$

$f''(x) = 36x^2 - 2$

$f'''(x) = 72x^1 - 0 = 72x$

$f^{(4)}(x) = 72.x^0 = 72$

$f^{(5)}(x) = 0$

$f^{(n)}(x) = 0$, para $n \geq 5$

Exercícios Anton H., Bivens I., Davis S. Cálculo. Volume 1 (10ª ed)
Exercícios 2.3 (P.161): 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 21, 29, 31, 37, 39, 41 e 45

ATIVIDADES DE AULA

1) Use as regras de derivação estudadas para encontrar a derivada das seguintes funções:

$a)\ f(x) = 2\pi$ $= 0$

$b)\ f(x) = x^7$ $= 7x^6$

$c)\ f(x) = -20x^3$ $= -20\,(x^3)' = -20 \cdot 3x^2 = -60x^2$

$d)\ y = \frac{1}{2}x^4$ $= \frac{1}{2} \cdot (x^4) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 = 2x^3$

$e)\ f(x) = x^3 + x$ $= 3x^2 + x^0 =$

$f)\ y = -10x^5 + 3x^2 + 7$

$g)\ f(t) = -3t^3 + 2t^2 - t + 8$

$h)\ y = \frac{2}{x^4} + \frac{5}{x^2}$

$i)\ f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$

$j)\ f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{3x}$

2) Considere a função $f(x) = 3x^2 - x^3$ e determine:

a) a inclinação da curva em x = 1.

b) a equação da reta tangente em x = 1.

3) Dada a função $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x$, pede-se a abscissa do(s) ponto(s) do gráfico de f em que a reta tangente é horizontal.

4) Determine a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ em a inclinação da curva é igual a -1/4.

5) Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por $f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$.

a) qual a taxa de expansão da epidemia após 4 dias?

b) qual a taxa de expansão da epidemia após 8 dias?

RESPOSTAS

1)

$a)\ f'(x) = 0$

$b)\ f'(x) = 7x^6$

$c)\ f'(x) = -60x^2$

$d)\ f'(x) = 2x^3$

$e)\ f'(x) = 3x^2 + 1$

$f)\ y' = -50x^4 + 6x$

$g)\ f'(t) = -9t^2 + 4t - 1$

$h)\ y' = -\frac{8}{x^5} - \frac{10}{x^3}$

$i)\ f'(x) = x^{-1/2} + x^{-2/3}$

$j)\ y' = -\,x^{-4/3} - \frac{2}{3}\,x^{-2}$

2)

a) $f'(1) = 3$

b) $y = 3x - 1$

3)

x = 2 e x = -1/2

4)

x = ± 2

5)

a) $f'(4) = 48$. Logo, no tempo t = 4, a moléstia está se alastrando à razão de 48 pessoas por dia.

b) $f'(8) = 0$. Logo, no tempo t = 8, a epidemia está totalmente controlada.

D5) Derivada da função exponencial natural e da função logaritmo natural

$$D_x(e^x) = e^x \qquad\qquad D_x(\ln x) = \frac{1}{x}$$

↳ derivada tem o mesmo valor da função (foto).

constante pode pular fora da derivada

Exemplo 7. Determine:

a) $D_x(2 \cdot e^x) = 2 \cdot (e^x)' = 2e^x$

derivada é igual a função

b) $D_x(2 + e^x) = (2)' + (e^x)' = 0 + e^x = e^x$

c) $\frac{d}{dx}(x^5 + 3\ln x) = (x^5)' + (3 \cdot \ln x)' = 5x^4 + 3(\ln x)' = 5x^4 + 3 \cdot \frac{1}{x} = 5x^4 + \frac{3}{x}$

Exemplo 8. A igualdade $(x^2 \cdot x^3)' = (x^2)' \cdot (x^3)'$ é verdadeira ou falsa? Justifique.

derivada da multiplicação não é a multiplicação das derivadas.

$(x^5)' \neq \underbrace{2x \cdot 3x^2}_{6x^3}$

$5x^4 \neq 6x^3$

D6) Regra do produto

copia a 1ª e deriva a 2ª + o contrário

$$D_x(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Exemplo 9. Calcule:

a) $D_x(x^5 \cdot e^x) = x^5 \cdot (e^x)' + (e^x) \cdot (x^5)'$

regra do produto

$x^5 \cdot e^x + e^x \cdot 5x^4$

b) $D_x(x^2 \cdot \ln x)$

$x^2 \cdot (\ln x)' + (\ln x) \cdot (x^2)'$

$\cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + \ln x \cdot 2x$

$x + 2x \cdot \ln(x)$

tá dentro do log! não multiplicar esse x.

D7) Regra do quociente

$$\boldsymbol{D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Exemplo 10. Calcule a derivada das funções:

$a)\ y=\dfrac{x^2-1}{x^4+1}$ $\qquad$ $b)\ y=\dfrac{1}{x^2-5x}$

D8) Derivada das funções trigonométricas

$\boldsymbol{D_x(sen\,x)=cos\,x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{D_x(cos\,x)=-sen\,x}$

$\boldsymbol{D_x(tg\,x)=sec^2x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{D_x(cotg\,x)=-cossec^2x}$

$\boldsymbol{D_x(sec\,x)=\sec x\cdot\ tgx}$ $\qquad$ $\boldsymbol{D_x(cossec\,x)=-cossec\,x\cdot\ cotgx}$

Exemplo 11. Determine a derivada de y = x^2.sen x + 3.cos x.

Exemplo 12. Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ sendo y = sec x.

ATIVIDADES DE AULA

1) Aplicando as regras de derivação estudadas, encontre a derivada de:

$a)\ y = x \cdot \ln x$ $b)\ y = 3x^2 \cdot e^x$ $c)\ y = \dfrac{2-3x}{1-x}$

$d)\ y = \dfrac{x^2+2}{1+2x}$ $e)\ y = e^x \cdot \ln x$ $f)\ y = \dfrac{e^x}{2x}$

2) Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ em cada um dos seguintes casos:

a) y = 2.cos x – 3.sen x b) y = $\dfrac{sen\ x}{x}$

c) y = x^3. sen x – 5.cos x d) y = sec x – $\sqrt{2}$. tg x

e) y = x^2 . tg x f) y = $\dfrac{sen\ x}{1+\cos x}$

RESPOSTAS

1) a) $y' = 1 + \ln x$ b) $y' = 3x^2e^x + 6xe^x$ ou $y' = 3xe^x(x+2)$ c) $y' = \dfrac{-1}{(1-x)^2}$

d) $y' = \dfrac{2x^2+2x-4}{(1+2x)^2}$ e) $y' = e^x \cdot \dfrac{1}{x} + e^x \cdot \ln x$ ou $y' = e^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

f) $y' = \dfrac{2xe^x - 2e^x}{(2x)^2}$ ou $y' = \dfrac{2e^x(x-1)}{4x^2}$

2) a) – 2.sen x – 3.cos x b) $\dfrac{x.\cos x - sen\ x}{x^2}$ c) x^3 cos x + ($3x^2$ + 5).sen x

d) sec x . tg x - $\sqrt{2}$ $\sec^2$ x e) x^2 $\sec^2$x + 2x.tg x f) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios 2.4 (P.168): 1, 3, 5, 11, 13, 27 e 31 **Exercícios 2.5 (P.172):** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 19, 21

3.3 A DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA (REGRA DA CADEIA)

Motivação: sendo $y = 2u$ e $u = 3x - 5$, determine y em função de x e calcule:

$y = 2u \quad y = 2.(3x-5) \quad y = 6x - 10$

a) $\frac{dy}{dx} = 6$ $\quad \to 6.x' - 10$

b) $\frac{dy}{du} = 2.1.u^0 = 2$ $\quad \to y = 2.u^1$

c) $\frac{du}{dx} = 3$ $\quad \to u = 3x - 5$

Regra da Cadeia: se $y = f(u)$ e u é uma função de x, então a derivada de y em relação a x é dada por:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad ou \qquad y' = f'(u) \cdot u'}$$

$6 = 2 \cdot 3$

Exemplo 1. Derive as seguintes funções compostas:

a) $y = sen\,(x^2 + 1)$

$y = sen(u)$ onde $u = x^2 + 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \cos u \,.\, 2x \to y' = \cos(x^2+1) \cdot 2x$

$y' = sen'(u) \cdot u'$ $\quad y' = \cos(x^2+1) \cdot 2x$

b) $y = sen\,(3x)$ $\quad u = 3x$, $u' = 3$

$y = sen(u)$

$y' = \cos(u) \cdot u'$

$y' = \cos(3x) \cdot 3$

$y' = 3\cos(3x)$

c) $y = \cos\,(e^x)$ $\quad u = e^x$, $u' = e^x$

começa derivando a de fora

$y = \cos(u)$

$y' = -sen(u) \cdot u'$

$y' = -sen(e^x) \cdot e^x$

d) $y = \ln\,(\overbrace{5x - 1}^{u})$ $\quad u = 5x - 1$, $u' = 5$

$y = \ln(u)$

$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$

$y' = \frac{1}{5x-1} \cdot 5$

$y' = \frac{5}{5x-1}$

e) $y = \ln(\overbrace{sen\,x}^{u})$ $\quad u = sen\,x$, $u' = \cos x$

$y = \ln(u)$

$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$

$y' = \frac{1}{sen\,x} \cdot \cos x$

$y' = \frac{\cos x}{sen\,x}$ ou cotangente

f) $y = e^{4x+7}$ $\quad u = 4x + 7$, $u' = 4$

$y = e^u$

$y' = e^u \cdot u'$

$y' = e^{4x+7} \cdot 4 = 4e^{4x+7}$

$\underbrace{\text{ }}_{}$ u é a função que está dentro.

$g)\ y = (\underbrace{3x+1}_{u})^{10}$ $\begin{cases} u = 3x+1 \\ u' = 3 \end{cases}$

$y = u^{10}$

$y' = 10u^9 \cdot u'$

$y' = 10(3x+1)^9 \cdot 3$

$y' = 30(3x+1)^9$

$h)\ y = \dfrac{4}{\sqrt{\underbrace{3x^2-1}_{u}}}$ $\begin{cases} u = 3x^2-1 \\ u' = 6x \end{cases}$

$y = \dfrac{4}{\sqrt{u}}$ $\quad y = \dfrac{4}{u^{1/2}} = 4 \cdot u^{-\frac{1}{2}}$

$y' = \left(4 \cdot -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot u'$

$y' = -2u^{-\frac{3}{2}} \cdot u'$

$y' = -2(3x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 6x$

$y' = -12x\,(3x^2-1)^{3/2}$

→ colocar na consulta da prova

Fórmulas generalizadas de derivação:

Sendo u = f(x), temos que:

① $[x^p]' = p \cdot x^{p-1}$ $[u^p]' = p \cdot u^{p-1} \cdot u'$	② $[ln\ x]' = \dfrac{1}{x}$ $[ln\ u]' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	③ $[e^x]' = e^x$ $[e^u]' = e^u \cdot u'$
④ $[sen\ x]' = \cos x$ $[sen\ u]' = \cos u \cdot u'$	⑤ $[cos\ x]' = -\operatorname{sen} x$ $[cos\ u]' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$	

Exemplo 2. Determine a derivada das seguintes funções:

$a)\ y = sen^4 x + sen\ x^4$

$y' = [(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{})^4]' + [\operatorname{sen}(\underbrace{x^4}_{})]'$

$u = \operatorname{sen} x$ $\quad u = x^4$

$u' = \cos x$ $\quad u' = 4x^3$

$y' = 4 \cdot (\operatorname{sen} x)^3 \cdot \cos x + \cos(x^4) \cdot 4x^3$

$b)\ y = \cos^3(2x)$

$y = [\underbrace{\cos(2x)}_{}]^3$

$u = \cos(2x)$

$u' = -\operatorname{sen}(2x) \cdot 2$

$f'(u) \cdot u'$

$y = u^3$

$y' = 3 \cdot u^2 \cdot u'$

$y' = 3[\cos(2x)]^2 \cdot -\operatorname{sen}(2x) \cdot 2$

$y' = -6[\cos(2x)]^2 \cdot \operatorname{sen}(2x)$

Exercícios Anton H., Bivens I., Davis S. Cálculo. Volume 1 (10ª ed)
Exercícios de compreensão 2.6: 3 e 4   **Exercícios 2.6:** 7, 9, 11, 15, 17, 23, 27, 29, 31, 33 e 49
Exercícios 3.2: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 19, 23
Exercícios de compreensão 3.3: 3a, 3c e 3d   **Exercícios 3.3:** 15, 17, 19, 21

ATIVIDADES DE AULA

1) Determine a derivada das funções abaixo:

a) $y = (x^2 – x + 1)^{23}$

b) $y = (x^5 – 3x)^4$

c) $y = (x^2 – 2)^{500}$

d) y = sen (2x)

e) $f(x) = 4.\cos(x^3)$

f) $y = tg(x^2 + 1)$

g) $y = sen^3 x$

h) $y = \cos(x^2 + 9)$

i) $y = \sqrt{x^2 + 5}$

j) $y = \dfrac{3}{2(x^2 - 4x)^2}$

k) $y = \dfrac{2}{3\sqrt{1 - x^2}}$

l) $y = sen^3(2x)$

m) y = ln (3x – 1)

n) $y = e^{5x + 1}$

2) Obtenha a derivada segunda das funções:

a) $f(x) = \ln(x^2 – 1)$

b) f(x) = cos (3x)

3) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função dada por

$y = \sqrt{x^2 - 3}$ no ponto x = 2.

RESPOSTAS

1)

a) $23.(x^2 – x + 1)^{22}.(2x – 1)$

b) $4.\ (x^5 – 3x)^3.(5x^4 – 3)$

c) $1000.x.(x^2 – 2)^{499}$

d) 2.cos (2x)

e) $-12x^2 sen(x^3)$

f) $2x.sec^2(x^2 + 1)$

g) $3.sen^2 x\ .\ \cos x$

h) $– 2x.sen(x^2 + 9).$

i) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$

j) $\dfrac{-6x + 12}{(x^2 - 4x)^3}$

k) $\dfrac{2x}{3\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

l) $6.sen^2(2x).\cos(2x)$

m) $\dfrac{3}{3x - 1}$

n) $5.e^{5x+1}$

2)

$$a)\ f''(x) = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$b)\ f''(x) = -9\cos(3x)$$

3) y = 2x – 3

3.4 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Sempre que temos uma função escrita na forma y = f(x), dizemos que y é uma função explícita de x, pois podemos isolar a variável dependente de um lado e a expressão da função do outro. Porém, nem sempre isso é possível ou conveniente e, caso isso ocorra, dizemos que y é uma função implícita de x.

Para obter a derivada implicitamente, iniciamos derivando a equação dada em relação a x (usando a regra da cadeia) e pensando em y como uma função de x, sempre que y aparecer.

Exemplo 1. Considere a equação $y^3 - 2x^2 = 3$ e determine $\frac{dy}{dx}$:

(a) sem usar derivação implícita;

(b) usando derivação implícita.

(c) comprove que os resultados dos itens (a) e (b) são iguais.

Exemplo 2. Pensando conscientemente em y como uma função de x, aplique a regra da cadeia para calcular:

(a) $D_x(y^4) =$

(b) $\frac{d}{dx}(\cos y) =$

(c) $\frac{d}{dx}(x^3 \cdot y^4) =$

Exemplo 3. Considere a curva de equação $x^3 + y^3 = 6xy$ e determine:

a) $\frac{dy}{dx}$ usando derivação implícita.

b) a equação da reta tangente a curva no ponto (3, 3).

ATIVIDADE DE AULA

1) Encontre $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita:

$a)\ x^3 + y^3 = 4xy$

$b)\ x^2 \cdot y + sen\ y = 2$

$c)\ y^2 = x \cdot \cos y$

2) Determine a equação da reta tangente à hipérbole de equação $2x^2 - 3y^2 - 12 = 0$ no ponto $(2\sqrt{3}, 2)$.

Respostas:

1)

a) $y' = \dfrac{3x^2 - 4y}{4x - 3y^2}$

b) $y' = \dfrac{-2xy}{x^2 + \cos y}$

c) $y' = \dfrac{\cos y}{2y + x \operatorname{sen} y}$

2)

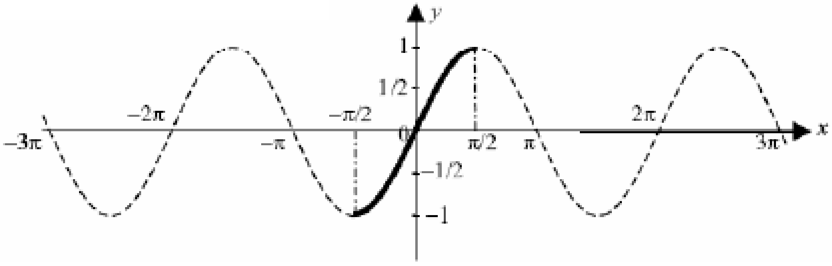
$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 2$$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios de compreensão 3.1: 1, 2 e 3
Exercícios 3.1: 1, 3, 5, 7, 9 e 25

3.5 AS DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

A FUNÇÃO ARCO SENO

Para definir a função inversa do seno, a função arco seno, restringimos a função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, obtendo assim uma função injetora.



A função arco seno fica assim definida:

$$f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f: x \to y = arc\ sen\ x$$

Observação: arc sen x significa "o arco cujo seno é x". Logo,

$$y = arc\ sen\ x \quad \leftrightarrow \quad sen\ y = x$$

A FUNÇÃO ARCO TANGENTE

A função arco tangente fica assim definida:

$$f: IR \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tal que } f: x \mapsto y = arc\ \tan x$$

Observação: arc tan x significa "o arco cuja tangente é x". Logo,

$$y = arc\ tan\ x \quad \leftrightarrow \quad tan\ y = x$$

Exemplo 1. Determine:

a) arc sen (-1)

b) arc sen (1/2)

c) arc tan (1)

DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Vejamos a derivada da função arco seno:

$$y = arc\ sen\ x \qquad \Leftrightarrow \qquad sen\ y = x$$

Derivando implicitamente em relação a x:

$$D_x(sen\ y) = D_x(x)$$

$$\cos\ y \cdot y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos\ y}$$

Como $sen\ y = x$, com $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, através da relação fundamental da trigonometria, $sen^2y + cos^2y = 1$, obtemos $\cos\ y = \sqrt{1 - x^2}$. Assim temos:

$$D_x(arc\ sen\ x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Aplicando a regra da cadeia, obtemos:

$$D_x(arc\ sen\ u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

De modo análogo ao que fizemos para função arco seno, podemos deduzir a fórmula da derivada da função y = arc tg x.

$$D_x(arc\ tg\ x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

De um modo mais geral, sendo u = f(x), temos que:

$$D_x(arc\ tg\ u) = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

Exemplo 2. Determine a derivada de:

a) f(x) = arc sen (x^3).

b) f(x) = arc tg (3x)

Observação importante: quatro outras funções trigonométricas inversas são abaixo definidas. Entretanto, as funções arco seno e arco tangente são suficientes para todos os nossos propósitos no cálculo de integrais.

Função arco cosseno	Derivada
$y = arc\ \sec x \Leftrightarrow \sec y = x$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \leq -1 \\ \frac{\pi}{2} < y \leq \pi \end{cases}$	$D_z(arc\ \sec u) = \frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}}$
$y = arc\ \cos x \Leftrightarrow \cos y = x$ $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \pi$	$D_z(arc\ \cos u) = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = arc\ \cot x \Leftrightarrow \cot y = x$ $-\infty < x < +\infty$ e $0 < y < \pi$	$D_z(arc\ \cot x) = -\frac{u'}{1 + u^2}$
$y = arc\ \csc x \Leftrightarrow \csc y = x$ $\begin{cases} x \leq -1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq y < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$D_z(arc\ \csc u) = -\frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}}$

ATIVIDADE DE AULA

Calcule a derivada das funções:

1) $y = arc\ \tan\ (x^2)$ 2) $y = (arc\ sen\ x)^3$ 3) $y = arc\ tg\ (\sqrt{x})$

Respostas:

1) $\frac{2x}{1 + x^4}$ 2) $\frac{3 \cdot (arc\ sen\ x)^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1 + x)}$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Seção 3.3   **Exercícios 3.3:** 43, 45, 47, 65