Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS

Matemática Discreta – Aula 9 – Notação de Somatório

Professor: Iuri Jauris

1º Semestre de 2022

❑ Somatórios

- O somatório é uma notação especial utilizado em diversas expressões matemáticas, com um intuito primordial de simplificação de uma expressão.

- A letra utilizada nessa notação é o $\sum$ (letra grega sigma maiúsculo) denominado sinal de somatório e é usado para indicar uma soma de várias parcelas.

indica onde termina a somar.

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \ldots + t_n = \sum_{i=0}^{n} t_i$$

indica onde inicio a somar

- Seja $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto de ***n*** números. Então o símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ representa a soma desses termos, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

a) A letra i é denominada índice do somatório e, em seu lugar, pode-se utilizar qualquer outra letra.

b) Os valores 1 e n, neste caso, são denominados, respectivamente, limites inferior e superior.

- **Exemplo**: A soma dos quadrados dos n primeiros números positivos, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

→ letra só é variável quando é indicado aqui.

Exercícios:

1) Desenvolva os seguintes somatórios;

$$a)\sum_{x=1}^{5} x^3$$

16
4
64

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 =$

$1 + 8 + 27 + 64 + 125 =$

$9 + 91 + 125 =$

$100 + 125 = 225$ //

27
+ 64
91

$$b)\sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j}$$

$(-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3} + (-1)^4 \cdot \frac{1}{4} + \ldots$

$(-1)^{\text{par}} = 1$

$(-1)^{\text{impar}} = -1$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \ldots$

$$c)\sum_{n=0}^{6} \frac{n}{n+a}$$

→ constante (não varia)

$\frac{0}{0+a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{2+a} + \frac{3}{3+a} + \frac{4}{4+a} + \frac{5}{5+a} + \frac{6}{6+a}$

0

desde que $a \neq 0$

2) Escreva na notação de somatório as expressões:

$$a)\, 1-3+5-7+9\ldots$$

$$b)\, 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{6}{4}+\frac{24}{5}$$

$$c)\, \frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{10}{11}$$

3) Calcule o valor dos somatórios:

$$a)\sum_{n=0}^{4}(-1)^n.n! \qquad b)\left(\sum_{i=0}^{5} i\right)^2-\sum_{i=0}^{5} i^2 \qquad c)\sum_{x=3}^{7}(x+2)$$

Respostas: a) 20 b)170 c) 35

➢ Propriedades do somatório

quebrar em 2 somatórios

a) O somatório das somas (ou da subtração) é a soma (ou subtração) de somatórios:

$$\sum_{k=p}^{n}(x_k + y_k) = x_p + y_p + x_{p+1} + y_{p+1} + x_{p+2} + y_{p+2} + \cdots + x_{n-2} + y_{n-2} + x_{n-1} + y_{n-1}$$

$$+x_n + y_n = (x_p + x_{p+1} + x_{p+2} + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) + (y_p + y_{p+1} + y_{p+2} + \cdots + y_{n-2}$$

$$+y_{n-1} + y_n) = \sum_{k=p}^{n}(x_k) + \sum_{k=p}^{n}(y_k)$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(2^k + 2k) = \sum_{k=1}^{3}(2^k) + \sum_{k=1}^{3}(2k) = (2^1 + 2^2 + 2^3) + (2.1 + 2.2 + 2.3) = 14 + 12 = 26$$

b) O somatório do produto de uma variável por uma constante é o produto da constante pelo somatório da variável:

$$\sum_{k=p}^{n}(\alpha.x_k) = \alpha.x_p + \alpha.x_{p+1} + \alpha.x_{p+2} + \cdots + \alpha.x_{n-2} + \alpha.x_{n-1} + \alpha.x_n = \alpha.(x_p + x_{p+1} + x_{p+2}$$

$$+ \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) = \alpha.\sum_{k=p}^{n}(x_k)$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(5k^2) = 5\sum_{k=1}^{3}(k^2) = 5(1^2 + 2^2 + 3^2) = 5.14 = 70$$

c) O somatório do produto de o duas variáveis não se desdobra, tem que ser calculado:

$$\sum_{k=p}^{n}(x_k.\, y_k) = x_p.\, y_p + x_{p+1}.\, y_{p+1} + x_{p+2}.\, y_{p+2} + \cdots + x_{n-2}.\, y_{n-2} + x_{n-1}.\, y_{n-1} + x_n.\, y_n =$$

$$\sum_{k=p}^{n}(x_k.\, y_k)$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(2k.\, k^2) = 2.1.1^2 + 2.2.2^2 + 2.3.3^2 = 2 + 16 + 54 = 72$$

$$\sum_{x=1}^{3} 2^x \cdot x^2 = (2^1 \cdot 1^2) + (2^2 \cdot 2^2) + (2^3 \cdot 3^2) = (2.1) + (4.4) + (8.9) = 2 + 16 + 72 = 90$$

d) O somatório de uma variável constante é o produto dessa constante pelo número de parcelas:

$$\sum_{k=p}^{n}(\alpha) = \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n-p+1 \text{ vezes}} = (n - p + 1).\,\alpha$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(10) = (3 - 1 + 1).10 = 3.10$$

e) O somatório de uma variável que não depende do índice de somatório é o produto dessa variável pelo número de parcelas:

$$\sum_{k=p}^{n}(x_l) = \underbrace{x_l + x_l + \cdots + x_l}_{n-p+1 \text{ vezes}} = (n - p + 1).\,x_l$$

quem é variável? definido embaixo do somatório!

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(x^2) = (3 - 1 + 1).\,x^2 = 3x^2$$

↳ x não altera ∴ x^2 é constante

f) O somatório de termos de uma sucessão (progressão) aritmética ($u_k = u_1 + (k-1).r$) é dado por:

$$\sum_{k=p}^{n}(u_k) = \frac{(n-p+1).(u_p+u_n)}{2}$$

Exemplo: se é do 1º grau: é PA

$$\sum_{k=1}^{3}\underbrace{(3k-1)}_{\text{PA de razão 3}} = \frac{(3-1+1).(u_1+u_3)}{2} = \frac{(3-1+1).(3.1-1+3.3-1)}{2} = \frac{3.10}{2} = \overset{15}{\cancel{30}}$$

g) O somatório de termos de uma sucessão (progressão) geométrica ($u_k = u_1 \,.\, r^{(k-1)}$) é dado por:

$$\sum_{k=p}^{n}(u_k) = u_p.\frac{1-r^{n-p+1}}{1-r}$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(2^k) = u_1.\frac{1-2^{3-1+1}}{1-2} = 2^1.\frac{1-2^3}{1-2} = 2.7 = 14$$

- Observação:
- Os somatórios podem não incluir só variáveis. Podem incluir também, por exemplo, outros somatórios. Neste caso, chamam-se somatórios duplos (não há limite para o número de somatórios envolvidos em somatórios, existem somatórios triplos, quádruplos, etc.)

❑ Somatórios duplos.

- Basta calcular o somatório de dentro, tendo em atenção o índice de soma e depois calcular o somatório de fora, utilizando como variável o resultado do segundo somatório e tendo em atenção o índice da soma. Em geral:

$$\sum_{k=p}^{n}\left(\sum_{l=q}^{m}(x_{k_l})\right) = \sum_{k=p}^{n}\left(x_{k_q} + x_{k_{q+1}} + x_{k_{q+2}} + \cdots + x_{k_{m-2}} + x_{k_{m-1}} + x_{k_m}\right) = (x_{p_q} + x_{p_{q+1}} + x_{p_{q+2}}$$

$$+ \cdots + x_{p_{m-2}} + x_{p_{m-1}} + x_{p_m}) + (x_{p+1_q} + x_{p+1_{q+1}} + x_{p+1_{q+2}} + \cdots + x_{p+1_{m-2}} + x_{p+1_{m-1}} + x_{p+1_m})$$

$$+(x_{p+2_q} + x_{p+2_{q+1}} + x_{p+2_{q+2}} + \cdots + x_{p+2_{m-2}} + x_{p+2_{m-1}} + x_{p+2_m}) + \cdots + (x_{n-2_q} + x_{n-2_{q+1}}$$

$$+x_{n-2_{q+2}} + \cdots + x_{n-2_{m-2}} + x_{n-2_{m-1}} + x_{n-2_m}) + (x_{n-1_q} + x_{n-1_{q+1}} + x_{n-1_{q+2}} + \cdots + x_{n-1_{m-2}}$$

$$+x_{n-1_{m-1}} + x_{n-1_m}) + (x_{n_q} + x_{n_{q+1}} + x_{n_{q+2}} + \cdots + x_{n_{m-2}} + x_{n_{m-1}} + x_{n_m})$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{l=2}^{4}(l^2.2k)\right) = \sum_{k=1}^{3}(2^2.2k + 3^2.2k + 4^2.2k) = \sum_{k=1}^{3}(58k) = 58.1 + 58.2 + 58.3 = 348$$

- Observação: Observe no exemplo a cima que a variável do somatório de fora se comporta como se fosse uma constante, ou seja, não varia enquanto executamos o somatório de dentro.

Exercício: Calcule;

a) $\sum_{i=1}^{6}(i)$

b) $\sum_{i=3}^{6}\left(2^{i-2}-1\right)$

c) $\sum_{j=10}^{12}(k)$

d) $\sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=2}^{5}(2i+j))$

e) $\sum_{q=325}^{328}[3(q-320)+10]$

f) $\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=10}^{15}\left(j^{2}\right)\right)$

g) $\sum_{k=1}^{3}[\ln(e^{k})]$

Respostas

a) 21

b) 26

c) 3k

d) 108

e) 118

f) 180

g) 6

Exercícios envolvendo somatórios duplos:

1) Desenvolva os seguintes somatórios:

$$a)\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=2}^{4}(xy-10) \qquad b)\sum_{x=2}^{5}\sum_{y=2}^{3}(x+y)^2$$

2) Calcule o valor dos somatórios:

$$a)\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2}(xy-5) \qquad b)\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{4}(x-j)$$

3) Encontre as expressões a baixo na forma de somatório;

$$a)2^3+2^4+2^5+3^3+3^4+3^5$$

$$b)\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{4}+\frac{4}{5}$$

Repostas:

1)

a) $-8-7-6-6-4-2-4-1+2$

b) $16+25+25+36+36+49+49+64$

2)

a) -12

b) $9x-27$

3)

$$a)\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=3}^{5} i^{j}$$

$$\text{b)}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=4}^{5}\frac{i}{j}$$