Lógica para Computação

Aula 20 - Lógica de Predicados[1]

Sílvia M.W. Moraes

Escola Politécnica - PUCRS

Sinopse

- Nesta aula, continuamos a introduzir **Dedução Natural** para **Lógica de Predicados.**
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari e do Huth & Ryan.

Sumário

Lógica de Predicados - Relembrando ...

- Predicado
- Quantificadores: Universal e Existencial
- Definição de Termo
- Definição de Fórmula
- Variável livre / ligada
- Fórmula aberta / fechada
- Substituição de Variáveis
- $\forall x$ e e $\forall x$ i

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Introdução do ∃

$$\frac{\varphi(c)}{\exists x.\varphi[x/c]}\exists x_i$$

- A regra diz que podemos deduzir$\exists x.\varphi$ sempre que φ for verdadeira para uma constante c.
- A substituição de c por x só pode ser realizada se c for livre em φ.

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Introdução do $\exists$

- O termo c pode ser visto como um exemplo concreto de x.
  - Exemplo: "Platão é um filósofo grego": $F(p) \wedge G(p)$, onde:
    - $F(x)$: x é um filósofo.
    - $G(x)$: x é grego
    - p: Platão
  - Dado que Platão tem essas propriedades, pode-se dizer que "Existe alguém que é um filósofo grego".
    - $\exists x.(F(x) \wedge G(x))$

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Introdução do $\exists$

- **Exemplo** - Considere o argumento:

$$\forall x.P(x) \vdash \exists x.P(x)$$

$$\begin{array}{lcc}
1. & \forall x.P(x) & \text{premissa} \\
2. & P(a) & \forall x_e\ 1 \\
3. & \exists x.P(x) & \exists x_i\ 2
\end{array}$$

Lógica de Predicados: Exercícios

- **Atividade I:** Prove o sequente dos argumentos abaixo usando dedução natural.
    1. $R(a, b) \vdash \exists x.\exists y.R(x, y)$
    2. $\forall x.(P(x) \to Q(x)), P(a) \vdash \exists x.Q(x)$
    3. $\forall x.(P(x) \vee Q(x)), \neg Q(b) \vdash \exists y.P(y)$

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Eliminação do $\exists$

$$\cfrac{\exists x.\varphi \qquad \begin{array}{c} \varphi[c/x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi}\ \exists x_e$$

- Regra de caráter hipotético.
- Para eliminar o existencial deve-se concluir um indivíduo em particular. Como tal indivíduo não é conhecido é necessário introduzir uma nova constante para indicá-lo.
- Além disso, a constante c só poderá substituir x se esta constante **não ocorrer**:
  - em uma premissa,
  - em uma hipótese vigente,
  - em φ ou em χ.

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Eliminação do $\exists$

- **Exemplo 1** - Considere o argumento: "Existem gatos pretos, logo existem gatos", onde
  - G(x): x é um gato,
  - P(x): x é preto.

$$\exists x.(G(x) \wedge P(x)) \vdash \exists x.G(x)$$

1.	$\exists x.(G(x) \wedge P(x))$	premissa
2.	$G(a) \wedge P(a)$	hipótese
3.	$G(a)$	$\wedge e_1$ 2
4.	$\exists x.G(x)$	$\exists x$ i 3
5.	$\exists x.G(x)$	$\exists x$ e 1, 2-4

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Eliminação do $\exists$

- **Exemplo 2** - Considere o argumento:

$$\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x.P(x) \vdash \exists x.Q(x)$$

1.	$\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa
2.	$\exists x.P(x)$	premissa
3.	$P(a)$	hipótese
4.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	$\forall x_e$ 1
5.	$Q(a)$	$\rightarrow e$ 4,5
6.	$\exists x.Q(x)$	$\exists x$ i 5
7.	$\exists x.Q(x)$	$\exists x$ e 2, 3-6

Lógica de Predicados: Exercícios

- **Atividade II:** Prove o sequente dos argumentos abaixo usando dedução natural.
  1. $\forall x.(Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x.(P(x) \wedge R(x))$
  2. $\exists x.P(x) \rightarrow \forall x.\neg Q(x), P(a) \vdash \neg Q(a)$
  3. $\exists x.P(x) \rightarrow \forall x.Q(x), \exists x.\neg Q(x) \vdash \neg \exists x.P(x)$
  4. $\neg \forall x.G(x) \rightarrow \forall x.\neg F(x), \exists x.F(x) \vdash \exists x.G(x)$
  5. $\forall x.(P(x) \vee Q(x)), \exists y.\neg P(y) \vdash \exists x.Q(x)$
  6. $\forall x.(A(x) \vee B(x) \rightarrow C(x)), \exists x.A(x) \vdash \exists x.C(x)$

Lógica de Predicados: Exercícios

- **Atividade III:** Traduza as sentenças abaixo para Lógica de Predicados e prove o sequente dos seus argumentos usando dedução natural.
    1. Nenhum papagaio é cor de laranja. Algumas aves são papagaios. Logo, algumas aves não são cor de laranja.
    2. Alguém é amado por todos. Logo, todos amam alguém.

Leitura

- **Mortari**, C. A. Introdução à Lógica: **Capítulo 14**
- **Huth & Ryan**. Lógica em Ciência da Computação: Modelagem e Argumentação sobre Sistemas: **Capítulo 2**