Lógica para Computação

Aula 19 - Lógica de Predicados[1]

Sílvia M.W. Moraes

Escola Politécnica - PUCRS

[1] Este material não pode ser reproduzido ou utilizado de forma parcial sem a permissão dos autores.

Sinopse

- Nesta aula, introduzimos **Dedução Natural** para **Lógica de Predicados.**
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari e do Huth & Ryan.

Sumário

Lógica de Predicados - Relembrando ...

- Predicado
- Quantificadores: Universal e Existencial
- Definição de Termo
- Definição de Fórmula
- Variável livre / ligada
- Fórmula aberta / fechada
- Substituição de Variáveis

Lógica de Predicados: Dedução Natural

- As demonstrações de Dedução Natural para Lógica de Predicados são semelhantes às da Lógica Proposicional.
- **As regras que estudamos valem também para a Lógica de Predicados.**
- Teremos, evidentemente, **novas regras para tratar os quantificadores.**
    - Iniciaremos com as regras de eliminação e introdução do quantificador universal $\forall$.

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Eliminação do $\forall$

$$\frac{\forall x.\varphi}{\varphi[t/x]}\forall x_e$$

- A regra consiste em substituir o termo t nas ocorrências livres de x em φ, sendo que tais ocorrências de t deve continuar livre após as substituições.

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Eliminação do $\forall$

- O termo t pode ser visto como um exemplo concreto de x.
  - Exemplo: "Toda pessoa do sexo feminino é uma mulher": $\forall x.((P(x) \wedge F(x)) \rightarrow M(x))$, onde:
    - $P(x)$: x é uma pessoa.
    - $F(x)$: x é do sexo feminino.
    - $M(x)$: x é mulher.
  - se $x \in \{ana, maria, luciana\}$, podemos eliminar o quantificador universal substituindo x por ana (a):
    - $(P(a) \wedge F(a)) \rightarrow M(a)$

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Eliminação do $\forall$

- **Exemplo 1** - Considere o argumento:

$$P(t), \forall x.(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(t)$$

1.	$P(t)$	premissa
2.	$\forall x.(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	premissa
3.	$P(t) \rightarrow \neg Q(t)$	$\forall x_e$ 2
4.	$\neg Q(t)$	$\rightarrow e$ 3,1

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Eliminação do $\forall$

- **Exemplo 2** - Considere o argumento:

$$\forall x.\forall y.((G(x) \land P(y)) \to L(x,y)), G(m) \land P(c) \vdash L(m,c)$$

1.	$\forall x.\forall y.((G(x) \land P(y)) \to L(x,y))$	premissa
2.	$G(m) \land P(c)$	premissa
3.	$\forall y.((G(m) \land P(y)) \to L(m,y))$	$\forall x_e$ 1
4.	$(G(m) \land P(c)) \to L(m,c)$	$\forall x_e$ 3
5.	$L(m,c)$	$\to e$ 4,2

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Eliminação do $\forall$

- **Exemplo 3** - Considere o argumento:

$$\neg G(m) \vdash \neg \forall x.G(x)$$

1.	$\neg G(m)$	premissa
2.	$\forall x.G(x)$	hipótese
3.	$G(m)$	$\forall x_e$ 2
4.	$\perp$	$\neg e$ 3,1
5.	$\neg \forall x.G(x)$	$\neg i$ 2-4

Lógica de Predicados: Exercícios

- **Atividade I:** Prove o sequente dos argumentos abaixo usando dedução natural.
  1. $\forall x.(P(x) \to Q(x)), \neg Q(b) \vdash \neg P(b)$
  2. $\forall x.(\neg G(x) \to \neg F(x)), F(c) \vdash G(c)$
  3. $\forall x.(P(x) \to Q(x)), \forall x.(Q(x) \to R(x,b)) \vdash (P(a) \to R(a,b))$
  4. $\forall x.F(x) \wedge \forall y.H(y), \forall z.\forall x.T(z,x) \vdash F(a) \wedge T(a,b)$

Lógica de Predicados: Exercícios

- **Atividade II:** Traduza as sentenças abaixo para Lógica de Predicados e prove o sequente dos seus argumentos usando dedução natural.
  1. Todo papagaio é vermelho. José é um papagaio. Logo, José é vermelho.
  2. Todo estudante é honesto. João não é honesto. Logo, João não é um estudante.
  3. Todo atleta é forte. Todo aquele que for inteligente e forte terá sucesso em sua carreira. Pedro é um atleta e é inteligente. Logo, Pedro terá sucesso em sua carreira.

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Introdução do $\forall$

$$\frac{\varphi(t)}{\forall x.\varphi[x/t]}\forall x_i$$

- Para que esta regra possa ser aplicada, a constante c
  - poderá ser substituída por uma variável x em uma fórmula φ, se nenhuma parte de φ da forma $\exists x.\psi$ ou $\forall x.\psi$ contiver uma ocorrência de t.
  - não ocorrer em uma premissa e nem em uma hipótese vigente.

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Introdução do $\forall$

- **Exemplo 1** - Considere o argumento:

$$\forall x.(F(x) \land G(x)) \vdash (\forall x.F(x) \land \forall x.G(x))$$

1.	$\forall x.(F(x) \land G(x))$	premissa
2.	$F(a) \land G(a)$	$\forall x_e$ 1
3.	$F(a)$	$\land e_1$ 2
4.	$G(a)$	$\land e_2$ 2
5.	$\forall x.F(x)$	$\forall x_i$ 3
6.	$\forall x.G(x)$	$\forall x_i$ 4
7.	$\forall x.F(x) \land \forall x.G(x)$	$\land i$ 5,6

Lógica de Predicados: Dedução Natural - Introdução do $\forall$

- **Exemplo 2** - Considere o argumento:

$$\forall x.(P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x.F(x)$$

1.	$\forall x.(F(x) \land G(x))$	premissa
2.	$F(a) \land G(a)$	$\forall x_e$ 1
3.	$F(a)$	$\land e_1$ 2
4.	$\forall x.F(x)$	$\forall x_i$ 3

Lógica de Predicados: Exercícios

- **Atividade III:** Prove o sequente dos argumentos abaixo usando dedução natural.
  1. $\forall x.(A(x) \rightarrow B(x)) \vdash \forall x.(\neg B(x) \rightarrow \neg A(x))$
  2. $\forall x.P(x) \rightarrow \forall x.Q(x), \neg Q(a) \vdash \neg \forall x.P(x)$
  3. $\forall x.\forall y.L(x,y) \vdash \forall y.\forall x.L(x,y)$

Lógica de Predicados: Exercícios

- **Atividade IV:** Traduza as sentenças abaixo para Lógica de Predicados e prove o sequente dos seus argumentos usando dedução natural.
  1. Todos os papagaios amam Julieta. Quem ama Julieta detesta Romeu. Quem detesta Romeu tem bom gosto. Logo, todos os papagaios têm bom gosto.
  2. Nenhuma arara é vermelha.Todos os papagaios são vermelhos. Logo, nenhuma arara é um papagaio.
  3. Todos amam todos. Logo, Romeu ama Julieta e Julieta ama Romeu.

Leitura

- **Mortari**, C. A. Introdução à Lógica: **Capítulo 14**
- **Huth & Ryan**. Lógica em Ciência da Computação: Modelagem e Argumentação sobre Sistemas: **Capítulo 2**