

Lógica para Computação

Aula 02 - Lógica Proposicional¹

Sílvia M.W. Moraes

Escola Politécnica - PUCRS



¹Este material não pode ser reproduzido ou utilizado de forma parcial sem a permissão dos autores.

Sinopse

- Nesta aula, continuamos a introduzir **a sintaxe da Lógica Proposicional**.
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari e do Huth & Ryan.

Sumário

1 Introdução à Lógica Proposicional

2 Próxima Aula

Relembrando : Definição

Lógica

"É a ciência que estuda princípios e métodos de inferência com o objetivo principal de determinar em que condições certas coisas se seguem (são consequência), ou não de outras". (Mortari, 2001)

Por que estudar lógica ?

- Lógica é a base de todo pensamento matemático, e portanto da teoria da computação.
- Lógica é usada em (**Aplicações**):
 - Projeto de circuitos para computadores
 - Programação, linguagens de programação (PROgramação em LOGica = PROLOG)
 - Especificação e verificação de sistemas
 - Representação de conhecimento e demonstração automática (Inteligência Artificial)

Por que estudar lógica ?

- As regras da lógica permitem a construção de **argumentos corretos**.
 - **Argumento**: conjunto não vazio e finito de sentenças (proposições), das quais **uma** é chamada de **conclusão** e as outras de **premissas**.
 - Em um argumento, pretende-se que as premissas justifiquem, garantam ou deem evidência para conclusão.
 - Premissa: Todo homem é mortal.
 - Premissa: João é homem.
 - Conclusão: João é mortal.
- Raciocinar é o processo de construir argumentos para aceitar ou rejeitar uma certa proposição.

Lógica Proposicional

- O estudo de lógica segue basicamente **3 passos básicos**:
 - 1 Especificação de uma linguagem, a partir da qual o conhecimento é representado (Sintaxe & Semântica).
 - 2 Estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou os argumentos válidos.
 - 3 Definição de sistemas de dedução formal em que são consideradas as noções de prova e consequência lógica.

Lógica Proposicional

- O estudo de lógica segue basicamente **3 passos básicos**:
 - 1 **Especificação de uma linguagem, a partir da qual o conhecimento é representado (Sintaxe & Semântica).**
 - Conjunto de símbolos. Ex: $p, q, \wedge, \vee, \dots$
 - Regras indutivas que permitem gerar os termos dessa linguagem (sintaxe). Ex: $p, q, p \wedge q, \dots$
 - Interpretação desses termos (semântica). Ex: tabela verdade
 - 2 ...

Lógica Proposicional

- O estudo de lógica segue basicamente **3 passos básicos**:

1

..

2

Estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou os argumentos válidos.

Se está chovendo, então a rua está molhada. Está chovendo. Logo, a rua está molhada.

Se tenho mais de 1 milhão de dólares, sou milionário. Tenho mais de 1 milhão de dólares. Portanto, sou milionário.

Alguns gregos são lógicos e alguns lógicos são chatos, por isso, alguns gregos são chatos.

Ou estamos todos condenados ou todos nós somos salvos, não somos todos salvos por isso estamos todos condenados.

Lógica Proposicional

- O estudo de lógica segue basicamente 3 passos básicos:

1 ..

- 2 **Estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou os argumentos válidos.**

- **Um argumento é considerado válido quando a conclusão é verdadeira sempre que as premissas também são. Além disso, a conclusão deve ser uma consequência lógica das premissas.**

Premissa: Todo homem é verde.
Premissa: João é homem.
Conclusão: João é verde.
Argumento inválido.

Premissa: Todo homem é mortal.
Premissa: João é homem.
Conclusão: João é mortal.
Argumento válido.

*Premissa: Alguns gregos são lógicos
Premissa: Alguns lógicos são chatos,
Conclusão: alguns gregos são chatos.
Argumento inválido.*

*Premissa: Ou estamos todos condenados ou todos nós somos salvos
Premissa: Não somos todos salvos
Conclusão: Estamos todos condenados.
Argumento válido.*

...

Lógica Proposicional

- O estudo de lógica segue basicamente **3 passos básicos**:

1 ..

2 ..

- 3 **Definição de sistemas de dedução formal em que são consideradas as noções de prova e consequência lógica.**

Premissa: *Se hoje é quinta-feira, então temos aula de Lógica.*
Premissa: Hoje é quinta-feira.
Conclusão: *Temos aula de Lógica.*

Premissa: *Se P , então Q .*
Premissa: P .
Conclusão: Q .

- Quando estudarmos **Dedução Natural**, veremos um conjunto de regras sintáticas que permitirão mostrar se a conclusão é consequência lógica das premissas.

Lógica Proposicional

- **Proposições:** sentenças declarativas que podem ser verdadeiras ou falsas.
 - Sentença: sequência de palavras que contenha ao menos um verbo flexionado e respeite as regras gramaticais da língua.
 - Exemplos:
 - Porto Alegre é capital do Rio Grande do Sul.
 - A PUCRS é a melhor universidade privada da região Sul.
 - Vítor gostava de maçãs.
 - Diego será um grande advogado.

Lógica Proposicional

- Não são proposições (sentenças interrogativas, imperativas, exclamativas, ...):
 - Qual a sua idade ?
 - Vá estudar!
 - Não feche a porta!
 - Socorro!!!
- Não são proposições aquelas que esse referem ao seu próprio valor lógico (paradoxo) :
 - “Esta afirmação é falsa”.
 - “Eu estou mentindo agora”. (Paradoxo do mentiroso)

Lógica Proposicional

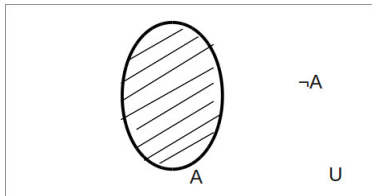
- Usa-se letras (p, q, r, \dots) para denotar variáveis proposicionais; também chamados símbolos proposicionais.
- O valor verdade de uma proposição é denotado por:
 - V (para verdadeiro) ou
 - F (para falso)
- Produz-se proposições compostas usando operadores lógicos (conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)

Lógica Proposicional - Negação

- Seja p uma proposição, a negação de p é a proposição: “Não é o caso que p .”
- Sintaxe: A negação é denotada pelo operador unário: \neg
- Semântica: A fórmula $\neg p$ é lida como “não p ”; seu valor verdade é o oposto de p .
- Expressões que indicam negação: “Não é o caso que p .”, “É falso que p .”, “Não é verdade que p .”, ...

Semântica

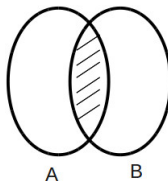
p	$\neg p$
V	F
F	V



Lógica Proposicional - Conjunção

- Sejam p e q proposições.
- A conjunção de p e q é a proposição “ p e q .”
- Sintaxe: A conjunção é denotada pelo operador binário: \wedge
- Semântica: A fórmula $p \wedge q$ é verdadeira quando p e q são verdadeiros, e falsa c.c.
- Expressões que podem indicar conjunção: “ p e q ”, “ p mas q ”,
...

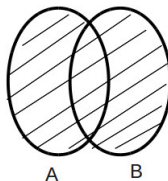
p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V



Lógica Proposicional - Disjunção

- Sejam p e q proposições.
- A disjunção de p e q é a proposição “ p ou q .”
- Sintaxe: A disjunção é denotada pelo operador binário: \vee
- Semântica: A fórmula $p \vee q$ é falsa quando p e q são falsas, e verdadeira c.c.
- Expressões que podem indicar disjunção: “... ou p ou q ”, “... ora p ora q ”, “ p e/ou q ”, ...

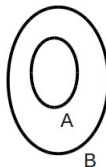
p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V



Lógica Proposicional - Implicação

- Sejam p e q proposições.
- A sentença condicional $p \rightarrow q$ (também chamada implicação) de p e q é a proposição “se p , então q .”
 - p é o antecedente (ou premissa, ou hipótese)
 - q é o conseqüente (ou conclusão, or consequência)
- Sintaxe: A implicação $p \rightarrow q$ é denotada pelo operador binário \rightarrow
- Semântica: A fórmula é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e verdadeira c.c.

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V



Lógica Proposicional - Implicação

- Dada uma implicação $p \rightarrow q$
 - Converso: $q \rightarrow p$
 - Contrapositivo: $\neg q \rightarrow \neg p$
 - Inverso: $\neg p \rightarrow \neg q$
- Somente o contrapositivo sempre tem o mesmo valor verdade da implicação original.

Lógica Proposicional - Expressando a Implicação

“se p , então q ”

“se p , q ”

“ p é suficiente para q ”

“ q se p ”

“ q quando p ”

“uma condição necessária para q é p ”

“ q a menos que $\neg p$ ”

“ p implica q ”

“ p somente se q ”

“uma condição suficiente para q é p ”

“ q sempre que p ”

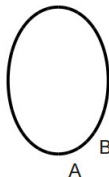
“ q é necessário para p ”

“ q segue de p ”

Lógica Proposicional - Bi-implicação

- Sejam p e q proposições.
- A bi-implicação de p e q é a proposição “ p se e somente se q ”
- Sintaxe: A bi-implicação é denotada pelo operador binário:
 \longleftrightarrow
- Semântica: A fórmula é verdadeira quando p e q são ou ambos verdadeiros ou ambos falsos, e falso c.c.
- Outras formas de expressar: “ p é necessário e suficiente para q ”; “se p então q , e conversamente”; “ p sse q ”; “ p é valente a q ”.

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V



Lógica Proposicional - Precedência dos Operadores

- Prioridade dos operadores:
 - 1 negação (\neg)
 - 2 conjunção (\wedge)
 - 3 disjunção (\vee)
 - 4 implicação (\rightarrow)
 - 5 bi-implicação (\leftrightarrow)
- Operadores com mesma prioridade são associados à direita.

Lógica Proposicional - Precedência dos Operadores

Com parênteses	Sem parênteses
$(p \wedge q)$	$p \wedge q$
$(p \rightarrow (q \wedge r))$	$p \rightarrow q \wedge r$
$((p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p) \vee q))$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$
$((p \rightarrow q) \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \wedge r$
$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	$p \rightarrow q \rightarrow r$

Lógica Proposicional - Sintaxe

- Definição indutiva das fórmulas proposicionais:
 - 1 Símbolos proposicionais α e β são fórmulas
 - 2 Se α é uma fórmula, $\neg\alpha$ também é
 - 3 Se α e β são fórmulas $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ e $\alpha \leftrightarrow \beta$ também são
 - 4 Nada mais é uma fórmula proposicional

Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade 1:** Assinale as fórmulas bem formadas para as proposições p, q e r .

☐ $p \vee q \neg r$

☐ $\neg \neg p$

☐ $p \wedge q \rightarrow r$

☐ $q \wedge p \vee \neg r$

☐ $r \neg p$

☐ $\neg(\neg p \wedge q) \vee \neg r$

☐ $\neg p \rightarrow q \neg$

☐ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

☐ $p \leftarrow r$

☐ $r \neg p \rightarrow q$

☐ $pq \rightarrow r$

☐ $\rightarrow p$

☐ $q \wedge p \vee$

☐ $(p \vee q) \leftrightarrow \neg r$

☐ $\neg r \rightarrow \neg(p \wedge q)$

Leitura

- Mortari, C. A. Introdução à Lógica. Ed. UNESP, 2001:
 - Capítulos 2, 3 e 4.
- Souza, João Nunes. Lógica para Ciência da Computação:
 - Capítulo 2 e 3