Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS

Conjuntos Ordenados: Aula 8
Elementos Notáveis

Professor: Iuri Jauris

1º Semestre de 2022

➢ Introdução:

- É importante ressaltar que a expressão **conjunto ordenado traz, implicitamente, a idéia** de que se está trabalhando com um **conjunto no qual foi definida uma relação de ordem**. Muitos dos resultados aqui apresentados somente têm significado nestas condições.

- Utilizaremos a seguinte notação:
- A um conjunto
- $R \subseteq A \times A$ uma relação de ordem definida em A
- $M \subseteq A$ um subconjunto qualquer de A sobre o qual se deseja informações

- Aqui faremos novamente uso intenso do diagrama de Hasse:

- Lembre que dado R uma relação de ordem em A, onde A é um conjunto discreto, essa relação pode ser representada na forma do diagrama:

$x \; R \; y$ é representado por $\begin{array}{c} y \\ | \\ x \end{array}$

- ***sempre de baixo para cima***,

❑ ELEMENTOS NOTÁVEIS

- **Cotas Inferiores e Cotas Superiores de M**

$\mathbf{a} \in A$ é **Cota Inferior** de M $\Leftrightarrow (\mathbf{a} \in A) \wedge (\forall x \in M)(\mathbf{a}\ R\ x)$

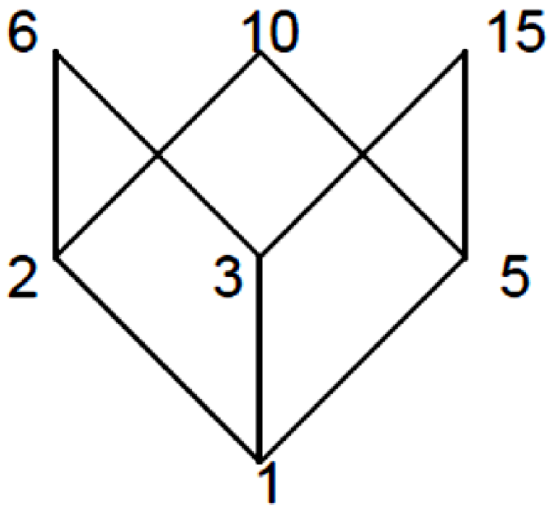
<u>Notação</u>: $I_A(M) = \{\ \mathbf{a} \in A \mid (\forall x \in M)(\mathbf{a}\ R\ x)\ \}$

$a \in A$ é **Cota Superior de M** $\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (\forall x \in M)(x\ R\ a)$

<u>Notação</u>: $S_A(M) = \{\ \mathbf{a} \in A \mid (\forall x \in M)(x\ R\ \mathbf{a})\ \}$

- **Exemplo:**
- Sejam A = { 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15} e R ⊆ A x A, **x R y** ⇔ **y é múltiplo de x ;**

Diagrama de Hasse:



- x R y $\Leftrightarrow$ y é múltiplo de x ;

$I_A(M) = \{ \mathbf{a} \in A \mid (\forall x \in M)(\mathbf{a} \, R \, x) \}$

$S_A(M) = \{ \mathbf{a} \in A \mid (\forall x \in M)(x \, R \, \mathbf{a}) \}$

- a R x → x é múltiplo de a → a divide x
- x R a → a é múltiplo de x → x divide a

- **Para M = {1, 3} temos:**
- **Cota Inferior: Quais os valores de a Є A tal que a divide x Є {1, 3}? Ou seja quais valores de a dividem 1 e 3?**
- **Resp: Apenas o 1 divide 1 e 3**
- **Cota superior: Quais os valores de a Є A tal que 1 divide a e 3 divide a?**
- **Resp: 3, 6 e 15**

- Respostas:

Para $M = \{1, 3\}$ temos:

$I_A(M) = \{1\}$

$S_A(M) = \{3, 6, 15\}$

Para $T = \{1\}$ temos:

$I_A(T) = \{1\}$

$S_A(T) = A$

todo o conjunto

Para $N = \{6, 10\}$ temos:

$I_A(N) = \{1, 2\}$

* $S_A(N) = \varnothing$

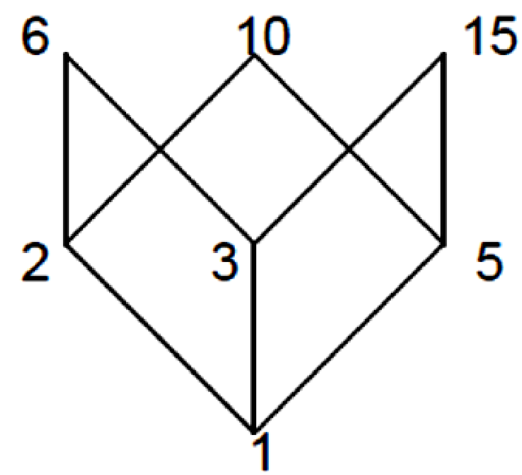
não tem ngm acima de 6 e 10 (falta elemento)

Para A temos:

$I_A(A) = \{1\}$

$S_A(A) = \varnothing$

<u>Diagrama de Hasse</u>:



➢ Mínimo e Máximo de M

- Os conceitos de mínimo e máximo de um conjunto M são muito semelhantes aos conceitos de cota inferior e de cota superior de M.

- A diferença é que o **mínimo e o máximo, se existirem, devem pertencer ao próprio conjunto M.**

  ↳ devem pertencer ao próprio subconjunto

- O **mínimo de um conjunto M é uma cota inferior que pertence a M; o máximo de um conjunto M é uma cota superior que pertence a M.**

$a \in A$ é Mínimo de $M \Leftrightarrow (a \in M) \wedge (\forall x \in M)(a R x)$

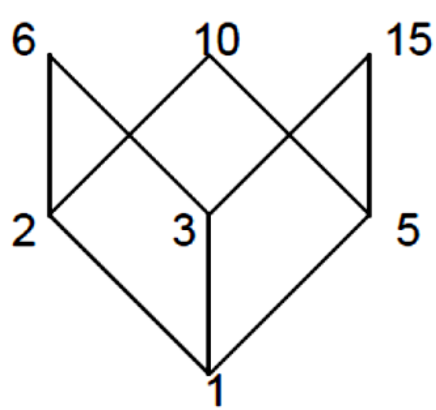
<u>Notação</u>: $min_A(M)$

$a \in A$ é Máximo de $M \Leftrightarrow (a \in M) \wedge (\forall x \in M)(x R a)$

<u>Notação</u>: $max_A(M)$

- **Exemplo (mesmo anterior):**
- Sejam A = { 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15} e R ⊆ A x A, **x R y ⇔ y é múltiplo de x ;**

<u>**Diagrama de Hasse**</u>:



$I_A(M) = \{ \mathbf{a} \in A \mid (\forall x \in M)(\mathbf{a}\, R\, x) \}$ Cota Inferior

$S_A(M) = \{ \mathbf{a} \in A \mid (\forall x \in M)(x\, R\, \mathbf{a}) \}$ Cota superior

$a \in A$ é Mínimo de $M \Leftrightarrow (a \in M) \wedge (\forall x \in M)(a\, R\, x)$

$a \in A$ é Máximo de $M \Leftrightarrow (a \in M) \wedge (\forall x \in M)(x\, R\, a)$

Para $M = \{1, 3\}$ temos:

$I_A(M) = \{1\}$

$S_A(M) = \{3, 6, 15\}$

Para $N = \{6, 10\}$ temos:

$I_A(N) = \{1, 2\}$

$S_A(N) = \varnothing$ → é vazio! NÃO é não existe

Para $M = \{1, 3\}$ temos:

$min_A(M) = 1$

$max_A(M) = 3$

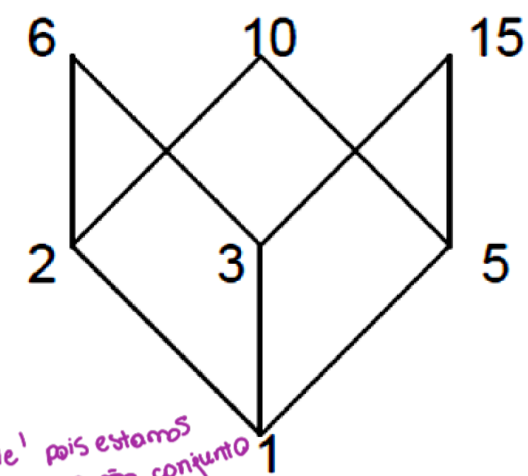
Para $N = \{6, 10\}$ temos:

$min_A(N)$: não existe $\nexists$

$max_A(N)$: não existe $\nexists$

↳ aqui é 'não existe' pois estamos falando de elemento e não conjunto

Diagrama de Hasse:



Para $T = \{1\}$ temos:

$I_A(T) = \{1\}$

$S_A(T) = A$

Para A temos:

$I_A(A) = \{1\}$

$S_A(A) = \varnothing$

Para $T = \{1\}$ temos:

$min_A(T) = 1$

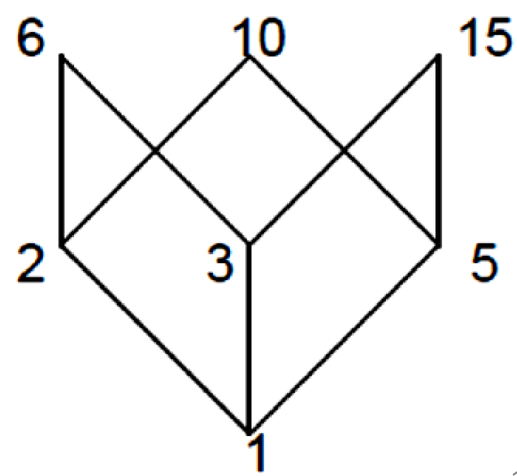
$max_A(T) = 1$

Para A temos:

$min_A(A) = 1$

$max_A(A)$: não existe

Diagrama de Hasse:



➢ Ínfimo e Supremo de M

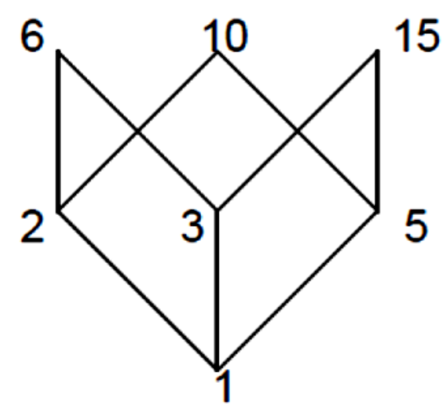
- a Є A é Ínfimo de M ⇔ a é a **“maior” das cotas inferiores de M ;**
- Notação: $\inf_A(M)$

- a Є A é Supremo de M ⇔ a é a **“menor” das cotas superiores de M**
- Notação: supA(M)

- **Exemplo (mesmo anterior):**
- Sejam A = { 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15} e R ⊆ A x A,

x R y ⇔ y é múltiplo de x ;

Diagrama de Hasse:



Para M = {1, 3} temos:

$I_A(M) = \{1\}$ Cota Inferior

$S_A(M) = \{3, 6, 15\}$ Cota superior

Para M = {1, 3} temos:

$\inf_A(M) = 1$ Ínfimo

$\sup_A(M) = 3$ Supremo

Para N = {6, 10} temos:

$I_A(N) = \{1, 2\}$ Cota Inferior

$S_A(N) = \varnothing$ Cota superior

Para N = {6, 10} temos:

$\inf_A (N) = 2$ Ínfimo

$\sup_A(N)$: não existe Supremo

Para T = {1} temos:

$I_A(T) = \{1\}$

$S_A(T) = A$

Para T = {1} temos:

$\inf_A(T) = 1$ Ínfimo

$\sup_A(T) = 1$ Supremo

Para A temos:

$I_A(A) = \{1\}$ Cota Inferior

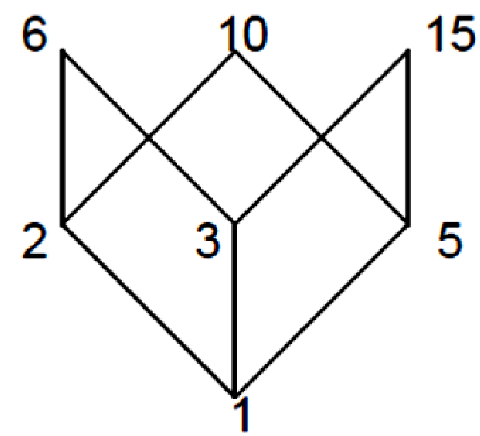
$S_A(A) = \varnothing$ Cota superior

Para A temos:

$\inf_A (A) = 1$ Ínfimo

$\sup_A(A)$: não existe Supremo

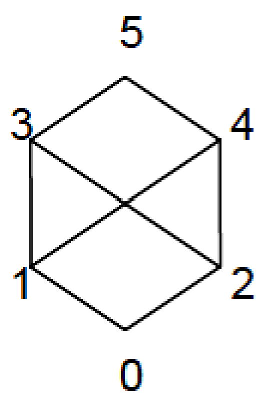
Diagrama de Hasse:



- Ou seja:
- Para M = {1, 3} temos:
- Ínfimo: Quais os valores de a ∈ A tal que a divide x ∈ {1, 3}? Ou seja quais valores de a dividem 1 e 3?
- Resp: Apenas 1 divide 1 e 3
- Mínimo: Quais os valores de a ∈ {1, 3} tal que a divide x ∈ {1, 3}? Ou seja quais valores de a dividem 1 e 3 simultaneamente? Resp 1:
- Supremo: Quais os valores de a ∈ A tal que 1 divide a e 3 divide a?
- Resp: 3, 6 e 15
- Máximo: Quais os valores de a ∈ {1, 3} tal que 1 divide a e 3 divide a?
- Resp: 3 ; pois 1 divide 1 mas 1 não divide 3. Por outro lado 1 divide 3 e 3 também divide 3.

Exercícios:

1) Para cada um dos conjuntos ordenados abaixo pela relação dada no respectivo diagrama de Hasse, determine os elementos notáveis em cada caso.



a) $M = \{ 3, 4 \}$

$I_A(M) =$ $S_A(M) =$

$\mathbf{min_A(M)} =$ $max_A(M) =$

$inf_A(M) =$ $sup_A(M) =$

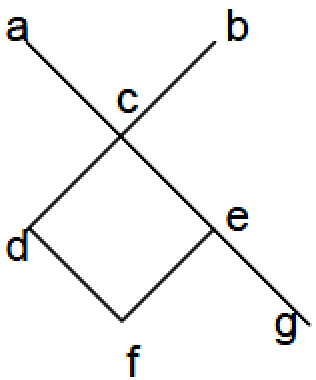
b) $N = \{ 1, 3, 4 \}$

$I_A(N) =$ $S_A(N) =$

$\mathbf{min_A(M)} =$ $max_A(N) =$

$inf_A(N) =$ $sup_A(N) =$

2)



a) $M = \{ c, d, e \}$

$I_A(M) =$

$S_A(M) =$

$\mathbf{min_A(M)} =$

$max_A(M) =$

$inf_A(M) =$

$sup_A(M) =$

b) $N = \{ a, c, e \}$

$I_A(N) =$

$S_A(N) =$

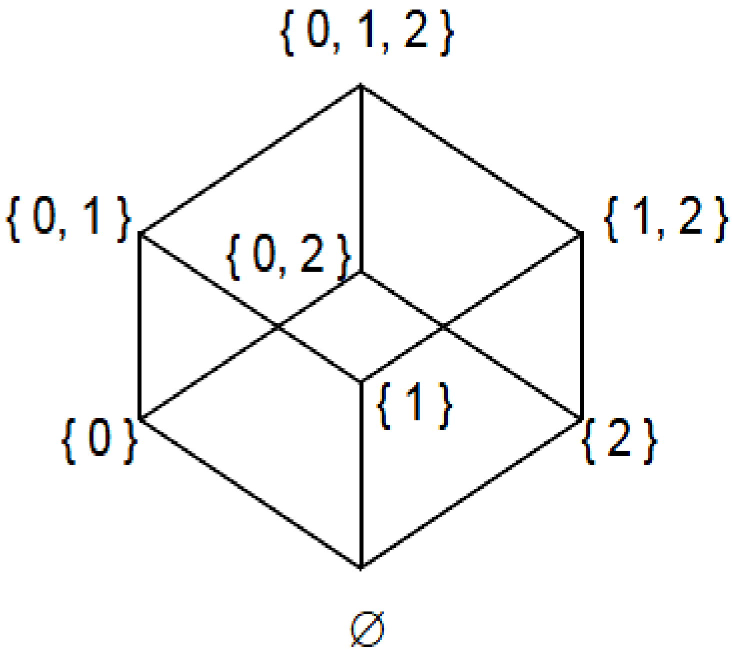
$\mathbf{min_A(M)} =$

$max_A(N) =$

$inf_A(N) =$

$sup_A(N) =$

3)



a) $M = \{ \{0\}, \{1\}, \{1, 2\} \}$

$I_A(M) =$

$S_A(M) =$

$\mathbf{min_A(M)} =$

$max_A(M) =$

$inf_A(M) =$

$sup_A(M) =$

b) $N = \{ \{0\}, \{1\}, \{0, 1\} \}$

$I_A(N) =$

$S_A(N) =$

$\mathbf{min_A(M)} =$

$max_A(N) =$

$inf_A(N) =$

$sup_A(N) =$

Repostas

1)

a) M={3,4}

- $I_A(M)$ = {0, 1, 2} $S_A(M)$= {5}
- $min_A(M)$ = não existe $max_A(M)$ = não existe
- $inf_A(M)$ = não existe $sup_A(M)$ = 5

b) N = {1, 3, 4}

- $I_A(N)$ = {0,1} $S_A(N)$ = {5}
- $min_A(M)$ = 1 $max_A(M)$ = não existe
- $inf_A(M)$ = 1 $sup_A(M)$ = 5

2) $M=\{c,d,e\}$

a)

- $I_A(M) = \{f\}$ $S_A(M)= \{c, a, b\}$
- $min_A(M)$ = não existe $max_A(M) = c$
- $inf_A(M) = f$ $sup_A(M) = c$

b)

$N = \{a, c, e\}$

- $I_A(N) = \{e, f, g\}$ $S_A(N) = \{a\}$
- $min_A(M) = e$ $max_A(M) = a$
- $inf_A(M) = e$ $sup_A(M) = a$

3) M={{0}, {1}, {1,2}}

a)

- $I_A(M) = \{\phi\}$ $S_A(M)= \{\{0, 1, 2\}\}$
- $min_A(M)$ = não existe $max_A(M)$ = não existe
- $inf_A(M) = \phi$ $sup_A(M) = \{0, 1, 2\}$

b)

N = {{0}, {1}, {0,1}}

- $I_A(N) = \{\phi\}$ $S_A(N) = \{\{0,1\}; \{0, 1, 2\}\}$
- $min_A(M)$ = não existe $max_A(M) = \{0,1\}$
- $inf_A(M) = \phi$ $sup_A(M) = \{0, 1\}$