



ESCOLA
POLITÉCNICA

CÁLCULO I

Tópico 4 – Derivadas e aplicações

Notas de Aula

4.1 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Sempre que temos uma função escrita na forma $y = f(x)$, dizemos que y é uma função explícita de x , pois podemos isolar a variável dependente de um lado e a expressão da função do outro. Porém, nem sempre isso é possível ou conveniente e, caso isso ocorra, dizemos que y é uma função implícita de x .

Para obter a derivada implicitamente, iniciamos derivando a equação dada em relação a x (usando a regra da cadeia) e pensando em y como uma função de x , sempre que y aparecer.

Exemplo 1. Considere a equação $y^3 - 3x = 1$ e determine $\frac{dy}{dx}$:

(a) sem usar derivação implícita.

$$y = (3 + 2x^2)^{1/3}$$

$$y' = \frac{1}{3} (3 + 2x^2)^{-2/3} \cdot 4x$$

(b) usando derivação implícita. $(y^3 - 3x)' = (1)'$ → derivar ambos lados em rel. a x .

$$D_x(y^3) - D_x(3x) = D_x(1)$$

$$3y^2 \cdot y' - 4x = 0 \quad \text{isolar } y'$$

$$3y^2 \cdot y' = 4x \quad y' = \frac{4x}{3y^2}$$

resposta fica na forma implícita

(c) comprove que os resultados dos itens (a) e (b) são equivalentes.

$$y' = \frac{4x}{3y^2}$$

$$y' = \frac{4x}{3} \cdot y^{-2}$$

$$y' = \frac{4}{3} \cdot x \cdot [(3 + 2x^2)^{1/3}]^{-2}$$

$$y' = \frac{4}{3} \cdot x \cdot (3 + 2x^2)^{-2/3}$$

iguais

Exemplo 2. Usando derivação implícita determine $\frac{dy}{dx}$ para curva de equação

$$x y^3 + \sin y = x^2$$

Exemplo 3. Determine a equação da reta tangente a curva $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto (3, 3).

ATIVIDADE DE AULA

1) Encontre $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita:

a) $x^3 + y^3 = 4xy$

b) $x^2 \cdot y + \operatorname{sen} y = 2$

c) $y^2 = x \cdot \cos y$

d) $x^4 + 2y^3 = 4xy$

e) $x^2y^2 + 8x = y - 1$

2) Determine a equação da reta tangente à hipérbole de equação $2x^2 - 3y^2 - 12 = 0$ no ponto $(2\sqrt{3}, 2)$.

3) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $2x^3y - x^2 + 2xy - y^3 = -1$ no ponto $(1, 2)$.

Respostas:

1) a) $y' = \frac{3x^2 - 4y}{4x - 3y^2}$

b) $y' = \frac{-2xy}{x^2 + \cos y}$

c) $y' = \frac{\cos y}{2y + x \operatorname{sen} y}$

d) $y' = \frac{2y - 2x^3}{3y^2 - 2x}$

e) $y' = \frac{2xy + 8}{1 - 2x^2y}$

2) $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 2$

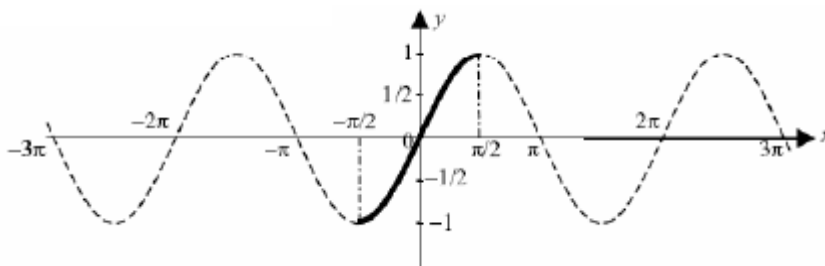
3) $7/4$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios de compreensão 3.1: 1, 2 e 3
Exercícios 3.1: 1, 3, 5, 7, 9 e 25

4.2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS E SUAS DERIVADAS

A FUNÇÃO ARCO SENO

Para definir a função inversa do seno, a função **arco seno**, restringimos a função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, obtendo assim uma função injetora.



A função arco seno fica assim definida:

$$f: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \text{arc sen}(x)$$

Observação: arc sen x significa “o arco cujo seno é x”. Logo,

$$y = \text{arc sen } x \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen } y = x$$

Exemplo 1. Complete:

a) $\text{sen}(\pi/2) = 1 \Leftrightarrow \text{arc sen}(\dots) = \dots$

b) $\text{sen}(-\pi/2) = -1 \Leftrightarrow \text{arc sen}(\dots) = \dots$

c) $\text{sen}(\pi/6) = 1/2 \Leftrightarrow \text{arc sen}(\dots) = \dots$

A FUNÇÃO ARCO TANGENTE

A função arco tangente fica assim definida:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tal que } f: x \mapsto y = \text{arc tan } x$$

Observação: arc tan x significa “o arco cuja tangente é x”. Logo,

$$y = \text{arc tan } x \quad \Leftrightarrow \quad \text{tan } y = x$$

Exemplo 2. Determine arc tan (1):

DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

① Usando derivação implícita, podemos mostrar que:

$$D_x(\text{arc sen } x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pela regra da cadeia, sendo $u = f(x)$, temos que:

$$D_x(\text{arc sen } u) =$$

② Usando derivação implícita, podemos mostrar que:

$$D_x(\text{arc tan } x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Pela regra da cadeia, sendo $u = f(x)$, temos que:

$$D_x(\text{arc tan } u) =$$

Exemplo 3. Determine a derivada de:

a) $f(x) = \text{arc sen } (x^3)$.

b) $f(x) = \text{arc tg } (3x)$

Observação importante: quatro outras funções trigonométricas inversas são abaixo definidas. Entretanto, as funções arco seno e arco tangente são suficientes para todos os nossos propósitos no cálculo de integrais.

Função arco cosseno	Derivada
$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \leq -1 \\ \frac{\pi}{2} < y \leq \pi \end{cases}$	$D_z(\arccos u) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$ $-1 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$	$D_z(\arcsin u) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x$ $-\infty < x < +\infty \text{ e } 0 < y < \pi$	$D_z(\operatorname{arccot} u) = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = \operatorname{arccsc} x \Leftrightarrow \csc y = x$ $\begin{cases} x \leq -1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq y < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$D_z(\operatorname{arccsc} u) = -\frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$

ATIVIDADE DE AULA

1) Calcule a derivada das funções:

a) $y = \arctan(x^2)$

b) $y = (\arcsin x)^3$

c) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$

Respostas:

a) $\frac{2x}{1+x^4}$

b) $\frac{3 \cdot (\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1+x)}$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)

Seção 3.3

Exercícios 3.3: 43, 45, 47, 65

4.3 TAXAS RELACIONADAS

Quando duas ou mais variáveis (todas sendo funções de t) são relacionadas por uma equação, a relação entre suas taxas de variação pode ser obtida diferenciando a equação em relação a t .

Para resolver problemas que envolvem taxas relacionadas sugerimos o seguinte procedimento:

1º passo: identifique as variáveis e informações dadas e pedidas;

2º passo: obtenha uma equação que relaciona as variáveis que dependem de t ;

3º passo: derive em relação a t ambos os membros dessa equação;

4º passo: substitua os valores de quantidades conhecidas e determine o que foi pedido.

Exemplo 1. O raio de um círculo cresce com uma velocidade de 0,01 cm/seg. Com que velocidade cresce a área da região limitada pelo círculo quando o raio tem 2 cm?

Exemplo 2. Uma escada com 5 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, a uma taxa de 1 m/s, com que taxa o topo da escada está escorregando para baixo quando a base da escada está a 3 m da parede?

ATIVIDADES

1) Pela ruptura de um tanque, uma mancha de óleo espalha-se em forma de um círculo cujo raio cresce a uma taxa constante de 2 m/min. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando o raio dele for 60 m?

2) Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, à razão de 0,6 m/s, com que velocidade o topo da escada percorre a parede, quando está a 4 m do solo?

3) Lembrando que o volume da esfera de raio r é dado por $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, resolva:

a) Um balão esférico é esvaziado de tal forma que o seu volume decresce a uma taxa de 3 dm³/min. Com que taxa o raio do balão estará variando quando medir 1 dm?

b) Uma bola de neve esférica é formada de tal maneira que seu volume aumenta à taxa de 8 dm³/min. Com que rapidez o raio da bola de neve estará crescendo quando o diâmetro for de 4 dm?

4) Um tanque cilindro com raio 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m³/min. Quão rápido estará aumentando a altura da água?

(Observação: o volume de um cilindro de raio r e altura h é dado por $V = \pi r^2 h$)

RESPOSTAS

1) 240π m²/min

2) -0,67 m/s

3) a) $-\frac{3}{4\pi}$ dm/min b) $\frac{1}{2\pi}$ dm/min

4) $\frac{3}{25\pi}$ m/min

4.4 APLICAÇÃO À FÍSICA: VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

VELOCIDADE MÉDIA X VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Sendo $s(t)$ a posição do móvel no instante t , a velocidade média no intervalo $[t, t + \Delta t]$ é dada por

$$V_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Entretanto, a velocidade média do móvel em cada instante desse intervalo não é necessariamente igual a velocidade média. Quando reduzimos o valor de Δt as variações de velocidade ficam cada vez menores. Então, desta maneira, se Δt aproxima-se de 0, a velocidade média tende a um valor que será definido como velocidade do móvel no instante t .

Logo a velocidade instantânea é

$$v(t) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \text{intervalo de tempo tende a zero}}} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

ACELERAÇÃO MÉDIA X ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA

obs: da mesma forma:
 $a(t) = v'(t) = (s')' = s''$
↳ aceleração instantânea

Sendo $v(t)$ a velocidade do móvel no instante t , temos que a aceleração média no intervalo $[t, t + \Delta t]$ é dada por

$$a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Quando Δt aproxima-se de 0, a aceleração média tende a um valor que será definido como aceleração do móvel no instante t .

Logo a aceleração instantânea é

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = s''(t).$$

Exemplo 1. A posição (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dada pela equação $s(t) = t^3 + 6t^2$, em que t é medido em segundos.

a) Qual a velocidade média no intervalo de $t = 1$ até $t = 3$?

$$s(3) = 3^3 + 6 \cdot 3^2 = 27 + 54 = 81$$

$$s(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 = 7$$

$$V_m = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{81 - 7}{2} = \frac{74}{2} = 37 \text{ m/s} //$$

b) Qual a função velocidade instantânea? E qual a velocidade em $t = 3$?

$$v = s'(t)$$

$$v(3) = 3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 = 63 \text{ m/s}$$

$$s(t) = t^3 + 6t^2$$

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 + 12t$$

\rightarrow função vel.

c) qual a função aceleração instantânea? E qual a aceleração em $t = 2$?

$$a(t) = v'(t) = 6t + 12$$

$$a(2) = 6 \cdot 2 + 12 = 24 \text{ m/s}^2$$

ATIVIDADE DE AULA

1) A posição (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s(t) = 4 + 6t + t^2$, em que t é medido em segundos. Responda:

a) qual a velocidade média entre $t = 3$ e $t = 8$?

b) qual a velocidade instantânea em $t = 5$?

2) A distância percorrida (em m) por um móvel em uma reta é dada, a cada instante, pela lei $s(t) = t^2 + 4t + 4$ onde t é o número de segundos percorridos.

Determine:

a) a velocidade instantânea do móvel.

b) a velocidade inicial.

c) a aceleração instantânea do móvel.

3) Um objeto move-se em linha reta de tal forma que, após t horas, ele está a $s(t) = 3t^2 + t$ quilômetros de sua posição inicial.

a) Ache a velocidade instantânea em $t = 1$.

b) Determine em que tempo o objeto estará se deslocando a uma taxa de 19 km/h .

c) a aceleração instantânea do objeto em função de t .

4) Uma partícula se move ao longo de um eixo de acordo com a equação do movimento $s(t) = 4t^3 - 2t^2 + t$ onde $t \geq 0$ é medido em segundos e s é a distância medida em metros. Determine a velocidade no instante em que a aceleração é 44 m/s^2 .

5) A equação de um movimento de uma partícula é $s = t^3 - 3t$, em que s está em metros e t em segundos. Encontre o que é pedido em cada caso.

a) A velocidade e a aceleração como funções de t .

b) A aceleração depois de 2 segundos.

c) A aceleração quando a velocidade for 0.

6) No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição (em metros) no instante t (em segundos) é dada por $s(t) = 16t - t^2$.

Determine:

a) a velocidade média desse corpo no intervalo de tempo $[2, 4]$.

b) a velocidade do corpo no instante $t = 2$.

c) a aceleração no instante $t = 4$.

RESPOSTAS

1) a) 28 m/s b) 16 m/s

2) a) $v(t) = 2t + 4$ b) $v(0) = 4\text{m/s}$ c) $a(t) = 2\text{ m/s}^2$

3) a) 7km/h b) 3 h c) $a(t) = 6\text{ km/h}^2$

4) $v(2) = 41\text{ m/s}$.

5) a) $v(t) = 3t^2 - 3$ e $a(t) = 6t$ b) 12 m/s^2 c) 6 m/s^2

6) a) 10 m/s b) 12 m/s c) -2 m/s^2

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Seção 4.6
Exercícios de compreensão 4.6: 1 e 2
Exercícios 4.6: 17 (a), (b) e (c)

4.5 A REGRA DE L'HÔPITAL

A regra de l'Hôpital permite calcular limites indeterminados da forma $\frac{0}{0}$

ou $\frac{\infty}{\infty}$, utilizando derivadas.

Teorema: (Regra de l'Hôpital) Se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ assume a forma

indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. O mesmo é

válido para se a é substituído por a^+ , a^- , $+\infty$ ou $-\infty$.

Outras indeterminações podem ser reduzidas (transformadas) às duas anteriores para então podermos aplicar a regra.

Exemplo 1. Calcule os seguintes limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)'}{(x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{1} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\infty}{\infty} \text{ de novo! } 2 \cdot 100 = \text{valor infinito} \\ e^x = \dots \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} \left(\frac{2}{\infty} \right) \rightarrow \text{tende a zero} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$\cos 0 = 1$
 $\frac{1 - \cos 0}{0^2} = \frac{0}{0}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$

se aproxima (tende a zero)
 $\infty \cdot \sin \left(\frac{1}{\infty} \right) \rightarrow 0^+ \cdot \sin 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ } *fazendo $\infty + \infty$*
farer mmc p/ se livrar disso

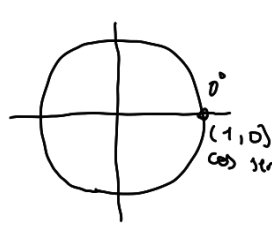
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x}$$

sewar regra de l'hospital
deriva a de cima e a de baixo

0/0 = faz L'H denovo!

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x \cdot \sin x + \cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + \cos x \cdot x}$$

0/0 = faz L'H denovo!

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + x \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot 1} = \frac{-\sin 0}{\cos 0 + 0 \cdot 1 + \cos 0} = \frac{-0}{2} = 0 //$$


ATIVIDADE DE AULA

Obtenha os seguintes limites:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 27}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\frac{\pi}{x} \right)$

8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

RESPOSTAS

- 1) 0 2) $+\infty$ 3) 2 4) $+\infty$
 5) 6 6) 0 7) π 8) 0

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)

Exercícios de compreensão 3.6: 1, 2 e 3

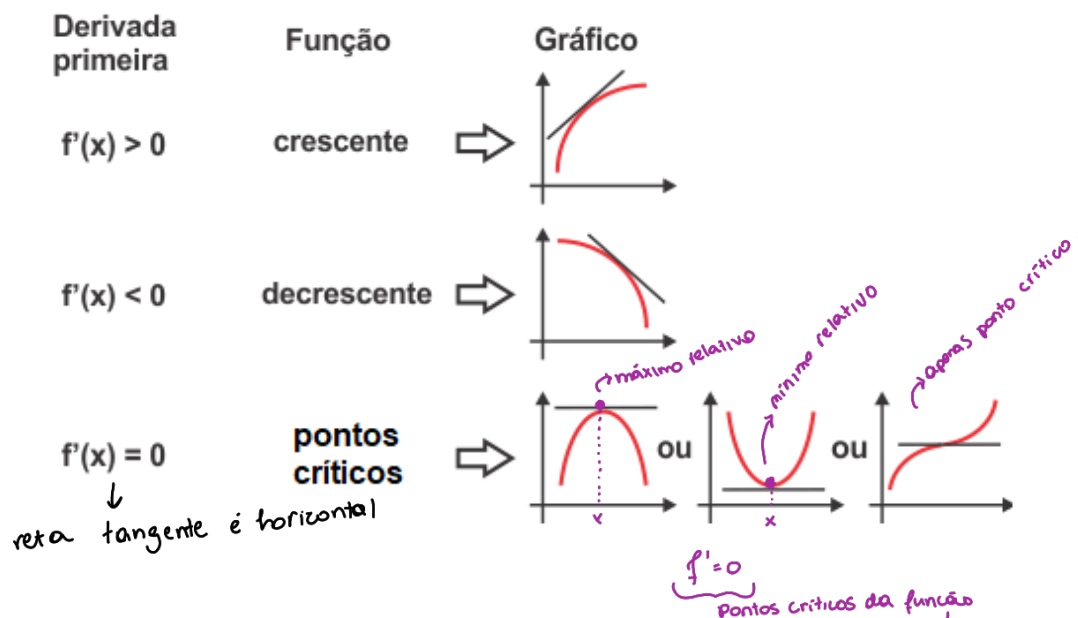
Exercícios 3.6: 1, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 23, 33 e 47

4.6 ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE UMA FUNÇÃO

Muitas aplicações do cálculo dependem da nossa habilidade para deduzir fatos sobre uma função f a partir de informações sobre suas derivadas. Nesta seção, vamos analisar de que maneira a primeira e a segunda derivada afetam o gráfico de uma função.

O que f' nos diz sobre f ?

Para ver como a derivada de uma função f pode nos dizer onde ela é crescente ou decrescente, observe a figura abaixo.

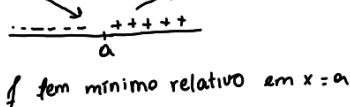


- Se $f'(x) > 0$ em um intervalo (a, b) , então $f(x)$ é crescente nesse intervalo.
- Se $f'(x) < 0$ em um intervalo (a, b) , então $f(x)$ é decrescente nesse intervalo.
- Os pontos do gráfico de f em que $f'(x) = 0$ são chamados de pontos críticos.

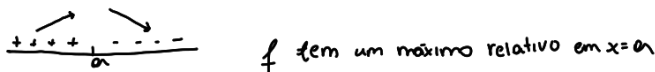
CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS CRÍTICOS – TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA

Suponha que f tenha um ponto crítico em $x = a$.

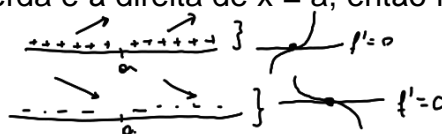
- ① Se $f'(x) < 0$ à esquerda de $x = a$ e $f'(x) > 0$ à direita de $x = a$, então f tem um mínimo relativo em $x = a$.



- ② Se $f'(x) > 0$ à esquerda de $x = a$ e $f'(x) < 0$ à direita de $x = a$, então f tem um máximo relativo em $x = a$.



- ③ Se $f'(x)$ tem o mesmo sinal à esquerda e à direita de $x = a$, então f não tem mínimo nem máximo relativo em $x = a$.



Exemplo 1. Determine em cada caso os pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento de f . Use o teste da derivada primeira (TDP) para classificar os pontos críticos.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

pontos críticos

$f'(x) = 0$

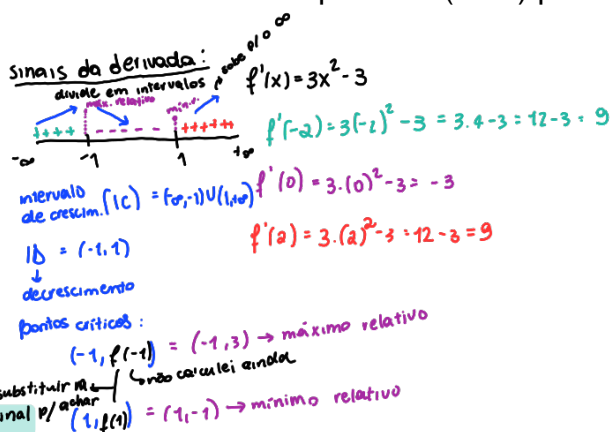
$3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm 1$



$f(x) = x^3 - 3x + 1$
 $f(-1) = 3$ $f(1) = -1$

b) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0$

$12x^3 + 12x^2 = 0$

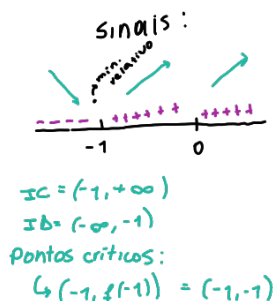
$12x^2(x+1) = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

ou

$x+1=0$

$x = -1$



$f(x) = 3x^4 + 4x^3$
 $f(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3$
 $f(-1) = 3 + (-4) = -1$

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$
 $f'(x) = 12(-1)^3 + 12(-1)^2$
 $f'(x) = 12(-1) + 12(1) = 0$

$f'(-1/2) = 12(-1/2)^3 + 12(-1/2)^2 = 12(-1/8) + 12(1/4) = -1.5 + 3 = 1.5$
 $f'(1) = 12(1)^3 + 12(1)^2 = 12 + 12 = 24$

EXTREMOS RELATIVOS X EXTREMOS ABSOLUTOS

Os máximos e os mínimos relativos são os pontos mais altos e mais baixos em sua **vizinhança próxima**. Observe que nem o máximo relativo é necessariamente o ponto mais alto da função, nem o mínimo relativo é o ponto mais baixo da função.

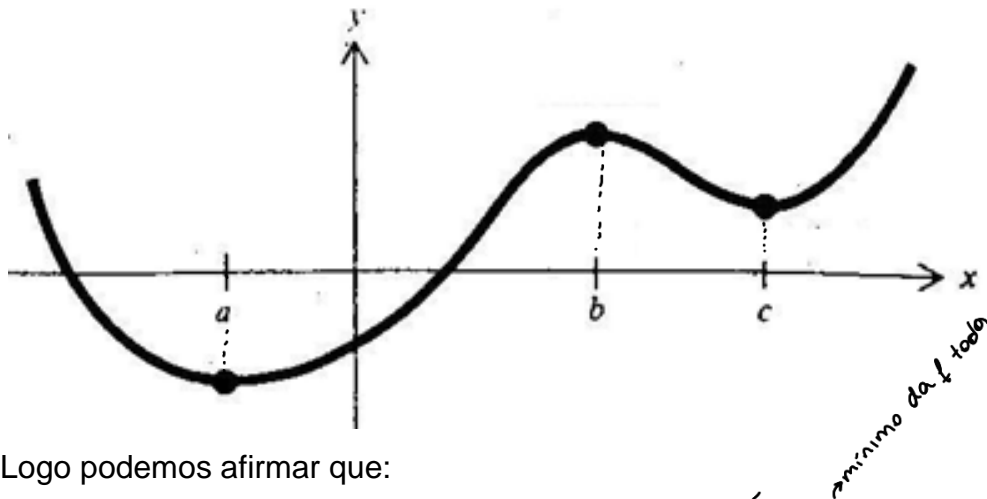
O **valor máximo** (ou **máximo absoluto**) de uma função, caso exista, é o maior valor que a função assume em seu domínio.

O **valor mínimo** (ou **mínimo absoluto**) de uma função, caso exista, é o menor valor que a função assume em seu domínio.

Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então ela possui um máximo absoluto e um mínimo absoluto em $[a, b]$. Esses extremos ocorrerão nos pontos críticos ou nos extremos do intervalo.

Note que todo extremo absoluto é relativo, mas nem todo extremo relativo é absoluto.

Exemplo 2. No gráfico abaixo, de uma função $y = f(x)$, todos os extremos estão representados.

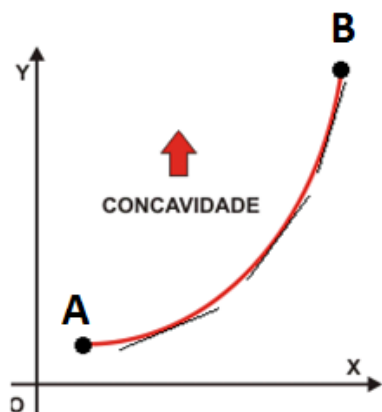


Logo podemos afirmar que:

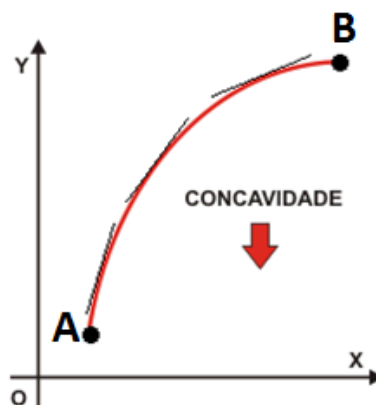
- a) em $x = a$, f possui um mínimo relativo que é absoluto.
- b) em $x = b$, f possui um máximo relativo que não é absoluto.
- c) em $x = c$, f possui um mínimo relativo que não é absoluto.

O que f'' nos diz sobre f ?

A figura abaixo mostra o gráfico de duas funções crescentes do ponto A até o ponto B. Entretanto, os gráficos são bem diferentes. Na figura (a), a curva fica acima das retas tangentes, logo a concavidade é voltada para cima. Na figura (b), a curva fica abaixo das retas tangentes, logo a concavidade é voltada para baixo.



Fig(a) - Curva côncava para cima



Fig(b) - Curva côncava para baixo

Vamos observar como a derivada segunda nos ajuda a determinar as concavidades de uma. Olhando para figura (a), você pode ver que, indo da esquerda para direita, as inclinações das retas tangentes crescem. Isso significa que a derivada f' é uma função crescente e consequentemente sua derivada f'' é positiva. Da mesma forma, olhando para figura (b), você pode ver que, indo da esquerda para direita, a inclinação das tangentes decresce. Isso significa dizer que a derivada f' é uma função decrescente e consequentemente sua derivada f'' é negativa.

TESTE DA CONCAVIDADE

Seja $f(x)$ uma função duas vezes diferenciável no intervalo (a, b) .

- a) f é côncava para baixo em (a, b) se $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$.
- b) f é côncava para cima em (a, b) se $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$.

PONTOS DE INFLEXÃO

Os pontos do gráfico de $y = f(x)$ onde a curva troca de concavidade são chamados de pontos de inflexão.

Exemplo 3. Estude a concavidade de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Exemplo 4. Faça o estudo completo da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

ATIVIDADES

1) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 2x$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

d) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

2) Encontre os pontos de máximo e de mínimo relativos de f , caso existam, quando:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

b) $f(x) = 2x^2 - x^4$

3) Determine em cada caso os intervalos nos quais f é côncava para cima (CPC) e os intervalos nos quais f é côncava para baixo (CPB). Determine também os pontos de inflexão (caso existam).

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = (x + 2)^3$

4) Esboce as seguintes curvas, indicando todos os pontos extremos relativos e pontos de inflexão:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$

5) Seja f uma função definida por $f(x) = 3x^4 - 4x^3$. Determine:

a) os intervalos de crescimento e decrescimento de f ;

b) os pontos de máximo e os pontos de mínimo relativos caso existam;

c) os intervalos em que f é côncava para cima e os intervalos em que f é côncava para baixo; e os pontos de inflexão caso existam;

d) um esboço do gráfico de f , mostrando os extremos relativos e os pontos de inflexão.

RESPOSTAS

1) a) C: $(1, +\infty)$ e D: $(-\infty, 1)$

b) C: $(3, +\infty)$ e D: $(-\infty, 3)$

c) C: $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ e D: $(0, 1)$

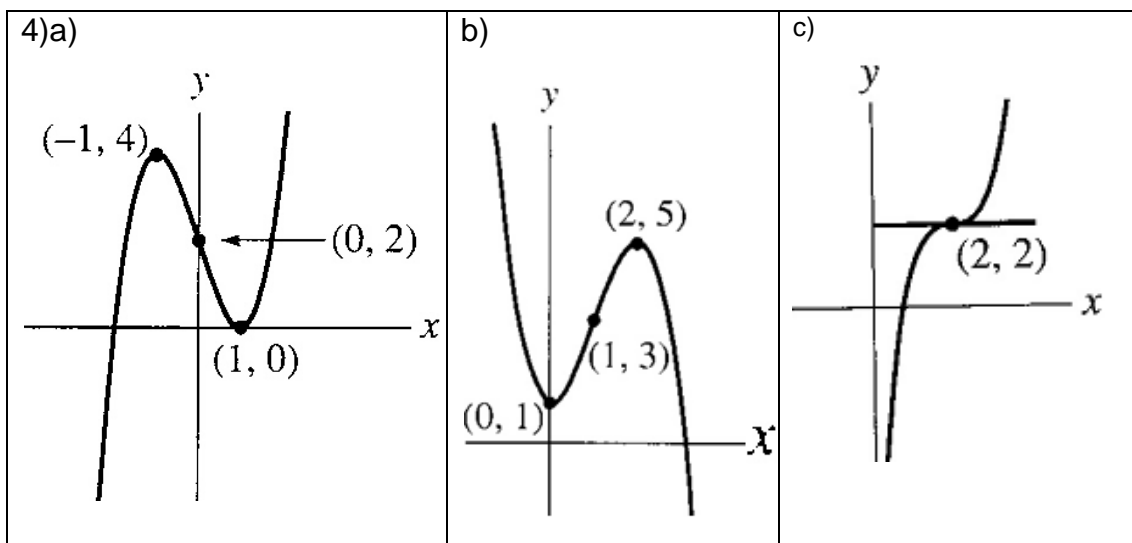
d) C: $[-1, +\infty)$ e D: $(-\infty, -1]$

2) a) Ponto de mínimo relativo: $(1, 0)$. Ponto de máximo relativo: $(1/3, 4/27)$.

b) Ponto de mínimo relativo $(0, 0)$. Pontos de máximos relativos: $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.

3) a) CPC: $(-\infty, +\infty)$, f não possui pontos de inflexão.

b) CPC: $(-2, +\infty)$ e CPB: $(-\infty, -2)$. Ponto de inflexão $(2, 0)$.



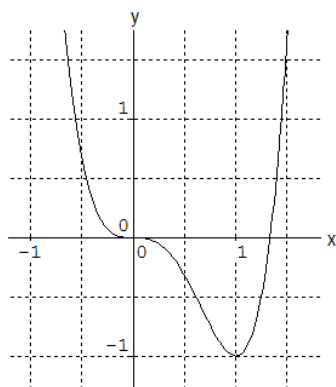
5) a) C: $(1, +\infty)$ e D: $(-\infty, 1)$

b) Mínimo relativo (que é absoluto) no ponto $(1, -17)$.

A função não possui máximo relativo.

c) CPC: $(-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$ e CPB: $(0, 2/3)$. Pontos de inflexão $(0, 0)$ e $(2/3, -16/27)$.

d)



4.7 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Os métodos estudados na secção anterior para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas situações do dia a dia. Vamos agora resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos. Esses problemas são chamados de *problemas de otimização*.

Para resolver esses problemas devemos:

- 1º) *determinar a lei da função f a ser maximizada ou minimizada;*
- 2º) *determinar o domínio contextual da função;*
- 3º) *calcular os pontos críticos;*
- 4º) *usar o TDP para determinar os extremos;*
- 5º) *responder o que foi pedido.*

Exemplo 1. Uma área retangular com 288 m^2 deverá ser cercada. Em dois lados paralelos será usada uma cerca que custa \$1,00 o metro e, nos lados restantes, uma cerca que custa \$2,00 o metro. Encontre as dimensões do retângulo com o menor custo.

ATIVIDADES

1) Um terreno retangular deve ser cercado de duas formas. Dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa R\$ 3,00 o metro, enquanto que os dois lados restantes recebem uma cerca padrão de R\$ 2,00 o metro. Quais são as dimensões do terreno de maior área que pode ser cercado com R\$ 6000,00?

2) O Departamento de Estradas e Rodagens planeja construir uma área de piquenique para os motoristas ao longo de uma grande auto-estrada. Ela deve ser retangular, com uma área de 5000 metros quadrados, e deverá ser cercada nos três lados não-adjacentes à estrada. Qual é a menor quantidade de cerca que será necessária para completar o trabalho?

3) Deve-se construir uma caixa de base retangular, com uma folha de cartolina de 16 cm de largura e 30 cm de comprimento, retirando-se um quadrado da cada canto da cartolina e dobrando-se perpendicularmente os lados resultantes. Determine o tamanho do lado do quadrado que permite construir uma caixa de volume máximo.

4) Um recipiente cilíndrico, aberto em cima, deve ter capacidade de $375\pi \text{ cm}^3$. O custo do material usado para a base do recipiente é de 15 centavos o cm^2 e o custo do material usado para lateral é de 5 centavos por cm^2 . Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizem o custo do material.

5) Uma loja vende diariamente 40 unidades de um produto a R\$ 50,00 cada uma. Quando esse produto entra em promoção, observa-se que para cada R\$ 1,00 de desconto no preço do produto, as vendas aumentam 10 unidades.

a) Expresse o faturamento da loja em função do desconto de “x” reais.


b) Quantos reais de desconto a loja deve oferecer no preço de cada unidade desse produto afim de obter o faturamento máximo?

6) As bordas de cima e de baixo de um pôster têm 6 cm, e as bordas laterais medem 4 cm. Se a área do material impresso sobre o pôster estiver fixa em 384 cm², encontre as dimensões do pôster com a menor área.

RESPOSTAS

- 1) 500 m e 750 m
- 2) 200 m
- 3) 10/3 cm
- 4) r = 5 cm e h = 15 cm
- 5) a) $R = (50 - x)(40 + 10x)$ b) 23 reais
- 6) 24 cm e 36 cm

2



minimizar a quantidade de cerca $\rightarrow Q = x + 2y$

$x \cdot y = 384$
 $y = \frac{384}{x}$

$Q = x + 2 \cdot \frac{384}{x} \quad Q = x + \frac{768}{x}, \quad x > 0$

$Q' = 1 - \frac{768}{x^2}$ $Q' = 1 - \frac{768}{x^2}$

quando a derivada é zero: máximos e mínimos de Q.

$Q' = 0$
 $1 - \frac{768}{x^2} = 0 \quad 1 = \frac{768}{x^2} \quad x^2 = 768 \quad x = \pm \sqrt{768} \quad x = \pm 27.71$

valor mínimo de x.

0 27.71

$Q'(1) = 1 - \frac{768}{1} = -767$

$Q'(27.71) = 1 - \frac{768}{768} = 0$

$y = \frac{384}{x}$
 $y = 13.86$
 $Q = x + 2y$
 $Q = 200 \text{ m}$