Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS

Matemática Discreta-Teoria de Conjuntos

Professor: Iuri Jauris

1º Semestre de 2022

❑ Lógica x Álgebra de Conjuntos

- No estudo da Álgebra de Conjuntos você poderá observar uma relação direta entre os conectivos lógicos introduzidos e as operações sobre conjuntos, como segue:

Conetivo Lógico	Operação sobre Conjuntos
Negação	tudo o que não pertence ao conjunto mas está dentro do universo complemento
Disjunção $\vee$	união $A \cup B$
Conjunção $\wedge$	Intersecção $A \cap B$

- Adicionalmente, as relações lógicas introduzidas também podem ser associadas com as relações sobre conjuntos, como segue:

Relação Lógica	Relação sobre Conjuntos
Implicação	Continência
Equivalência	Igualdade

- Da mesma forma, as propriedades sobre os conectivos lógicos são análogas na teoria de conjuntos, substituindo cada conetivo pela correspondente operação sobre conjuntos:

Conetivo Lógico	Operação sobre conjuntos
Idempotência: ^ e v	Idempotência: intersecção e união
Comutativa: ^ e v	Comutativa: intersecção e união
Associativa: ^ e v	Associativa: intersecção e união
Distributiva: ^ sobre v e v sobre ^	Distributiva: intersecção sobre união e união sobre intersecção
Dupla Negação	Duplo complemento
De Morgan	De Morgan
Absorção	Absorção

- Definição: Dizemos que um elemento **x pertence a um conjunto A** se x é um elemento de A. Denotamos este fato por $x \in A$.

Pertence : refere-se a elementos de um conjunto

- Para denotar que x **não pertence a A**, ou seja, que x não é um elemento do conjunto A, escrevemos $x \notin A$.

➢ **Axioma da extensão:**

– Um conjunto é completamente determinado pelos seus elementos.

– A ordem na qual os elementos são listados é irrelevante.

– Elementos podem aparecer mais de uma vez no conjunto.

❑ Teoria de conjuntos

- Provavelmente você já teve contato com os conceitos básicos da teoria dos conjuntos, ***como elemento, união, intersecção, etc.***. Nesta aula vamos revisar esses conceitos.

- Um conjunto é um conceito primitivo, que informalmente pode ser entendido como uma **coleção não ordenada de entidades distintas,** chamadas de elementos do conjunto.
- **Todos objetos matemáticos podem ser definidos em termos de conjuntos.**

- **Formas de definir um conjunto:**

- Podemos especificar um conjunto de diversas formas. Se um conjunto tem poucos elementos,podemos listá-los, um a um, em qualquer ordem, entre chaves ‘{}’, de modo que {violeta, verde, castanho} é o mesmo que {verde, castanho, violeta}.

- Além disso, cada elemento do conjunto é listado apenas uma vez; é redundante listá-lo de novo.

- Outras maneira de especificar um conjunto são através das propriedades de seus elementos, ou através de operações entre conjuntos ou ainda especificando uma função característica:

i. Usado uma notação *{ a | P(a) }, onde a* é uma variável arbitrária e *P(a)* uma afirmação matemática que pode ser verdadeira ou falsa dependendo do valor de *a*. Por exemplo:

$$\left\{a \in \mathbb{Z} \mid -5 < a < 5\right\}$$

$$\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 2x + 1 < 0\right\}$$

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x = 0\right\}$$

ii. Usando operações sobre conjuntos para criar novos conjuntos

- $S = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup P$

iii. Especificando uma função característica

- $\mu_A(x) = \begin{cases} k & \text{para } x = 1, 3, 5, 7, 9 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

- Alguns conjuntos tem notações convencionais bem estabelecidas, e que o estudante já deve estar familiarizado, como, o conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, respectivamente ($\mathbb{N}; \mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}$).

- Observação: Nem sempre é possível listar todos os elementos do conjuntos, como nos conjuntos numéricos a cima. Também nem sempre é possível utilizar todos os tipos de definição:

Exemplo: $S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$

Não é possível definir S listando os elementos.

➢ Notação de lógica em teoria de conjuntos

- A notação para a lógica formal, já trabalhada nas aulas anteriores, pode tornar mais claro o que queremos dizer com uma propriedade que caracteriza os elementos de um conjunto. Por exemplo usando a notação de lógica de predicados para o conjunto **S = {x|P(x)} significa que:**

$$(\forall x)\Big[\Big(\big(x \in S \to P(x)\big) \;\wedge \big(P(x) \to x \in S\big)\Big)\Big]$$

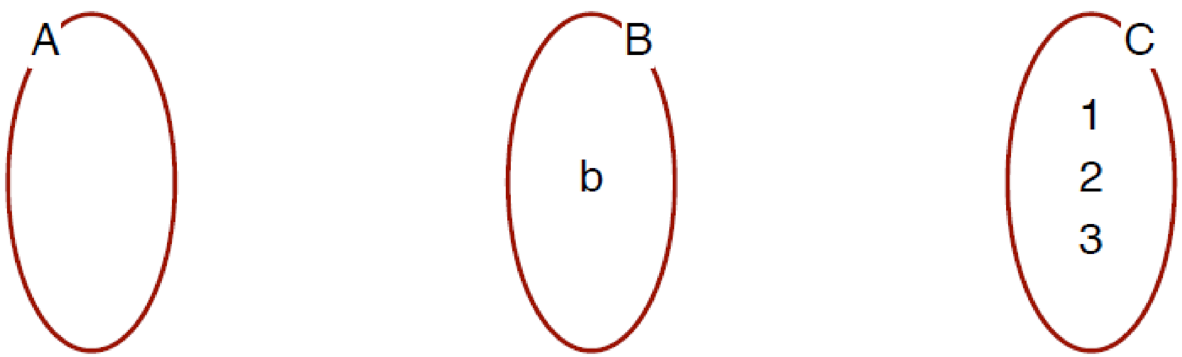
- ou seja, todos os elementos de S tem propriedade P e tudo que tem propriedade P pertence a S.

➢ Diagramas de Venn

- Os diagramas de Venn são figuras geométricas, em geral representadas no plano para expressar as estruturas da Teoria dos Conjuntos.

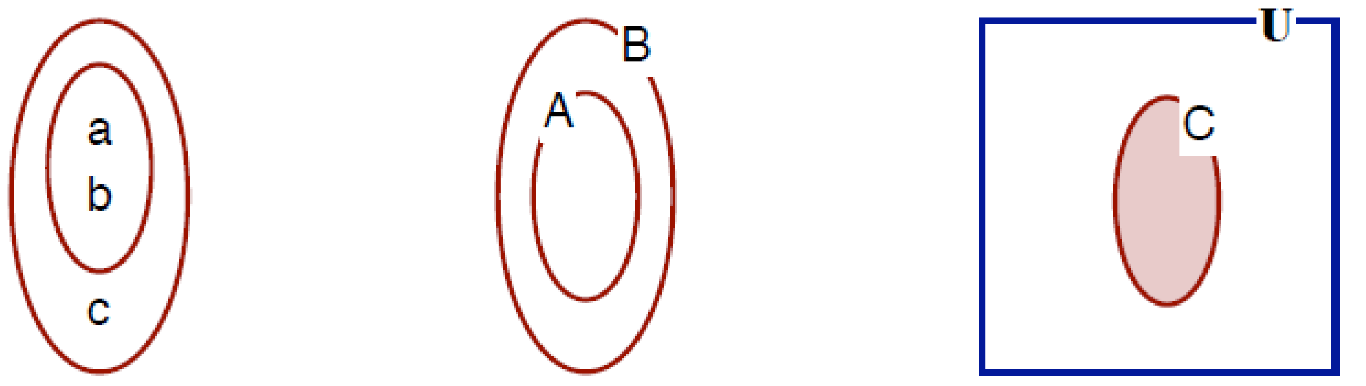
Exp: Diagramas de Venn

- um dado conjunto A
- um determinado elemento $b \in B$
- o conjunto $C = \{ 1, 2, 3 \}$



Exp: Diagramas de Venn

- $\{ a, b \} \subseteq \{ a, b, c \}$ amplamente contido
- $A \subseteq B$
- para um dado conjunto universo $\mathbf{U}$, um conjunto $C \subseteq \mathbf{U}$

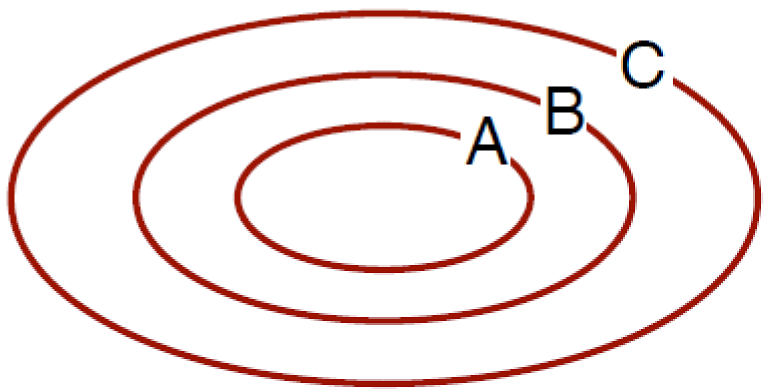


Em geral

- $\mathbf{U}$ é representado por um retângulo
- demais conjuntos por círculos, elipses, etc
- em $C \subseteq \mathbf{U}$, o conjunto C é destacado, para auxiliar visualmente

Exp: Aplicação dos Diagramas de Venn

Considere que



pode-se intuir que a noção de subconjunto é transitiva, ou seja

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

"se x é um elemento de A, x é um elemento de B."

Definição: $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$

$B \subseteq A$

se $x \in B \longrightarrow x \in A$

Teorema: Transitividade da Continência

Suponha A, B e C conjuntos. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$

Prova: (*direta*)

($X \subseteq Y$ sss todos os elementos de X também são de Y)

Suponha que A, B e C são conjuntos qq e que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$

- Seja $x \in A$.
- Como $A \subseteq B$, então por definição $(x \in A \rightarrow x \in B)$
- Portanto $x \in B$.
- Porém $B \subseteq C$, então por definição $(x \in B \rightarrow x \in C)$
- Portanto $x \in C$.
- Então como $(x \in A \rightarrow x \in C)$ logo por definição $A \subseteq C$

❑ Relações entre conjuntos

i. Igualdade entre Conjuntos

- Por definição, um conjunto A é igual a um conjunto B **se, e somente se, todo elemento de A é elemento de B, e todo elemento de B é elemento de A.** Esta condição, denotada por A = B, significa que A, B são o mesmo conjunto.
- Usando a notação de lógica de predicados, temos que A = B significa:

$$\boxed{(\forall x)\left[(x \in A) \rightarrow (x \in B)\right] \wedge \left[(x \in B) \rightarrow (x \in A)\right]}$$

- Observe que, como os conjuntos não são ordenados, o conjunto A={1, 2, 3} é igual ao conjunto B={3, 2, 1}.

ii. Conjunto vazio

- É possível definir conjuntos sem elementos. Dizemos que tal conjunto é vazio. Por exemplo: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = x + 1\}$

- **Observação:** todos os conjuntos vazios são iguais; ou seja **existe um único conjunto vazio, que é geralmente denotado por $\varnothing$;** É possível denotar o conjunto vazio também como { }.

- Obs: O conjunto $A = \{\Phi\}$ **não é vazio**, pois ele tem um elemento — **o conjunto vazio**.

quantidade de elementos

iii. Cardinalidade:

- A cardinalidade está relacionada ao número de elementos de um conjuto. Dizemos que um conjunto A é finito se ele tem um número finito $n \in \mathbb{N}$ de elementos.

- A cardinalidade de A, denotada por |A| ou #A. Observe que |A| = 0 se e somente se $A = \varnothing$.

- Os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ são infinitos.

- Obs: Para o conjunto *A = {Φ}* temos que *|A| = 1, enquanto que |Φ| = 0.*

iii. Relação de inclusão

- Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que **A é um subconjunto de B se, e somente se, todo elemento de A é um elemento de B**. Neste caso, dizemos também que **A está contido em B**, ou que B contém A. Denotamos esta condição por $A \subseteq B$. **A é também dito subconjunto de B.**

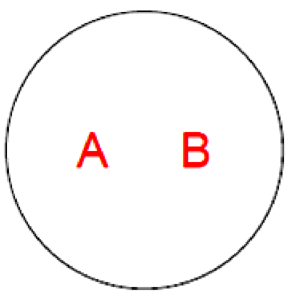
- **Se existe ao menos um elemento de A que não pertence a B,** então **A não é subconjunto de B.**

- De acordo com esta definição, **todo conjunto está contido em si próprio e além disso todo conjunto contém o conjunto vazio**; ou seja, $A \subseteq A$ e $\varnothing \subseteq A$ para qualquer conjunto A.

- Se $A \subseteq B$ ***MAS*** **existe <u>pelo menos um elemento de B que não pertence a A</u>**, dizemos que A está contido propriamente em B, ou A está estritamente contido em B, ou seja, ***<u>A é um sub-conjunto próprio de B</u>***, que denotamos por $A \subset B$.

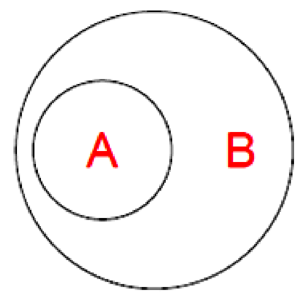
- Exemplo:

$$A \subseteq B$$



A esta amplamente contido em B

$$A \subset B$$



A é subconjunto próprio de B, ou A está estritamente contido em B

Inclusão	Igualdade	Inclusão Estrita
amplamente contido $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$	$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$	estritamente contido $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists y \in B \mid y \notin A)$

Exemplo: Continência, Subconjunto;

$a)\{a,b\} \subseteq \{b,a\}$ V

$b)\{a,b\} \subset \{a,b,c\}$ e $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$ V (se ta estritamente contido, vai estar no amplamente)

$c)\{1,2,3\} \subset \mathbb{N}$ e $\{1,2,3\} \subseteq \mathbb{N}$ V

$d)\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ V

$e)\varnothing \subset \{a,b,c\}$ e $\varnothing \subseteq \{a,b,c\}$ V

$f)\varnothing \subseteq \mathbb{N}$ e $\varnothing \subset \mathbb{N}$ V

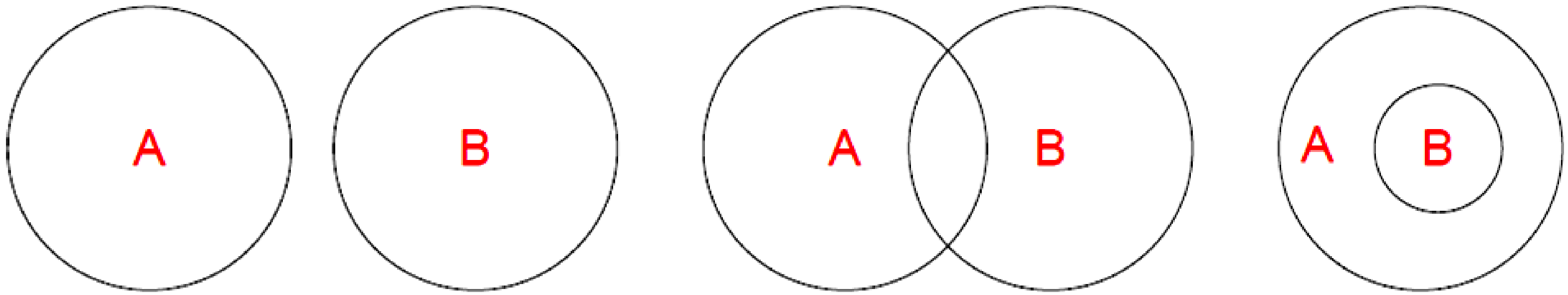
$A = \{1,2,3\}$

$\varnothing \subseteq A$ (V)

$\varnothing \in A$ (F) → vazio não é um elemento de A

vazio está contido em qualquer conjunto (estritamente ou amplamente)

Exemplo 2: $A \not\subseteq B$.



- **Exercício:** Sejam os conjuntos: A = {1, 7, 9, 15}; B= {7, 9}; C = {7, 9, 15, 20}. Quais das afirmações a baixo são verdadeiras e quais são falsas?

$a) B \subset C;$ V

$b) B \subseteq A;$ V

$c) B \subset A;$ V

$d) A \subseteq C;$ F

e) $\{7,9\} \subset B;$ F

f) $\{7\} \subset A;$ V

g) $\varnothing \in C;$ F

h) $\{7,9\} \in C;$ F

↳ C precisaria ser: $\{\{7,9,15,20\},\{7,9\}\}$ ↳ deveria conter o elemento $\{7,9\}$

Respostas:

a) V
b) V
c) V
d) F
e) F
f) V
g) F
h) F

Operações sobre conjuntos

Sejam A e B subconjuntos do conjunto universal U.

- União: $A \cup B = \{x \in U | x \in A$ ou $x \in B\}$

  Notação: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$

- Intersecção: $A \cap B = \{x \in U | x \in A$ e $x \in B\}$

  Notação: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \cap_{i=1}^{n} A_i$

- Diferença: $B - A = \{x \in U | \boxed{x \in B \text{ e } x \notin A}\}$

  não pode ser um "ou"

- Complemento: $A^c = \{x \in U | \boxed{x \notin A}\}$

➢ Propriedades de subconjuntos

- Inclusão da intersecção: para todos conjuntos A e B.
  - $A \cap B \subseteq A$
  - $A \cap B \subseteq B$

- Inclusão na união: para todos conjuntos A e B.
  - $A \subseteq A \cup B$
  - $B \subseteq A \cup B$

- Propriedade transitiva dos subconjuntos: para todos conjuntos A, B e C.
  - se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$

➢ Identidades de conjuntos

lei de Morgan
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ } mesma coisa

- Sejam todos os conjuntos abaixo subconjuntos do conjunto universal U.

- Comutatividade:

x∈A ou x∈B

ou

$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$

$q \vee p \Leftrightarrow q \vee p$ } mesma coisa em lógica

- Associatividade:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

- Distributividade:

$A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Intersecção com U:

$A \cap U = A$

- União com U:

$A \cup U = U$

- Complemento duplo:

$(A^c)^c = A$

- Idempotência:

$A \cap A = A$	$A \cup A = A$

- De Morgan:

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$A - (B \cap C) =$ $(A - B) \cup (A - C)$	$A - (B \cup C) =$ $(A - B) \cap (A - C)$

- Absorção:

$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

- Representação alternativa para diferença de conjuntos:

$A - B = A \cap B^c$

➢ Complementar de um conjunto

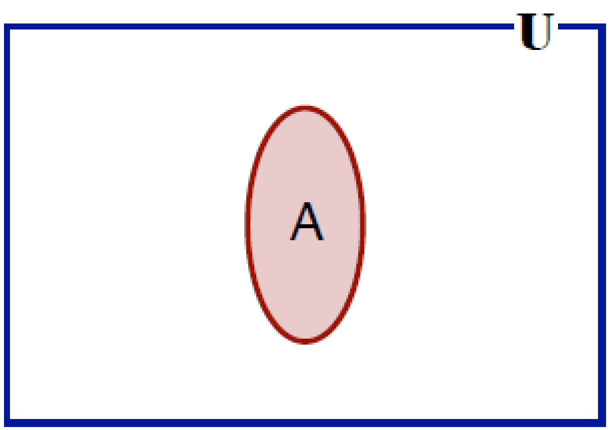
Def: Complemento

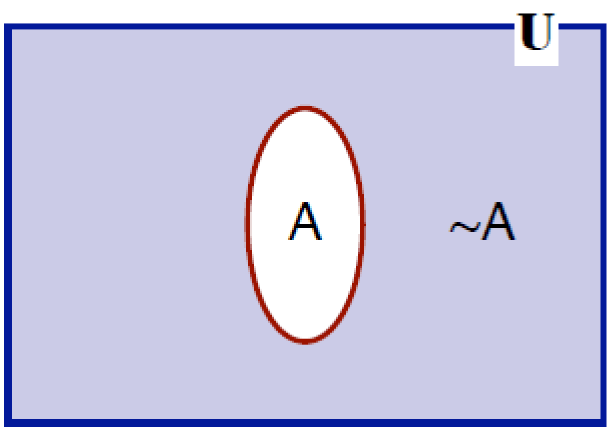
Complemento de um conjunto $A \subseteq \mathbf{U}$

$$A' \quad \text{ou} \quad \sim A$$

$$\sim A = \{\, x \in \mathbf{U} \mid x \notin A \,\}$$

*Alguns autores também utilizam a notação A^c para representar o conjunto complementar de A.





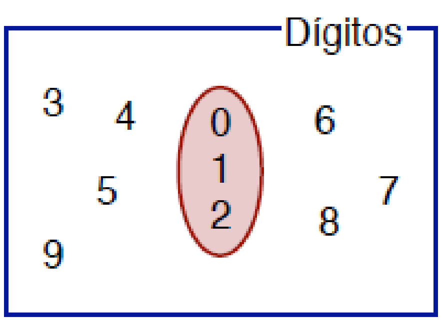
♦ Relacionando com a Lógica

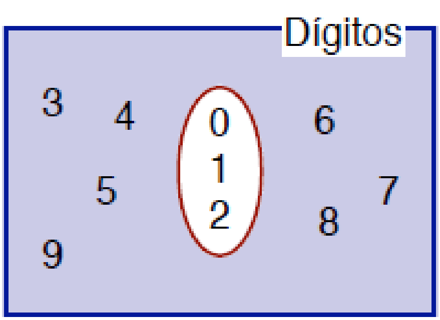
- complemento corresponde à negação
- símbolo ~ é um dos usados para a negação

Exp: Complemento

Dígitos = { 0, 1, 2,..., 9 } conjunto universo e A = { 0, 1, 2 }

- ~A = { 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }





Exp: ...Complemento

$\mathbf{N}$ conjunto universo e $A = \{ 0, 1, 2 \}$

- $\sim A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x > 2 \}$

Para qualquer conjunto universo $\mathbf{U}$

- $\sim\varnothing = \mathbf{U}$
- $\sim\mathbf{U} = \varnothing$

$\mathbf{R}$ conjunto universo

- $\sim\mathbf{Q} = \mathbf{I}$
- $\sim\mathbf{I} = \mathbf{Q}$

Exp: Complemento, União e Intersecção

$\mathbf{U}$ conjunto universo. Para qualquer $A \subseteq \mathbf{U}$

- $A \cup \sim A = \mathbf{U}$ — $p \vee \neg p$ é tautologia
- $A \cap \sim A = \varnothing$ — $p \wedge \neg p$ é contradição

♦ Propriedade Duplo Complemento

- para qualquer $A \subseteq \mathbf{U}$

$$\sim\sim A = A$$

- relacionamento com lógica
  - A: todos elementos x tais que $x \in A$
  - $\sim A$: todos elementos x tais que $x \notin A$ $\qquad \neg(x \in A)$
  - $\sim\sim A$: todos elementos x tais que $\neg\neg(x \in A)$ $\qquad x \in A$

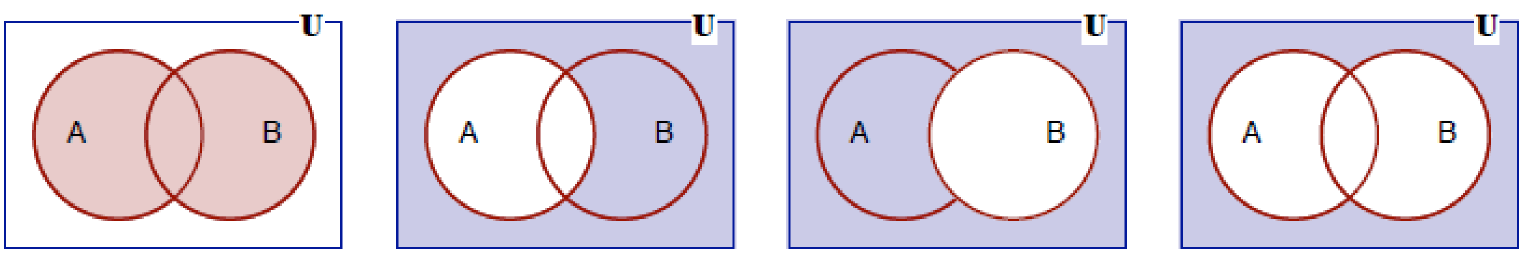
- complemento é reversível: $\sim(\sim A) = A$

♦ Propriedade DeMorgan

- relacionada com o complemento
- envolve a união e a intersecção

$$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B \qquad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$



$A \cup B$ $\quad$ $\sim A$ $\quad$ $\sim B$ $\quad$ $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

♦ Essa propriedade permite concluir

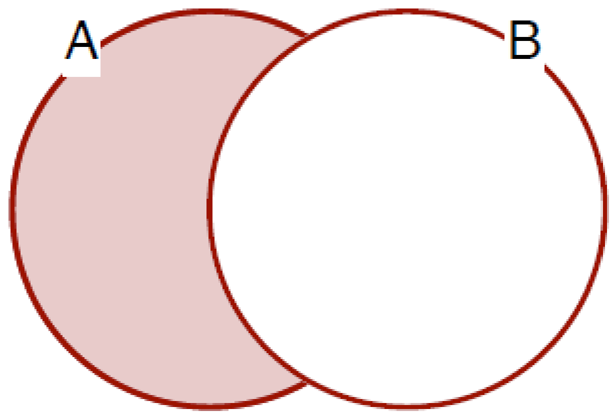
- intersecção pode ser calculada em termos do complemento e união

$$A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$$

- união pode ser calculada em termos do complemento e intersecção

$$A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$$

♦ Diferença: derivada da intersecção e complemento



Def: Diferença

A e B conjuntos

$$A - B$$

$$A - B = A \cap \sim B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

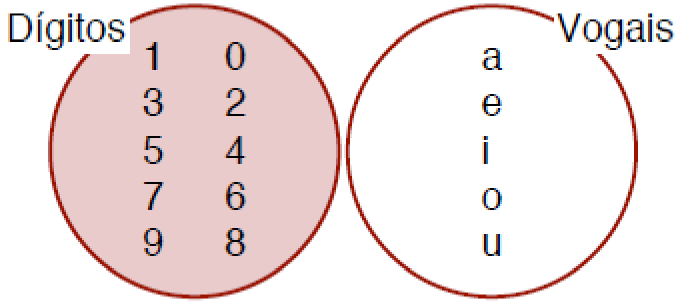
Exp: Diferença

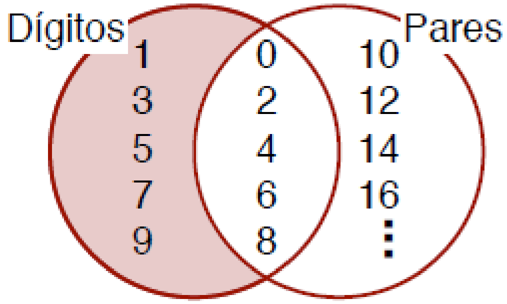
Dígitos = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

Vogais = { a, e, i, o, u }

Pares = { 0, 2, 4, 6,... }

- Dígitos - Vogais = Dígitos
- Dígitos - Pares = { 1, 3, 5, 7,9 }





Exp: ...Diferença

$A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x > 2 \}$ e $B = \{ x \in \mathbf{N} \mid x^2 = x \}$

- $A - B = \{ 3, 4, 5, 6, \ldots \}$
- $B - A = \{ 0, 1 \}$

$\mathbf{R}$ (reais), $\mathbf{Q}$ (racionais) e $\mathbf{I}$ (irracionais)

- $\mathbf{R} - \mathbf{Q} = \mathbf{I}$
- $\mathbf{R} - \mathbf{I} = \mathbf{Q}$
- $\mathbf{Q} - \mathbf{I} = \mathbf{Q}$

Universo $\mathbf{U}$ e $A \subseteq \mathbf{U}$

- $\varnothing - \varnothing = \varnothing$
- $\mathbf{U} - \varnothing = \mathbf{U}$
- $\mathbf{U} - A = \sim A$
- $\mathbf{U} - \mathbf{U} = \varnothing$

➢ Propriedades de conjuntos que envolve o $\varnothing$

Sejam todos os conjuntos abaixo subconjuntos do conjunto universal U.

- União com $\emptyset$:

$A \cup \emptyset = A$

- Intersecção e união com o complemento:

$A \cap A^c = \emptyset$	$A \cup A^c = U$

- Intersecção com $\emptyset$:

$A \cap \emptyset = \emptyset$

- Complementos de U e $\emptyset$:

$U^c = \emptyset$	$\emptyset^c = U$

➢ Conjunto de conjuntos

Conjuntos podem ser elementos de outros conjuntos. Por exemplo, o conjunto A = { Φ, {2, 3} , {2, 4} , {2, 4, 7}} é um **<u>conjunto com quatro elementos.</u>**

Obs: {2, 3} é um elemento de A mas não é sub-conjunto de A , ou seja temos que $\{2,3\} \in A$.

Para que tenhamos um subconjunto contido A temos que escrever por exemplo, o conjunto do elemento {2, 3}, ou seja: $\{\{2,3\}\} \subset A$

relação de conjunto(n̄ usar com elementos

→ foto vazio ($\emptyset$)
13.04

➢ Conjuntos das Partes de um conjunto

- O Conjuntos das partes de um conjunto A, denotado por P(A), é um conjunto de todos os subconjuntos contidos em A, ou seja

$$\mathbf{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$$

Exp: Conjunto das Partes

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ a, b, c \}$

- $\mathbf{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$
- $\mathbf{P}(A) = \{ \emptyset, \{ a \} \}$
- $\mathbf{P}(B) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \}$
- $\mathbf{P}(C) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$

Quantos elementos existem em cada conjunto das partes?

$|P(\Phi)| = 1$; $|P(A)| = 2$; $|P(B)| = 4$; $|P(C)| = 8$;

Exp: ...Conjunto das Partes

$D = \{ a, \varnothing, \{ a, b \} \}$

- $\mathbf{P}(D) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ \varnothing \}, \{ \{ a, b \} \}, \{ a, \varnothing \}, \{ a, \{ a, b \} \}, \{ \varnothing, \{ a, b \} \}, \{ a, \varnothing, \{ a, b \} \} \}$

Quantos elementos existem no conjunto das partes de D?

$|P(D)| = 8$;

♦ Número de elementos de $\mathbf{P}(X)$

- número de elementos de
  - X é n
  - $\mathbf{P}(X)$ é 2^n
- justifica a notação 2^X
  - prova por indução introduzida adiante

❑ *Produto Cartesiano entre dois conjuntos*

Definição:

- Sejam A e B conjuntos. ***<u>O produto cartesiano de A e B é o conjunto formado por pares ordenados cujo primeiro elemento é proveniente de A e o segundo, de B.</u>*** Este conjunto é denotado por A x B.

- Em notação lógica: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

- **Observação:** O plano cartesiano é dado pelo produto cartesiano entre dois conjuntos reais, ou seja $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$**.** Uma outra notação para $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R}^2$.

- Exemplos:

(a). Sejam A = { 1, 2, 3 } e B = { 4, 5 }. Então:

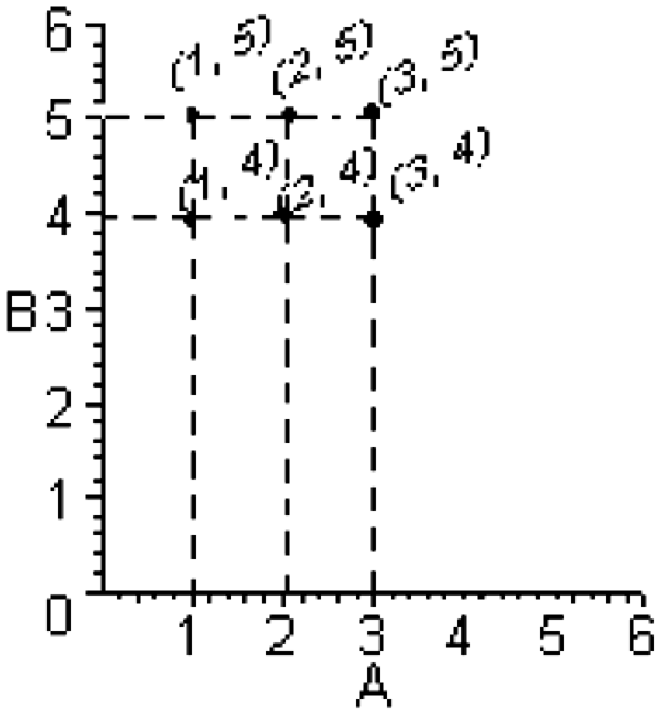
A x B = { (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5) }
B x A = { (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3) }

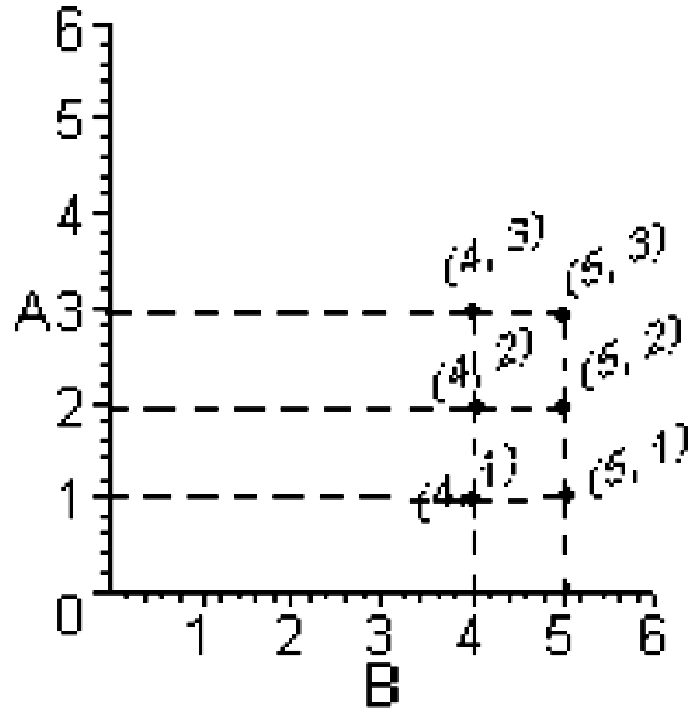
- Representação por tabela:

AxB	4	5
1	(1,4)	(1,5)
2	(2,4)	(2,5)
3	(3,4)	(3,5)

BxA	1	2	3
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)

- Representação por gráficos:





- **Observação:** Sejam A = ∅ e B = [2, 3]. Então:

  A x B = ∅
  B x A = ∅

➢ Produto Cartesiano de Três Conjuntos

- Sejam A, B e C conjuntos. O produto cartesiano de A, B e C é o conjunto formado por ***ternas ordenadas cujo primeiro elemento é proveniente de A, o segundo, de B e o terceiro, de C.***
- Em notação lógica:

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \;/\; x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$$

Obs. $(A \times B) \times C \neq A \times B \times C$

$A \times (B \times C) \neq A \times B \times C$

O produto cartesiano pode ser estendido para n conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

Propriedades

Sejam A, B, C e D conjuntos. Então são válidas as seguintes propriedades:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$
- $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
- $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow (A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$
- $A \times B = B \times A \Leftrightarrow (A = \varnothing) \vee (B = \varnothing) \vee (A = B)$

Potencias de um conjunto

Se todos os conjuntos $A_i = A$, então usamos a notação: $A^n = A \times A \times \ldots \times A$

Assim, temos:

$$A^0 = \{ ( ) \} \text{ , onde } ( ) \text{ é a tupla vazia}$$
$$A^1 = \{ (a) \mid a \in A \}$$
$$A^2 = \{ (a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A \}$$
$$A^n = \{ \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \mid a_i \in A\}$$

Obs. $A^1 \neq A$ e $A^0 \neq \varnothing$

Exercícios

1. Determine $\{ x \in \mathbf{N} / (x - 1)(x - 3) = 0 \} \times \{ x \in \mathbf{N} / (x - 2)(x - 3) = 0 \}$.
   foto
2. Encontre o valor lógico da proposição $(\forall A, B, C)(A \times C = B \times C \to A = B)$
   ↳ V, se $C \neq \varnothing$ (foto)
3. Represente graficamente o subconjunto do produto cartesiano $\mathbf{R}^2$ definido por

   foto

   $S = \{ (x, y) / x+y \geq 1 \}$.

4. Se $A = \varnothing$ e $B = \{0, 1\}$, determine AxB. foto

5. Determine as potencias A^n para $n = 0, 1, 2$ e 3, se: a) $A=\{a\}$ b) $A = \{a, b\}$

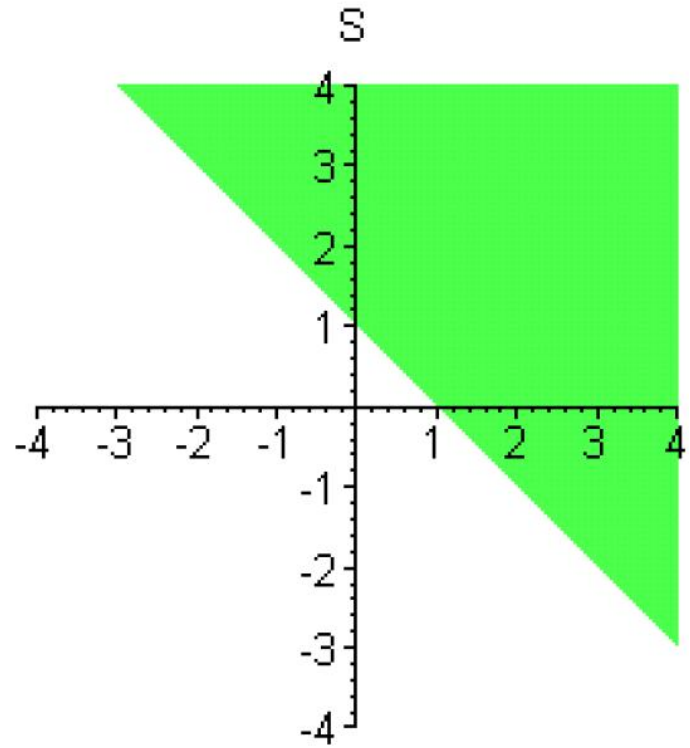
foto

Soluções:

- 1. { 1, 3 } x { 2, 3 } = { (1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3) }

- 2.Seja (x, y) Є A x C. Então x Є A e y Є C.
- Como A x C = B x C, então (x, y) Є B x C.
- Assim, x Є B e y Є C. Portanto, A = B.
- Logo, a proposição é verdadeira.

- 3.



- 4.AxB = $\varnothing$
- 5. a) $A_0 = \{(\ )\}$; $A_1 = \{(a)\}$; $A_2 = \{(a, a)\}$; $A_3 = \{\{(a, a, a)\}$

- b)$A_0=\{(\ \ )\}$; $A_1 = \{(a), (b)\}$; $A_2 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$; $A_3 = \{(a, a, a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b),(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a)(b,b,b)\}$

$2+3$ $\quad \frac{2}{3}$

$\left.\begin{array}{l} p \vee q \\ p \wedge q \\ p \to q \\ p \leftrightarrow q \\ p \oplus q \end{array}\right\}$ binárias

$\left.\begin{array}{l} A^c \\ \neg p \end{array}\right\}$ unária

❑Operações Binárias e Unárias

- Podemos efetuar diversas operações aritméticas com elementos de conjunto, como por exemplo os inteiros, $\mathbb{Z}$. Poderíamos subtrair dois inteiros, ou considerar o negativo de um inteiro. Operações como a soma ou subtração que **agem em dois inteiros**; são ditas **operações *binárias* em $\mathbb{Z}$**. Operações como a negação, que **age em um inteiro**, são chamadas de **operações *unárias* em $\mathbb{Z}$**.

- Para ver exatamente o que é uma operação binária, vamos considerar a subtração. Definidos dois inteiros *x* e *y quaisquer* (exemplo x = 5 e y = 2), *x* - *y* gera uma resposta, e apenas uma, e essa resposta sempre será um número inteiro.

- Para além disso observe que a subtração é efetuada em um **par ordenado** de números. Por exemplo, 7 - 5 não produz o mesmo resultado que 5 - 7. Um par ordenado é denotado por (x, y), onde x é a primeira componente e y é a segunda. Como vimos a ordem é importante em um par ordenado; assim, os conjuntos {1, 2} e {2, 1} são iguais, mas os pares ordenados (1, 2) e (2, 1) não são.

- Vamos generalizar as propriedades de inteiros para definir uma operação binária ° em um conjunto *S*.
- O símbolo ° marca, simplesmente, o lugar; e será substituído pelo símbolo apropriado para a operação, como o símbolo para a subtração, por exemplo.

- Então uma operação binária $\circ$, descreve o fato de que ***x* ∘ *y* existe e é único**. Nesse caso dizemos que a operação binária **∘ está bem definida**. Além disso, como na operação binária ***x* ∘ *y* sempre deve pertencer a *S*** dizemos então que *S* é **fechado em relação à operação ∘.**

- A unicidade não significa que o resultado de uma operação binária ocorre apenas uma vez; e sim significa que, dados *x* e *y*, existe apenas um resultado para $x \circ y$.
- Por exemplo, para a subtração, existem muitos valores de *x* e *y* para os quais $x - y = 7$, mas, para *x* e *y* dados, como $x = 5$ e $y = 2$, existe apenas uma resposta possível para $x - y$.

- Exemplo: A soma, a subtração e a multiplicação são operações binárias em $\mathbb{Z}$. Por exemplo, ao efetuar a soma em um par de inteiros (x, y), $x + y$ existe um único inteiro como solução e x+y pertence a $\mathbb{Z}$.

- Exemplo: As operações lógicas de conjunção, disjunção, condicional e equivalência são operações binárias no conjunto das fbfs proposicionais. Se P e Q são fbfs proposicionais, então $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$ e $P \leftrightarrow Q$ são fbfs proposicionais únicas.

- Um candidato $\circ$ pode deixar de ser uma operação binária em um conjunto S se qualquer uma entre três coisas acontecer: (1) se existirem elementos $x, y \in S$ para os quais $x \circ y$ não existe; (2) se existirem elementos $x, y \in S$ para os quais $x \circ y$ tem mais de um resultado; ou (3) se existirem elementos $x, y \in S$ para os quais $x \circ y$ não pertence a S.

- Exemplo: A divisão não é uma operação binária em $\mathbb{Z}$, pois $x \div 0$ não existe.

- Exemplo: A subtração não é uma operação binária em $\mathbb{N}$, pois $\mathbb{N}$ não é fechado em relação à subtração. (Por exemplo, $1 - 10 \notin \mathbb{N}$.

- Definição: Para que # seja uma **operação unária** em um conjunto S, $x^{\#}$ tem que estar bem definida para todo x em S, e S tem que ser fechado em relação a #; em outras palavras, qualquer que seja $x \in S$, $x^{\#}$ existe, é único e pertence a S. Não teremos uma operação unária se qualquer dessas condições falhar.

- Exemplo: Seja $x^{\#}$ definida por $x^{\#} = -x$, de modo que $x^{\#}$ é o negativo de x. Então # é uma operação unária em $\mathbb{Z}$, mas não em $\mathbb{N}$, pois $\mathbb{N}$ não é fechado em relação a #, (5 pertence a $\mathbb{N}$ mas $5^{\#} = -5$ não pertence a $\mathbb{N}$) .

- Exemplo: O conectivo lógico de negação é uma operação unária no conjunto das fbfs proposicionais.

- Exercício: Quais das expressões a seguir não definem operações binárias nem unárias nos conjuntos dados? Por que não?

a) $x°y = x÷y$; *S* = conjunto de todos os inteiros positivos (sem o zero) $\frac{2^{\in\mathbb{Z}}}{3_{\in\mathbb{Z}}} = 0{,}666 \notin \mathbb{Z}$ (F) N é uma operação binária

b) $x°y = x÷y$; *S* = conjunto de todos os números racionais positivos (sem zero) (V) é uma op. binaria

c) $x°y = x^y$; $S = \mathbb{R}$ 2^3; $(-2)^3 = -8$ $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ $2^{-\frac{1}{2}} = 2^{1/\frac{1}{2}}$ $(-2)^{1/2} = \sqrt[2]{-2}$ não existe nos reais! (F)

d) $x ° y$ = máximo entre *x e y distintos;* $S = \mathbb{N}$

e) $x^{\#} = \sqrt{x}$; *S* = conjunto de todos os números reais positivos

❑Apêndice- Demonstrações em teoria de Conjuntos

Teorema: Associatividade da União

Suponha que A, B e C são conjuntos quaisquer. Então:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Solução: Temos que demonstrar 2 casos;

- $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$
- $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

Caso 1. Suponha $x \in A \cup (B \cup C)$

- $x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in A \vee x \in (B \cup C) \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow$ pela associatividade do conetivo $\vee$
- $(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in (A \cup B) \vee x \in C \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in (A \cup B) \cup C$

- Portanto, $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

Caso 2. Suponha $x \in (A \cup B) \cup C$

- $x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in (A \cup B) \vee x \in C \Rightarrow$ pela definição união
- $(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Rightarrow$ pela associatividade do conetivo $\vee$
- $x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in A \vee x \in (B \cup C) \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in A \cup (B \cup C)$

- Portanto, $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

Ex: Prove que: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Solução:
- Temos que mostrar então que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

- Para mostrar que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$, seja x um elemento arbitrário de $A \cup (B \cap C)$, podemos então prosseguir da seguinte maneira.:

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\rightarrow x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C) \\
&\rightarrow x \in A \text{ ou } (\, x \in B \text{ e } x \in C) \\
&\rightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C) \\
&\rightarrow x \in (A \cup B) \text{ e } x \in (A \cup C) \\
&\rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

- Para mostrar que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ basta repetir o procedimento anterior de trás para a frente.

- **Exemplo:** Prove que dados dois conjuntos A e B quaisquer, então A – B = A ∩ B^c.

- Lembre que para fazer uma demonstração como esta precisamos mostrar que $A - B \subseteq A \cap B^C$ e $A \cap B^C \subseteq A - B$
- Prova de $A - B \subseteq A \cap B^C$
- Suponha $x \in A - B$
- Pela definição de diferença de conjuntos, x Є A e x ∉ B.
- Utilizando isso, pela definição de complemento temos então que x Є A e x Є B^C.
- Pela definição de intersecção, isso é equivalente a $x \in A \cap B^C$
- Assim, pela definição de subconjunto $A - B \subseteq A \cap B^C$

- Prove que $A \cap B^C \subseteq A - B$
- Suponha que $x \in A \cap B^C$
- Pela definição de intersecção, x Є A e x Є B^C.
- Pela definição de complemento, x Є A e x $\notin$ B.
- Pela definição de diferença de conjuntos, $x \in A - B$
- Assim, pela definição de subconjunto, $A \cap B^C \subseteq A - B$

- Logo $A - B \subseteq A \cap B^C$ e $A \cap B^C \subseteq A - B$ e portanto A – B = A ∩ B^c.

- **Exercício 1**: Prove que $\varnothing \subseteq A$. Prove por absurdo (contradição)

- **Exercício 2** : Use as identidades para provar que

$$\left[A\cup\left(B\cap C\right)\right]\cap\left(\left[A'\cup\left(B\cap C\right)\right]\cap\left(B\cap C\right)'\right)=\varnothing$$

- **Exercício 3**: Use as identidades para provar que

$$\left[C\cap\left(A\cup B\right)\right]\cup\left[\left(A\cup B\right)\cap C'\right]=A\cup B$$

- Solução-Exercício 1:
- Prova: Um dos **métodos** para fazer uma **prova ou demonstração** de uma afirmação, consiste em prová-la através de uma **contradição.**

- **Nesse caso negamos a afirmação inicial dada, o que deverá nos levar em alguma contradição.** Seja então uma afirmação inicial simbolizada por P. Se ao fazermos ~P a proposição se tornar F, ou uma contradição, logo P deverá ser V.

- Vejamos para o exercício 1: Suponha portanto $\emptyset \subseteq A$ seja F, ou seja, que exista um conjunto Ø com nenhum elemento e um conjunto A tal que Ø $\nsubseteq$ A.

- Neste caso, **deve haver um elemento de Ø que não é um elemento de A** [pela definição de subconjunto].

- Mas não pode haver tal elemento já que Ø não tem nenhum elemento. Isto é uma contradição.

- Portanto A suposição que existem conjuntos Ø e A, onde Ø não tem nenhum elemento e $\emptyset \not\subseteq A$ é F e, assim, o teorema inicial é V.

- **Exercício 4:** Prove por contradição (absurdo) que dados dois conjuntos quaisquer A e B, então (A − B) e B são disjuntos

- Demonstração:
- **Suponha** que existam conjuntos A e B tais que **(A − B) e B <u>não sejam disjuntos</u>.** [Deve-se deduzir uma contradição.]

- Neste caso, $(A - B) \cap B \neq \emptyset$ e, desta forma, existe um elemento x em $(A-B) \cap B$.
- Então pela definição de intersecção se $x \in (A-B) \cap B$, logo $x \in (A-B)$ e $x \in B$.

- Pela definição de diferença $x \in (A - B)$ quer dizer que $x \in A$ e $x \notin B$. Acabou-se de mostrar que $x \in B$ e $x \notin B$, o que é uma contradição.
- A suposição que existem conjuntos A e B tais que (A − B) e B não são disjuntos é F e a proposição inicial é portanto V.