Lógica para Computação

Aula 14 - Lógica Proposicional[1]

Sílvia M.W. Moraes

Sinopse

- Nesta aula, continuamos a estudar **a Lógica Proposicional: dedução natural.**
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari e do Huth & Ryan.

Sumário

Lógica Proposicional - Relembrando ...

- Argumento Lógico = premissas + conclusão
- $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \models \psi$ é igual a $\phi_1, \phi_2, ..., \varphi_n \vdash \psi$?
- Regras de Dedução Natural
  - $\wedge e_1$ e $\wedge e_2$; $\wedge i$
  - $\neg\neg e$
  - $\rightarrow e$ e $\rightarrow i$
  - $\vee i_1$ e $\vee i_2$; $\vee e$

Lógica Proposicional - Negação e Contradição

- Até agora, vimos apenas a eliminação da dupla negação ($\neg\neg e$).
- Não vimos nenhuma regra que introduz ou elimina a negação. Essas regras envolvem a noção de **contradição**.
- Contradições são expressões da forma: $\varphi \wedge \neg\varphi$ ou $\neg\varphi \wedge \varphi$, onde φ é uma fórmula.
  - Exemplos:
    - $r \wedge \neg r$
    - $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$
    - $\neg((r \vee s) \rightarrow t) \wedge ((r \vee s) \rightarrow t)$

Lógica Proposicional - Eliminação da Negação e Contradição

- Notação de uma contradição: $\perp$
- Uma contradição pode demonstrar qualquer coisa. Isso é o que mostra a regra de eliminação da contradição:$\perp e$
- A introdução de uma contradição é representada pela regra de eliminação da negação: $\neg e$.

$$\frac{\perp}{\varphi}\ (\perp e) \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\ (\neg e)$$

Lógica Proposicional - Introdução da Negação

- Se a hipótese de uma fórmula que é válida levar a uma contradição (qualquer fórmula e sua negação), sabemos que a hipótese estava errada.
- Assim, podemos descartar a hipótese e concluir a negação dela.

$$\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \land \neg\psi \\ \hline \neg\varphi \end{array} \quad (\neg\mathrm{i})$$

, sendo que $\psi \land \neg \psi \equiv \bot$

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 1 - Prove que o sequente de $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$ é válido, usando dedução natural:

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$p \rightarrow \neg q$	premissa
3.	p	hipótese
4.	q	$\rightarrow e$ 1,3
5.	$\neg q$	$\rightarrow e$ 2,3
6.	$q \wedge \neg q$	$\wedge i$ 4,5
7.	$\neg p$	$\neg i$ 3-6

ou

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$p \rightarrow \neg q$	premissa
3.	p	hipótese
4.	q	$\rightarrow e$ 1,3
5.	$\neg q$	$\rightarrow e$ 2,3
6.	$\perp$	$\neg e$ 4,5
7.	$\neg p$	$\neg i$ 3-6

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 2 - Prove que o sequente de $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$ é válido, usando dedução natural:

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premissa
2.	p	premissa
3.	$\neg r$	premissa
4.	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 1,2
5.	q	hipótese
6.	r	$\rightarrow e$ 4,5
7.	$r \wedge \neg r$	$\wedge i$ 3,6
8.	$\neg q$	$\neg i$ 5-7

Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade I:** Prove que os sequentes dos argumentos abaixo são válidos usando dedução natural.
  1. $p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash \neg p$
  2. $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$
  3. $p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)$
  4. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

Lógica Proposicional - Equivalência

- Duas fórmulas são ditas demonstravelmente equivalentes quando uma pode ser deduzida a partir da outra
- Quando os argumentos $\phi \vdash \varphi$ e $\varphi \vdash \phi$ são válidos, existe uma demonstração que leva de ϕ para φ e outra de φ para ϕ.
- Denota-se a equivalência por $\dashv\vdash$.
  - Exemplos:
    - $(p \wedge q) \rightarrow r \dashv\vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$
    - $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg q \vee \neg p$

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 1 - Prove a equivalência $(p \wedge q) \rightarrow r \dashv\vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$ usando dedução natural:

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premissa
2.	p	hipótese
3.	q	hipótese
4.	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2,3
5.	r	$\rightarrow e$ 1,4
6.	$q \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3-5
7.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2-6

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premissa
2.	$p \wedge q$	hipótese
3.	p	$\wedge e_1$ 1
4.	$(q \rightarrow r)$	$\rightarrow e$ 1,3
5.	q	$\wedge e_2$ 1
6.	r	$\rightarrow e$ 4,5
7.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 2-6

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 2 - Prove a equivalência $p \to q \dashv\vdash \neg q \to \neg p$ usando dedução natural:

1.	$p \to q$	premissa
2.	$\neg q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	q	$\to e$ 1,3
5.	$q \wedge \neg q$	$\wedge i$ 4,2
6.	$\neg p$	$\neg i$ 3-5
7.	$\neg q \to \neg p$	$\to i$ 2-6

1.	$\neg q \to \neg p$	premissa
2.	p	hipótese
3.	$\neg q$	hipótese
4.	$\neg p$	$\to e$ 1,3
5.	$p \wedge \neg p$	$\wedge i$ 2,4
6.	$\neg\neg q$	$\neg i$ 3-5
7.	q	$\neg\neg e$
8	$p \to q$	$\to i$ 2-7

Lógica Proposicional - Teoremas

- Considere o argumento de uma linha:

1	p	premissa

- Ele demonstra que $p \vdash p$ e pode ser estendido para

1	$\boxed{p}$	hipótese
2	$p \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 1-1

- Escreve-se esse argumento como $\vdash p \rightarrow p$ para expressar que o argumento $p \rightarrow p$ não depende de nenhuma premissa.
- Fórmulas lógicas (φ) com um sequente válido ($\vdash \varphi$) são chamadas de teoremas.

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 1 - Prove o teorema $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$ usando dedução natural:

1.	p	hipótese
2.	q	hipótese
3.	p	cópia de 1
4.	$q \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 2-3
5.	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow i$ 1-4

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 2 - Prove o teorema $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ usando dedução natural:

1.	$((p \rightarrow q) \wedge p)$	hipótese
2.	p	$\wedge e_2$ 1
3.	$p \rightarrow q$	$\wedge e_1$ 1
4.	q	$\rightarrow e$ 3,2
5.	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 1-4

Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade II:** Prove os teoremas abaixo são válidos usando dedução natural.
  1. $\vdash (p \wedge q \rightarrow q \wedge p) \wedge (q \wedge p \rightarrow p \wedge q)$
  2. $\vdash (p \wedge q) \rightarrow q$
  3. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s))$
- **Atividade III:** Prove as equivalências a seguir usando dedução natural:
  1. $p \wedge q \dashv\vdash q \wedge p$
  2. $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  3. $p \vee (q \vee r) \dashv\vdash (p \vee q) \vee r$

Leitura

- Souza, J. N. Lógica para Computação. Cap. 6