Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS

Matemática Discreta – Aula 4- Relações

Professor: Iuri Jauris

2º Semestre de 2021

❑N-uplas ordenadas

- Vimos que **na Teoria de Conjuntos a ordem na representação dos elementos não é relevante.**
- Por exemplo: A= {a, e, i , o , u} ou A={o, i, u, e, a} representam o conjunto das vogais.
- Vamos agora estudar outras estruturas onde **a ordenação dos elementos é relevante.**

- ***N-uplas***
- Sequências ordenadas de elementos (**tuplas ou n-uplas ordenadas**) **são arranjos de elementos de forma sequencial**. Há diversas formas de se representar tais sequências, tais como vetores ou matrizes linha.

- Por exemplo: (a, e, i, o, u) Primeira vogal: a; Segunda vogal: e; etc. Neste exemplo a ordenação é alfabética.

- Notação: $(a_1, a_2) \rightarrow$ 2-upla (dupla)
- $(a_1, a_2, a_3) \rightarrow$ 3-upla (tripla)
- $(a_1, a_2, a_3, a_4) \rightarrow$ 4-upla (quádrupla)

. . . .

- $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \rightarrow$ n-upla

Observações

- 1. $\mathbf{(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)}$ e $\mathbf{(a_2, a_1, a_3, ..., a_n)}$ **não são iguais.**

- 2. **A natureza dos elementos ai ($1 \leq i \leq n$) não precisa ser a mesma.** Dessa forma**, $\mathbf{a_1}$ pode ser um número, enquanto que $\mathbf{a_2}$ pode ser um nome.** O importante é perceber que cada posição define a natureza do elemento que ali pode ser colocado.

Exemplos:

- (Porto Alegre, RS, Região Sul, Brasil)
- (aluno, P1, P2, PS, T1, T2, T3, G1, G2, Final)
- (sobrenome, nome)

- Obs. Pode ocorrer repetição de elementos

Nome	Cidade Nascimento	Idade	Cidade de residência	Primeiro Sobrenome	Segundo sobrenome
João	POA	20	POA	Machado	Machado

- **O conceito de sequência ordenada é fundamental em Informática,** pois é usado *como fundamento para a definição de listas ordenadas, de vetores e de registros de bancos de dados.* Por exemplo, os registros de banco de dados

- Matematicamente, os tipos mais usados de sequências ordenadas são:

i. **Pares Ordenados:** Um par ordenado é uma *sequência ordenada de dois elementos.*

- Exemplos: (1, 2),
- (a, 1),
- (POLITECNICA, 32),
- ((nome, endereço), código)

ii. **Ternas Ordenadas:** Uma terna ordenada é uma *sequência ordenada de três elementos.*

- Exemplos: (1, 2, 3),
- (a, 1, *v*),
- (POLITECNICA, 32, PUCRS),
- ((nome, endereço), código, saldo)

❑ Relação

- Uma relação, em termos práticos, **é uma forma de associação de entidades através de um certo critério**.
- Exemplos comuns de sinônimos do termo **"relação" entre pessoas são "falar", "ser amigo" ou "namorar"**. Poderíamos sistematizar estes exemplos da seguinte forma:

i. a pessoa "x" relaciona-se com a pessoa "y" se e somente se "**x fala com y**"

ii. a pessoa "x" relaciona-se com a pessoa "y" se e somente se "**x é amiga com y**"

iii. a pessoa "x" relaciona-se com a pessoa "y" se e somente se "**x namora com y**"

- Observe **no slide anterior que cada relação é diferente.** Isto porque **“falar” e “namorar” não são obviamente, a mesma coisa**. Isto é: o critério que define a relação mudou!

- No entanto, **uma relação pode ser muito mais genérica** do que usada comumente.

- O conceito de relação **compreende qualquer tipo de associação entre entidades**, tais como: pessoas; objetos; processos/etapas; entes matemáticos, como números, conjuntos e funções; etc...

Cuidado!

- Por exemplo na relação, “x é dono de y” observe que não é o mesmo que dizer “y é dono de x”.

- Por exemplo, se x é um objeto e y é uma pessoa “x é dono de y” não tem sentido pois um objeto não pode ser dono de uma pessoa.

- No entanto, “y é dono de x” tem sentido e poderá ser uma proposição verdadeira ou falsa, dependendo de quem seja “y” e de qual objeto seja “x”.

- **Ou seja, numa relação a ordem dos elementos é importante!**

- Outro exemplo: Suponha que se queira construir um condomínio residencial. Cada fase da obra, como por exemplo, projeto inicial, laudos técnicos e viabilidade, limpeza do terreno, fundações, concretagem, estrutura e paredes, teto, elétrica/hidráulica, acabamento, dentre outras..., estão relacionadas entre si por uma relação de “pré-requisito”. Então um atraso em uma da partes pode acarretar num atraso nas demais, ou em alguns casos, as relações podem incluir etapas onde algumas fases podem ocorrer concomitantemente. Além disso a ordem é importante pois não se pode construir a estrutura antes das fundações estarem prontas.
- Poderá haver um eixo de tarefas críticas, que ao atrasarem acarretarão em maiores perdas, enquanto outras tarefas paralelas poderão ser menos críticas. Portanto novamente **temos uma relação onde a ordem dos elementos é importante.**

❑ ***Relações***

- Dados A e B conjuntos, chama-se de ***<u>relação de A em B, qualquer subconjunto do produto cartesiano A x B.</u>***
- Em notação lógica:
- ρ é relação de A em B $\Leftrightarrow \rho \subseteq A \times B$

- **Observações:**

i. O **primeiro conjunto** do produto cartesiano, A, é denominado conjunto de origem ou **domínio** da relação;

ii. O **segundo conjunto** do produto cartesiano, B, é denominado conjunto de destino **(ou contradomínio)** da relação.

- **Notação**

- Para representar a proposição "x relaciona-se com y pela relação ρ" escreve-se x ρ y ou (x, y) $\in$ ρ.
- Assim: x relaciona-se com y é indicado por $x\,\rho\,y \Leftrightarrow (x, y) \in \rho$

- **Comentários**
- Uma relação, em termos algébricos, pode ser compreendida de duas formas:

i. **Uma relação é *<u>uma forma de associação entre elementos de um conjunto com elementos de outro conjunto:</u>***

   Esta é a interpretação mais usual na prática, e que nos permite sistematizar e organizar a forma como os *<u>elementos de um conjunto relacionam-se com elementos de outro conjunto ;</u>*

ii. **Uma relação de A em B _é um subconjunto de um produto cartesiano A x B:_**

- Esta compreensão dá fundamento matemático ao conceito de relação. Podemos representar a associação de elementos de um conjunto A com elementos de um conjunto B através de um par ordenado, onde a primeira componente do par será destinada a um elemento do conjunto A e a segunda componente do par, a um elemento do conjunto B. *Assim, uma relação de A em B é formada por associações do tipo (elemento de A , elemento de B).*
- Ora, *pares ordenados deste tipo são obtidos através do produto cartesiano de A com B*. Como sabemos, A x B é o conjunto formado por TODOS os pares da forma (elemento de A , elemento de B).
- **Uma relação é a seleção de ALGUNS (eventualmente TODOS) destes pares segundo algum critério.**

$A \times B = \{(1,0); (1,1); (2,0); (2,1); (3,0); (3,1)\}$

Exemplos

Sejam: A = { 1, 2, 3 } e B = { 0, 1 }
Então podem-se definir, por exemplo, as seguintes relações:

$R \subseteq A \times B, \quad x\,R\,y \Leftrightarrow x = y + 1$ $\quad R = \{(1,0); (2,1)\}$

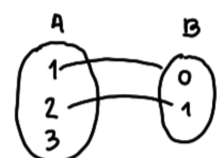
$S \subseteq A \times B, \quad x\,S\,y \Leftrightarrow (x \neq y) \wedge (y < 1)$ $\quad S = \{(1,0); (2,0); (3,0)\}$

$T \subseteq A \times B, \quad x\,T\,y \Leftrightarrow x + y > 0$

$W \subseteq A \times B, \quad x\,W\,y \Leftrightarrow x + y < 0$ $\quad W = \emptyset$ → relação sem ninguém

$V \subseteq A \times B, \quad xVy \Leftrightarrow (x \geq y) \wedge (x < 2)$ $\quad V = \{(1,0); (1,1)\}$

- Com efeito, estas relações podem ser representadas na forma de conjuntos de pares ordenados:



um para um $D = \{1,2\}$
$I_m = \{0,1\}$

muitos para um
$D = \{1,2,3\}$ $I_m = \{0\}$

$R = \{ (x, y) / x = y + 1 \} = \{ (1, 0), (2, 1) \}$

$S = \{ (x, y) / (x \neq y) \wedge (y < 1) \} = \{ (1, 0), (2, 0), (3, 0) \}$

$T = \{ (x, y) / x + y > 0 \} = \{ (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1) \}$

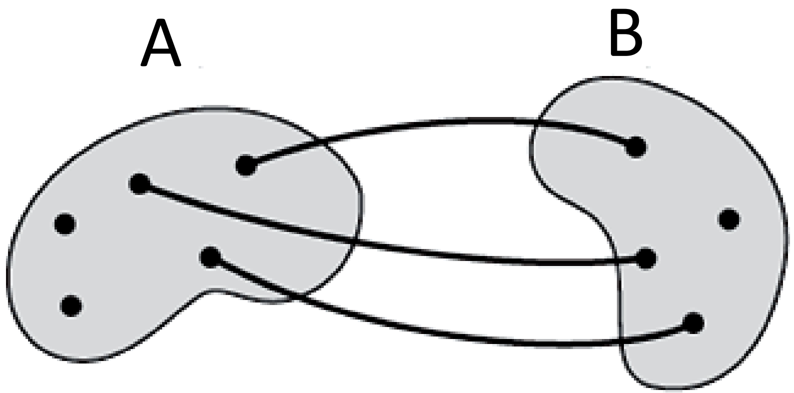
$W = \{ (x, y) / x + y < 0 \} = \emptyset$ Vazia

$V = \{(x, y) / (x \geq y) \wedge (x < 2)\} = \{(1,0), (1,1)\}$

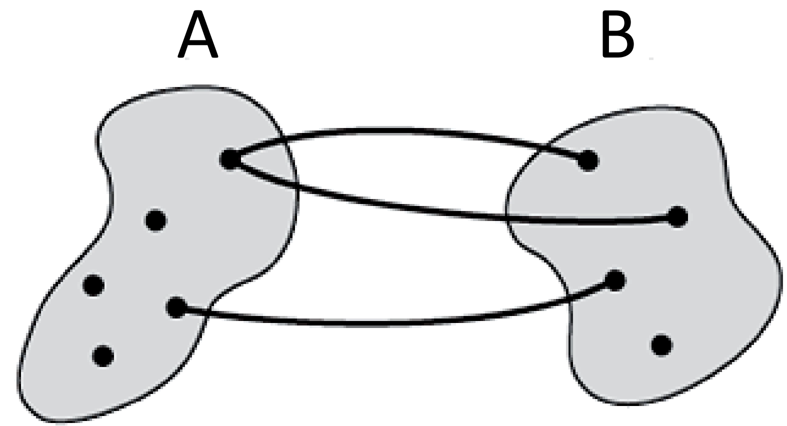
Tipos de relação:

- Uma relação $\rho \subseteq A \times B$ é dita **um para um** se cada primeira componente e cada segunda componente aparecem apenas uma vez na relação. Ex: A relação R anterior;
- A relação $\rho \subseteq A \times B$ é dita de **um para muitos** se alguma primeira componente aparece mais de uma vez, ou seja, se $x \in A$ pode aparecer em mais de um par. Ex: A relação V anterior;
- *A relação* $\rho \subseteq A \times B$ é dita de **muitos para um** se alguma segunda componente $y \in B$ aparece em mais de um par. Ex: A relação S anterior;
- Finalmente, $\rho \subseteq A \times B$ é dita uma relação de **muitos para muitos** se pelo menos um $x \in A$ aparece em mais de um par e pelo menos um $y \in B$ aparece em mais de um par.

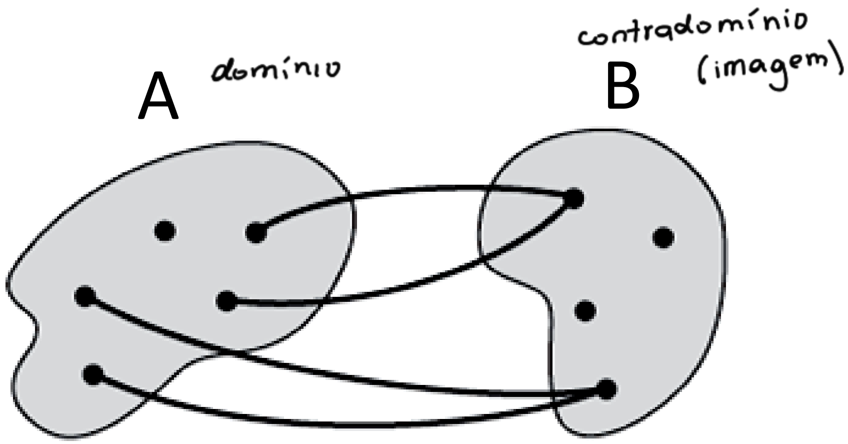
  Ex: A relação T anterior.



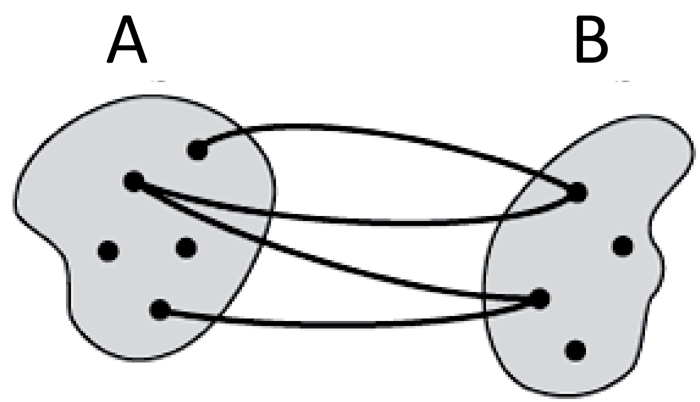
Um para um



Um para muitos



Muitos para um



Muitos para muitos

➢ Domínio e Imagem de uma Relação

- ***Partindo da concepção de relação*** como uma representação da associação de elementos de um conjunto com elementos de outro conjunto, ***é desejável distinguir quais elementos, em cada conjunto, foram efetivamente associados.*** Esta distinção pode ser obtida através dos conceitos de Domínio, Imagem e Contradomínio de uma relação.

Definições

Seja $R \subseteq A \times B$ (isto é, R é uma relação de A em B). Então definem-se:

$Dom(R) = \{ x \in A \,/\, (\exists\, y \in B)((x, y) \in R) \}$

$Im(R) = \{ y \in B \,/\, (\exists\, x \in A)((x, y) \in R) \}$

- **Exemplos:** Sejam: A = { 1, 2, 3 } e B = { 0, 1 } **e as relações dos** exemplos apresentados anteriormente, temos:
- Dom(R) = { 1, 2 } Im(R) = { 0, 1 }
- Dom(S) = { 1, 2, 3 } Im(S) = { 0 }
- Dom(T) = { 1, 2, 3 } Im(T) = { 0, 1 }
- Dom(W) = $\emptyset$ Im(W) = $\emptyset$

$R \subseteq A \times B$,	$x\,R\,y \Leftrightarrow x = y + 1$
$S \subseteq A \times B$,	$x\,S\,y \Leftrightarrow (x \neq y) \wedge (y < 1)$
$T \subseteq A \times B$,	$x\,T\,y \Leftrightarrow x + y > 0$
$W \subseteq A \times B$,	$x\,W\,y \Leftrightarrow x + y < 0$

➢ Representação de relações por tabela:

- Se (x, y) Є R, associamos o dígito “1”. Caso contrário, associamos o dígito “0”.

Exemplo:

R	0	1
1	1	0
2	0	1
3	0	0

"está presente" "está ausente"

S	0	1
1	1	0
2	1	0
3	1	0

➢ Representação Gráfica de Relações:

- Uma relação pode ser representada através de um gráfico cartesiano, onde são adotadas as seguintes convenções:

✓ O conjunto de origem da relação é representado no eixo horizontal X.

✓ O conjunto de destino da relação é representado no eixo vertical Y.

<u>Exemplos com Conjuntos Discretos</u>

Dados $A = \{ -1, 0, 1 \}$ e $B = \{ 2, 4, 6 \}$, sejam as relações de A em B:

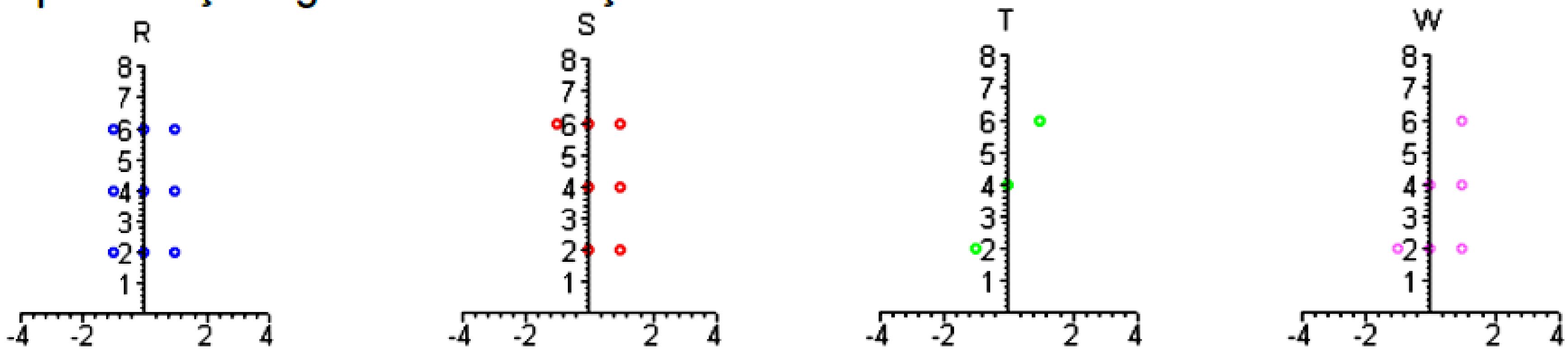
$R = A \times B$

$S \subseteq A \times B, \qquad x\, S\, y \Leftrightarrow 4x + y > 0$

$T \subseteq A \times B, \qquad x\, T\, y \Leftrightarrow y = 4+2x$

$W \subseteq A \times B, \qquad x\, W\, y \Leftrightarrow y \leq 4+2x$

As representações gráficas das relações acima são:



Representação por Tabelas:

R	2	4	6
-1	1	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

S	2	4	6
-1			
0			
1			

T	2	4	6
-1			
0			
1			

W	2	4	6
-1			
0			
1			

Exemplos com Conjuntos Contínuos

Sejam $A = [-1, 1]$ e $B = [2, 6]$.

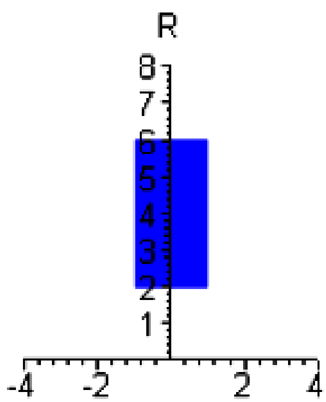
Para comparação usaremos as mesmas relações do exemplo anterior:

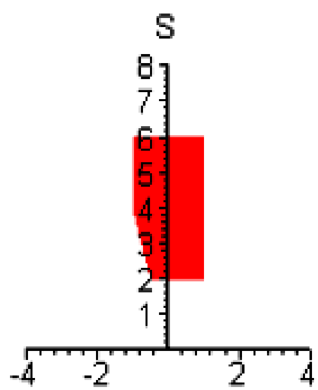
$R = A \times B$

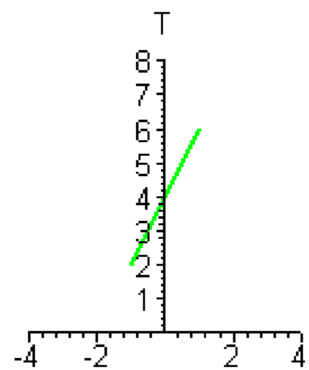
$S \subseteq A \times B$, $\quad x\,S\,y \Leftrightarrow 4x + y > 0$

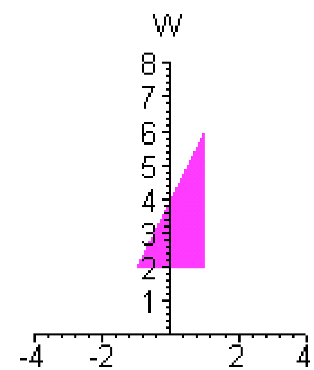
$T \subseteq A \times B$, $\quad x\,T\,y \Leftrightarrow y = 4 + 2x$ $\quad$ Obs. Neste caso não há representação por tabelas.

$W \subseteq A \times B$, $\quad x\,W\,y \Leftrightarrow y \leq 4 + 2x$ $\quad$ Representação gráfica:









➢ Operações Com Relações

- Da concepção de que *uma relação é um subconjunto de um produto cartesiano (e, portanto, um conjunto!)*, devemos observar que todos ***os resultados válidos em teoria de conjuntos são também válidos para as relações***. Em particular, podemos criar novas relações a partir das operações de:
- união de conjuntos ($\cup$)
- interseção de conjuntos ($\cap$)
- diferença de conjuntos (-)
- complementação de conjuntos (‘)

- Alguns cuidados devem ser tomados:
- 1. **O conjunto universo**, no caso de operações com **relações de A em B, é o produto cartesiano A x B;**
- 2. Como no caso de conjuntos quaisquer, ***somente podem ser operadas relações dentro de um mesmo conjunto universo***; ou seja, duas relações somente podem ser operadas se ambas forem de A em B, por exemplo.

- Isto significa que, dadas duas relações de A em B, denominadas R e S temos que:

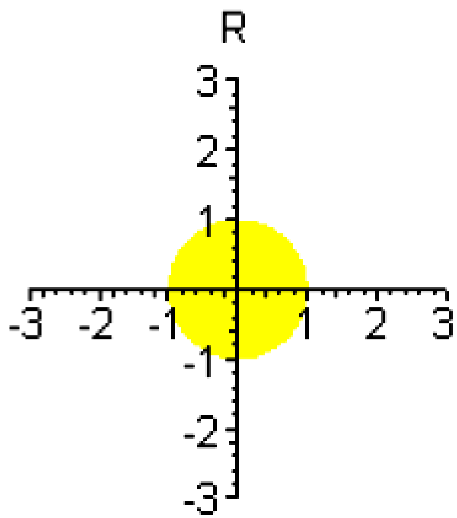
União:	$(R \subseteq A \times B) \wedge (S \subseteq A \times B) \Leftrightarrow (R \cup S \subseteq A \times B)$
Interseção:	$(R \subseteq A \times B) \wedge (S \subseteq A \times B) \Leftrightarrow (R \cap S \subseteq A \times B)$
Diferença:	$(R \subseteq A \times B) \wedge (S \subseteq A \times B) \Leftrightarrow (R - S \subseteq A \times B)$
Complementação:	$(R \subseteq A \times B) \Leftrightarrow (R' \subseteq A \times B)$

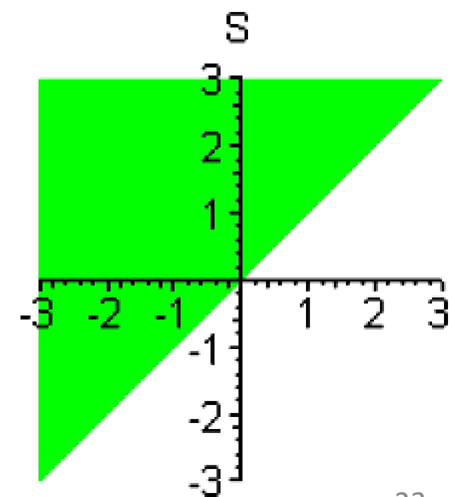
- Observe-se que $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$ e R' também são relações de A em B!

<u>Exemplo</u>
De modo a elucidar melhor os conceitos vistos acima, observemos o seguinte exemplo:
Sejam as relações

$$R \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \qquad x\,R\,y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$
$$S \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \qquad x\,S\,y \Leftrightarrow x \leq y$$

Cujas representações gráficas são:





Então definem-se as relações, de **R** em **R**:

$R \cup S \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\quad x \, R \cup S \; y \Leftrightarrow (x^2 + y^2 \leq 1) \vee (x \leq y)$

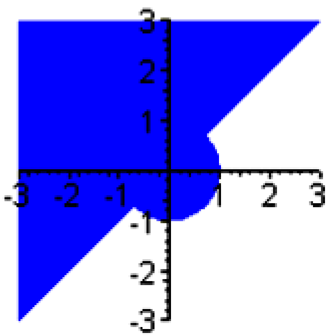
$R \cap S \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\quad x \, R \cap S \; y \Leftrightarrow (x^2 + y^2 \leq 1) \wedge (x \leq y)$

$S – R \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\quad x \, S – R \; y \Leftrightarrow (x^2 + y^2 > 1) \wedge (x \leq y)$

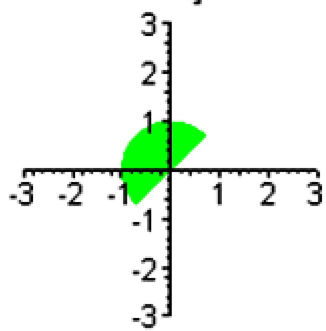
$R' \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\quad x \, R' \; y \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1$

Os gráficos das relações definidas pelas operações entre R e S são:

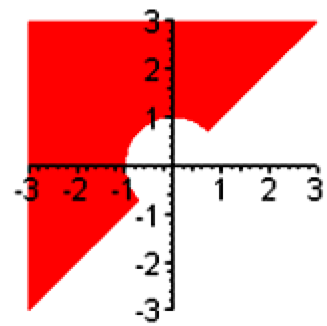
R união S



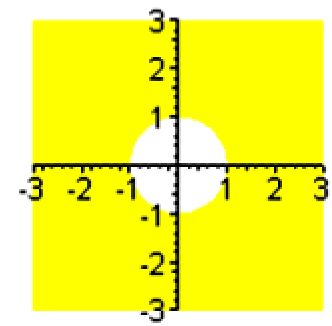
R interseção S



S-R



R'



- Exercícios:

1. Sejam as relações $R = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = |x| - 1 \}$ e $S = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 1 - x^2 \}$.

   . Represente graficamente as relações $R \cup S$, $R \cap S$ e $R - S$.

2. Determine o domínio e a imagem das relações abaixo:
   (a) R relação em $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ definida por: $x\ R\ y \leftrightarrow x < y$.
   (b) R relação em $A=\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ definida por: $x\ R\ y \leftrightarrow x = y - 1$.
   (c) R relação em A^2, onde $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ definida por: $(x, y)\ R\ (z, w) \leftrightarrow x = 2z \wedge y = 3$.
   (d) R relação em $[0; 1]$ definida por: $x\ R\ y \leftrightarrow x < y$.
   (e) R relação de $\mathbf{2Z}$ em $\mathbf{4Z}$ definida por: $x\ R\ y \leftrightarrow x = 2y$, onde $\mathbf{2Z} = \{ ..., -4, -2, 0, 2, 4, ... \}$ e $\mathbf{4Z} = \{ ..., -8, -4, 0, 4, 8, ... \}$.

3. Represente graficamente as relações abaixo, indicando também o domínio e a imagem de cada uma delas:

(a) R_1 relação de $\mathbf{R}_+$ em $\mathbf{R}$ definida por: $x \; R_1 \; y \leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 9$

(b) R_2 relação de $\mathbf{R}_+$ em $\mathbf{R}$ definida por: $x \; R_2 \; y \leftrightarrow y = 5 - x$

(c) R_3 relação de $\mathbf{R}_+$ em $\mathbf{R}$ definida por: $R_3 = R_1 \cap R_2$

(d) R_4 relação de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{Z}$ definida por: $x \; R_4 \; y \leftrightarrow y = 2x$

(e) R_5 relação de $\mathbf{R}_+$ em $\mathbf{R}$ definida por: $x \; R_5 \; y \leftrightarrow x + y < 1$