Lógica para Computação

Aula 16 - Lógica de Predicados[1]

Sílvia M.W. Moraes

Escola Politécnica - PUCRS

[1] Este material não pode ser reproduzido ou utilizado de forma parcial sem a permissão dos autores.

Sinopse

- Nesta aula, introduzimos **a Lógica de Predicados.**
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari e do Huth & Ryan.

Sumário

Limites da Lógica Proposicional

- Considere a sentença "**Todos os amigos de Pedro são amigos de João.**"
- Nenhuma regra da lógica proposicional baseada unicamente nessa sentença nos permite concluir:
  - **"Carlos é amigo de João"** – dado que Carlos é amigo de Pedro.
- Já no caso da sentença: **"Ana é amiga de João, mas não de Pedro"** , o mesmo acontece, pois não conseguimos concluir também que "**Existe alguém que é amigo de João mas não é amigo de Pedro.**"

Lógica de Predicados

- **Lógica de Predicados** ou **Lógica de Primeira Ordem**
  - É uma lógica bem mais expressiva.
  - É uma extensão da lógica proposicional.
  - Para utilizá-la, precisamos entender **predicados** e **quantificadores**.

Predicados

- Considere as afirmações:
  - "O computador x está funcionando bem."
  - "x é amigo de y".
  - "x é mais alto que y e mais baixo que z".
  - "x é maior do que 3."
- Em todas essas afirmações, percebemos a presença de **variáveis**.
  - Na afirmação "o computador x está funcionando bem", o sujeito é "o computador x", e "está funcionando bem" é o predicado.

Predicados

- Na lógica de predicados, usamos símbolos predicativos como **P, Q, R, ... para representar predicados.**
- Então, por exemplo, podemos usar :
  - **P(x)** para denotar a afirmação "x está funcionando bem" e
  - **Q(x,y)** para denotar "x é maior do que y"
    - Nesse exemplo, considerando que x e y são números naturais, sabemos que Q(5,1) é verdadeiro e Q(2,4) é falso
- Predicados expressam propriedades, características, ...

Predicados

- Quando atribuímos valores específicos às variáveis, o predicado tem um valor verdade, exatamente como uma proposição em lógica proposicional.
- Então pode-se dizer que **P(x) é o valor da "função proposicional" P para x.**
- O **número de argumentos** que um símbolo proposicional recebe é chamado sua **aridade**.
    - No caso da fórmula $R(t_1, t_2, ..., t_n)$, dizemos que R tem aridade **n**.
        - $P(x)$ tem aridade 1
        - $Q(x, y)$ tem aridade 2

Quantificadores

- Um **quantificador** é outra maneira importante de criar uma proposição (afirmação) a partir de um predicado
- É usado para expressar a extensão da verdade de um predicado em relação a uma coleção de elementos
- A maneira típica de expressar isso em Português é com palavras como **todos, alguns, muitos, nenhum, poucos, cada, há, existe(m).**
- Focaremos em dois tipos: **quantificação universal e existencial**

Quantificação

- Em lógica, o conjunto de todas as coisas nas quais estamos interessados é chamado de universo de discurso (ou domínio do discurso ou só domínio) .
- Frequentemente (em matemática, etc.) precisamos expressar que um predicado é verdadeiro
  - **para todos os valores daquele domínio – isso é quantificação universal;** ou
  - **para alguns valores – isso é quantificação existencial**
- Para determinar o valor verdade de um predicado quantificado, precisamos saber a que domínio ele se refere; o significado de uma quantificação muda quando mudamos o domínio!

Quantificação Universal

- A **quantificação universal** de $P(x)$ é a afirmação: "**P(x) para todos os valores de x no domínio**."
- O quantificador universal e denotado por $\forall$
- Então a quantificação universal de $P(x)$ é $\forall x.P(x)$
  - Lemos essa fórmula como "para todo x, p de x"

Quantificação Universal

- Também podemos expressar quantificação universal com "todo x", "para cada valor de x", "dado qualquer x", "para x arbitrário"
- Exemplo. Seja $P(x)$ a afirmação "$x+1$ é maior do que x".
  - O domínio são todos os números reais.
  - Qual o valor verdade de $\forall x.P(x)$?
- Para domínio finitos,
  - $\forall x.P(x)$ é equivalente a $P(t_1) \wedge P(t_2) \wedge P(t_3) \wedge \ldots \wedge P(t_n)$

Quantificação Existencial

- A **quantificação existencial** de P(x) é a afirmação: **"Existe ao menos um elemento x do domínio tal que P(x)**."
- O quantificador existencial é denotado por $\exists$
- Então a quantificação existencial de $P(x)$ é $\exists x.P(x)$
  - Lemos essa fórmula como "existe x tal que p de x" (ou "existe pelo menos um x ...", ou "para algum (valor de) x, P(x)")

Quantificação Existencial

- Exemplo. Seja P(x) a afirmação "x é maior do que 3".
  - O domínio são todos os números reais.
  - Qual o valor verdade de $\exists x.P(x)$?
- Para domínios finitos,
  - $\exists x.P(x)$ é equivalente a $P(t_1) \vee P(t_2) \vee P(t_3) \vee \ldots \vee P(t_n)$

Quantificadores

- **Resumo:**

Fórmula	V?	F?
$\forall x.P(x)$	P(x) é verdadeiro para todo x.	Existe um x* para o qual P(x) é falso.
$\exists x.P(x)$	Existe pelo menos um x para o qual P(x) é verdadeiro.	P(x) é falso para todo x.

- Existe uma hipótese implícita de que todos os universos de discurso são conjuntos não vazios!
- * (esse valor de x é chamado um contra-exemplo)

Outros Quantificadores

- Os quantificadores universal e existencial são os mais importantes, mas as vezes facilita se usarmos existência única
- É denotada por $\exists_1$ ou $\exists!$
  - A fórmula $\exists_1 . P(x)$ diz "Existe um único x tal que P(x) é verdade."; também pode ser lida como "existe exatamente um" ou "existe um e somente um"

Lógica de Predicados: Definições e Sintaxe

- O alfabeto da Lógica de Predicados é um conjunto formado pelos seguintes caracteres:

a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z
A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T
$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, (,), ., !$
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Lógica de Predicados: Definições e Sintaxe

- **Definição de linguagem geral do cálculo de predicados:**
  - A linguagem geral do cálculo de predicados de primeira ordem consiste em:
    1. um conjunto enumerável de constantes individuais - tem a função de designar indivíduos específicos. Ex: a, b, c, ..,t, a_1, b_1, ..., t_1, a_2 , ..., b_{11}, ..., q_{22}, ... (uma mesma constante, em uma fórmula, não pode representar dois indivíduos diferentes).
    2. para cada número natural $n \geq 0$, um conjunto enumerável de constantes de predicado n-árias - representam propriedades e relações (predicados). Ex: A, B, C, ..., T, A_1, B_1..., T_1, A_2,...

Lógica de Predicados: Definições e Sintaxe

- **Definição de linguagem geral do cálculo de predicados:**
  - A linguagem geral do cálculo de predicados de primeira ordem consiste em:
    1. ..
    2. ..
    3. Um conjunto enumerável de variáveis individuais - não identificam indivíduos específicos, mas têm um domínio de variação. Ex: u,v,w,x,y,z,u_1, v_1 .., z_1,u_2, ...
    4. Operadores : $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
    5. Quantificadores:$\forall, \exists$
    6. Sinais de pontuação: $., (,), !$

Lógica de Predicados: Definições e Sintaxe

- **Definição de Linguagem de primeira ordem**
  - Uma linguagem de primeira ordem é qualquer subconjunto da linguagem geral que inclua símbolos lógicos (itens 3,4, 5 e 6) e pelo menos uma constante de predicado.
    - Ex: $L_1 = \{a, c, m, x, y, G, E, P, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, (,), .\}$

Lógica de Predicados: Definições e Sintaxe

- **Definição de Termo**
  - Os termos de uma linguagem de primeira ordem são suas variáveis e constantes individuais. Ex em L_1 : a, c, m, x, y
- **Definição de Fórmulas:**
  - Seja L uma linguagem de primeira ordem, Dizemos que:
    1. Se P é um símbolo de predicado n-ário para um número natural $n \geq 0$ e $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos, então $P(t_1, ..., t_n)$ é uma fórmula (atômica);
    2. Se α e β são fórmulas então $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ também são fórmulas (moleculares).
    3. Se x é uma variável e α é uma fórmula na qual x ocorre, então $\forall x.\alpha$ e $\exists x.\alpha$ são fórmulas (gerais).
    4. Nada mais é uma fórmula.

Lógica de Predicados - Exercícios

- **Atividade I:** Assinale as fórmulas abaixo que são bem formadas:

  1. $x\exists x.P$
  2. $((\neg Q(b) \wedge \forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow \neg P(b))$
  3. $P(x) \rightarrow \forall x$
  4. $\forall y.\forall x.P(a)$
  5. $(\neg\forall x.(P(y) \rightarrow Q(x)) \wedge P(x))$
  6. $\exists.\forall x.P(x)$
  7. $(\exists y.\forall x.(P(x) \rightarrow \forall z.A(z)))$
  8. $(\exists y \rightarrow (\forall z \wedge \exists x))$
  9. $\forall x, y.P(x, y)$
  10. $\exists y.\forall x.(x \wedge y)$

Lógica de Predicados - Exercícios

- **Atividade II:** Escreva as sentenças abaixo em lógica de predicados.
  1. Algo é branco (B: x é branco)
  2. Tudo é azul. (A: x é azul)
  3. Alguma coisa não é azul. (A: x é azul)
  4. Algo é bonito. (B: x é bonito)
  5. Todos são mortais. (M; x é mortal).
  6. Alguma coisa não é verde.(V: x é verde)
  7. Alguém é mais velho que Pedro. (p: Pedro, V: x é mais velho que y)
  8. Alguém gosta de Lulu. (l: Lulu, G: x gosta de y)

Lógica de Predicados - Exercícios

- **Atividade III:** Sabendo que o predicado *G(x,y)* significa *x* gosta de *y*, que *v* representa *Vítor* e *a* representa *Ana*, interprete as fórmulas abaixo e escreva as sentenças correspondentes:
  1. $\forall x.(G(x,v) \wedge G(x,a))$
  2. $\exists x.(G(x,v) \wedge \neg G(x,a))$
  3. $\forall x.(G(x,a) \rightarrow G(x,v))$
  4. $\neg\exists x.(G(x,a) \wedge G(x,v))$
  5. $\forall x.(G(x,a) \vee G(x,v))$
  6. $\neg\forall x.(G(x,v) \wedge \neg G(x,a))$
  7. $\forall x.\neg G(v,x)$
  8. $\exists x.(G(v,x) \wedge \neg G(a,x))$

Lógica de Predicados: Definições e Sintaxe

- **Subfórmulas imediatas** de uma fórmula qualquer:
  - fórmulas atômicas não têm subfórmulas imediatas;
  - a subfórmula imediata de $\neg\alpha$ é α .
  - as subfórmulas imediatas de $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são α e β.
  - a subfórmula imediata de $\forall x.\alpha$ e $\exists x.\alpha$ é α .

Lógica de Predicados - Exercícios

- **Atividade IV:** Construa a árvore de formação de cada fórmula abaixo, desmembrando cada fórmula em sua fórmula imediata até chegar a fórmulas atômicas.

1. $(\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists y.P(y))$
2. $((\neg Q(b) \wedge \forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow \neg P(b))$
3. $(\neg \forall x.(P(y) \rightarrow Q(x)) \wedge P(x))$
4. $\exists y.\forall x.(P(x) \rightarrow \forall z.A(z))$
5. $(\forall x.\forall y.L(x,y) \wedge Q(y))$

Lógica de Predicados: Definições e Sintaxe

- **Escopo dos quantificadores:** inicia após o ponto e pode estar delimitado por parênteses.
  - Ex:$(\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists y.P(y))$
    - Escopo de $\forall x$: $(P(x) \rightarrow Q(x))$
    - Escopo de $\exists y$: $P(y)$
- **Variável ligada**: x é uma variável ligada numa fórmula α se x faz parte de um quantificador ou está em seu escopo.
- **Variável livre**: qualquer ocorrência de alguma variável x numa fórmula α que esteja fora do escopo de qualquer quantificador para x é chamada de livre.
  - Ex:$(\forall x.\forall y.L(x,y) \wedge Q(y))$
    - Ligadas: x e y (ocorrência em L)
    - Livre: y (última ocorrência)

Lógica de Predicados: Definições e Sintaxe

- **Fórmula Aberta**: uma fórmula é chamada de aberta se possui pelo menos uma ocorrência livre de alguma variável.
  - Ex: $\forall x.F(x,y)$
- **Fórmula Fechada**: é o oposto. Uma fórmula é fechada quando não há ocorrências de variáveis livres.
  - Ex: $(\forall x.F(x) \rightarrow \exists y.P(y))$

Lógica de Predicados - Exercícios

- **Atividade V:** Identifique as variáveis livres e as ligadas nas fórmulas abaixo. Além disso, classifique as fórmulas como fechadas e abertas.
  1. $\forall x.\exists y.Q(x, y, z)$
  2. $F(w) \rightarrow \forall w.F(w)$
  3. $\forall x.\forall y.L(x, y) \vee Q(y)$
  4. $\forall x.\forall y.(L(x, y) \wedge Q(y))$
  5. $P(a) \rightarrow (P(b) \wedge Q(c))$
  6. $\forall x.P(x) \rightarrow Q(x, y)$
  7. $\forall x.(P(x) \rightarrow \exists y.Q(x, y))$
  8. $\forall x.A(x) \leftrightarrow \forall y.P(x, y)$

Leitura

- **Mortari**, C. A. Introdução à Lógica: **Capítulo 6 e 7**