

QMKP

QUADRATIC MULTIPLE KNAPSACK PROBLEM

Apresentação criada por [Mateus Cordeiro](#)

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O QMKP é uma extensão do clássico problema da mochila, modificado em 2 principais aspectos:

1. **Multiple:** Várias mochilas com capacidades independentes
2. **Quadratic:** Valores associados aos pares de itens

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

OBJETIVO

Maximizar a soma dos valores individuais e dos pares, sem exceder a capacidade de nenhuma das mochilas.

Problema pertence a classe NP-difícil.

DEFINIÇÃO FORMAL

- Conjunto de n itens: $N = \{1, \dots, n\}$
- Conjunto de m mochilas: $M = \{1, \dots, m\}$
- Cada item $i \in N$ tem valor V_i e peso W_i
- Cada par de itens $i \in N$ e $j \in N$ ($i \neq j$) tem valor V_{ij}
- Cada mochila $k \in M$ tem capacidade C_k

DEFINIÇÃO FORMAL

Considerando que x_{ik} será 1 se o objeto i estiver dentro da mochila k e 0 caso contrário, o objetivo é maximizar o valor de V_{sum}

$$V_{sum} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ik} v_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^m x_{ik} x_{jk} v_{ij},$$

CONDIÇÕES BÁSICAS

$$\sum_{k=1}^m x_{jk} \leq 1; \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jk} w_j \leq C_k; \quad k = 1, \dots, m,$$

APLICAÇÕES

- Alocação de equipes de trabalho para projetos, onde é possível definir os orçamentos dos projetos e a produtividade dos colaboradores.
- Alocação de investimentos financeiros

AN EJECTION CHAIN APPROACH FOR THE QUADRATIC MULTIPLE KNAPSACK PROBLEM

Bo Peng, Mengqi Liu, Zhipeng Lü, Gary Kochengber, Haibo Wang

EJECTION CHAIN (CADEIA DE EJEÇÃO)

Os autores do artigo definem ejection chain como uma sequência de movimentos de uma solução para outra iniciando pela remoção de um item da solução inicial.

Extensão de uma simples busca local para definir movimentos mais promissores

EJECTION CHAIN APPROACH (ECA)

1. Construção de solução inicial
2. Busca local por ejection chain
3. Perturbação adaptativa

Algorithm 1 Framework of the ECA for the QMKP

```
1: Input: The benchmark instance for the QMKP, and the maximum computing time
2: Output: The best solution  $S^*$  found so far
   /*Initial solution construction phase*/
3:  $S^0 \leftarrow \text{Init\_Solution}()$ 
4:  $S^* \leftarrow S^0, \text{no\_improv\_iter} \leftarrow 0$ 
5: while the maximum computing time is not reached do
6:   /*Ejection chain local search phase*/
7:    $S' \leftarrow \text{Ejection\_Chain}(S^0)$ 
8:   /*Updating the best solution and the intermediate parameter*/
9:   if  $S'$  is better than  $S^*$  then
10:     $S^* \leftarrow S', \text{no\_improv\_iter} \leftarrow 0$ 
11:   else
12:     $\text{no\_improv\_iter} \leftarrow \text{no\_improv\_iter} + 1$ 
13:   end if
14:   /*Adaptive perturbation phase based on both random and greedy strategies*/
15:    $S^0 \leftarrow \text{Adaptive\_Perturbation}(S', \text{no\_improv\_iter})$ 
16: end while
17: return  $S^*$ 
```

Primeiramente um algoritmo construtivo guloso gera uma solução inicial promissora.

Alternância entre fase de busca local por ejection chain e fase de perturbação.

Obtenção de um bom balanceamento entre intensificação e diversificação.

CONSTRUÇÃO DE SOLUÇÃO INICIAL

Heurística construtiva gulosa que se baseia na densidade relativa de adição de um item a uma mochila.

$$\Delta(i, k) = V_i + \sum_{j \in N} x_{jk} V_{ij}, \quad i \in N, \ k \in M,$$

$$D(i, k) = \Delta(i, k)/w_i, \quad i \in N, \ k \in M,$$

CONSTRUÇÃO DE SOLUÇÃO INICIAL

Construção de forma iterativa da solução inicial com atualização das densidades a cada iteração.

BUSCA LOCAL POR EJECTION CHAIN

- Algoritmo de busca local first-improvement
- Formação de cadeia de ejeção
 - ejection moves
 - trial moves

MOVIMENTOS DE EJEÇÃO

- Remoção de item da mochila
Gera uma estrutura de referência
- Mudar um item de uma mochila para outra
Formação de efeito de cadeia

MOVIMENTOS "TRIAL"

Transforma uma estrutura de referência em uma solução completa, adicionando objeto livre a mochila.

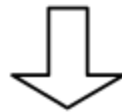
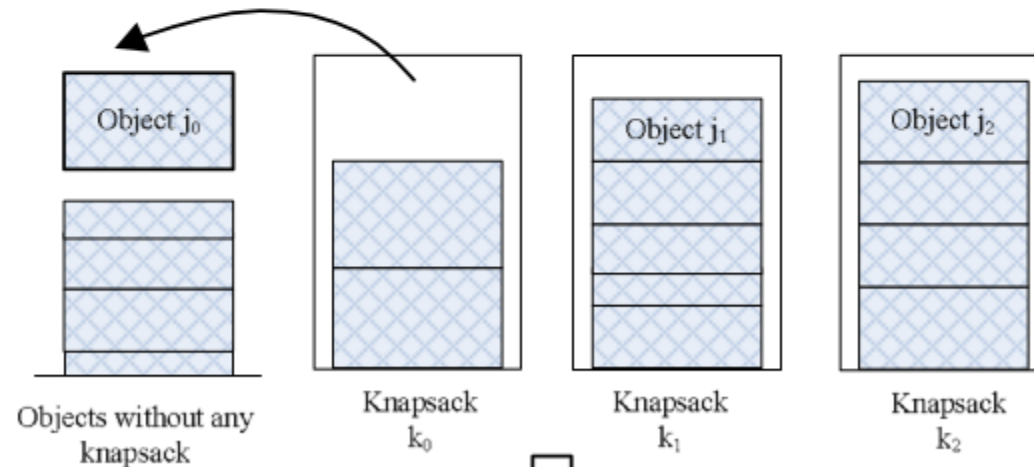
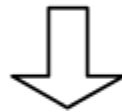
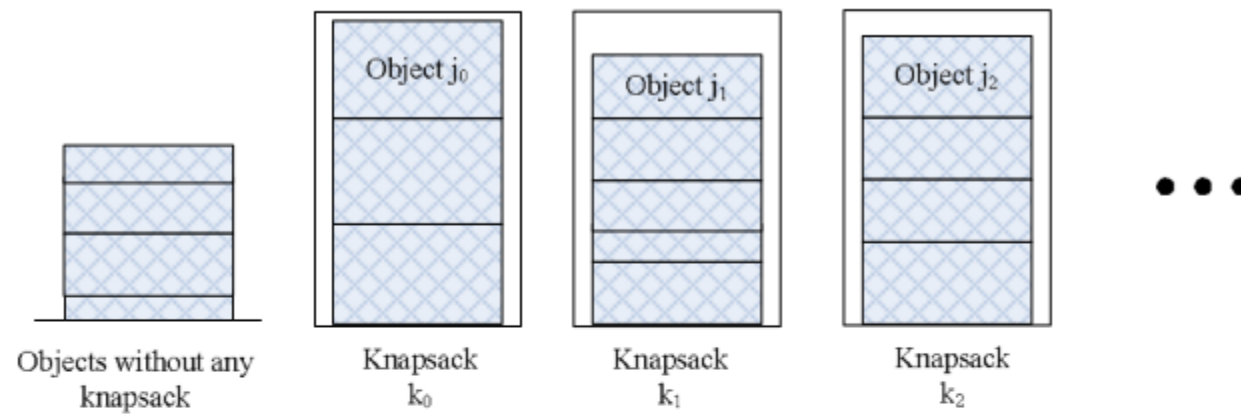
Algorithm 2 Ejection chain local search phase

```
1: Input: Starting solution  $S^0$ 
2: Output: The best solution  $S'$  found in the local search
3:  $len$ : the length of the current constructing chain
4:  $S$ : the current solution,  $S' \leftarrow S^0$ ,  $S \leftarrow S^0$ 
5:  $S^R$ : the current reference solution,  $S^T$ : the current trial solution
6: while (the best solution  $S'$  can be improved further) do
7:    $H \leftarrow$  the set of assigned objects in the current solution  $S$ 
   //One iteration of the first-improvement based ejection chain local search (lines 8-26)
8:   for  $j \in H$  do
9:      $S^R \leftarrow Ejection\_Move1(S, j)$ ,  $len \leftarrow 1$ 
10:    while ( $len \leq cl$ ) do
11:      //Constructing a trial solution and updating the current solution  $S$  (lines 12-15)
12:       $S^T \leftarrow Trial\_Move(S^R, j)$ 
13:      if  $S^T$  is better than  $S$  then
14:         $S \leftarrow S^T$ , goto line 27
15:      end if
```

```

//Choosing a reference solution based on greedy and random strategies (lines 16-23)
16:   for  $l \in N$  and  $l$  is not in the recently ejected object's knapsack do
17:      $S_l^R \leftarrow \text{Ejection\_Move2}(S^R, l)$ 
18:   end for
19:   if  $\text{rand}[0,1) \leq \alpha$  then
20:      $S^R \leftarrow \arg \text{best } \{S_l^R\}$ 
21:   else
22:      $S^R \leftarrow \text{random } \{S_l^R\}$ 
23:   end if
24:    $len \leftarrow len + 1$ 
25: end while
26: end for
//Updating the best solution (lines 27-29)
27:   if  $S$  is better than  $S'$  then
28:      $S' \leftarrow S$ 
29:   end if
30: end while
31: return  $S'$ 

```





PERTURBAÇÃO ADAPTIVA

- Mudança de vizinhança
- Diversificação
- Estratégias iterativas:
 - Gulosa
 - Gulosa e randômica

ESTRATÉGIA GULOSA

Baseia na densidade de forma similar a construção da solução inicial para a ECA.

ESTRATÉGIA GULOSA E RANDÔMICA

A cada iteração os Z melhores movimentos também baseados na densidade $D(i, k)$ são ordenados de forma não decrescente, a probabilidade de h -ésimo par (item, mochila) ser escolhido é:

$$h / \sum_{i=1}^z i, (h = 1, \dots, z).$$

Algorithm 3 Adaptive perturbation phase

1: **Input:** The starting solution S' and the number of iterations no_improv_iter
2: **Output:** The constructed solution S^0
3: $S \leftarrow Random_Remove(S')$
4: **if** $no_improv_iter < \beta$ **then**
5: $S^0 \leftarrow Greedy_Construct(S)$
6: **else**
7: $S^0 \leftarrow Greedy_and_Random_Construct(S)$
8: $no_improv_iter \leftarrow 0$;
9: **end if**
10: **return** S_0

DESEMPENHO COMPUTACIONAL

- Os experimentos da ECA foi feitos com 60 instâncias de 1 e 2
- Instâncias são caracterizadas pela proporção d de valores diferentes de 0 para os pares de itens.
 - $d = 0.25$
 - $d = 0.75$

OUTROS ALGORITMOS

- **ABC:** artificial bee colony - Sundar e Singh

Baseado na troca de objetos sem mochila com objetos já em alguma mochila.

- **TIG:** iterated greedy algorithm - García Martínez
- **SO:** strategic oscillation - García Martínez

Exploração de soluções em regiões factíveis ou não.

RESULTADOS

Das 60 instâncias

- ECA supera os melhores resultados conhecidos em 34
 - 18 - $d = 0.25$
 - 16 - $d = 0.75$
- ECA encontra resultados piores que os conhecidos em apenas 6

| Algorithm | <i>Best</i> | | <i>Avg</i> | | <i>SD</i> | |
|-----------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| | <i>Value</i> | <i>Number</i> | <i>Value</i> | <i>Number</i> | <i>Value</i> | <i>Number</i> |
| ABC | 82325.6 | 1 | 82291.3 | 0 | 399.12 | 0 |
| TIG | 83404 | 16 | 83163.8 | 6 | 108.58 | 14 |
| SO | 83452 | 20 | 83233.7 | 11 | 97.08 | 23 |
| ECA | 83576.1 | 54 | 83366.6 | 43 | 95.91 | 23 |

PARÂMETRO CL

| Algorithm | Best | | Avg | | Tav | |
|--------------|---------|--------|---------|--------|--------|--------|
| | Value | Number | Value | Number | Value | Number |
| ECA(cl = 2) | 83516.5 | 24 | 83309.8 | 19 | 292.56 | 33 |
| ECA(cl = 6) | 83576.1 | 49 | 83366.6 | 41 | 318.57 | 21 |
| ECA(cl = 12) | 83534.6 | 22 | 83286.8 | 0 | 337.33 | 7 |

PARÂMETRO B

| Algorithm | $d = 0.25$ | | | | | | $d = 0.75$ | | | | | |
|---------------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| | <i>Best</i> | | <i>Avg</i> | | <i>Tav</i> | | <i>Best</i> | | <i>Avg</i> | | <i>Tav</i> | |
| | <i>Value</i> | <i>Number</i> | <i>Value</i> | <i>Number</i> | <i>Value</i> | <i>Number</i> | <i>Value</i> | <i>Number</i> | <i>Value</i> | <i>Number</i> | <i>Value</i> | <i>Number</i> |
| $ECA(\beta = 2000)$ | 49555.8 | 9 | 49350.7 | 1 | 186.09 | 5 | 117475 | 23 | 117238 | 22 | 126.12 | 0 |
| $ECA(\beta = 5)$ | 49677.1 | 25 | 49495.3 | 20 | 192.45 | 7 | 117131 | 1 | 116745 | 0 | 101.17 | 0 |
| $ECA(\beta = 0)$ | 49622.4 | 12 | 49376.3 | 6 | 178.05 | 15 | 116327 | 0 | 115579 | 0 | 39.59 | 30 |

MELHORIAS

- Busca tabu para melhorar fase de busca local por ejection chain
- Novas operadores e estratégias de perturbação

THE END

- Try the online editor
- Source code & documentation