Lógica para Computação

Aula 06 - Lógica Proposicional[1]

Sílvia M.W. Moraes

Escola Politécnica - PUCRS

Sinopse

- Nesta aula, continuamos a discutir **a Lógica Proposicional**. Estudaremos nesta aula Formas Normais.
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari, do Souza e do Huth & Ryan.

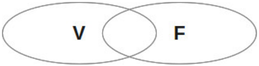
Sumário

Lógica Proposicional - Relembrando ...

- Proposições
- Fórmulas Bem Formadas
- Conectivos
- Semântica
- Propriedades Semânticas
  - Tautologia, Contradição, Satisfatível
  - Métodos para determinar propriedade semânticas: Tabelas Verdade, Árvores Semânticas (por refutação)

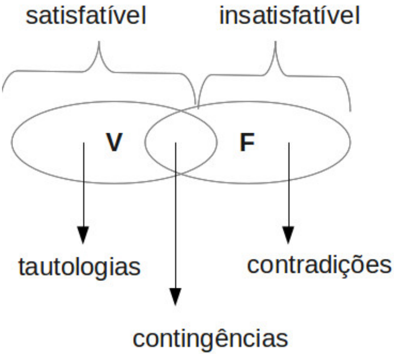
Lógica Proposicional - Semântica

- Revendo a classificação das fórmulas (incluindo argumentos) ...
- Quais nos interessam ?



Lógica Proposicional - Semântica

- Sabendo que “Uma fórmula α é **satisfatível** se e somente se existe uma interpretação $I(\alpha) = V$ “.



Lógica Proposicional - Forma Normal

- Nos interessa também as fórmulas que são mais facilmente verificadas pelo computador.
- Para que a **verificação de validade de um argumento torne-se mais fácil é interessante que as fórmulas não contenham implicações.** Por esta razão, vamos estudar **maneiras de transformar as fórmulas em formas contenham apenas disjunções e conjunções.**
- **Fórmulas que não contêm implicações ou bi-implicações estão na forma normal.**

Lógica Proposicional - Forma Normal

- Para transformamos as fórmulas em suas formas normais, precisaremos conhecer algumas equivalências:

Equivalências	Denominação
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leis de Identidade
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	Leis de Dominância
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leis de Idempotência
$\neg(\neg p) \equiv p$	Lei da dupla negação
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leis Comutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leis Associativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leis Distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leis de De Morgan

Lógica Proposicional - Forma Normal

- Para transformamos as fórmulas em suas formas normais, precisaremos conhecer algumas equivalências:

Equivalência	Denominação
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Leis de Absorção
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	
$p \vee \urcorner p \equiv T$	Leis da Negação
$p \wedge \urcorner p \equiv F$	

Lógica Proposicional - Forma Normal Disjuntiva (FND)

- Um literal é uma variável proposicional ou sua negação (i.e., p, q, $\neg p$).
- Uma conjunção fundamental é um literal ou uma conjunção de dois ou mais literais
- Uma Forma Normal Disjuntiva (FND) é formada por:
  - uma conjunção fundamental;
  - ou uma disjunção de duas ou mais conjunções fundamentais.
- Exemplos:
  - $p \wedge q$
  - $p \vee (p \wedge \neg q)$
  - $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
  - $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

Lógica Proposicional - Forma Normal Disjuntiva (FND)

- Tradicionalmente, fórmulas na FND são normalmente utilizadas em lógica de circuitos.
- Dispositivos físicos idealizados, chamados de portas lógicas, implementam as funções booleanas relacionadas a conjunção, disjunção e negação.
- Na lógica de circuitos as fórmulas ¬A, $A \wedge B$ e $A \vee B$ são tradicionalmente representadas respectivamente como -A, A· B e A + B
  - Por exemplo, $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$, seria representada como (-p· -q· -r) + (-p· q· r) + (p· q· r)

Lógica Proposicional - Conversão para FND

- Toda fórmula proposicional pode ser transformada em FND pela utilização dos seguintes passos:
  1. Remoção das Equivalências: $A \Longleftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
  2. Remoção das implicações: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
  3. Internalização das negações (lei De Morgan): $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ e $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
  4. Eliminação das negações duplas: $\neg\neg A \equiv A$
  5. Utilização das leis distributivas para colocar a fórmula resultante do passo anterior em FND.

Lógica Proposicional - Conversão para FND

- A fórmula$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge s)$ pode ser transformada na forma normal disjuntiva através dos seguintes passos:

$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge s)$	$\equiv$	$(\neg(p \wedge q) \vee r) \wedge s$	remoção da implicação
	$\equiv$	$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge s$	lei De Morgan
	$\equiv$	$(\neg p \wedge s) \vee (\neg q \wedge s) \vee (r \wedge s)$	lei distributiva

Lógica Proposicional - Conversão para FND

- **Atividade 1:** Justifique os passos da seguinte transformação de $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow r)$ para FND:

$$
\begin{array}{rcll}
\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow r) & \equiv & \neg((\neg\neg p \vee q) \rightarrow r) & ? \\
 & \equiv & \neg((p \vee q) \rightarrow r) & ? \\
 & \equiv & \neg(\neg(p \vee q) \vee r) & ? \\
 & \equiv & \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee r) & ? \\
 & \equiv & \neg((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)) & ? \\
 & \equiv & \neg(\neg p \vee r) \vee \neg(\neg q \vee r) & ? \\
 & \equiv & (\neg\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) & ? \\
 & \equiv & (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) & ?
\end{array}
$$

Lógica Proposicional - Conversão para FND

- **Atividade 2:** Converta as seguintes fórmulas para FND:

(I) $\neg(a \rightarrow \neg b)$

(II) $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$

Frame Lógica Proposicional - Forma Normal Conjuntiva (FNC)

- Uma disjunção fundamental é um literal ou uma disjunção de dois ou mais literais.
- Uma forma normal conjuntiva (FNC) é uma disjunção fundamental ou uma conjunção de duas ou mais disjunções.
- Exemplos:
  - $p \vee q \vee r$
  - $p \wedge (\neg p \vee q)$
  - $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
  - $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

Frame Lógica Proposicional - Conversão para FNC

- Toda fórmula proposicional A pode ser colocada em FNC.
- Algoritmo exatamente igual ao para FND, porém, usa-se leis distributivas para se obter uma conjunção de disjunções.

$$\begin{array}{lcll} ((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge s & \equiv & (\neg(p \wedge q) \vee r) \wedge s & \text{eliminação da implicação} \\ & \equiv & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge s & \text{lei De Morgan} \end{array}$$

Frame Lógica Proposicional - Conversão para FNC

- **Atividade 3:** Converta as seguintes fórmulas para FNC:

  (I) $(a \rightarrow b) \rightarrow c$

  (II) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (s \wedge t))$

- **Atividade 4:** Justifique os passos da seguinte transformação de $((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge s$ para FNC:

$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge s$	$\equiv$	$(\neg(p \wedge q) \vee r) \wedge s$
	$\equiv$	$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge s$

Leitura

- Huth, M. R. A; Ryan, M. D. Lógica em Ciência da Computação: Modelagem e Argumentação sobre Sistemas: Capítulo 3
- Souza, João Nunes. Lógica para Computação: Uma introdução concisa: Capítulo 6.