Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS

Matemática Discreta – Aula 7 - Grafos e Diagrama de Hasse

Professor: Iuri Jauris

1º Semestre de 2022

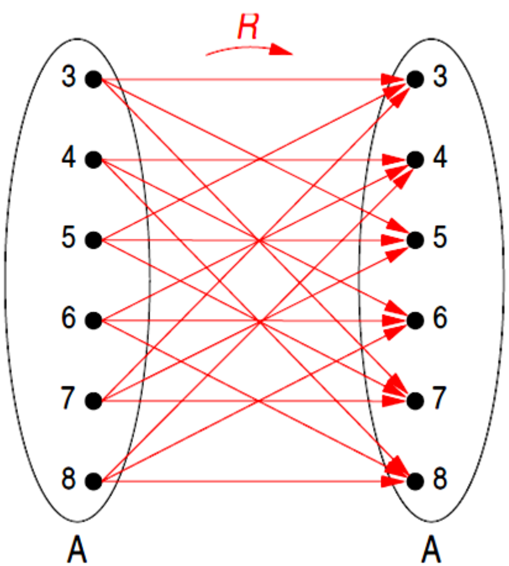
➢ Grafo dirigido de uma relação

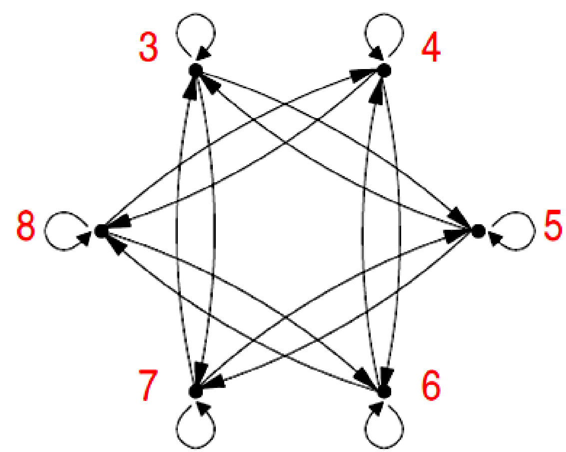
- Seja A = {3; 4; 5; 6; 7; 8} e a relação binária R em A definida como:

$$\forall(x,y) \in A \times A, xRy \Leftrightarrow 2|(x-y)$$

$R = \frac{x-y}{2}$

- Podemos representar essa relação na forma de um **grafo dirigido**, veja a baixo:



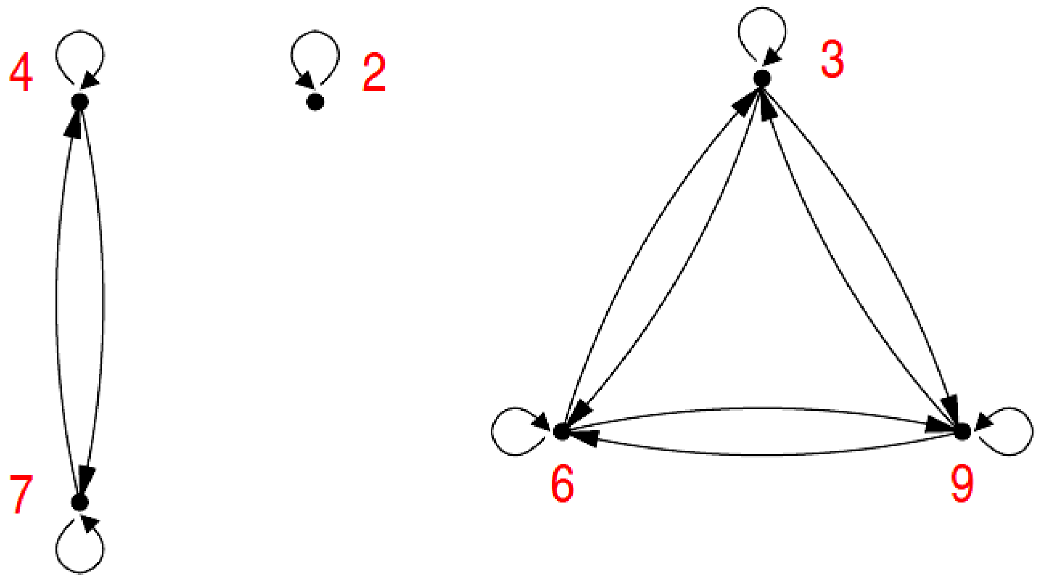


- **Exercício:** Seja A = {2; 3; 4; 6; 7; 9} e a relação binária R em A definida como:

$R = \frac{x-y}{3}$

$$\forall (x, y) \in A \times A, xRy \Leftrightarrow 3|(x-y)$$

- Represente essa relação em um grafo dirigido;



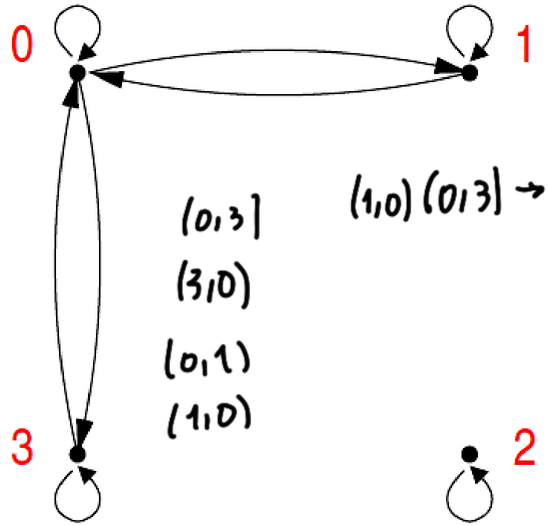
- Observe que o grafo do exercício anterior tem três propriedades importantes:

R

1. Cada ponto do grafo tem uma seta para o próprio ponto;
2. Em todos os casos onde existe uma seta indo de um ponto p para um ponto q, existe uma seta indo do ponto q para o ponto p; S
3. Em todos os casos onde existe uma seta indo de um ponto p para um ponto q e do ponto q para um ponto r, existe uma seta indo do ponto p para o ponto r. T

- Observe que essas propriedades correspondem as relações gerais chamadas de reflexiva, simétrica e transitiva.

- **Exemplo:** Considere o conjunto A = {0; 1; 2; 3} e a relação R definida pelo grafo a baixo, e então responda: R é uma relação de equivalência? Ou seja R é reflexiva, simétrica e transitiva?



(0,3)
(3,0)
(0,1)
(1,0)

(1,0) (0,3) → (1,3)
↓
NÃO

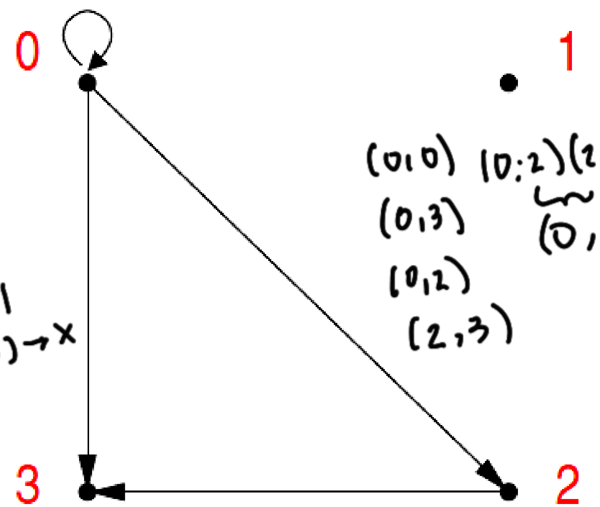
R V
S V
T F

•Reflexiva (V): Existe um laço para cada nó do grafo o que significa que cada elemento de A é relacionado consigo mesmo.

•Simétrica (V): Para cada aresta de “ida” existe uma aresta de “volta”.

•Transitiva (F): Temos 1R0 e 0R3 mas não temos 1R3, o que implica na não transitividade.

- **Exercício:** Considere o conjunto A = {0; 1; 2; 3} e a relação binária S definida pelo grafo a baixo, e então responda: S é uma relação de equivalência?



(0,0) (0;2)(2,3)
(0,3) (0,3)
(0,2)
(2,3)

(0,3)
(3,0) → x

R (F) (1,1); (2,2); (3,3)
S (F) (3,0)
T (V)

- Reflexiva (F): Não existe, por exemplo, 1R1.
- Simétrica (F): Para cada aresta de "ida" não existe uma aresta de "volta".
- Transitiva (V): Temos

Hipótese	Conclusão
(0, 2) e (2, 3)	(0, 3)
(0, 0) e (0, 2)	(0, 2)
(0, 0) e (0, 3)	(0, 3)

OBS: Os elementos x, y e z não precisam ser distintos.

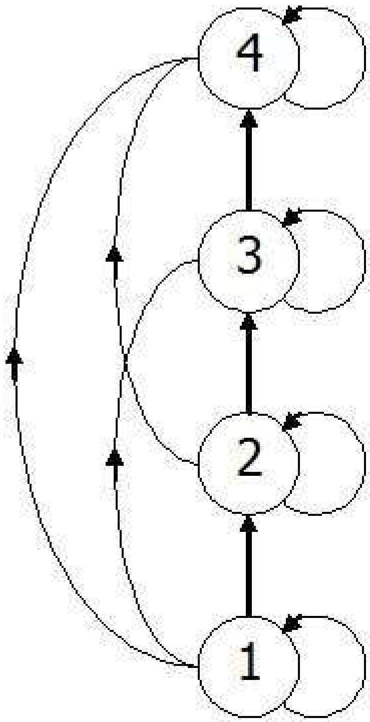
- Vimos que podemos representar conjuntos com relações ordenadas ou parcialmente ordenadas (Posets) através dos grafos.

- No entanto, num Poset muitas arestas não precisam ser mostradas, já que devem necessariamente estar presentes (grafo sempre reflexivo e transitivo).

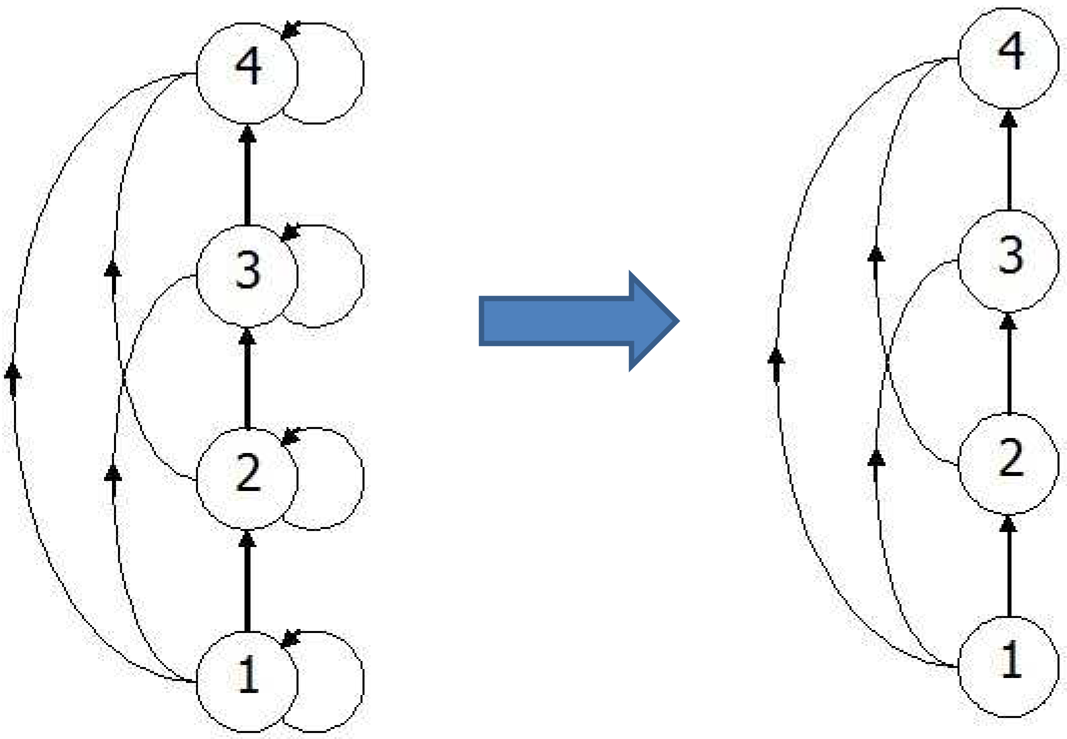
- Então pode-se retirar as arestas que sempre devem estar presentes.

- As estruturas obtidas desta forma são chamadas de **Diagramas de Hasse dos posets.**

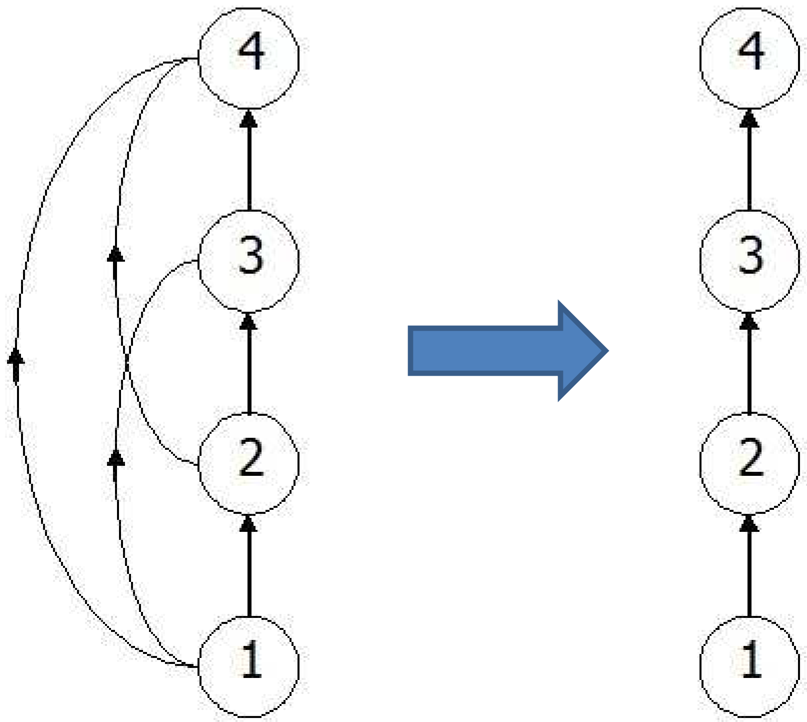
- **Exemplo 1: Considere o grafo de ordem total, sobre o conjunto** A = {1; 2; 3; 4}, dado por $R = \{(a,b) \in A \mid a \leq b\}$



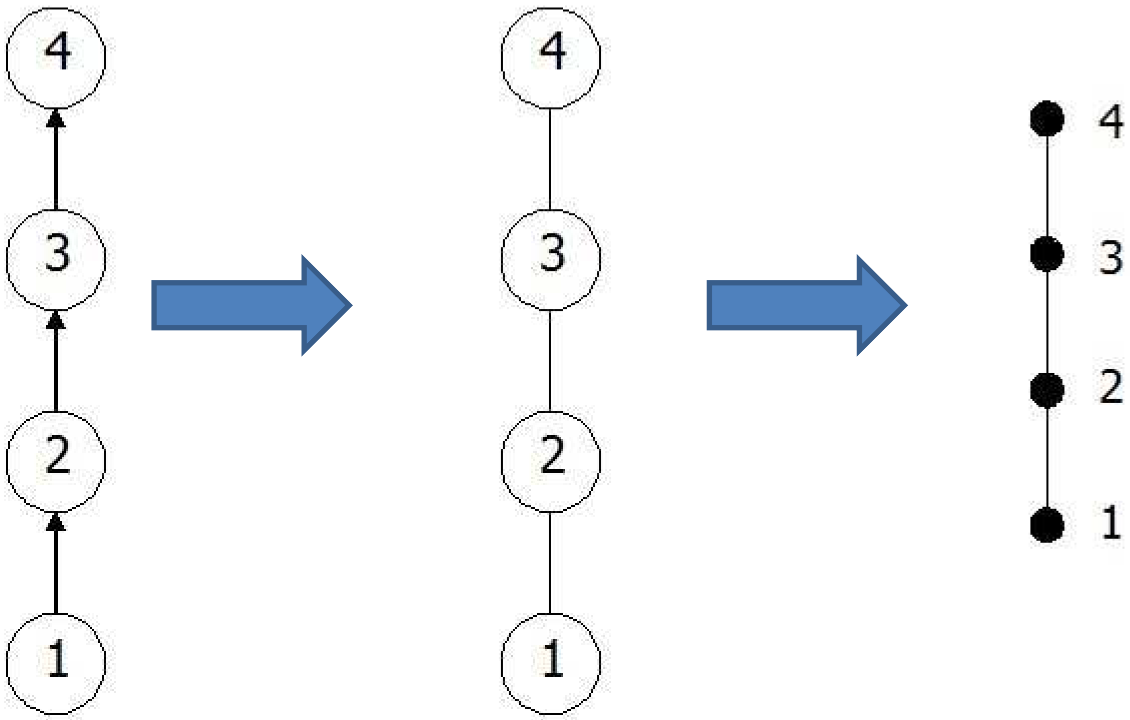
- Como a relação é uma ordem total logo R é automaticamente reflexiva, e então possui vértices em todos os loops, portanto os loops podem ser omitidos:



- Como a relação é uma ordem total é automaticamente transitiva, as arestas presentes por causa da transitividade não precisam ser mostradas, logo



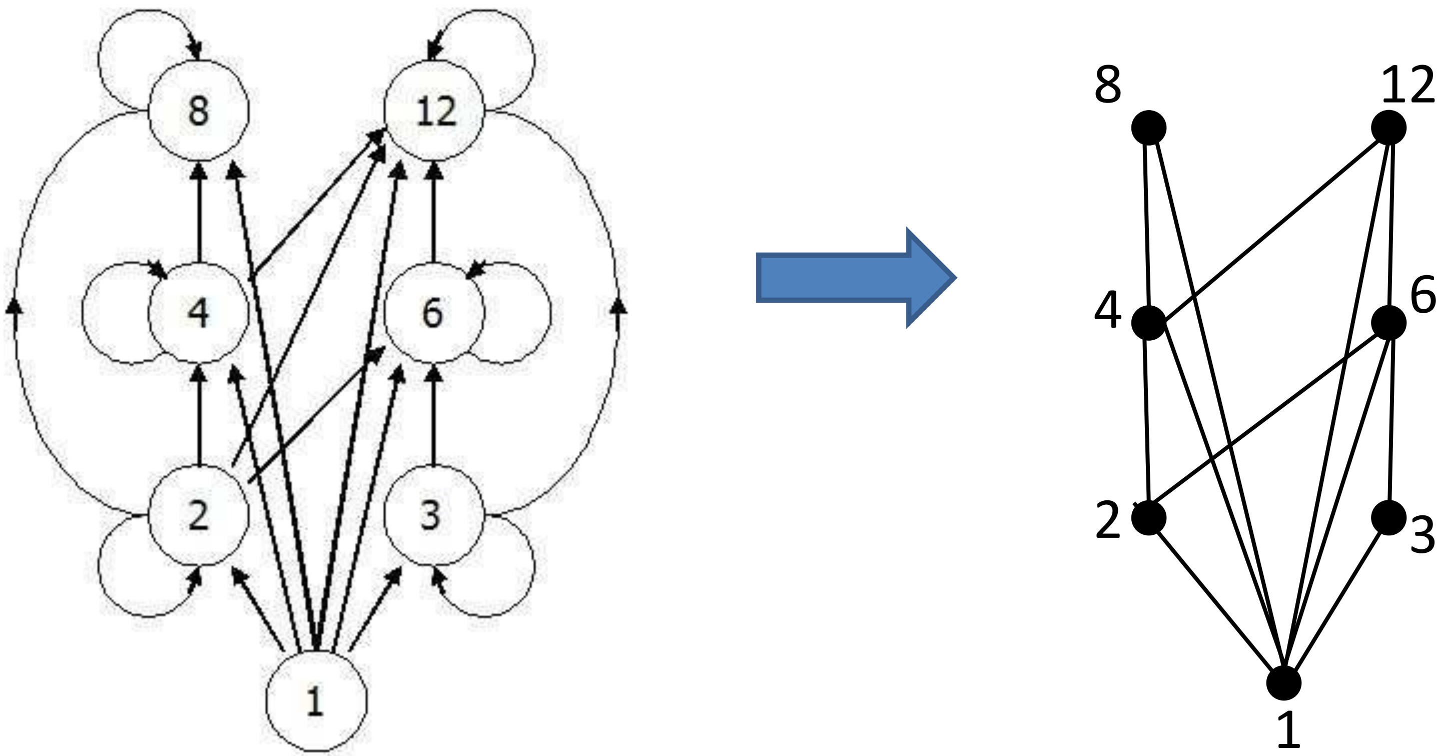
- Ainda, assumindo-se que se desenhe todas as arestas apontadas para cima, pode-se omitir a sua orientação.
- Finalmente, substitui-se os círculos por pontos:



- **Exemplo 2:** Seja A = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12}. A ordem parcial é a de divisibilidade sobre A (ou seja, a R b $\leftrightarrow$ a | b). $\frac{b}{a}$

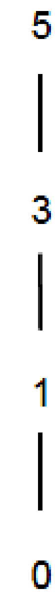
a) Desenhe o grafo da relação de ordem.

b) Desenhe o diagrama de Hasse do poset a partir do grafo



***Exemplos*:**

1) Sejam $A = \{ 0, 1, 3, 5 \}$ e $R \subseteq A \times A$, $x R y \Leftrightarrow x \leq y$



É uma relação de ordem total, já que $(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \vee (y, x) \in R)$

ORDEM TOTAL → tem simetria

ORDEM PARCIAL → sem simetria

2) Sejam $A = \{ 1, 2, 3, 6, 8, 9\}$ e $R \subseteq A \times A$, $x R y \Leftrightarrow x \mid y$

É uma relação de ordem parcial, já que

$(\exists\, 2, 3 \in A)((2, 3) \notin R \wedge (3, 2) \notin R)$