Lógica para Computação

Aula 18 - Lógica de Predicados[1]

Sílvia M.W. Moraes

Escola Politécnica - PUCRS

[1]Este material não pode ser reproduzido ou utilizado de forma parcial sem a permissão dos autores.

Sinopse

- Nesta aula, continuamos a introduzir **a sintaxe da Lógica de Predicados.**
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari e do Huth & Ryan.

Sumário

Lógica de Predicados - Relembrando ...

- Predicado
- Quantificadores: Universal e Existencial
- Definição de Termo
- Definição de Fórmula
- Variável livre / ligada
- Fórmula aberta / fechada

Lógica de Predicados: Proposições Categórias

- Retomando as representações ...
  - Proposições categóricas:
    - Todo A é B. (Universal afirmativa)
    - Nenhum A é B. (Universal negativa).
    - Algum A é B. (Existencial afirmativa).
    - Algum A não é B. (Existencial negativa).

Lógica de Predicados: Proposições Categórias

- Proposições categóricas - exemplos:
  - Se x é um peixe então ele é azul. $\forall x.(P(x) \rightarrow A(x))$, onde:
    - *P(x): x é um peixe* e *A(x): x é azul*.
  - Nenhum peixe é azul. $\forall x.(P(x) \rightarrow \neg A(x))$ ou $\neg\exists x.(P(x) \wedge A(x))$
  - Todos filhos de João são estudantes: $\forall x.(F(x,j) \rightarrow E(x))$, onde:
    - F(x,y): x é filho de y,
    - j é João
    - E(x): x é estudante.

Lógica de Predicados: Proposições Categórias

- Proposições categóricas - exemplos:
  - Nenhum filho adolescente de João é estudante:
    $\forall x.((F(x,j) \wedge A(x)) \rightarrow \neg E(x))$, onde:
    - F(x,y): x é filho de y,
    - j é João
    - E(x): x é estudante.
    - A(x): x é adolescente.
  - Todos os gatos e cachorros são animais domésticos.
    $\forall x.((G(x) \vee C(x)) \rightarrow A(x))$, onde:
    - G(x): x é um gato
    - C(x): x é um cachorro.
    - A(x): x é um animal doméstico.

Lógica de Predicados: Proposições Categórias

- Proposições categóricas - exemplos:
  - Há algo que é um peixe azul: $\exists x.(P(x) \wedge A(x))$, onde:
    - *P(x): x é um peixe* e *A(x): x é azul*.
  - Algo é um cachorro e algo é um peixe. $\exists x.C(x) \wedge \exists x.P(x)$, onde:
    - *C(x): x é um cachorro* e *P(x): x é um peixe*
    - $\exists x.C(x) \wedge \exists y.P(y)$,
  - Algo é um pinguim e não mora na Antártida. $\exists x.(P(x) \wedge \neg A(x))$, onde:
    - *P(x): x é um pinguim* e *A(x): x mora da Antártida*.

Lógica de Predicados: Proposições Categórias

- Proposições categóricas (**resumo**):
  - Todo A é B. (Universal afirmativa) : $\forall x.(A(x) \to B(x))$
  - Nenhum A é B. (Universal negativa): $\forall x.(A(x) \to \neg B(x))$
  - Algum A é B. (Existencial afirmativa):$\exists x.(A(x) \wedge B(x))$
  - Algum A não é B. (Existencial negativa). $\exists x.(A(x) \wedge \neg B(x))$

Lógica de Predicados: Exercícios

- **Atividade I:** Escreva as sentenças abaixo em lógica de predicados:
  1. Alguns homens não são sinceros. (*H(x): x é um homem. S(x): x é sincero*)
  2. Todas as mulheres são lindas. (*M(x): x é uma mulher. L(x): x é linda.*)
  3. Nenhum peixe é anfíbio. (*P(x): x é um peixe. A(x): x é um anfíbio*)
  4. Alguns metais são líquidos. (*M(x): x é um metal. L(x): x é líquido*)
  5. Nenhum animal é vegetal. (*A(x): x é um animal. T(x): x é um vegetal*.)
  6. Alguns papagaios não são vermelhos. (*P(x): x é um papagaio. R(x): x é vermelho*.)
  7. Há ao menos um papagaio e algo vermelho. (*P(x): x é um papagaio. R(x): x é vermelho*.)
  8. Toda criança travessa, gosta de brincar e de ir ao cinema. (*C(x): x é uma criança. T(x): x é travessa, B(x): x gosta de brincar*. *F(x): x gosta de ir ao cinema*.)

Lógica de Predicados: Quantificação Múltipla

- Há sentenças que exigem mais de um quantificador.
- Podemos juntar duas ou mais proposições categóricas por meio de conjunções e disjunções.
  - **Exemplo 1** : Os gatos são pretos e os cisnes são Brancos.
    - $\forall x.(G(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x.(C(x) \rightarrow B(x))$, onde:
    - *G(x): x é um gato*
    - *P(x): x é preto*
    - *C(x): x é um cisne*
    - *B(x): x é branco*

Lógica de Predicados: Quantificação Múltipla

- **Exemplo 2**: Se todos os gatos são pretos então nenhum gato é cor de laranja.
  - $\forall x.(G(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x.(G(x) \rightarrow \neg L(x))$, onde:
    - *$G(x)$: x é um gato*
    - *$P(x)$: x é preto*
    - *$L(x)$: x é laranja*

Lógica de Predicados: Quantificação Múltipla

- **Exemplo 3**: Se um indivíduo é pai de outro e esse outro é mãe de alguém então o indivíduo é o avô materno desse alguém.
  - $\forall x.\forall y.\forall z.((P(x,y) \land M(y,z)) \to A(x,z))$, onde:
    - *P(x,y): x é pai de y*
    - *M(x,y): x é mãe de y*
    - *A(x,y): x é avô materno de y*

Lógica de Predicados: Exercícios

- **Atividade II:** Escreva as sentenças abaixo em lógica de predicados, usando múltiplos quantificadores e a notação: a: Alice; F(x): x é um filósofo; L(x): x é um livro; G(x,y): x gosta de y; P(x): x é psicológo.
  1. Alice gosta de algum filósofo que gosta dela.
  2. Todo filósofo gosta de algum livro.
  3. Os filósofos gostam de todos os livros.
  4. Há um livro que nenhum psicólogo gosta.
  5. Filósofos não gostam de psicólogos.
  6. Nem filósofos nem psicólogos gostam de si mesmos.
  7. Se algum psicólogo gosta de Alice, então algum filósofo também gosta dela.
  8. Ou os filósofos gostam de todos os livros ou não gostam de nenhum.

Lógica de Predicados: Substituição de Variáveis por Termos

- Apenas variáveis livres podem ser substituidas.
- A substituição é por um outro termo: constante ou variável.
- Notação: $\varphi[t/x]$
- Exemplos:
  1. $M(x) \wedge \forall x.P(x)$ corresponde ao φ:
     - $M(x) \wedge \forall x.P(x)[t/x] \Leftrightarrow M(t) \wedge \forall x.P(x)$
  2. $\exists y.(M(y) \wedge P(z)) \vee A(z)$ corresponde ao φ:
     - $\exists y.(M(y) \wedge P(z)) \vee A(z)[a/z] \Leftrightarrow \exists y.(M(y) \wedge P(a)) \vee A(a)$
  3. $\forall y.\forall z.(A(y,z)) \wedge L(x))$ corresponde ao φ:
     - $\forall y.\forall z.(A(y,z) \wedge L(x))[v/x] \Leftrightarrow \forall y.\forall z.(A(y,z) \wedge L(v))$

Lógica de Predicados: Substituição de Variáveis por Termos

- Quando a substituição é por uma outra variável, deve-se ter o cuidado de não tornar variáveis livres, ligadas. Para resolver esses casos, podemos primeiramente renomear as variáveis ligadas antes da substituição.
  1. $\exists y.(M(y) \wedge P(z)) \vee A(z)[y/z] \Leftrightarrow \exists y.(M(y) \wedge P(y)) \vee A(y)$ - erro

  - $\exists y.(M(y) \wedge P(z)) \vee A(z)[x/y] \Leftrightarrow$
  - $\exists x.(M(x) \wedge P(z)) \vee A(z)[y/z] \Leftrightarrow$
  - $\exists x.(M(x) \wedge P(y)) \vee A(y)$

Lógica de Predicados: Exercícios

- **Atividade III:** Efetue as substituições indicadas abaixo:
  1. $\forall x.(F(x) \rightarrow \exists y.(L(y) \wedge G(x,y)))$ [a/x]
  2. $\forall x.(M(x) \rightarrow L(x,y))$ [x/y]
  3. $M(x,y) \wedge P(y) \wedge \forall x.P(x)$ [c/x]
  4. $\exists x.P(x) \wedge G(x,y) \rightarrow \exists x.F(x)$[b/x]
  5. $\exists x.P(x) \wedge G(x,y) \rightarrow \exists x.F(x)$[x/y]
  6. $B(x) \wedge \forall y.(C(y,x) \rightarrow M(y)) \wedge D(y)$[d/y]

Leitura

- **Mortari**, C. A. Introdução à Lógica: **Capítulo 14**
- **Huth & Ryan**. Lógica em Ciência da Computação: Modelagem e Argumentação sobre Sistemas: **Capítulo 2**