Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS

Matemática Discreta – Aula 5 - Funções

Professor: Iuri Jauris

1º Semestre de 2022

❑ Introdução

- O conceito de função é fundamental em muitas áreas do conhecimento. Exemplos comuns são computadores, softwares, calculadoras, interruptores de luz, etc.

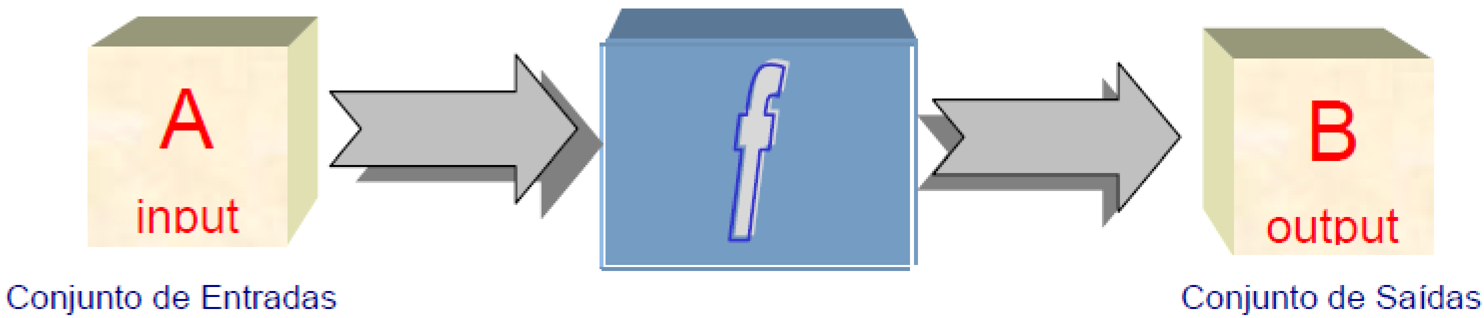
- Há diversos aspectos importantes no conceito de função:
- **Função é uma relação.** Isto significa que **uma função deve ser entendida como um tipo de associação entre elementos** de um ou mais conjuntos e que segue a uma lei específica.

- Além disso, isto significa que todos os resultados conhecidos para relações são válidos para funções.

- Uma das principais características de uma função é sua capacidade de representar **transformações, ou seja, uma função pode ser entendida como um mecanismo que, sob certas** condições predefinidas, transforma entradas em saídas.

- Na realidade, esta é uma de suas principais utilidades, uma vez que permite que o efeito da transformação de um grande número de dados seja compreendido mais facilmente.

- De modo geral, designamos pelo nome de “função” uma relação f que transforma, de forma única, elementos de um conjunto A em elementos de um conjunto B.



- Definição função: Para cada elemento do conjunto de entradas deve estar relacionado a apenas um único elemento do conjunto de saídas.
- em linguagem lógica:

$$(\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A})[\exists\, y \in \boldsymbol{B}\,)]$$

LEMBRETE 1:

- ∀ geralmente é conectado com →
- ∃ geralmente é conectado com ^

- Na prática isso se traduziria nas seguintes situações:
- **Somente uma saída para cada entrada: Este caso é** representativo de uma função, pois cumpre as condições de “bom funcionamento” descritas anteriormente.

- **Uma saída para múltiplas entradas: Note que este caso** também representa uma função. As restrições de “bom funcionamento” indicam que cada entrada tem de ter somente uma resposta associada, mas não impedem que várias entradas resultem na mesma resposta!

- No entanto, as situações que serão descritas a seguir **<u>NÃO representam funções!</u>**

- **Somente uma entrada associada a diversas saídas**

- **Várias entradas associadas simultaneamente a várias saídas**

- Estes casos obviamente contradizem a condição de “bom funcionamento”. Isto porque não é possível determinar o que acontecerá (qual a resposta que será dada)!

- Pode-se compreender porque este comportamento não é interessante através dos seguintes exemplos:
- Imagine que você utiliza um determinado software, ou calculadora. Que tal se, ao repetir a mesma operação, você obtive-se valores diferentes a cada vez?

- Ou imagine você apertando um interruptor da sua casa, e a cada vez liga-se uma luz diferente, hora no quarto ou na sala, ou na cozinha?

- Já conhecemos o conceito de relação, isto é, sabemos que uma relação de um conjunto A em um conjunto B é qualquer subconjunto do produto cartesiano A x B.

- Veremos agora que alguns tipos de relação possuem uma característica especial, que nos permite classificá-la como relação funcional.

❑ ***Relação Funcional***

- Para uma relação $R \subseteq A \times B$ ser uma relação funcional**, cada elemento de A deve estar relacionado com, <u>no máximo, um elemento de B.</u>**

❑ Definição formal de Função:

- Formalmente, pode-se escrever: Sejam A e B conjuntos. Dizemos que $f : A \rightarrow B$ é uma função de A em B se e só se:

I. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(y = f(x))$ (condição de existência)

II. $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2))$ (condição de unicidade)

- **Observação:** A condição de unicidade pode ser escrita a partir de sua proposição contrapositiva:

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) \neq f(x_2) \rightarrow x_1 \neq x_2)$$

❑ Notação de Função:

- Ao definirmos uma função – e verificarmos que as condições de "bom funcionamento" são satisfeitas – podemos adotar a seguinte notação compacta:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

que deve ser lida da seguinte forma:

- a função f, relaciona elementos "x" do conjunto A (entradas) com elementos "y" do conjunto B (respostas) através da lei y = f(x).

Exemplo 1:

- Sejam P: conjunto de países, C: conjunto de cidades.
- Podemos definir uma função f: P → C através da lei "f(x) é a capital política de x".

$$\begin{aligned} f:\ & P \to C \\ & x \mapsto f(x) \text{ é a capital política de } x \end{aligned}$$

- Isto pode ser escrito da seguinte forma:
- Esta relação é realmente uma função porque cada país só pode ter uma capital política.

Exemplo 2: Verifique que $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto y = x^2$ é função.

- Solução: Para verificar esta afirmação é necessário que sejam verdadeiras as duas condições descritas anteriormente:

1ª Parte: Condição de existência: $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(y = f(x))$

Que, neste caso deve ser escrita como: $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(y = x^2)$

Prova: Seja $x \in \mathbf{R}$.

$x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbf{R}$.

Chamando de y a expressão x^2, temos:

$y = x^2 \Rightarrow y \in \mathbf{R}$.

Logo, $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(y = x^2) \Leftrightarrow V$

2ª Parte: Condição de unicidade: $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2))$

Que, neste caso deve ser escrita como: $(\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R})(x_1 = x_2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2)$

Prova: Sejam $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tais que $x_1 = x_2$

Então: $x_1^2 = x_1.x_1 = x_2.x_2 = x_2^2$

Logo, $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

Logo, $(\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R})(x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2)$.

- Conclusão: Como valem as condições de unicidade e existência então:

$$f: \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto y = x^2 \end{array} \text{ é função.}$$

Exemplo 3: Verifique se f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $y = \sqrt{x}$ é função.

Solução:

<u>1ª Parte</u>: Condição de existência: $(\forall\, x \in A)(\exists\, y \in B)(\, y = f(x)\,)$

Que, neste caso deve ser escrita como: $(\forall\, x \in \mathbf{R})(\exists\, y \in \mathbf{R})(\, y = \sqrt{x}\,)$

Esta proposição é falsa, pois, por exemplo,

$(\exists\, x \in \mathbf{R})(\, x = -1\,)(\,\sqrt{-1} \notin \mathbf{R}\,) \Leftrightarrow (\exists\, x \in \mathbf{R})(\, x = -1\,)(\,\nexists\, y \in \mathbf{R}\,)(\, y = \sqrt{x}\,)$

Logo, não vale a condição de existência.

Conclusão: Como não vale a condicão de existência, então f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $y = \sqrt{x}$ não é função .

Exemplo 4: Verifique se $f: \begin{array}{l}[0;+\infty) \to \mathbf{R} \\ x \mapsto y = \sqrt{x}\end{array}$ é função.

Solução:

<u>1ª Parte</u>: Condição de existência: $(\ \forall\ x \in A\ )(\ \exists\ y \in B\ )(\ y = f(x)\ )$

Que, neste caso deve ser escrita como: $(\ \forall\ x \in [\ 0;\ +\infty\ )\ )(\ \exists\ y \in \mathbf{R}\ )(\ y = \sqrt{x}\ )$

<u>Prova</u>: Seja $x \in [\ 0;\ +\infty\ )$.

$x \in [\ 0;\ +\infty\ ) \Rightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \mathbf{R}$.

Chamando de y a expressão $\sqrt{x}$, temos:

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y \in \mathbf{R}$.

Logo, $(\ \forall\ x \in \mathbf{R}\ )(\ \exists\ y \in \mathbf{R}\ )(\ y = \sqrt{x}\ ) \Leftrightarrow V$

2ª Parte: Condição de unicidade: $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2))$

Que, neste caso deve ser escrita como: $(\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R})(x_1 = x_2 \rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2})$

Ou, melhor ainda, como: $(\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R})(\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2} \rightarrow x_1 \neq x_2)$

Prova: Sejam $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tais que $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$

Então: $x_1 = \sqrt{x_1}.\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}.\sqrt{x_2} = x_2$, pois $\sqrt{x_1} \geq 0 \wedge \sqrt{x_2} \geq 0$.

Logo, $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Logo, $(\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R})(\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 \neq x_2)$.

- Conclusão: Como valem ambas as condições então:

$$\begin{aligned} f:\ & [0;+\infty) \rightarrow \mathbf{R} \\ & x \mapsto y = \sqrt{x} \end{aligned}$$ é função.

❑ Domínio, Imagem e Contradomínio de uma Função

- **Definições**
- Seja f uma relação de A em B. Como visto anteriormente, as definições de domínio, imagem e contradomínio de f serão dadas por:

$$Dom(f) = \{ x \,/\, x \in A \wedge (\exists\, y \in B)(\, y = f(x)\,) \}$$

$$Im(f) = \{ y \,/\, y \in B \wedge (\exists\, x \in A)(\, y = f(x)\,) \} =$$

$$= \{ f(x) \in B \,/\, x \in A \}$$

$$C(f) = B$$

- **Observação: Toda a função também é uma relação** (só que é um tipo muito especial de relação, que cumpre as condições de "bom funcionamento" vistas anteriormente),
- Portanto as definições anteriores também podem ser utilizadas para a determinação do domínio, imagem e contradomínio de relações quaisquer.

- **Determinação da Imagem de uma Função na Prática**

- Encontrar a imagem de uma função pode ser uma tarefa complexa caso não sejam conhecidas informações adicionais da função. Isto porque a predição do conjunto de respostas que uma função efetivamente pode dar depende do conhecimento de seu comportamento.

- Assim, para se poder determinar a imagem de uma função deve-se recorrer a outros ramos da ciência Matemática, tais como o Cálculo para a determinação operacional de imagens de funções.

- Também são úteis informações algébricas com respeito ao comportamento da função. Por exemplo, dada uma função real f, então temos os seguintes casos:

$$\exists \min(f) \wedge \exists \max(f) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = [\min(f); \max(f)]$$

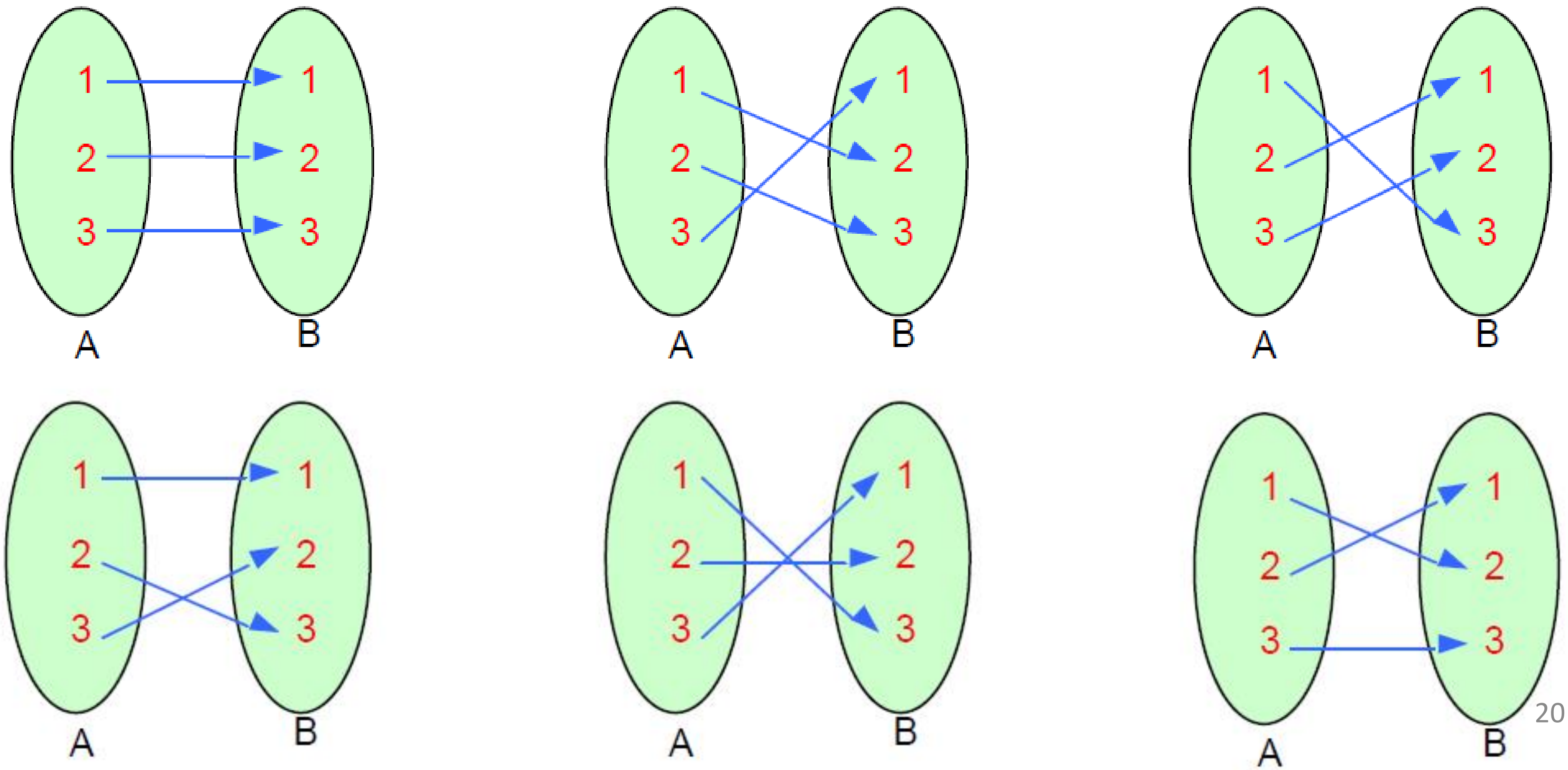
$$\nexists \min(f) \wedge \exists \max(f) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = (-\infty; \max(f)]$$

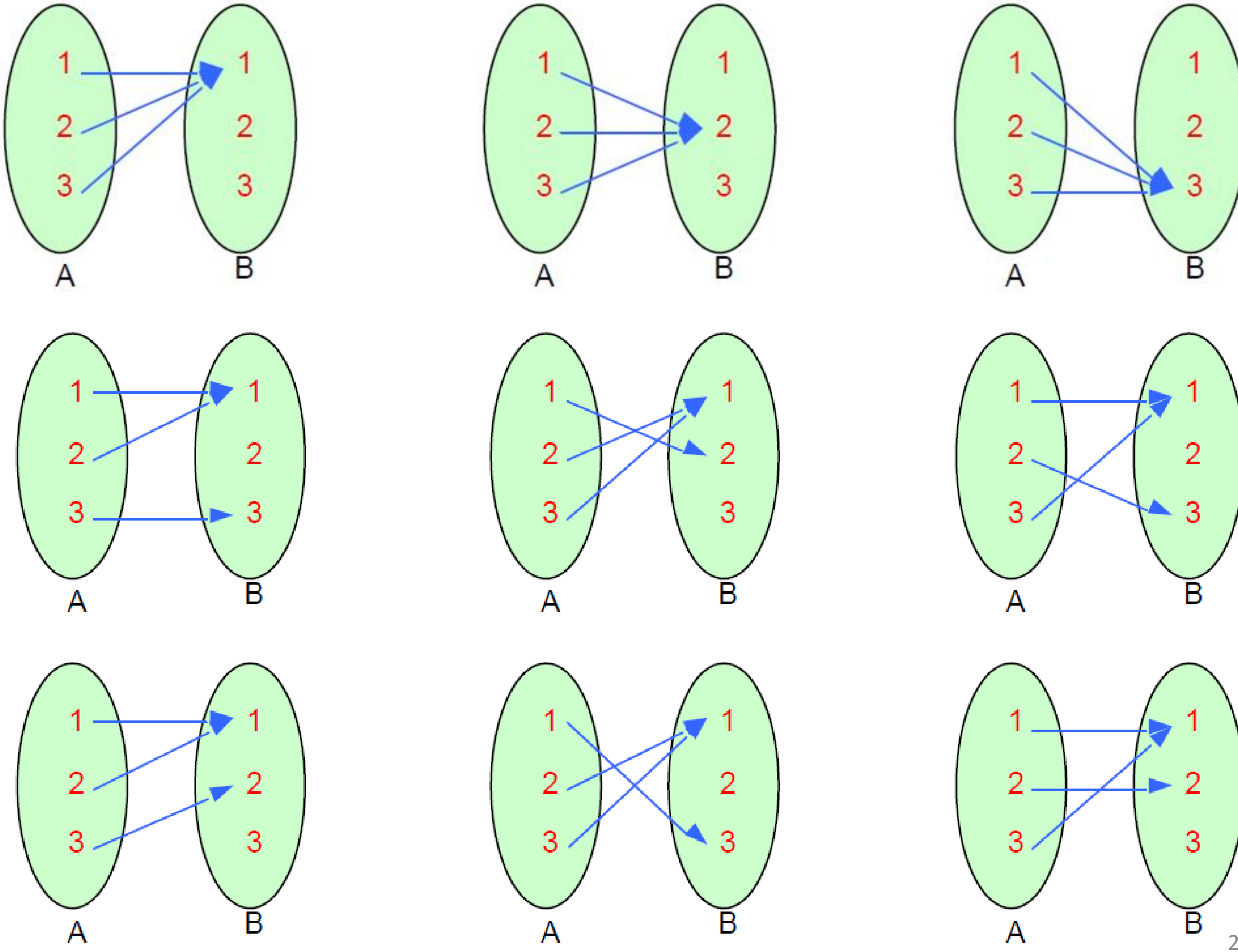
$$\exists \min(f) \wedge \nexists \max(f) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = [\min(f); +\infty)$$

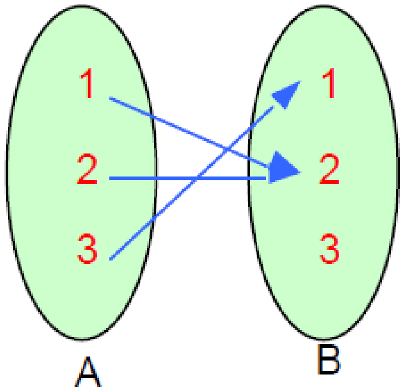
$$\nexists \min(f) \wedge \nexists \max(f) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}$$

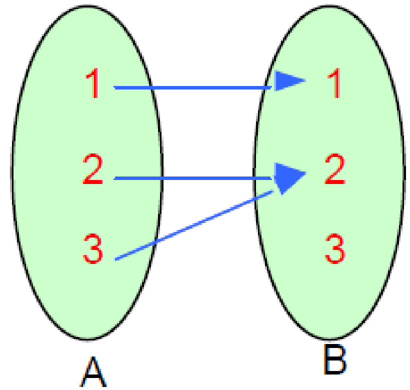
❑ Relação Inversa x Função Inversa

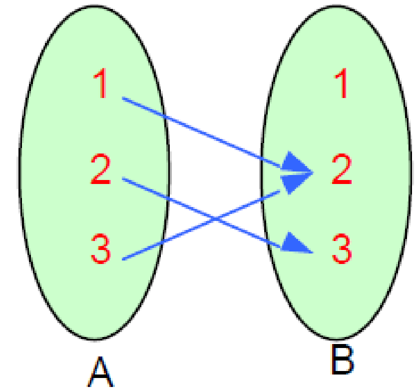
- Sejam A = B = {1, 2, 3}. Suponha que queiramos determinar todas as funções de A em B (A→B) . Com um pouco de tempo veríamos que temos ao todo 27 funções possíveis (representadas a seguir pelos diagramas de Venn)

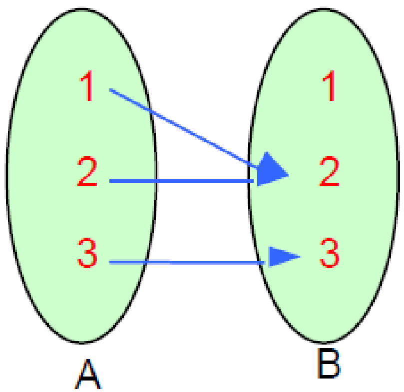


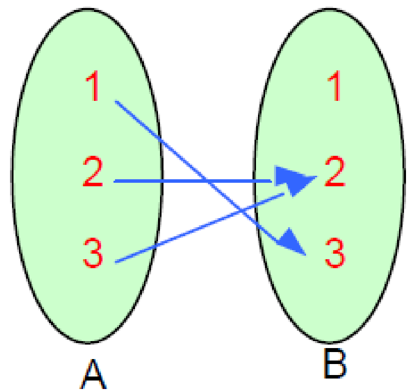

1 1
2 2
3 3
A B
1 1
2 2
3 3
A B
1 1
2 2
3 3
A B
1 1
2 2
3 3
A B
1 1
2 2
3 3
A B
1 1
2 2
3 3
A B
1 1
2 2
3 3
A B
1 1
2 2
3 3
A B
1 1
2 2
3 3
A B

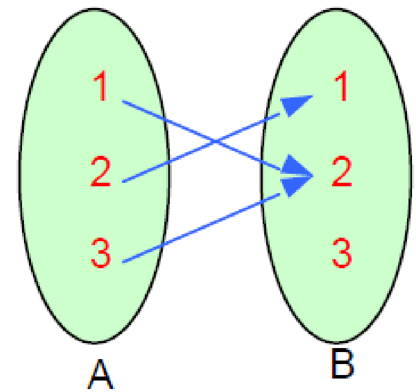

1
2
3
1
2
3
A
B

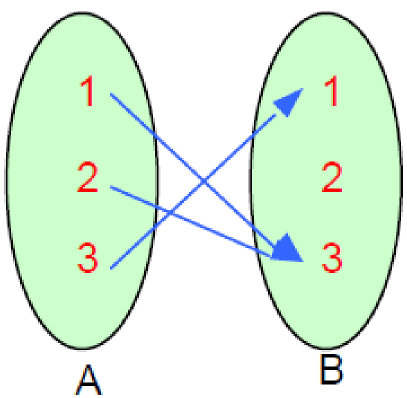

1
2
3
1
2
3
A
B

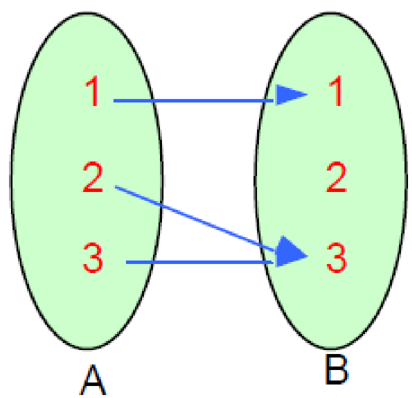

1
2
3
1
2
3
A
B

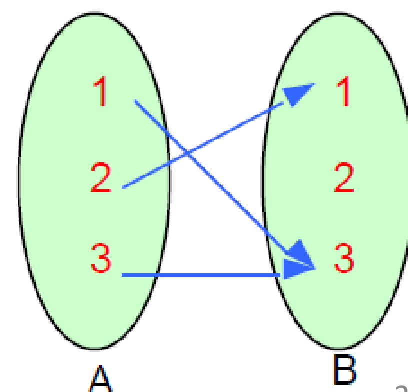

1
2
3
1
2
3
A
B

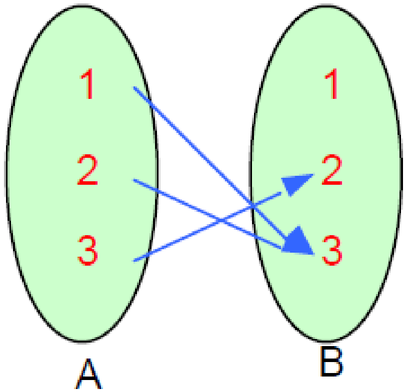

1
2
3
1
2
3
A
B

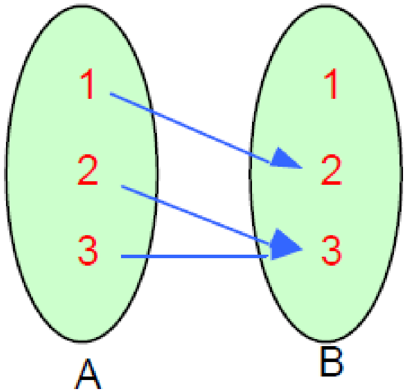

1
2
3
1
2
3
A
B

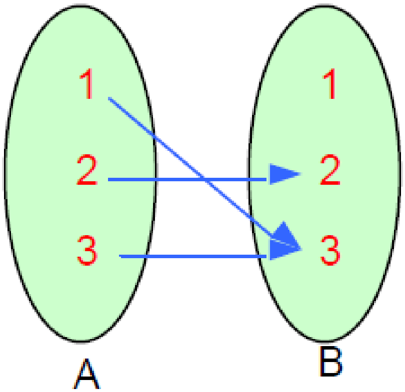

1
2
3
1
2
3
A
B


1
2
3
1
2
3
A
B


1
2
3
1
2
3
A
B



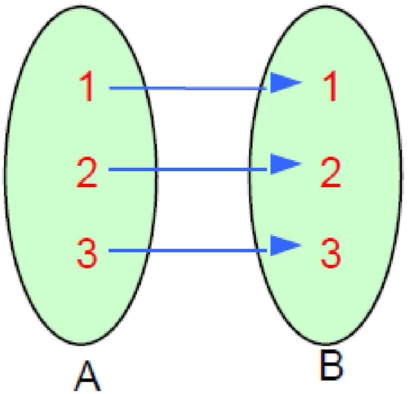


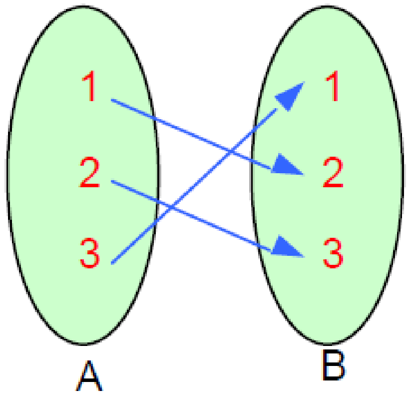


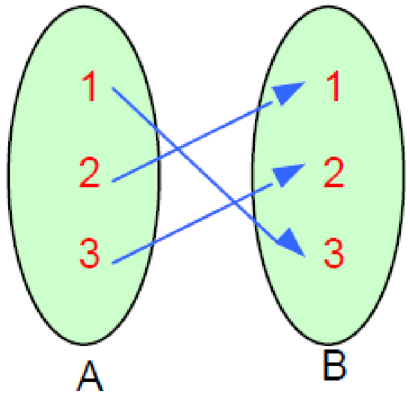
- Agora se permutássemos: Quais destas funções seriam capazes de satisfazer à seguinte propriedade: "f: A → B é uma função tal que existe uma função g: B → A para a qual g(y) = x se e somente se f(x) = y" ?

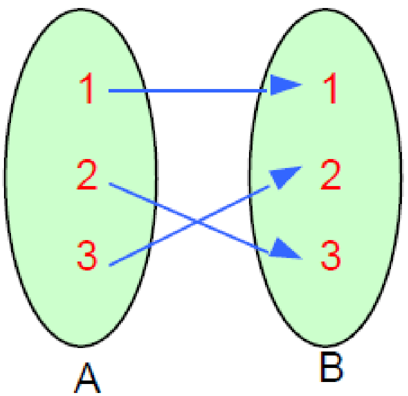
- Ou seja se "invertêssemos os sentidos das flechas", tornando o cotra-domínio o domínio e vice-versa, quais dos diagramas anteriores ainda seriam funções?

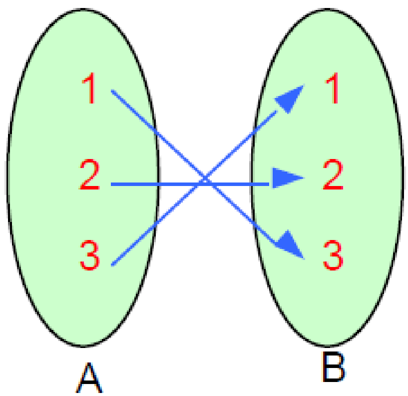
- Analisando os diagramas veríamos que as funções que satisfazem tal questão são:

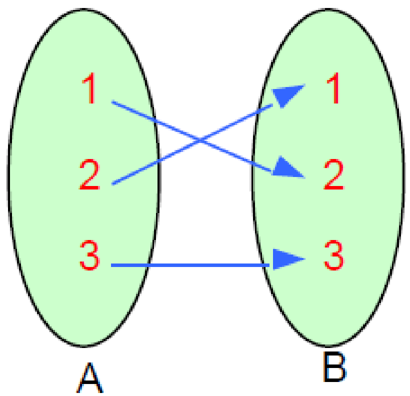












- Isto nos leva a duas questões importantes:

(a) Por que as demais 21 funções não satisfazem à questão levantada?

(b) Quais as propriedades que estas 6 funções possuem em comum?

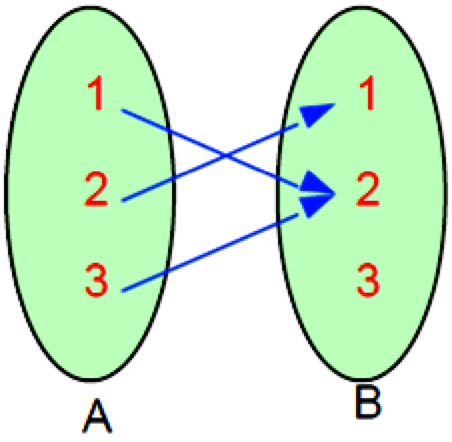
Para respondermos a estas questões podemos começar observando que a função

f: { 1,2,3 } $\rightarrow$ { 1, 2, 3 } definida por f(1) = 2, f(2) = 1 e f(3) = 2

não responde à questão formulada por dois motivos:

$(\exists\, y \in B)(y = 3)(\forall\, x \in A)(y \neq f(x))$

$(\exists\, x_1, x_2 \in A)(x_1 = 1 \wedge x_2 = 3)(f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2)$



- Não é difícil observar que todas as 21 funções não selecionadas falham em pelo menos uma das situações assinaladas para a função f acima.
- Por que estas observações são importantes para a definição das funções g: B→ A?

- Usando a negação das proposições acima podemos determinar as propriedades que as 6 funções selecionadas cumprem. As condições são:

(1) $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$

(2) $(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) \neq f(x_2) \vee x_1 = x_2)$

- Usando a equivalência lógica $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$, podemos reescrever a segunda propriedade na forma equivalente a dada acima.

$$(2) \qquad (\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$$

- Finalmente, observe que:
- Usando estas duas propriedades é possível resolver o problema.
- Estas são as condições que definem uma função de B em A!

- **Resumindo... a relação inversa de uma função não é, necessariamente, uma função.**

- Exemplo 5 :
- Seja A = {0, 1, 2} e a função R $\subseteq$ A x A tal que R = { (0, 2), (1, 2), (2, 1) }. Assim, a relação inversa de R é denotada por R^{-1} = { (2, 0), (2, 1), (1, 2) }, que claramente não é uma relação funcional e então, não é uma função.

- Exemplo 6 :
- 2) Seja a função f: {0, 1} $\rightarrow$ {0, 1, 2} tal que f = { (0, 0), (1, 1) }. A inversa da função f, denotada por $(f)^{-1}$, possui o mesmo conjunto de pares ordenados, {(0, 0), (1, 1)}, mas não é função!!!

CUIDADO:

- A notação utilizada para a representação da função inversa é um tanto infeliz, mas foi difundida por diversos livros e fontes. Então CUIDADO!

- f^{-1} significa a **função inversa** de f.
- Isto NADA TEM A VER com a função $\frac{1}{f}$ (denominada "**inverso da função** f")

um para um
muitos para um } podem ser função

um para muitos
muitos para muitos } impossível serem funções.

Função Injetora, Sobrejetora e Bijetora

- Dada uma função $f : A \rightarrow B$, dizemos que f é:

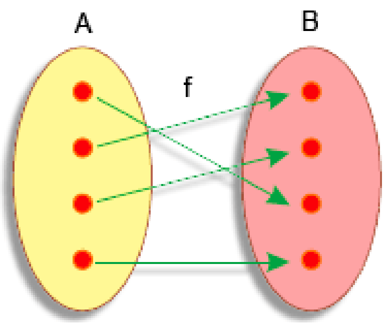
a) Injetora: f é injetora de A em B $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$

- Note que isto é o mesmo que $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
- Note que isto **NÃO** é o mesmo que $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2))$

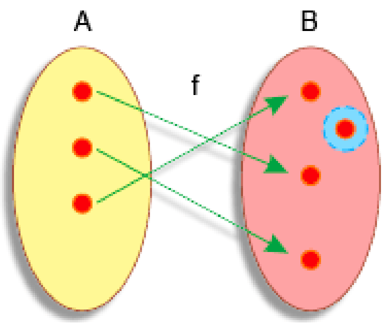
b) Sobrejetora: f é sobrejetora de A em B $\Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$

Ou ainda, se o contradomínio da função é igual à sua imagem.

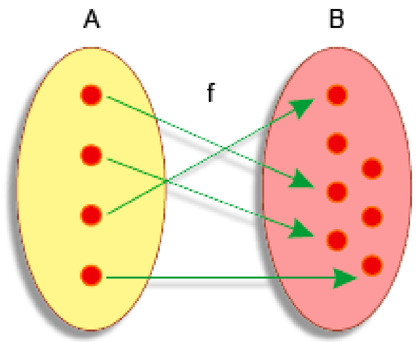
c) Bijetora se é injetora e sobrejetora



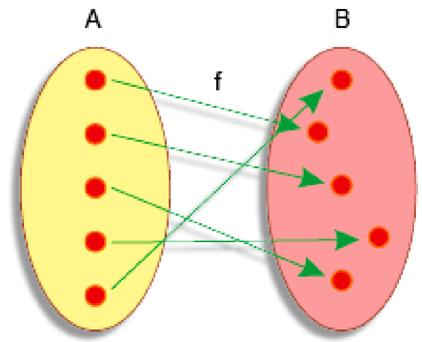
f é SOBREJETORA



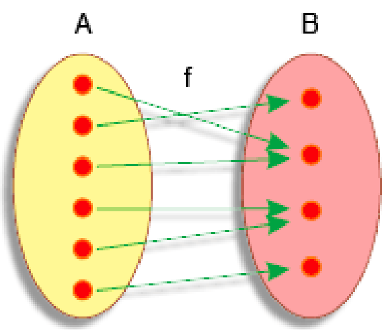
J não é SOBREJETORA



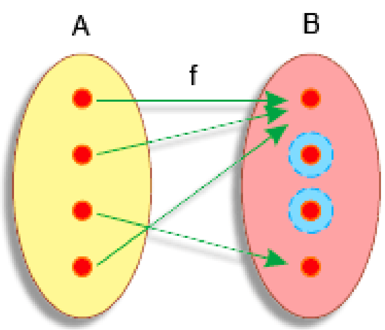
f é INJETORA



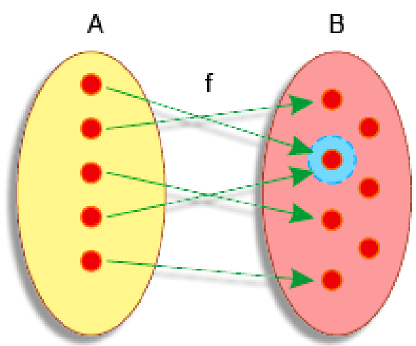
f é INJETORA



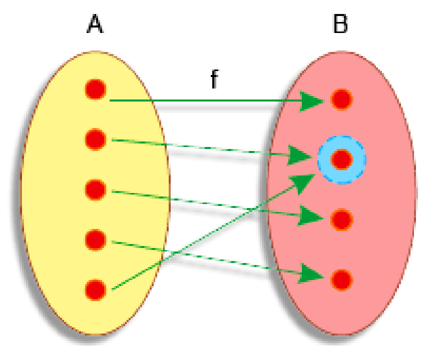
f é SOBREJETORA



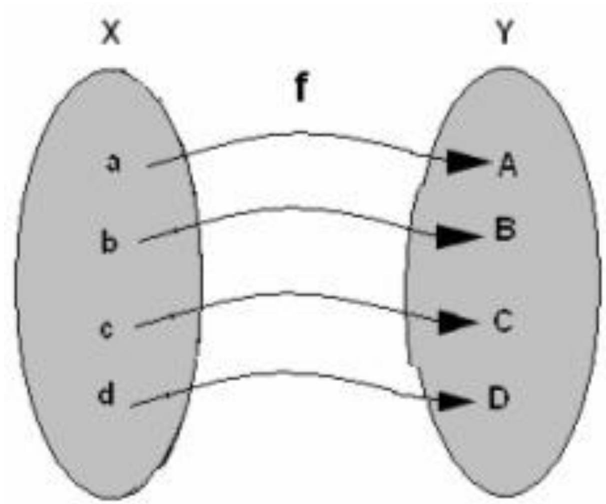
J não é SOBREJETORA



f NÃO é INJETORA



f NÃO é INJETORA



BIJETORA = INJETORA + SOBREJETORA

- **Exemplo 7:**
- Sejam A = {a}, B = {a, b} e C = {0, 1, 2}. Então

1. São sobrejetoras:

a) $h \subseteq C \times B$, $h = \{ (0, a), (1, b), (2, b) \}$

$\{ (0, a), (1, b), (2, b) \}: C \to B$

b) $n \subseteq A \times A$, $x\, n\, y \Leftrightarrow x = y$

$n \subseteq A \times A$, $n = \{ (a, a) \}$

$=: A \to A$

2. São injetoras:

a) $q \subseteq B \times C$, $q = \{ (a, 0), (b, 2) \}$

$\{ (a, 0), (b, 2) \}: B \to C$

b) $n \subseteq A \times A$, $x\, n\, y \Leftrightarrow x = y$

$n \subseteq A \times A$, $n = \{ (a, a) \}$

$=: A \to A$

- São bijetoras:

a) $f \subseteq C \times C$, $\quad f = \{ (0, 1), (1, 2), (2, 0) \}$

$\{ (0, 1), (1, 2), (2, 0) \}: C \to C$

b) $n \subseteq A \times A$, $\quad x\, n\, y \Leftrightarrow x = y$

$n \subseteq A \times A$, $\quad n = \{ (a, a) \}$

$=: A \to A$

OBSERVAÇÃO

- Uma função f: A→ B é uma função inversível sempre que sua inversa também for uma função. Assim, **sempre que f for uma função bijetora ela possuirá sua função inversa**, denotada por f^{-1}.

Exemplos

- Sejam A = {a}, B = {a, b} e C = {0, 1, 2}. Então:

- **1)São inversíveis:**

a) $f \subseteq C \times C$, $f = \{ (0, 1), (1, 2), (2, 0) \}$

$\{ (0, 1), (1, 2), (2, 0) \}: C \to C$

b) $n \subseteq A \times A, \quad x\, n\, y \Leftrightarrow x = y$

$n \subseteq A \times A, \quad n = \{ (a, a) \}$

$=: A \to A$

E então

$f^{-1} = \{ (1, 0), (2, 1), (0, 2) \}$ e

$n^{-1} = \{ (a, a) \}$

2) Não são inversíveis:

a) $h \subseteq C \times B, \quad h = \{ (0, a), (1, b), (2, b) \}$

$\{ (0, a), (1, b), (2, b) \}: C \to B$

b) $q \subseteq B \times C, \quad q = \{ (a, 0), (b, 2) \}$

$\{ (a, 0), (b, 2) \}: B \to C$

Exemplo 8:

Mostre que $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ não é injetora.

<u>Solução</u>: Para verificar que a expressão acima não é injetora precisamos mostrar que a proposição

$$(\forall\, x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$$

falha para alguma combinação de valores x_1 e x_2 que satisfaçam à premissa $f(x_1) = f(x_2)$.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

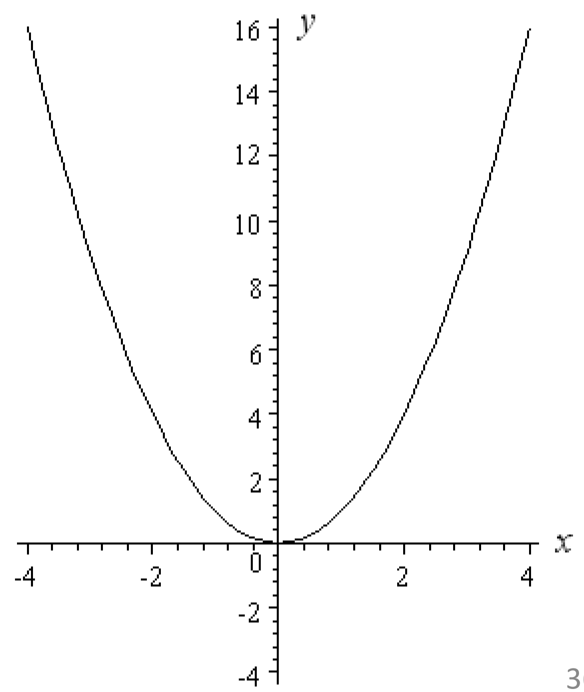
Por exemplo, escolhendo $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$, temos que

$f(x_1) = f(x_2)$, pois

$x_1^2 = 2^2 = 4, \qquad x_2^2 = (-2)^2 = 4$

Mas $x_1 \neq x_2$.

Logo, $(\forall\, x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2) \Leftrightarrow F$.



- Exemplo 9: Mostre que $y = x^2, x \geq 0$ é injetora.

- Solução: Para verificar que a expressão acima é injetora precisamos mostrar que a proposição:

$$(\forall\ x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$$

vale para todas as combinações possíveis de valores de x_1 e x_2 que satisfaçam à premissa $f(x_1) = f(x_2)$:

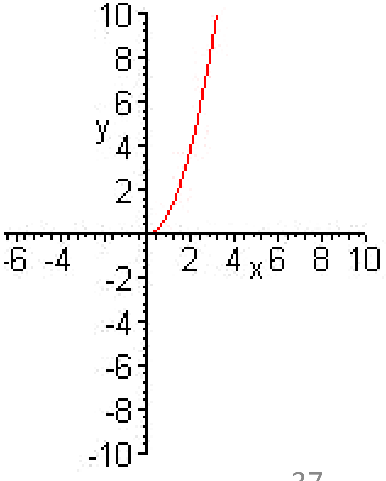
Sejam $x_1, x_2 \in [\ 0; +\infty\ )$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow |\ x_1\ | = |\ x_2\ | \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = -x_2)$.

Como $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \Rightarrow (x_1 = -x_2 \Leftrightarrow F)$.

Então $(x_1 = x_2) \vee (x_1 = -x_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee F \Leftrightarrow (x_1 = x_2)$.

Logo, $(\forall\ x_1, x_2 \in [\ 0; +\infty\ ))(x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2)$.



Exemplo 10: Mostre que $y = -x^2 + 5x - 6$, $x \in \mathbf{R}$ não é injetora.

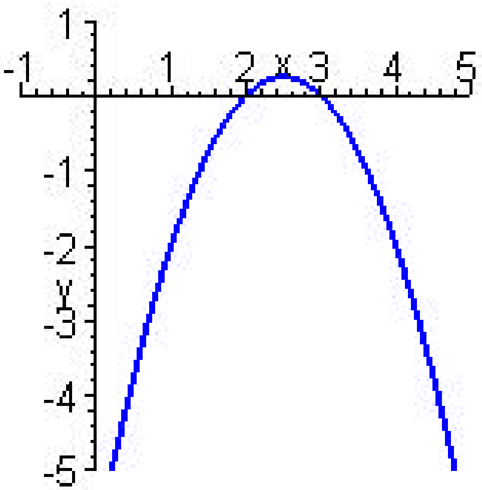
Solução: Esta função não pode ser injetora pois possui duas raízes reais diferentes.

Com efeito, sabemos que as raízes desta função são $x = 2$ e $x = 3$.

Isto significa que

$(\exists\, x_1, x_2 \in \mathbf{R})(x_1 = 2 \wedge x_2 = 3)(f(x_1) = f(x_2) = 0 \wedge x_1 \neq x_2)$.

Logo, f não é injetora!



- Exemplo 11: Mostre que $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ é injetora.

- Solução: Para verificar que a expressão acima é injetora precisamos mostrar que a proposição:

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$$

vale para todas as combinações possíveis de valores de x_1 e x_2 que satisfaçam à premissa $f(x_1) = f(x_2)$:

Sejam $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$ tais que $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$.

$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow \left(\sqrt{x_1}\right)^2 = \left(\sqrt{x_2}\right)^2$.

Como $\left(\sqrt{x}\right)^2 = |x|$, então $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 = \left(\sqrt{x_2}\right)^2 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = -x_2)$.

Como $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \Rightarrow (x_1 = -x_2 \Leftrightarrow F)$.

Então $(x_1 = x_2) \vee (x_1 = -x_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee F \Leftrightarrow (x_1 = x_2)$.

Logo, $(\forall x_1, x_2 \in [0; +\infty))(\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2)$.

- **Teorema**

- Seja f uma função real. Então:

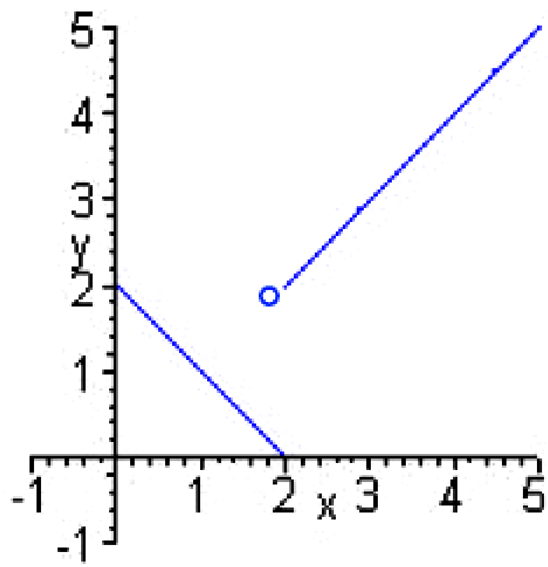
1. f estritamente crescente → f injetora
2. f estritamente decrescente → f injetora

- OBSERVAÇÃO: Note que a recíproca das implicações não é necessariamente verdadeira!
- Isto significa que:
- Se uma função não é estritamente crescente **não se pode afirmar que ela não seja injetora!**
- Se uma função não é estritamente decrescente **não se pode afirmar que ela não seja injetora!**

Por exemplo, observe o gráfico da função ao lado, que é definida por

$$f: [\,0; +\infty\,) \to [\,0; +\infty\,), \quad f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 \le x \le 2 \\ x & x > 2 \end{cases}$$

Ela é injetora, mas não é estritamente crescente!



- Exemplo 12: Mostre que $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ não é sobrejetora.

- Solução: Para mostrarmos que a lei acima não define uma função sobrejetora, basta encontrarmos algum valor no conjunto das respostas (isto é, o contradomínio da função) que não tenha entrada associada (ou seja, não pertença à imagem da função).
- Para facilitar vamos chamar a função acima de f: Seja f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ **definida por** $\mathbf{f(x) = x^2}$.

Por exemplo, seja $y = -1$.

Temos que $y \in \mathbf{R}$, mas $(\nexists x \in \mathbf{R})(x^2 = -1)$.

Logo, $(\exists y \in \mathbf{R})(y = -1)(\nexists x \in \mathbf{R})(x^2 = y)$.

Logo, $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x)) \Leftrightarrow F$.

Logo, f não é sobrejetora.

- Exemplo 13: Mostre que f: $\mathbf{R} \to [\,0; +\infty\,)$, $f(x) = x^2$ é sobrejetora.

<u>Solução</u>: Precisamos mostrar que a proposição

$$(\forall\, y \in [\,0; +\infty\,)\,)(\,\exists\, x \in \mathbf{R}\,)(\,y = x^2\,)$$

é sempre válida. Para isto:

Seja $y \in [\,0; +\infty\,)$.

$y \in [\,0; +\infty\,) \Leftrightarrow y \geq 0$.

Como $(\,\forall\, x \in \mathbf{R}\,)(\,x^2 \geq 0\,)$, então chamando $y = x^2$ temos que

$(\forall\, y \in [\,0; +\infty\,)\,)(\,\exists\, x \in \mathbf{R}\,)(\,y = x^2\,)$

Logo, f é sobrejetora.

Para acabar, um última teorema:

Seja f uma função inversível e f^{-1} sua função inversa.

Então: $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Im}(f^{-1})$

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Dom}(f^{-1})$

Prova: Para facilitar, digamos que f é uma função inversível de A em B, ou seja: $f: A \to B$.

Como conseqüência, $f^{-1}: B \to A$ também é inversível.

f é inversível $\Leftrightarrow$ f é bijetora $\Leftrightarrow$ f é injetora $\wedge$ f é sobrejetora.

Mas:

f é sobrejetora $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = B$.

f^{-1} é sobrejetora $\Rightarrow \mathrm{Im}(f^{-1}) = A$.

Como:

$\mathrm{Dom}(f) = A$

$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = B$,

temos que $(\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Im}(f^{-1})) \wedge (\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Dom}(f^{-1}))$

Exercícios

1) Verifique se:

a) $\begin{aligned} f : IR &\to IR \\ x \mapsto y &= x^2 \end{aligned}$ é função.

b) $f : IR \to IR$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é função.

c) $f : IR \to IR$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é função.

d) $f : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é função.

e) $x^2 + y^2 = 1,\ x \in [-1;1],\ y \in IR$ é função.

f) $f : IR \to IR$ definida por $f(x) = e^x$ é função.

2) Realize um estudo das mesmas funções do exercício 1, acima definidas, verificando sua bijeção.

3) Mostre que $y = x^2$, $x \in IR$ e $y \in IR$ não é injetora.

4) Verifique se $f : IR_+ \to IR_+$ definida por $f(x) = x^2$ é injetora, sobrejetora ou bijetora.

5) Verifique se $f : IR_+ \to IR_+$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é injetora, sobrejetora ou bijetora.

6) Mostre que $f : IR \to IR$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$ não é injetora.

7) Verifique se $f : IR \to IR$ definida por $f(x) = |x|$ é injetora.

8) Mostre que $y = \ln x$, $x > 0$ e $y \in IR$ é injetora.

9) Encontre condições sobre os conjuntos A e B, subconjuntos de IR, de modo que $y = \dfrac{1}{x^2}$

10) A relação $T \subseteq IR^2$ onde $xTy \Leftrightarrow y + 3 = x$ é uma função? Caso afirmativo, verifique se ela é inversível.

11) A relação $W \subseteq IR^2$ onde $xWy \Leftrightarrow x^2 + y = 4$ é uma função? Caso afirmativo, verifique se ela é inversível.

12) Verifique se $f : IR \rightarrow IR$ tal que $f(x) = x^2$ é inversível. Caso afirmativo, encontre a lei da f^{-1}.

13) Verifique se $g : IR \rightarrow IR$ tal que $g(x) = x^3$ é inversível. Caso afirmativo, encontre a lei da g^{-1}.

14) Verifique se $f : IR \rightarrow IR$ tal que $f(x) = 5x - 3$ é inversível. Caso afirmativo, encontre a lei da f^{-1}.

15) Encontre o maior domínio $A \subseteq IR$ para que f, definida por $f(x) = (x - 1)(x + 2)^{-2}$ seja uma função.

16) Sejam A e B conjuntos com *m* e *n* elementos, respectivamente.

a) Determine condições para *m* e *n* de forma que não seja possível encontrar uma função injetora de A em B.

b) Determine condições para *m* e *n* de forma que seja possível encontrar uma função bijetora de A em B.

17) Verifique se $f : ZxZ \to Z$ definida por $f(x, y) = x - y$ é injetora, sobrejetora ou bijetora.

Respostas

1) a) É função pois, todo x real existe o seu quadrado nos reais e, o quadrado desse x é único.

b) Não é função pois, existem elementos negativos nos reais e estes não possuem raiz quadrada nos reais.

c) Não é função pois o zero não tem imagem, isto é , não existe f(0).

d) É função pois todo número positivo tem raiz quadrada nos reais e única.

e) Não é função pois o mesmo x tem duas imagens, por exemplo, (0,1) e (0,-1) são elementos dessa relação.

f) É função pois todo x de IR tem imagem e é única. Faça o gráfico para conferir.

2) A única bijetora é a letra **d**.

3) Não é injetora, pois um mesmo elemento imagem de dois diferentes, por exemplo -2 e +2 têm imagem 4.

4) Neste caso é bijetora.

5) Neste caso é bijetora.

6) Não é injetora, pois um mesmo elemento é imagem de dois diferentes, por exemplo 3 e 2 têm imagem 0.

7) Não é injetora, pois um mesmo elemento é imagem de dois diferentes, por exemplo -2 e +2 têm imagem 2.

8) É injetora pois o logaritmo de um número é único.

9) $A = IR_+^*$ e $B = IR_+^*$ ou $A = IR_-^*$ e $B = IR_+^*$

10) É função pois $(\forall a \in A)\ (\forall b_1 \in B)\ (\forall b_2 \in B)\ (aRb_1 \wedge aRb_2 \rightarrow b_1 = b_2)$ e $(\forall a \in A)\ (\exists b \in B)\ (aRb)$ e ela é inversível já que é bijetora.

11) É função pois $(\forall a \in A)\ (\forall b_1 \in B)\ (\forall b_2 \in B)\ (aRb_1 \wedge aRb_2 \rightarrow b_1 = b_2)$ e $(\forall a \in A)\ (\exists b \in B)\ (aRb)$ e ela não é inversível já que não é sobrejetora nem injetora.

12) Idem a anterior.

13) É função bijetora, logo inversível e $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

14) É função bijetora, logo inversível e $y = \dfrac{x+3}{5}$

15) A = IR – {-2}

16) a) $m \leq n$

b) $m = n$

17) Não é injetora, pois um mesmo elemento é imagem de dois elementos diferentes, por exemplo: f(4, 2) = 4 - 2 = 2 e f(6,4) = 6 – 4 = 2 . É sobrejetora, pois $\forall\ z \in Z, \exists$ (x, y) = (x, x-z) tal que f(x, x-z) = z por exemplo: f(5, 5-2) = f(5, 3) = 2.