Lógica para Computação

Aula 11 - Lógica Proposicional[1]

Sílvia M.W. Moraes

Escola Politécnica - PUCRS

Sinopse

- Nesta aula, continuamos a estudar **a Lógica Proposicional.** Introduziremos, nesta aula, **dedução natural.**
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari e do Huth & Ryan.

Sumário

Lógica Proposicional - Relembrando ...

- Sintaxe
  - Formalização: variáveis e conectivos
  - Fórmulas bem formadas
  - FNC e FND
- Semântica
  - Propriedades Semãnticas: tautologias, contigências, contradições, equivalência, fórmulas satisfatíveis e insatísfativeis
  - Métodos: Tabela-Verdade e Árvores Semânticas
  - Tablôs Semânticos

Lógica Proposicional - Relembrando ...

Argumento lógico Relação entre um conjunto de proposições (premissas) e uma proposição (conclusão).

A1	A2
p: Todo gato é mamífero.	s: Todo gato é mamífero.
q: Miau é um gato.	t: Lulu é um mamífero.
r :Miau é um mamífero.	u : Lulu é um gato.
$p \wedge q \rightarrow r$	$s \wedge t \rightarrow u$

- Semelhança dos argumentos: a forma (daí o nome Lógica Formal).

Lógica Proposicional - Relembrando ...

- **Argumento lógico válido:** Um argumento é válido se em qualquer circunstância que suas premissas são verdadeiras, sua conclusão também é verdadeira.

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \models \psi$$

  - Apenas o argumento **A1** é válido: $p, q \models r$.

Lógica Proposicional - Cálculo da Dedução Natural

- Quando afirmamos a validade de um argumento examinando os possíveis modelos das premissas e conclusões, estabelecemos uma nova relação:
    - $\phi_1, \phi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ (Consequência) cuja definição é de natureza semântica
- enquanto que o sequente:
    - $\phi_1, \phi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ (Sequente) é uma relação verificada através de um cálculo, ou seja, sintaticamente:

Lógica Proposicional - Cálculo da Dedução Natural

- Para provar os sequentes é necessário algo que nos permita raciocinar sobre proposições, tal como
  - **Cálculo de Dedução Natural** .
    - Uma coleção de regras de prova;
    - Essas regras nos permitem inferir fórmulas a partir de outras fórmulas.
    - Aplicando uma série dessas regras, podemos inferir uma conclusão ψ a partir das premissas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \varphi_n$

Lógica Proposicional - Cálculo da Dedução Natural

- Claramente, as regras não podem permitir que se infira coisas erradas, por exemplo

$$p, q \vdash p, \neg q$$

- Além disso, o cálculo deve ser capaz de provar tudo que pode ser provado.
- Estas são propriedades importantes de um cálculo e as estudaremos mais adiante.

Lógica Proposicional - Regras da Dedução Natural

- Nessa e nas próximas aulas estudaremos, uma a uma, as regras do cálculo de dedução natural;
- Uma regra é formada por premissas que aparecem sobre uma linha vertical e uma conclusão abaixo dela;
- O nome da regra aparece á direita da linha;
- Para cada conectivo da lógica proposicional, veremos pelo menos 2 regras, uma de introdução do conectivo, e outra de eliminação.

Lógica Proposicional - Introdução da Conjunção

- Introdução da conjunção ($\wedge i$): Permite a conclusão de uma conjunção se cada um dos conjuntos já foi concluído.

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge \mathrm{i})$$

Lógica Proposicional - Eliminação da Conjunção

- Eliminação da conjunção ($\wedge e_1$ e $\wedge e_2$): permitem a conclusão de um dos conjuntos, se a conjunção já foi concluída.

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge\mathrm{e}_1) \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge\mathrm{e}_2)$$

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 1:
  - Dado o argumento lógico: $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$, onde $p \wedge q$ e r são as premissas $q \wedge r$ é a conclusão.
  - Queremos provar que o seu sequente é válido, usando a dedução natural.
  - Para isso, teremos que a partir de
    - $p \wedge q$
    - r
  - Chegar em
    - $q \wedge r$

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 1 - Prove que o sequente de $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ é válido, usando dedução natural:

1.	$p \wedge q$	premissa
2.	r	premissa
3.	q	$\wedge e_1$ 1
4.	$q \wedge r$	$\wedge i$ 3,2

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 2 - Prove que o sequente de $p \wedge q, r, (s \wedge t) \vdash q \wedge s$ é válido, usando dedução natural:

1.	$p \wedge q$	premissa
2.	r	premissa
3.	$s \wedge t$	premissa
4.	q	$\wedge e_1$ 1
5.	s	$\wedge e_2 3$
6.	$q \wedge s$	$\wedge i$ 4,5

Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade I:** Prove que os sequentes dos argumentos abaixo são válidos usando dedução natural:
  1. $((p \wedge q) \wedge r), (t \wedge v) \vdash (v \wedge (p \wedge q))$
  2. $(p \wedge q), (r \wedge (s \wedge t)) \vdash (q \wedge r)$

Lógica Proposicional - Eliminação da Dupla Negação

- Eliminação da dupla negação ($\neg\neg e$): A dupla negação não muda o valor verdade, mas pode ser eliminada de qualquer fórmula já concluída

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\quad(\neg\neg e)$$

Lógica Proposicional - Eliminação da Implicação

- Eliminação da implicação ($\rightarrow e$): *Modus Ponens* - De um condicional e seu antecedente pode-se concluir o conseqüente também.

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}\ (\rightarrow \mathrm{e})$$

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 3 - Prove que o sequente de $(p \wedge \neg\neg q), (q \wedge p) \rightarrow (s \wedge t) \vdash (s \wedge t)$ é válido usando dedução natural:

1.	$(p \wedge \neg\neg q)$	premissa
2.	$(q \wedge p) \rightarrow (s \wedge t)$	premissa
3.	$\neg\neg q$	$\wedge e_2$ 1
4.	q	$\neg\neg e$ 3
5.	p	$\wedge e_1$ 1
6.	$q \wedge p$	$\wedge i$ 4,5
7.	$(s \wedge t)$	$\rightarrow e$ 2,6

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 4 - Prove que o sequente $(p \rightarrow (q \rightarrow r)), q, p \vdash r$ é válido usando dedução natural:

1.	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	premissa
2.	q	premissa
3.	p	premissa
4.	$(q \rightarrow r)$	$\rightarrow e$ 1,3
5.	r	$\rightarrow e$ 4,2

Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade II:** Prove que os sequentes dos argumentos abaixo são válidos usando dedução natural.

  1. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r), \neg\neg p \vdash r$
  2. $r, p \rightarrow (r \rightarrow q), p \vdash (q \wedge r)$
  3. $\neg\neg(p \rightarrow (q \rightarrow (r \wedge s))), q, p \vdash s$
  4. $p \rightarrow r, \neg\neg p, q, q \rightarrow (s \wedge t) \vdash r \wedge t$

Leitura

- Souza,J. N. Lógica para Computação. Capítulo 6.