Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS

Matemática Discreta – Aula 6
Relações em um Conjunto A

Professor: Iuri Jauris

1º Semestre de 2022

❑Relações em um conjunto A

- **Um caso particular de relação é obtido quando relacionamos entre si elementos de um mesmo conjunto.** Neste caso, teremos uma relação que associa um elemento de um certo conjunto A com outro(s) elemento(s) do próprio conjunto A.
- Relações deste tipo são denominadas **relações de A em A, ou, simplesmente, relações em A.**

- Relações desta natureza são importantes, por exemplo, para a identificação de informações de mesma natureza ou para a ordenação de estágios de um determinado processo. **A definição de relações dentro de um único conjunto permite definir critérios de "varredura" do conjunto**.

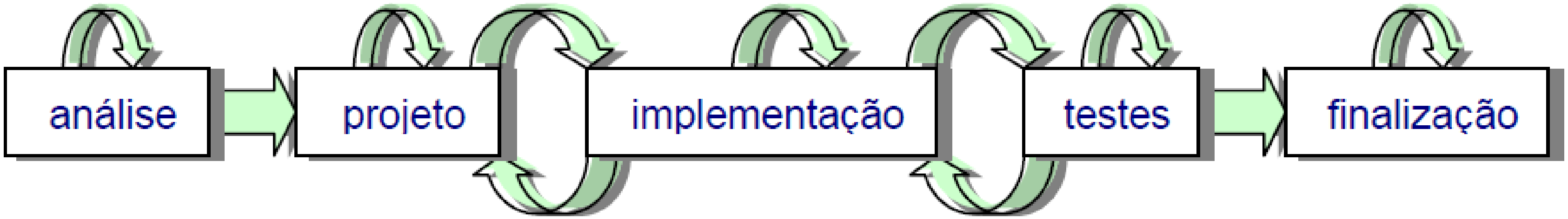
- *A identificação de quais relações são adequadas para cada propósito depende da identificação de diversas propriedades, típicas das relações em A, e que as relações podem (ou não) ter.*

➢ **Um Exemplo Intuitivo**

- Seja A um conjunto de etapas necessários para a geração de uma aplicação computacional. Por exemplo,

A = { análise, projeto, implementação, testes, finalização }.

- Na prática, estas etapas não ocorrem todas ao mesmo tempo, podendo ser classificadas de maneira temporal da seguinte forma:



- Em termos matemáticos, podemos descrever esta situação através de uma relação definida no conjunto A da seguinte forma:

- $R \subseteq A \times A$, R = { (análise, análise), (análise, projeto), (projeto,projeto), (projeto, implementação), (implementação, projeto), (implementação, implementação), (implementação, testes), (testes, implementação), (testes, testes), (testes, finalização), (finalização, finalização) }

➢ Definição

- Seja A um conjunto. Então ***R é relação de A em A*** se e somente se R é subconjunto do produto cartesiano de A com A. Em notação lógica:

$$R \text{ é relação em A } \Leftrightarrow R \subseteq A \times A$$

- **Exemplos:**

1. Seja A um conjunto de pessoas. Neste conjunto podem-se definir diversas relações. Por exemplo:

$R \subseteq A \times A$, $\quad x\,R\,y \Leftrightarrow x$ tem o mesmo nome que y

$S \subseteq A \times A$, $\quad x\,S\,y \Leftrightarrow x$ é parente de y

$T \subseteq A \times A$, $\quad x\,T\,y \Leftrightarrow x$ é namorado de y

- Observe-se que, neste exemplo, as pessoas identificadas pelas variáveis “x” e “y” devem sempre pertencer ao conjunto A especificado!

2. Seja A = { a, b, c }. Podem-se definir, por exemplo, as seguintes relações:

2. Seja A = { a, b, c }. Podem-se definir, por exemplo, as seguintes relações:

$R \subseteq A \times A, \quad x\,R\,y \Leftrightarrow x = a$

$S \subseteq A \times A, \quad x\,S\,y \Leftrightarrow x = y$

$T \subseteq A \times A, \quad x\,T\,y \Leftrightarrow ((x = a) \wedge (y \neq c)) \vee ((x = b) \wedge (y \neq b))$

$W \subseteq A \times A, \quad W = A \times A$

Logo as relações formariam os conjuntos tais quais:

$R \subseteq A \times A, \quad R = \{ (a, a), (a, b), (a, c) \}$

$S \subseteq A \times A, \quad S = \{ (a, a), (b, b), (c, c) \}$

$T \subseteq A \times A, \quad T = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, c) \}$

$W \subseteq A \times A, \quad W = \{ (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c) \}$

3. Pode-se definir relações muito interessantes e importantes dentro do conjunto dos números reais, como por exemplo as relações de "ordem natural" e "divisor":

$R \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,	$x \, R \, y \Leftrightarrow x \leq y$	(esta relação é denominada de "ordem natural")
$S \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,	$x \, S \, y \Leftrightarrow x \mid y$	($x \mid y$ significa "x divide y", isto é, "x é divisor de y", ou ainda, $(\exists\, \alpha \in \mathbf{Z})(\, y = \alpha . x \,)$)

4. Dado um conjunto M = {○,□}, o conjunto das partes de M, denotado por P(M), é formado por todos os subconjuntos de M, ou seja:

P(M)={∅, {○}, {□}, {○,□}}

- Este conjunto é interessante, pois permite definir relações entre os subconjuntos de M. Vejamos:

- Seja A = P(M), pode-se definir, por exemplo as relações:

- $R \subseteq A \times A, \; x\, S\, y \Leftrightarrow x = y$

  Neste caso: $S = \{ \; (\varnothing, \varnothing), (\{ \bigcirc \}, \{ \bigcirc \}), (\{ \square \}, \{ \square \}), (\{ \bigcirc, \square \}, \{ \bigcirc, \square \}) \; \}$

- $S \subseteq A \times A, \quad x\, R\, y \Leftrightarrow x \subseteq y$

  Então:

  $R = \{ \; (\varnothing, \varnothing), (\varnothing, \{ \bigcirc \}), (\varnothing, \{ \square \}), (\varnothing, \{ \bigcirc, \square \}),$
  $(\{ \bigcirc \}, \{ \bigcirc \}), (\{ \bigcirc \}, \{ \bigcirc, \square \}), (\{ \square \}, \{ \square \}), (\{ \square \}, \{ \bigcirc, \square \}), (\{ \bigcirc, \square \}, \{ \bigcirc, \square \}) \; \}$

- Observe-se que, no exercício a cima, as variáveis “x” e “y” representam **conjuntos pertencentes a P(M).**

5. Sejam M = { 2, 3 } e N = { 0, 1 }. Com estes conjuntos formaremos um conjunto A através do produto cartesiano:

$$A = \{ (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1) \}$$

- Em A podemos definir diversas relações. Por exemplo:

  - $R \subseteq A \times A, \quad (x, y)\, R\, (z, w) \Leftrightarrow x + y > z + w$

  Neste caso: $R = \{ ((2, 1), (2, 0)), ((3, 0), (2, 0)), ((3, 1), (2, 0)), ((3, 1), (2, 1)), ((3, 1), (3, 0)) \}$

  - $S \subseteq A \times A, \quad x\, S\, y \Leftrightarrow x = y$

  Neste caso: $S = \{ ((2, 0), (2, 0)), ((2, 1), (2, 1)), ((3, 0), (3, 0)), ((3, 1), (3, 1)) \}$

- Observe que na definição de R as variáveis “x”, “y”, “z” e “w” foram utilizadas para representar componentes dos pares ordenados; no entanto, na definição de S as variáveis “x” e “y” representam diretamente pares ordenados.

- **Exemplo**: Sejam os conjuntos A = {1; 2} e B = {1; 2; 3} e a relação binária R de A para B como:

$$\forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \text{ é par}$$

- Logo, temos que
- A x B = {(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (2; 3)} e
- R = {(1; 1); (1; 3); (2; 2)}

- A relação anterior pode ser generalizada para o conjunto de todos os inteiros Z. Neste caso, a relação binária E de Z para Z pode ser definida como:

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, mEn \Leftrightarrow m - n \text{ é par}$$

- Para m e n pares ou ímpares.

- **Quando a relação acima é satisfeita, comumente diz-se que m e n são congruentes módulo 2;** (Notação: m ≡ n mod 2)

❑ Definição: Congruências Modulo n

- Seja a relação $R \in A \times A$ então dizemos que:

$$a \equiv b \bmod n \Leftrightarrow (a,b) \in R$$

$$\Leftrightarrow a \text{ e } b \text{ tem o mesmo resto quando divididos por } n$$

$$\Leftrightarrow a - b \text{ é divisível por } n \Leftrightarrow a - b \text{ é um múltiplo de } n$$

- Resumindo: Dizer que a é congruente a b módulo m significa que a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m.

- Exemplos: 21 ≡ 15(mod 6) , pois 6 |(21 −15). Observe que o resto da divisão dos dois números por 6 é igual a 5.

- Exemplos:
- $4 \equiv 15 (\mathrm{mod}\,11)$, pois $11 \mid (4 - 15)$; $4 \not\equiv 15 (\mathrm{mod}\,10)$, pois $10 \nmid (4 - 15)$
- $32 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$, pois $4 \mid (32 - 0)$; $32 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 4)$, pois $4 \mid (32 - 4)$.

- Proposição : Sejam a, b, c e m inteiros, $m > 0$. Então:
- (a) $a \equiv a (\mathrm{mod}\ m)$;
- (b) Se $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$, então $b \equiv a (\mathrm{mod}\ m)$;
- (c) Se $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$ e $b \equiv c\ (\mathrm{mod}\ m)$, então $a \equiv c (\mathrm{mod}\ m)$.

- Demonstração:
- (a) Como $m \mid 0 = (a - a)$, decorre que $a \equiv a (\mathrm{mod}\ m)$.
- (b) Se $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$, então $m \mid (b - a)$. Mas então $m \mid (a - b) \Rightarrow b \equiv a (\mathrm{mod}\ m)$.
- (c) Vamos utilizar o seguinte fato: se m divide dois números X e Y, então m divide a soma X + Y desses dois números.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid (b-a) \\ b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow m \mid (c-b) \end{cases} \Rightarrow m \mid (b-a)+(c-b)=(c-a) \Rightarrow m \mid (c-a)$$

$$\Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$$

➢ PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES EM A

- Seja R uma relação definida em um conjunto A qualquer. Então:

i) <u>Reflexividade</u>

$$R \text{ é reflexiva } \Leftrightarrow (\forall x \in A)(xRx) \Leftrightarrow (\forall x \in A)((x,x) \in R)$$

- **Exemplos (e contra-exemplos)**

1) Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Então

a) $R \subseteq A \times A$, $\quad xRy \Leftrightarrow x = y$

$R \subseteq A \times A$, $\quad R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$

$=: A \to A$ $\quad$ (R é reflexiva)

b) $S \subseteq A \times A$, $\quad xSy \Leftrightarrow x \geq y$

$S \subseteq A \times A$, $\quad S = \{ (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$

$\geq: A \to A$ $\quad$ (S é reflexiva)

c) $T \subseteq A \times A$, $\quad xTy \Leftrightarrow x > y$

$T \subseteq A \times A$, $\quad T = \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2) \}$

$>: A \to A$ $\quad$ (T <u>não</u> é reflexiva)

d) $P \subseteq A \times A$, $\quad P = \{ (1, 1), (2, 1) \}$

$\{ (1, 1), (2, 1) \}: A \to A$ $\quad$ (P <u>não</u> é reflexiva)

2) $W \subseteq B \times B$, $W = \varnothing$

$\varnothing: B \to B$ (W <u>não</u> é reflexiva)

3) $R \subseteq IN^2$, $xRy \Leftrightarrow x \leq y$

$\leq: IN \to IN$ (R é reflexiva)

4) $R \subseteq IR^2$, $xRy \Leftrightarrow x \neq y$

$\neq: IR \to IR$ (R <u>não</u> é reflexiva)

ii) <u>Transitividade</u>

R é transitiva $\Leftrightarrow (\forall x, y, z \in A)(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

$\Leftrightarrow (\forall x, y, z \in A)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$

Exemplos e contra-exemplos:

1) Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Então

a) $R \subseteq A \times A, \quad xRy \Leftrightarrow x = y$

$R \subseteq A \times A, \quad R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$

$=: A \to A \quad$ (R é transitiva)

b) $S \subseteq A \times A, \quad xSy \Leftrightarrow x \geq y$

$S \subseteq A \times A, \quad S = \{ (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$

$\geq: A \to A \quad$ (S é transitiva)

c) $T \subseteq A \times A, \quad xTy \Leftrightarrow x > y$

$T \subseteq A \times A, \quad T = \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2) \}$

$>: A \to A \quad$ (T é transitiva)

d) $J \subseteq A \times A, \quad J = \{ (1, 2), (2, 3) \}$

$\{ (1, 2), (2, 3) \}: A \to A \quad$ (J <u>não</u> é transitiva)

2) $W \subseteq B \times B$, $W = \varnothing$

$\varnothing: B \rightarrow B$ (W é transitiva)

3) $R \subseteq IN^2$, $xRy \Leftrightarrow x \leq y$

$\leq: IN \rightarrow IN$ (R é transitiva)

4) $R \subseteq IR^2$, $xRy \Leftrightarrow x \neq y$

$\neq: IR \rightarrow IR$ (R <u>não</u> é transitiva)

iii) <u>Simetria</u>

R é simétrica $\Leftrightarrow$ $(\forall x, y \in A)\ (\ xRy \rightarrow yRx\ )$

$\Leftrightarrow$ $(\forall x, y \in A)\ (\ (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R\ )$

1) Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Então

a) $R \subseteq A \times A$, $xRy \Leftrightarrow x = y$

$R \subseteq A \times A$, $R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$

$=: A \to A$ (R é simétrica)

b) $S \subseteq A \times A$, $xSy \Leftrightarrow x \geq y$

$S \subseteq A \times A$, $S = \{ (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$

$\geq: A \to A$ (S <u>não</u> é simétrica)

c) $T \subseteq A \times A$, $xTy \Leftrightarrow x > y$

$T \subseteq A \times A$, $T = \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2) \}$

$>: A \to A$ (T <u>não</u> é simétrica)

d) $K \subseteq A \times A$, $K = \{ (1, 2), (2, 1), (3, 3) \}$

$\{ (1, 2), (2, 1), (3, 3) \}: A \to A$ (K é simétrica)

2) $W \subseteq B \times B$, $W = \varnothing$

$\varnothing: B \to B$ (W é simétrica)

3) $R \subseteq IN^2$, $xRy \Leftrightarrow x \leq y$

$\leq : IN \to IN$ (R <u>não</u> é simétrica)

4) $R \subseteq IR^2$, $xRy \Leftrightarrow x \neq y$

$\neq : IR \to IR$ (R é simétrica)

iv) Anti-Simetria

R é anti-simétrica $\Leftrightarrow$ $(\forall x, y \in A)\ (\ xRy \wedge yRx \ \rightarrow\ x = y\ )$

$\Leftrightarrow$ $(\forall x, y \in A)\ (\ (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \ \rightarrow\ x = y\ )$

1) Seja A = {1, 2, 3}. Então

a) $R \subseteq A \times A$, $\quad xRy \Leftrightarrow x = y$

$R \subseteq A \times A$, $\quad R = \{\ (1, 1), (2, 2), (3, 3)\ \}$

$=: A \rightarrow A$ $\quad$ (R é anti-simétrica)

b) $S \subseteq A \times A$, $\quad xSy \Leftrightarrow x \geq y$

$S \subseteq A \times A$, $\quad S = \{\ (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\ \}$

$\geq: A \rightarrow A$ $\quad$ (S é anti-simétrica)

c) $T \subseteq A \times A$, $\quad xTy \Leftrightarrow x > y$

$T \subseteq A \times A$, $\quad T = \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2) \}$

$>: A \to A$ $\quad$ (T é anti-simétrica)

d) $K \subseteq A \times A$, $\quad J = \{ (1, 2), (2, 1), (3, 3) \}$

$\{ (1, 2), (2, 1), (3, 3) \}: A \to A$ $\quad$ (K <u>não</u> é anti-simétrica)

2) $W \subseteq B \times B$, $\quad W = \varnothing$

$\varnothing: B \to B$ $\quad$ (W é anti-simétrica)

3) $R \subseteq IN^2$, $\quad xRy \Leftrightarrow x \leq y$

$\leq : IN \to IN$ $\quad$ (R é anti-simétrica)

4) $R \subseteq IR^2$, $\quad xRy \Leftrightarrow x \neq y$

$\neq : IR \to IR$ $\quad$ (R <u>não</u> é anti-simétrica)

➢ RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA EM A

- Definição: Seja R uma relação em A ($R \subseteq A \times A$). Então**, R é uma relação de equivalência em A se, e somente se, R é reflexiva, transitiva e simétrica.**

- **Exemplo:** Mostre que $T \subseteq Z \times Z$, $m\ T\ n \Leftrightarrow 3 \mid (m - n)$ é uma relação de equivalência. foto (16.05)

- Solução: Temos que mostrar que $T \subseteq Z \times Z$, $m\ T\ n \Leftrightarrow 3 \mid (m - n)$ é um relação reflexiva, transitiva e simétrica.

Reflexiva (**V**): T é reflexiva sse

$$\forall m \in \mathbb{Z}, mTm.$$

Pela definição de T, isto significa

$$\forall m \in \mathbb{Z}, 3|(m - m),$$

ou ainda,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, 3|0.$$

Essa afirmação é verdadeira já que $0 = 3 \cdot 0$.

Simétrica (**V**): T é simétrica sse

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \text{ se } mTn \text{ então } nTm.$$

Pela definição de T, isto significa

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \text{ se } 3|(m-n) \text{ então } 3|(n-m).$$

Suponha que m e n sejam inteiros específicos mas escolhidos aleatoriamente tais que $3|(m-n)$. Deve-se mostrar que $3|(n-m)$. Pela definição de "divide" temos que $3|(m-n)$ e $m-n=3k$ e $n-m=3\cdot -k$, para algum inteiro k. Logo, $3|(n-m)$.

Transitiva (**V**): T é transitiva sse

$$\forall m, n, o \in \mathbb{Z}, \text{ se } mTn \text{ e } nTo \text{ então } mTo.$$

Pela definição de T, isto significa

$$\forall m, n, o \in \mathbb{Z}, \text{ se } 3|(m-n) \text{ e } 3|(n-o) \text{ então } 3|(m-o).$$

Suponha que m, n e o sejam inteiros específicos mas escolhidos aleatoriamente tais que $3|(m-n)$ e $3|(n-o)$. Deve-se mostrar que $3|(m-o)$. Pela definição de "divide" temos que: $3|(m-n)$ e $m-n=3r$; e $3|(n-o)$ e $n-o=3s$, para inteiros r e s, respectivamente. Sabemos que:

$$\begin{aligned} (m-n)+(n-o) &= 3r+3s \\ m-o &= 3\cdot(r+s) \end{aligned}$$

O que mostra que $3|(m-o)$.

- **Exercício:** Mostre que $T \subseteq Z \times Z$, $m \, T \, n \iff 4 \mid (m - n)$ é uma relação de equivalência.

$\hookrightarrow m \equiv n \bmod 4$

➢ *Classes de Equivalência*

- Seja <u>**R uma relação de equivalência em A**</u>. Seja *a* ∈ *A. Então, a* <u>***classe de equivalência de a***</u>, denotada por <u>**ā *ou* [a],**</u> é definida como:

$$\bar{a} = \{ x \in A \mid xRa \}$$

$$\bar{a} = \{ x \in A \mid (x, a) \in R \}$$

Exemplo:

Seja A = { 0, 1, 2, 3 }. Seja a relação de equivalência definida por $R \subseteq A \times A$,

$$R = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 1) \}$$

Então,

- classe de equivalência do elemento 0: $\bar{0} = \{ x \in A \mid x R 0 \} = \{ 0, 2 \}$ [0]
- classe de equivalência do elemento 1: $\bar{1} = \{ x \in A \mid x R 1 \} = \{ 1, 3 \}$ [1]

- classe de equivalência do elemento 2: $\overline{2} = \{ x \in A \mid x R 2 \} = \{ 0, 2 \}$ $[2]$
- classe de equivalência do elemento 3: $\overline{3} = \{ x \in A \mid x R 3 \} = \{ 1, 3 \}$ $[3] = [1]$

Assim, $(\overline{0} = \overline{2}) \wedge (\overline{1} = \overline{3})$.

- Isto significa que, segundo esta relação, 0 é equivalente (congruente) a 2 e 1 é equivalente a 3: (0 ≡ 2) ^ (1 ≡ 3).

- **Exercício:** Seja A = {0, 1, 2, 3, 4} e R uma relação de equivalência em A definida como: {(0, 0), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 0), (4, 4)}. Determine as classes de equivalência em A:

- As classes de equivalência de R são

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{x \in A | xR0\} = \{0, 4\} \\
[1] &= \{x \in A | xR1\} = \{1, 3\} \\
[2] &= \{x \in A | xR2\} = \{2\} \\
[3] &= \{x \in A | xR3\} = \{1, 3\} \\
[4] &= \{x \in A | xR4\} = \{0, 4\}
\end{aligned}
$$

- Assim, as classes distintas de equivalência da relação são:

$$\{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}$$

- **Exemplo:** Seja R a relação de congruência módulo 3 no conjunto Z de todos os números inteiros. Isto significa que para todos inteiros m e n, mRn $\Leftrightarrow 3 | (m - n) \Leftrightarrow m \equiv n \bmod 3$ Descreva as classes de equivalência distintas de R.

Para cada inteiro a,

$$\begin{aligned}
[a] &= \{x \in \mathbb{Z} | xRa\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | 3|(x-a)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | x - a = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + a, \text{ para algum inteiro } k\}.
\end{aligned}$$

- Assim:

$$\begin{aligned}
[0] &= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + 0, \text{ para algum inteiro } k\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\} \\
&= \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}, \\
[1] &= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + 1, \text{ para algum inteiro } k\} \\
&= \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10 \ldots\}, \\
[2] &= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + 2, \text{ para algum inteiro } k\} \\
&= \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11 \ldots\}.
\end{aligned}$$

- Portanto, cada inteiro está em uma das três classes [0], [1] ou [2].

- Isto significa que uma classe de equivalência pode ter diferentes “nomes”.

- Neste exemplo, a classe do 0 ([0]) pode ser “chamada” pela classe do 3 ([3]) ou pela classe do −6 ([−6]), e assim por diante.

- Mas o que a classe [0] ou [3] ou [−6] significa é o conjunto.

$$\{x \in Z \mid x = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\}.$$

- Então: $$[0] = [3] = [-3] = [6] = [-6] = \dots$$ $$[1] = [4] = [-2] = [7] = [-5] = \dots$$ $$[2] = [5] = [-1] = [8] = [-4] = \dots$$

As três classes de equivalência são:

1. $\{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\}$
   ➜ Conjunto dos inteiros divisíveis por 3.

2. $\{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + 1, \text{ para algum inteiro } k\}$
   ➜ Conjunto dos inteiros que deixam resto 1 quando divididos por 3.

3. $\{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + 2, \text{ para algum inteiro } k\}$
   ➜ Conjunto dos inteiros que deixam resto 2 quando divididos por 3.

- **Definição (Congruências Modulo n):**

- Sejam a; b Є Z e n Є N – {0; 1}. Dizemos que a é congruente a b modulo n e denotamos a ≡ b mod n, se e somente se a e b tem o mesmo resto quando divididos por n.

- Ou seja, tomando A Є Z temos:
- a ≡ b mod n ⇔ (a, b) Є R ⇔ a e b tem o mesmo resto quando divididos por n ⇔ a − b é divisível por n ⇔ a − b é um múltiplo de n:

- Resultado: A relação de congruência definida acima é uma relação de equivalência em Z.

- **Exercício:** Seja $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ e a relação de equivalência definida por $S \subseteq A \times A$, $xSy \Leftrightarrow (x - y)$ é divisível por 4 . Determine as classes de equivalência definidas por S.

cada classe de equivalência é uma partição.

➢ *Partição de um conjunto*

- Uma partição de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios cuja união é igual a S.

- <u>Qualquer relação de equivalência divide o conjunto onde está definida em uma partição</u>. Esta divisão é feita a partir das classes de equivalência, ou seja, <u>***S é a união das classes de equivalência, sendo essas classes todas disjuntas.***</u>

❑RELAÇÕES DE ORDEM

- Algumas relações são usadas para ordenar elementos de conjuntos (alguns ou todos):

- Exemplos:
- Ordenamos palavras usando xRy, onde x vem antes de y no dicionário;

- Fazemos a programação de um projeto com xRy, onde x e y são tarefas tais que x deve ser concluída antes de y começar;

- Exemplo: Numa marcenaria que fabrica cadeiras de balanço com assentos estofados o processo pode ser dividido em uma série de tarefas, algumas delas tendo outras como pré-requisitos. A tabela a seguir mostra as tarefas para se produzir uma cadeira de balanço, os pré-requisitos e o número de horas necessário para se concluir cada tarefa.

Podemos definir uma ordem parcial no conjunto das tarefas por

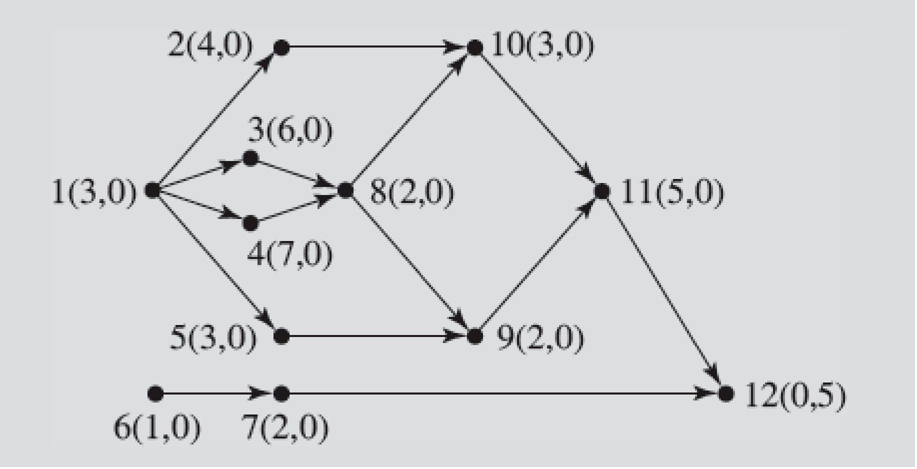
$$x \preccurlyeq y \leftrightarrow \text{tarefa } x = \text{tarefa } y \text{ ou tarefa } x \text{ é um pré-requisito para a tarefa } y$$

É fácil ver que essa relação é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Além disso,

$$x < y \leftrightarrow \text{tarefa } x \text{ é um pré-requisito para a tarefa } y$$

Tarefa	Pré-requisitos	Horas para a Conclusão
1. Seleção da madeira	Nenhum	3,0
2. Talho da peça curva que balança	1	4,0
3. Talho da parte de madeira do assento	1	6,0
4. Talho do encosto	1	7,0
5. Talho dos braços	1	3,0
6. Seleção do tecido	Nenhum	1,0
7. Costura da almofada	6	2,0
8. Junção do encosto e da parte de madeira do assento	3, 4	2,0
9. Colocação dos braços	5, 8	2,0
10. Colocação da peça curva que balança	2, 8	3,0
11. Aplicação de verniz	9, 10	5,0
12. Colocação da almofada	7, 11	0,5

- No diagrama de Hasse para essa ordem parcial, os nós são as tarefas; adicionaremos a cada nó a informação sobre o tempo necessário para a conclusão da tarefa. Além disso, como é tradicional, orientaremos o diagrama de modo que, se $x \prec y$, então x estará à esquerda de y, em vez de embaixo. Logo, o diagrama vai da esquerda para a direita, em vez de debaixo para cima.



➢ RELAÇÕES DE ORDEM TOTAL E PARCIAL EM A

- Seja R uma relação em A ($R \subseteq A \times A$). Então, R é uma relação de ordem parcial em A se, e somente se, R é reflexiva, transitiva e anti-simétrica.

- **Definição**
- R é **relação de ordem parcial** em A ⇔ ***R é reflexiva, transitiva e anti-simétrica.***

- **Obs 1**: A relação de ordem é interna e **só existe se comparar elementos do mesmo conjunto.**
- **Obs 2:** Um conjunto A, junto com seu Ordenamento Parcial R, é chamado de **conjunto parcialmente ordenado *(poset)*.**

➢ Ordem total ou Ordem Parcial?

- Como vimos uma relação R em um conjunto *A* que seja reflexiva, antissimétrica e transitiva é chamada de relação de **ordem parcial** em *A*.

- Agora, seja R uma relação de ordem parcial em A**,** então esta também será uma **relação de ordem total** **se e somente se:**

R é uma relação de **ordem total** $\Leftrightarrow$ $(\forall\, x, y \in A)\,(\,(x,y) \in R \;\vee\; (y, x) \in R\,)$

- **Obs: Toda relação de ordem total é também uma relação de ordem parcial, a recíproca não é verdadeira.**

Exemplo

- Seja A um subconjunto qualquer de IR. Mostre que a relação em A definida por “ x ≤ y” é uma relação de ordem em A:

- Reflexiva (V): Para $\leq$ ser reflexiva significa que $x \leq x$ para todos números reais. Mas $x \leq x$ significa que $(x < x) \vee (x = x)$ e $x = x$ é sempre verdadeiro.

- Anti-simétrica (V): Para $\leq$ ser anti-simétrica significa que para todos números reais x e y, se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$. Isto é consequência imediata da definição de $\leq$ e a propriedade de tricotomia que diz que dados quaisquer números reais x e y exatamente uma das afirmações é verdadeira: $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$.

Transitividade (V): Para $\leq$ ser transitiva significa que para todos os reais x, y e z, se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$. Isto é verdade pela definição de $\leq$ e pela propriedade transitiva da ordem dos números reais que diz que dados quaisquer números reais x, y e z, se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

- Então no exercício anterior a relação “ $x \leq y$” é uma relação de ordem parcial em A para qualquer $x,y \in$ IR.

- Agora será que esta é também uma relação de ordem total?

- Resposta: Sim também será uma relação de ordem total, pois como vimos na demonstração da propriedade anti-simétrica, se $x,y \in$ IR, ou $x \leq y$ ou $y \leq x$ ou seja todos os elementos do conjunto estão relacionados.

- **OBS:** Um conjunto A, junto com seu Ordenamento Parcial R é chamado de **conjunto parcialmente ordenado *(poset).***

- **Exemplo:** Considere um conjunto S qualquer. A relação de inclusão, (⊆) é uma relação de ordem sobre o conjunto das P(S) ("o conjunto das partes de S").

- Vejamos que definimos nossa relação como: $\subseteq = \{(S1; S2) \in P(S) \times P(S) \mid S1 \subseteq S2\}$

i. Reflexiva: Sim pois seja: $S1 \in P(S)$: como $S1 \subseteq S1$, logo é reflexiva

ii. Anti-simétrica: Sim pois se $S1 \subseteq S2$ e $S2 \subseteq S1$ logo $S1 = S2$

iii. Transitiva: Sim pois se $S1 \subseteq S2$ e $S2 \subseteq S3$ então $S1 \subseteq S3$

- Portanto, (P(S);) é uma relação de ordem parcial.

- Agora novamente será que esta é uma relação de ordem total?

- Resposta: Não
- Demonstração: Veja o contra exemplo. Considere um conjunto S = {1,2,3}. Logo o conjuntos das partes de S é:

$$P(S)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}; \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Agora observe por exemplo que: $\{1,2\} \not\subseteq \{2,3\}$, e $\{2,3\} \not\subseteq \{1,2\}$.

Portanto esta é apenas uma relação de ordem Parcial!

- Mais alguns exemplos de relações de ordem.

- **Ex:** Sejam A = {a, b, c} e R_1 = {(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)}.
- R_1 é uma relação de ordem parcial pois $(b,c) \notin R_1$ e $(c,b) \notin R_1$
- Além disso as propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva são verificadas

- **Ex:** Sejam A = {a, b, c} e R_2 = {(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)}. R_2 é uma relação de ordem total. Verifique!

- Solução:
- Reflexiva: Todos os pares da forma (x, x), x ∈ A pertence a R_2,
- Anti-Simétrica: Nenhum par da forma (x, y), x, y ∈ A, x = y que pertence a relação (x, y) ∈ R_2 arrasta seu simétrico ou seja (y, x) ∉ R_2.
- A propriedade transitiva pode ser verificada por exaustão:
- (a, a) ∧ (a, b) → (a, b),
- (b, b) ∧ (b, c) → (b, c),
- (a, a) ∧ (a, c) → (a, c), e
- (a, b) ∧ (b, c) → (a, c)
- E a propriedade total é satisfeita pelos pares (a, b), (b, c), (a, c) para os pares da forma (x, y), x, y ∈ A, x ≠ y e pelos pares (a, a), (b, b), (c, c) para os pares da forma (x, y), x, y ∈ A, x = y.

- Exemplo:

1) A relação no conjunto A={2,4,8,16,...,2n,...) definida por “x é múltiplo de y” **é uma relação de ordem total** em A.

2) A relação no conjunto dos números naturais por “x|y” (relação de divisibilidade) é uma **Relação de Ordem Parcial** nos naturais porque dois números naturais nem sempre são comparáveis por esta ordem, como, por exemplo, 5 e 7

3) No conjunto dos inteiros positivos munidos com a operação divisão, $\left(\mathbb{Z}^+, |\right)$, 3 e 9 são comparáveis pois 3 |9. Já os inteiros 5 e 7 são incomparáveis, pois $5 \nmid 7$ e $7 \nmid 5$.

- **Exercício:** Seja D a relação divide em Z+ (inteiros positivos) definida como:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+, a|b \Leftrightarrow b = k \cdot a, \text{ para algum inteiro } k.$$

- Mostre que D é uma relação de ordem.

- Reflexiva (V): D é reflexiva sse $\forall a \in \mathbb{Z}^+, a|a$.
  Suponha $a \in \mathbb{Z}^+$. Temos que $a = 1 \cdot a$ e assim $a|a$ pela definição da divisibilidade.

- Anti-simétrica (V): D é anti-simétrica sse $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$, se $a|b \wedge b|a$ então $a = b$.
  Suponha $a, b \in \mathbb{Z}^+$ e aRb e bRa. Pela definição de R, $a|b$ e $b|a$. Pela definição de divide existem inteiros k_1 e k_2 tais que $b = k_1 \cdot a$ e $a = k_2 \cdot b$. Temos que

$$b = k_1 \cdot a = k_1 \cdot (k_2 \cdot b) = (k_1 \cdot k_2) \cdot b$$

Ou seja, $k_1 \cdot k_2 = 1$. Temos que k_1 e k_2 são inteiros positivos. Mas o único produto de dois inteiros positivos que é igual 1 é $1 \cdot 1$. Assim, $k_1 = k_2 = 1$. Assim, $a = k_2 \cdot b = 1 \cdot b = b$.

- Transitividade (**V**): D é transitiva sse $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$.

$$b = k_1.a$$

$$c = k_2.b$$

$$c = k_2.k_1.a$$

$$c = k_3.a \Rightarrow a \mid c$$

- **Exemplo 4:** O poset (Z; ≤) é totalmente ordenado, pois a ≤ b ou b **≤** a sempre que a e b são inteiros.

- Observação:
- Podemos definir também o conceito de ***quasi-ordem.***
- Em outras palavras, dizemos que uma relação R sobre um conjunto A é uma relação de **quasi-ordem se R for: reflexiva e transitiva**

- **OBS: Não confundir quasi-ordem com ordem parcial!**