

Lógica para Computação

Aula 13 - Lógica Proposicional¹

Sílvia M.W. Moraes

Escola Politécnica - PUCRS



¹Este material não pode ser reproduzido ou utilizado de forma parcial sem a permissão dos autores.

Sinopse

- Nesta aula, continuamos a estudar **a Lógica Proposicional: dedução natural**.
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari e do Huth & Ryan.

Sumário

1 Lógica Proposicional: Dedução Natural

2 Próxima Aula

Lógica Proposicional - Relembrando ...

- Argumento Lógico = premissas + conclusão
- $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$ é igual a $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$?
- Regras de Dedução Natural
 - $\wedge e_1$ e $\wedge e_2$; $\wedge i$
 - $\neg\neg e$
 - $\rightarrow e$ e $\rightarrow i$

Lógica Proposicional - Introdução da Disjunção

- Introdução da disjunção (\vee): Se já concluímos que um dos disjuntos é verdade, sua disjunção com qualquer coisa é necessariamente verdadeira também.

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \quad (\vee i_1)$$

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \quad (\vee i_2)$$

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 1 - Prove que o sequente de $(p \wedge q) \vdash (p \vee r) \wedge (r \vee q)$ é válido, usando dedução natural:

1.	$p \wedge q$	premissa
2.	p	$\wedge e_1$ 1
3.	$p \vee r$	$\vee i_1$ 2
4.	q	$\wedge e_2$ 1
5.	$r \vee q$	$\vee i_2$ 4
6.	$(p \vee r) \wedge (r \vee q)$	$\wedge i$ 3,4

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 2 - Prove que o sequente de $p \vee q \rightarrow r, q \vdash r \wedge (q \vee t)$ é válido, usando dedução natural:

1.	$p \vee q \rightarrow r$	premissa
2.	q	premissa
3.	$p \vee q$	$\vee i_2$ 2
4.	r	$\rightarrow e$ 1,3
5.	$q \vee t$	$\vee i_1$ 2
6.	$r \wedge (q \vee t)$	$\wedge i$ 4,5

Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade I:** Prove que os sequentes dos argumentos abaixo são válidos usando dedução natural.

1 $p \vee r \rightarrow t, r \vdash (t \vee p) \wedge (r \vee p)$

2 $r \wedge p, r \vee s \rightarrow t \vdash t \wedge (p \vee s)$

3 $p \vee q \rightarrow r, r \rightarrow s, q \vdash (p \vee q) \wedge (s \vee p)$

4 $p \vee q \rightarrow s, p, s \vee q \rightarrow t \vdash s \wedge t$

Lógica Proposicional - Eliminação da Disjunção

- Eliminação da disjunção ($\vee e$):
 - Sabemos que um dos disjuntos é verdadeiro, mas não podemos ter certeza qual deles, por isso precisamos de **duas provas separadas**.
 - 1 Supomos que φ é verdadeira e temos que demonstrar que χ (uma terceira fórmula) é verdadeira.
 - 2 Supomos que ψ é verdadeira e temos que demonstrar também que χ é verdadeira.
 - 3 A partir das duas demonstrações, podemos inferir que χ é verdadeira.

$$\begin{array}{ccc}
 [\varphi] & & [\psi] \\
 \vdots & & \vdots \\
 \varphi \vee \psi & \chi & \chi \\
 \hline
 & \chi &
 \end{array}
 \quad (\vee e)$$

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 1 - Prove que o sequente de $p \vee q \vdash q \vee p$ é válido, usando dedução natural:

1.	$p \vee q$	premissa
2.	q	hipótese
3.	$q \vee p$	$\vee i_1$ 2
4.	p	hipótese
5.	$q \vee p$	$\vee i_2$ 4
6.	$q \vee p$	$\vee e$ 1, 2-3, 4-5

Lógica Proposicional - Exemplos

- Exemplo 2 - Prove que o sequente de $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow r \vee p$ é válido, usando dedução natural:

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	q	hipótese
4.	r	$\rightarrow e$ 1,3
5.	$r \vee p$	$\vee i_1$ 4
6.	p	hipótese
7.	$r \vee p$	$\vee i_2$ 6
8.	$r \vee p$	$\vee e$ 2, 3-5, 6-7
9.	$p \vee q \rightarrow r \vee p$	$\rightarrow i$ 2-8

Lógica Proposicional - Considerações sobre $\forall e$

- Para que a demonstração seja correta, a fórmula deduzida nos dois casos deve ser exatamente a mesma;
- A regra $\forall e$ é a combinação das demonstrações dos dois casos;
- Em cada um dos casos, não pode-se usar a hipótese do outro caso, a menos que seja algo demonstrado antes do início das caixas;

Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade II:** Prove que os sequentes dos argumentos abaixo são válidos usando dedução natural.

① $p \rightarrow q, r \rightarrow s \vdash p \vee r \rightarrow q \vee s$

② $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

③ $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

④ $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

⑤ $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \vee s) \rightarrow ((q \rightarrow r) \vee s)$

⑥ $p \rightarrow q \vdash (r \vee p) \rightarrow (r \vee q)$

Leitura

- Souza, J. N. Lógica para Computação. Cap. 6