Lógica para Computação

Aula 05 - Lógica Proposicional[1]

Sílvia M.W. Moraes

Escola Politécnica - PUCRS

Sinopse

- Nesta aula, continuamos a discutir **a Lógica Proposicional** e a estudar **semântica.**
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari, do Souza e do Huth & Ryan.

Sumário

Lógica Proposicional - Relembrando ...

- Proposições
- Fórmulas Bem Formadas
- Conectivos
- Semântica
- Propriedades Semânticas
    - Satisfatível e Não Satisfatível
    - Método para determinar a propriedade: Tabelas Verdade

Lógica Proposicional - Semântica (Relembrando ...)

Semântica.

A semântica (significado) de uma fórmula da lógica proposicional depende de uma função de valoração que atribua valor V ou F para cada variável proposicional da fórmula. Desse modo, pode-se avaliar o valor verdade da fórmula toda

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Como já vimos, as **tabelas-verdade** podem ser usadas para definir em que "situações" as fórmulas proposicionais são verdadeiras e, consequentemente, identificar as propriedades semânticas dessas fórmulas.
- As tabelas-verdade também podem ser usadas para verificar a **validade de um argumento**...

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Um argumento é uma sequência de afirmações, onde as afirmações, exceto a última, são chamadas de premissa. A última afirmação é dita conclusão.
  Exemplo: *Se chove, a rua fica molhada. A rua não está molhada. Logo, não choveu.*
  - p: Está chovendo.
  - q: A rua fica molhada.
  - $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$
- **Argumento válido** é aquele em que toda vez que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é.

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Verificando a validade de um argumento.
  - Construa a tabela da verdade especificando as colunas referentes às premissas e à conclusão.
  - Analise a tabela e Identifique as linhas em que todas as premissas são verdadeiras
  - O argumento será válido apenas quando, para as linhas identificadas, a conclusão também for verdadeira.
  - Se existir ao menos uma linha em que conclusão é falsa e as premissas são verdadeiras, o argumento é inválido.

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Exemplo: $p \to q, \neg q \vdash \neg p$

		premissas		conclusão
p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$
F	F	**V**	**V**	**V**
F	V	V	F	V
V	F	F	V	F
V	V	V	F	F

  - Como em todas as linhas em que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é, o argumento$p \to q, \neg q \vdash \neg p$ é válido.

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

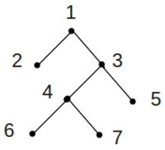
- **Atividade 01:** Os argumento a seguir são válidos ? Verifique usando tabela verdade.
  1. $p \vee (q \vee r), \neg r \vdash p \vee q$
  2. $p \rightarrow (q \vee \neg r), q \rightarrow (p \wedge r) \vdash p \rightarrow r$
  3. $p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow p \vdash p \wedge q \wedge r$

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- **Problema:** Embora o método Tabela Verdade seja fácil, quando o número de proposições cresce esse método torna-se inviável.
  - Exemplo: $p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow ((s \wedge t) \rightarrow ((u \wedge v) \rightarrow x)))$
    - Essa fórmula tem 8 proposições distintas, logo a tabela verdade terá $2^8 = 256$ linhas.
    - A tabela é grande para ser feita manualmente.
    - Precisamos de outro método...

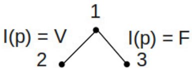
Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Outra forma de identificar as propriedades é usando **árvores semânticas**.
- **Árvore** = estrutura de dados cujos nós (vértices) são conectados por arestas. Sendo que o nó inicial (ex: nó 1) é chamado de raiz e aqueles que não possuem nós abaixo deles (não possuem filhos) são ditos folhas (ex: nós 2,6,7 e 5).



Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Exemplo: $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ é uma tautologia ?
  - Usando a árvore semântica



  - Como a proposição p pode ser verdadeira ou falsa, são definidos dois novos nós: **2** e **3**.
  - O **Nó 2** corresponde as seguintes interpretações:

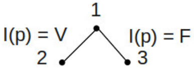
$$\begin{array}{lccccccc} \text{Nó } 2 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\ & \mathbf{V} & & & & & & \mathbf{V} \end{array}$$

aplicando-se a negação, temos:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Nó } 2 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\ & V & & & & & & \mathbf{F}V \end{array}$$

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- ...



- O **Nó 3** corresponde as seguintes interpretações:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Nó } 3 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\ & \mathbf{F} & & & & & & \mathbf{F} \end{array}$$

aplicando-se a negação, temos:

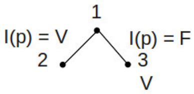
$$\begin{array}{lccccccc} \text{Nó } 3 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\ & \text{F} & & & & & & \mathbf{V}\text{F} \end{array}$$

analisando-se as implicações, percebemos que independente do valor de q a implicação será V:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Nó } 3 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\ & \text{F} & \mathbf{V} & & & & \mathbf{V} & \text{VF} \end{array}$$

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- ...



- O **Nó 3** corresponde as seguintes interpretações:
  ...
  analisando-se as implicações, percebemos que independente do valor de q a implicação será V:

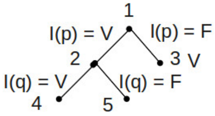
$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Nó } 3 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\
 & \mathrm{F} & \mathbf{V} & & & & \mathbf{V} & \mathrm{VF}
\end{array}
$$

  analisando-se, por fim, a bi-implicação, percebe-se que seu valor será V e, portanto, o Nó 3 será uma folha.

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Nó } 3 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\
 & \mathrm{F} & \mathrm{V} & & \mathbf{V} & & \mathrm{V} & \mathrm{VF}
\end{array}
$$

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Continuando a árvore a partir do Nó 2:
  - Como a proposição q pode ser verdadeira ou falsa, são definidos dois novos nós a partir do Nó 2: **4** e **5**.



  - **Nó 4** corresponde as seguintes interpretações:

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{Nó } 4 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\ & \mathrm{V} & & \mathbf{V} & & \mathbf{V} & & \mathrm{FV} \end{array}$$

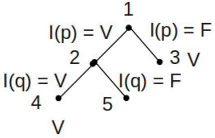
aplicando-se a negação, temos:

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{Nó } 4 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\ & \mathrm{V} & & \mathrm{V} & & \mathbf{F}\mathrm{V} & & \mathrm{FV} \end{array}$$

...

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Continuando a árvore a partir do Nó 2:
  - Como a proposição q pode ser verdadeira ou falsa, são definidos dois novos nós a partir do Nó 2: **4** e **5**.



  - **Nó 4** corresponde as seguintes interpretações:

    ...

    analisando-se a implicação:

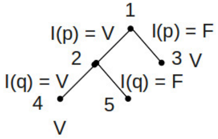
Nó 4 =	p	$\rightarrow$	q	$\leftrightarrow$	$\neg q$	$\rightarrow$	$\neg p$
	V	**V**	V		FV	**V**	FV

    e, por fim, percebe-se que a bi-implicação resultará em V:

Nó 4 =	p	$\rightarrow$	q	$\leftrightarrow$	$\neg q$	$\rightarrow$	$\neg p$
	V	V	V	**V**	FV	V	FV

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Continuando a árvore a partir do Nó 2:



- **Nó 5** corresponde as seguintes interpretações:

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{Nó } 5 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\ & \text{V} & & \mathbf{F} & & \mathbf{F} & & \text{FV} \end{array}$$

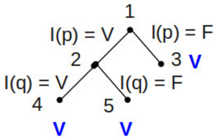
aplicando-se a negação:

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{Nó } 5 = & p & \rightarrow & q & \leftrightarrow & \neg q & \rightarrow & \neg p \\ & \text{V} & & \text{F} & & \mathbf{V}\text{F} & & \text{FV} \end{array}$$

...

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Continuando a árvore a partir do Nó 2:



- **Nó 5** corresponde as seguintes interpretações:
  ...
  analisando-se as implicações:

Nó 5 =	p	$\rightarrow$	q	$\leftrightarrow$	$\neg q$	$\rightarrow$	$\neg p$
	V	**F**	F		VF	**F**	FV

  e, por fim, percebe-se que a bi-implicação resultará em V:

Nó 5 =	p	$\rightarrow$	q	$\leftrightarrow$	$\neg q$	$\rightarrow$	$\neg p$
	V	F	F	**V**	VF	F	FV

- Como todas as folhas da árvore resultam em V, a fórmula $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ é uma tautologia.

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- Desta forma, usando o método da árvore semântica podemos concluir que:
    - Se as folhas forem todas V, a fórmula é uma tautologia.
    - Se as folhas forem todas F, a fórmula é uma contradição.
    - Se pelo menos uma folha for V, a fórmula é satisfatível.

Frame Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade 02:** Classifique as fórmulas abaixo como tautologias, satisfatíveis ou contraditórias usando o método da árvore semântica.
  1. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
  2. $(p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$
  3. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$
  4. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- **Método da Negação ou Redução ao Absurdo (refutação)**
  - Inicialmente, considera-se a negação daquilo que se pretende demonstrar.
    - Dada uma fórmula α, se o objetivo é mostrar que α é uma tautologia, começamos suponho que α não é uma tautologia.
  - A partir dessa suposição, realizamos deduções.
  - Se a partir dessas deduções chegarmos a um fato contraditório ou absurdo, podemos concluir que a suposição inicial era falsa.
    - Podemos dizer então que a suposição "α não é uma tautologia" é um absurdo, logo podemos concluir que "α é uma tautologia" (princípio do terceiro excluído).

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- **Método da Negação ou Redução ao Absurdo (refutação)**
  - Exemplo: $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
    - Se queremos demonstrar que a fórmula é uma tautologia, supomos inicialmente que a fórmula não é uma tautologia. Para isso, o resultado da implicação deve ser falso.

      $$\begin{array}{ccccccccccc} ((p & \rightarrow & q) & \wedge & (q & \rightarrow & r)) & \rightarrow & (p & \rightarrow & r) \\ & & & & & & & \mathbf{F} & & & \end{array}$$

    - Se a implicação é falsa, então a premissa é V e a conclusão é F.

      $$\begin{array}{ccccccccccc} ((p & \rightarrow & q) & \wedge & (q & \rightarrow & r)) & \rightarrow & (p & \rightarrow & r) \\ & & & \mathbf{V} & & & & \mathrm{F} & & \mathbf{F} & \end{array}$$

    - Se a conjunção é verdadeira, então as implicações dessa conjunção também são.

      $$\begin{array}{ccccccccccc} ((p & \rightarrow & q) & \wedge & (q & \rightarrow & r)) & \rightarrow & (p & \rightarrow & r) \\ & \mathbf{V} & & \mathrm{V} & & \mathbf{V} & & \mathrm{F} & & \mathrm{F} & \end{array}$$

    - ...

Lógica Proposicional - Métodos para determinar propriedades semânticas

- **Método da Negação ou Redução ao Absurdo (refutação)**
  - Exemplo: $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
    - ...
    - Para a implicação $p \rightarrow r$ ser falsa, p é V e r é F.

$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$r))$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$r)$
	V		V		V		F	**V**	F	**F**

    - Substituindo os valores de p e r também no trecho $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r))$, encontramos um absurdo. Para que as implicações $(p \rightarrow q)$ e $(q \rightarrow r)$ continuem V, q em $(p \rightarrow q)$ deve ser V e q em $(q \rightarrow r)$ deve ser F.

$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$r))$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$r)$
V	V	**V**	V	**F**	V	F	F	V	F	F

    - Logo, a suposição inicial que $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ não é uma tautologia é falsa. Portanto, esta fórmula é uma tautologia.

Frame Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade 03:** Usando o método da redução ao absurdo, demonstre que as fórmula abaixo são tautologias.
  1. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$
  2. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Leitura

- Huth, M. R. A; Ryan, M. D. Lógica em Ciência da Computação: Modelagem e Argumentação sobre Sistemas: Capítulo 1 - seção 1.2