Lógica para Computação

Aula 15 - Lógica Proposicional[1]

Sílvia M.W. Moraes

Sinopse

- Nesta aula, continuamos a estudar **a Lógica Proposicional: dedução natural.**
- Este material foi construído com base nos slides do prof. Rafael Bordini e dos livros do Mortari e do Huth & Ryan.

Sumário

Lógica Proposicional - Relembrando ...

- Argumento Lógico = premissas + conclusão
- $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \models \psi$ é igual a $\phi_1, \phi_2, ..., \varphi_n \vdash \psi$?
- Regras de Dedução Natural
  - $\wedge e_1$ e $\wedge e_2$; $\wedge i$
  - $\neg\neg e$
  - $\rightarrow e$ e $\rightarrow i$
  - $\vee i_1$ e $\vee i_2$; $\vee e$
  - $\neg e$ e $\neg i$
  - $\perp e$
- Equivalência e Teoremas

Lógica Proposicional - Regras Derivadas

- As regras vistas até agora são suficientes para provar qualquer sequente válido da lógica proposicional.
- Outras regras, que podem ser derivadas (ou deduzidas) das regras básicas, podem facilitar algumas provas, ainda que não sejam necessárias.
- Veremos algumas dessas regras nessa aula...

Lógica Proposicional - Modus Tollens

- Notação: MT

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \qquad \neg\psi}{\neg\varphi}$$

A regra é deduzida de $\rightarrow e, \neg e$ e $\neg i$.

Demonstração da dedução do **Modus Tolens**: $\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$

1.	$\varphi \rightarrow \psi$	premissa
2.	$\neg\psi$	premissa
3.	φ	hipótese
4.	ψ	$\rightarrow e$ 1,3
5.	$\perp$	$\neg e$ 2,4
6.	$\neg\varphi$	$\neg i$ 3-5

Lógica Proposicional - Exemplo

- Exemplo - Prove que o sequente de $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$ é válido, usando dedução natural:

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premissa
2.	p	premissa
3.	$\neg r$	premissa
4.	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 1,2
5.	$\neg q$	MT 4,3

Lógica Proposicional - Introdução da Dupla Negação

- Notação: $\neg\neg i$

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i)$$

A regra é deduzida de $\neg e$ e $\neg i$.

Demonstração da dedução da **dupla negação**: $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

1.	φ	premissa
2.	$\neg\varphi$	hipótese
3.	$\perp$	$\neg e$ 1,2
4.	$\neg\neg\varphi$	$\neg i$ 2-3

Lógica Proposicional - Exemplo

- Exemplo - Prove que o sequente de $\neg p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg\neg q$ é válido, usando dedução natural:

1.	$\neg p \rightarrow q$	premissa
2.	$\neg p$	premissa
3.	q	$\rightarrow e$ 1,2
4.	$\neg\neg q$	$\neg\neg i$ 3

Lógica Proposicional - Demonstração por Absurdo

- Também chamada de Redução ao Absurdo, a regra de Demonstração por Absurdo (DPA) diz que se obtivermos uma contradição a partir de $\neg\varphi$, então podemos deduzir φ.
- Notação: DPA

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\varphi}\ (\text{DPA})$$

A regra é deduzida de $\rightarrow i$, $\neg i$, $\rightarrow e$ e $\neg\neg e$.

Demonstração por absurdo:

$\neg\varphi \rightarrow \bot \vdash \varphi$

1.	$\neg\varphi \rightarrow \bot$	dado
2.	$\neg\varphi$	hipótese
3.	$\bot$	$\rightarrow e$ 1,2
4.	$\neg\neg\varphi$	$\neg i$ 2-3
5.	φ	$\neg\neg e$ 4

Lógica Proposicional - Exemplo

- Exemplo - Prove que o sequente de $p \vee q, \neg q \vdash p$ é válido, usando DPA:

1.	$p \vee q$	premissa
2.	$\neg q$	premissa
3.	$\neg p$	hipótese
4.	p	hipótese
5.	$\perp$	$\neg e$ 3,4
6.	q	hipótese
7.	$\perp$	$\neg e$ 6,2
8.	$\perp$	$\vee e$ 1, 4-5, 6-7
9.	p	DPA 3-8

Lógica Proposicional - Lei do Terceiro Excluído

- A Lei do Terceiro Excluído (LTE) diz que $\varphi \lor \neg\varphi$ é verdadeira (para qualquer que seja o valor de φ, verdadeiro ou falso).

$$\varphi \lor \neg\varphi \text{ (LTE)}$$

Demonstração da lei do Terceiro Excluído usando demonstração por absurdo:

1.	$\neg(\varphi \lor \neg\varphi)$	hipótese
2.	φ	hipótese
3.	$\varphi \lor \neg\varphi$	$\lor i_1$ 2
4.	$\perp$	$\neg e$ 3,1
5.	$\neg\varphi$	hipótese
6.	$\varphi \lor \neg\varphi$	$\lor i_2$ 5
7.	$\perp$	$\neg e$ 6,1
8.	$\perp$	$\lor e$ 1, 2-4,5-7
9.	$(\varphi \lor \neg\varphi)$	DPA 1-8

Lógica Proposicional - Exemplo

- Exemplo - Prove que o sequente de $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ é válido, usando dedução natural:

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$\neg p \vee p$	LTE
3.	$\neg p$	hipótese
4.	$\neg p \vee q$	$\vee i_1$ 3
5.	p	hipótese
6.	q	$\rightarrow e$ 1,5
7.	$\neg p \vee q$	$\vee i_2$ 6
8.	$\neg p \vee q$	$\vee e$ 2, 3-4,5-7

Lógica Proposicional - Exercícios

- **Atividade I:** Prove que os sequentes dos argumentos abaixo são válidos usando dedução natural.
  1. $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$ (use MT)
  2. $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$ (use DPA)
  3. $q \vdash (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$ (use LTE)
  4. $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ (use LTE)
  5. $p, p \rightarrow q \vdash \neg\neg q$

Leitura

- Huth, M. R. A; Ryan, M. D. Lógica em Ciência da Computação: Modelagem e Argumentação sobre Sistemas: Capítulo 1 - seção 1.2