Lógica para Computação

Aula 04 - Lógica Proposicional[1]

Sílvia M.W. Moraes

Escola Politécnica - PUCRS

Sinopse

- Nesta aula, continuamos a introduzir **a Lógica Proposicional.** Veremos, nesta aula, **semântica.**
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari e do Huth & Ryan.

Sumário

Lógica Proposicional - Relembrando ...

- Proposições
- Fórmulas Bem Formadas
- Conectivos
- Tabelas Verdade

Lógica Proposicional - Semântica

Semântica

A semântica (significado) de uma fórmula da lógica proposicional depende de uma função de valoração que atribua valor V ou F para cada variável proposicional da fórmula. Desse modo, pode-se avaliar o valor verdade da fórmula toda.

Lógica Proposicional - Semântica

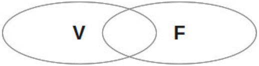
- **Semântica**: associação a cada elemento sintático um significado ou interpretação.
  - Exemplo: A fórmula $p \wedge q$ pode ser V ou F, isso dependerá das interpretações de p e q.
  - Lógica Proposicional é bivalente (V ou F).
  - É determinada por uma função I denominada *interpretação*, definida como uma função binária total.
    - binária: seu contradomínio possui apenas dois elementos : $\{V, F\}$
    - total: está definida para todos os elementos do seu domínio.
    - definição: $I(P) = \{V, F\}$, onde P corresponde ao conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional.

Lógica Proposicional - Semântica

- Dada as fórmulas α e β da lógica proposicional e uma função de interpretação I, a **interpretação** de uma fórmulaα, denotada por $I(\alpha)$, é dada pelas regras:
  - $I(\neg\alpha) = V$ sse $I(\alpha) = F$
  - $I(\alpha \vee \beta) = V$ sse $I(\alpha) = V$ ou $I(\beta) = V$
  - $I(\alpha \wedge \beta) = V$ sse $I(\alpha) = V$ e $I(\beta) = V$
  - $I(\alpha \rightarrow \beta) = V$ sse $I(\alpha) = F$ ou $I(\beta) = V$
  - $I(\alpha \longleftrightarrow \beta) = V$ sse $I(\alpha) = I(\beta)$
- As regras semânticas dos operadores são definidas pelas suas tabelas-verdade.

Lógica Proposicional - Semântica

- Mas ... em qual semântica estamos interessados e como podemos verificá-la ?



Lógica Proposicional - Semântica

- Através das tabelas-verdade, podemos definir em que "situações" as fórmulas são verdadeiras.
  - Exemplo: Se o trem chegasse atrasado e não houvesse táxi na estação, então John não chegaria em tempo para a sua reunião.
    - Representação (Sintaxe) : $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$, onde
      p= "Se o trem chegasse atrasado"
      q= "houvesse táxi na estação"
      r= "John chegaria em tempo para a sua reunião"
    - Tabela-verdade ...

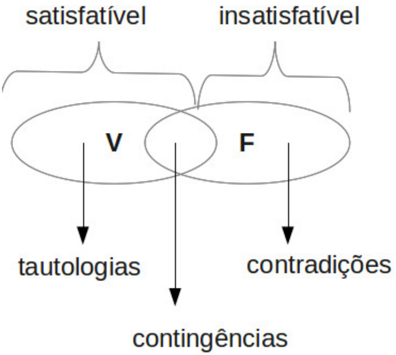
Lógica Proposicional - Semântica

- Através das tabelas-verdade, podemos definir em que "situações" as fórmulas são verdadeiras.
  - Exemplo:...
    - Representação (Sintaxe) : $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$

p	q	r	¬q	¬r	p∧¬q	p∧¬q →¬r
F	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F
V	V	F	F	V	F	V
V	V	V	F	F	F	V

Lógica Proposicional - Classificação de fórmulas

- As propriedades semânticas permitem que as fórmulas sejam classificadas em:



Lógica Proposicional - Classificação de fórmulas

- Uma **tautologia** é uma fórmula composta que é sempre verdadeira, independentemente do valor verdade das proposições atômicas que ocorrem nela.
  - Exemplo: $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
F	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V	V

Lógica Proposicional - Classificação de fórmulas

- Uma **contradição** é uma fórmula composta que é sempre falsa.
- Exemplo: $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
F	V	**F**
V	F	**F**

Lógica Proposicional - Classificação de fórmulas

- Uma fórmula α é **contingência** se e somente se existe ao menos uma interpretação $I(\alpha) = V$.
  - $p \wedge q \wedge \neg r$

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge q \wedge \neg r$
F	F	F	V	F
F	F	V	F	F
F	V	F	V	F
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	F	V	F	F
V	V	F	V	V
V	V	V	F	F

Lógica Proposicional - Classificação de fórmulas

- Podemos verificar também a equivalência de fórmulas.
- Duas fórmulas φ e ψ são **equivalentes** se elas têm o mesmo significado.
- Lei distribuitiva: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
F	F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	V

Frame Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade 01:** Classifique as fórmulas abaixo como tautologias, contingências ou contradições:
    1. $\neg((\neg p \wedge q) \rightarrow r)$
    2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
    3. $p \leftrightarrow \neg p$
- **Atividade 02:** Prove as equivalências a seguir:
    1. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
    2. $\neg\neg p \equiv p$
    3. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Leitura

- Huth, M. R. A; Ryan, M. D. Lógica em Ciência da Computação: Modelagem e Argumentação sobre Sistemas: Capítulo 1 - seção 1.2
- Souza, João Nunes. Lógica para Computação: Uma introdução concisa: Capítulo 4.