



# Problemas em Grafos: Árvore Geradora Mínima (AGM / MST)

Profa. Me. Daniela Tereza Ascencio Russi

*[daniela@unoeste.br](mailto:daniela@unoeste.br)*

# Árvore Geradora Mínima

- Uma **árvore geradora mínima (AGM)** é um subgrafo encontrado a partir de um **grafo conexo não dirigido e valorado**, não necessariamente única.
- Logo, uma árvore geradora  $T$  de  $G$  é mínima se nenhuma outra árvore geradora tem custo menor que o de  $T$ . O custo é dado pela soma dos custos das arestas.
- Aplicação:
  - Redes de distribuição de recursos
- Algoritmos Gulosos  $\rightarrow$  *problemas de otimização*:
  - Kruskal
  - Prim
  - ...

# Algoritmos

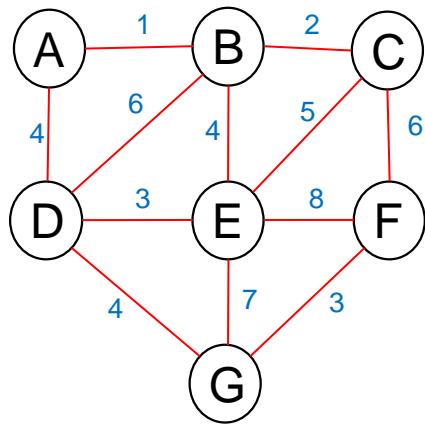
Seja  $G=(V, A)$  um grafo conexo, valorado e não dirigido. Consiste em achar um subconjunto  $T$  de  $A$ , tal que  $T$  forme uma árvore de custo mínimo.

## 1. Algoritmo Kruskal:

- Seleciona as **melhores arestas** sem se preocupar com a conexão das arestas selecionadas anteriormente. O resultado é uma **proliferação de árvores** (floresta) que eventualmente se juntam para formar uma única árvore.
- As arestas são incluídas na ordem de suas distâncias, sempre que puderem (**não resultarem um ciclo**), os empates são resolvidos arbitrariamente, até que todos os vértices estejam conectados.

## 2. Algoritmo Prim:

- A árvore **“cresce”** a partir de um **vértice inicial** arbitrário/determinado, a árvore vai sendo construída aos poucos, até que todos os vértices estejam conectados, os empates são resolvidos arbitrariamente.



	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-

AGM?



A - arestas classificadas pelo valor <menor para o maior>

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



A,B	B,C	D,E	F,G	A,D	B,E	D,G	C,E	B,D	C,F	E,G	E,F
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



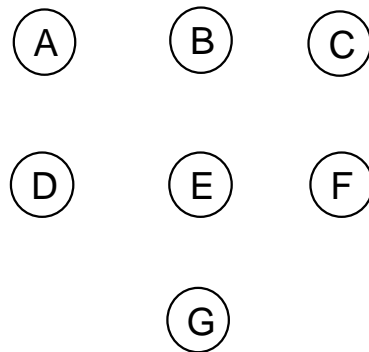
Componentes <avaliar a presença de ciclo>

ARESTA	A	B	C	D	E	F	G



T - arestas selecionadas

--	--	--	--	--	--



# Kruskal

A - arestas classificadas pelo valor <menor para o maior>

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



A,B	B,C	D,E	F,G	A,D	B,E	D,G	C,E	B,D	C,F	E,G	E,F
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



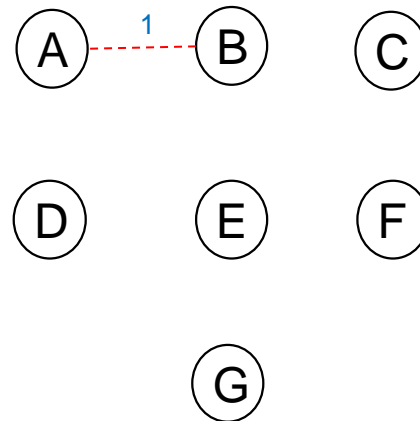
Componentes <avaliar a presença de ciclo>

ARESTA	A	B	C	D	E	F	G
A,B	A	A	C	D	E	F	G



T - arestas selecionadas

A,B					
-----	--	--	--	--	--



# Kruskal

A - arestas classificadas pelo valor <menor para o maior>

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



A,B	B,C	D,E	F,G	A,D	B,E	D,G	C,E	B,D	C,F	E,G	E,F
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



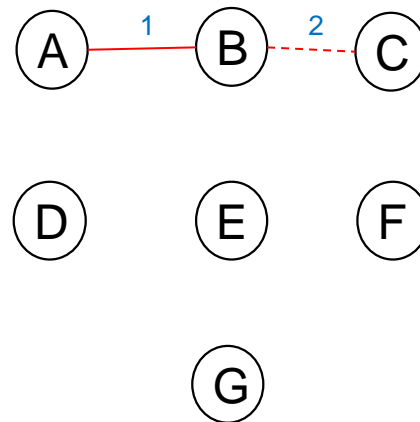
Componentes <avaliar a presença de ciclo>

ARESTA	A	B	C	D	E	F	G
A,B	A	A	C	D	E	F	G
B,C	A	A	A	D	E	F	G



T - arestas selecionadas

A,B	B,C				
-----	-----	--	--	--	--



# Kruskal

A - arestas classificadas pelo valor <menor para o maior>

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



A,B	B,C	D,E	F,G	A,D	B,E	D,G	C,E	B,D	C,F	E,G	E,F
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



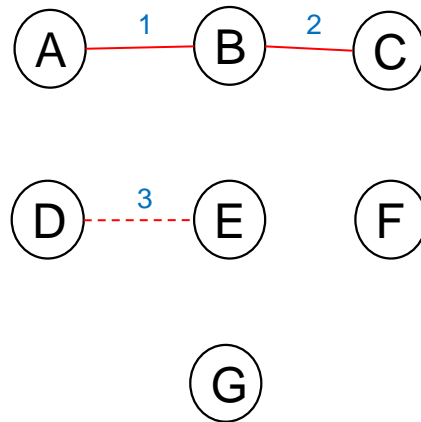
Componentes <avaliar a presença de ciclo>

ARESTA	A	B	C	D	E	F	G
A,B	A	A	C	D	E	F	G
B,C	A	A	A	D	E	F	G
D,E	A	A	A	D	D	F	G



T - arestas selecionadas

A,B	B,C	D,E			
-----	-----	-----	--	--	--



# Kruskal



*A - arestas classificadas pelo valor <menor para o maior>*

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



A,B	B,C	D,E	F,G	A,D	B,E	D,G	C,E	B,D	C,F	E,G	E,F
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



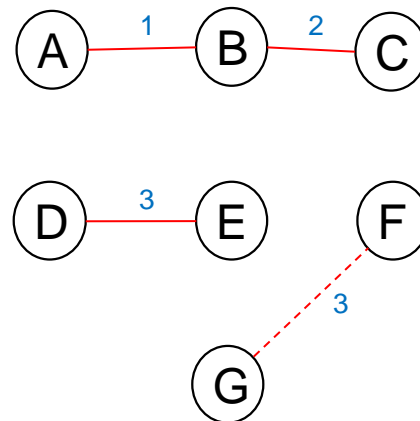
*Componentes <avaliar a presença de ciclo>*

ARESTA	A	B	C	D	E	F	G
A,B	A	A	C	D	E	F	G
B,C	A	A	A	D	E	F	G
D,E	A	A	A	D	D	F	G
F,G	A	A	A	D	D	F	F



*T - arestas selecionadas*

A,B	B,C	D,E	F,G		
-----	-----	-----	-----	--	--



# Kruskal

A - arestas classificadas pelo valor <menor para o maior>

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



A,B	B,C	D,E	F,G	A,D	B,E	D,G	C,E	B,D	C,F	E,G	E,F
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



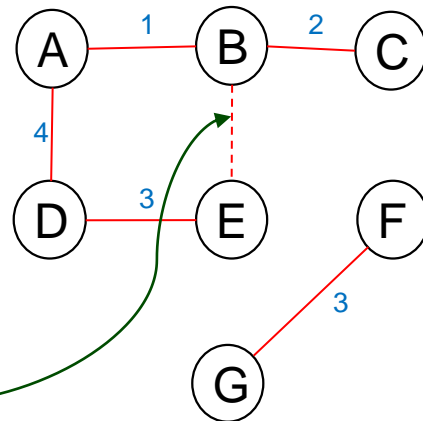
Componentes <avaliar a presença de ciclo>

ARESTA	A	B	C	D	E	F	G
A,B	A	A	C	D	E	F	G
B,C	A	A	A	D	E	F	G
D,E	A	A	A	D	D	F	G
F,G	A	A	A	D	D	F	F
A,D	A	A	A	A	A	F	F
B,E		?			?		



T - arestas selecionadas

A,B	B,C	D,E	F,G	A,D	
-----	-----	-----	-----	-----	--



# Kruskal

A - arestas classificadas pelo valor <menor para o maior>

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



A,B	B,C	D,E	F,G	A,D	B,E	D,G	C,E	B,D	C,F	E,G	E,F
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



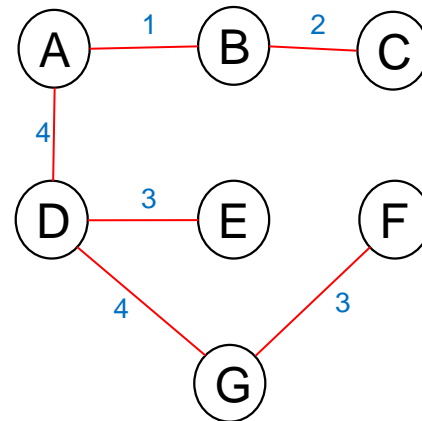
Componentes <avaliar a presença de ciclo>

ARESTA	A	B	C	D	E	F	G
A,B	A	A	C	D	E	F	G
B,C	A	A	A	D	E	F	G
D,E	A	A	A	D	D	F	G
F,G	A	A	A	D	D	F	F
A,D	A	A	A	A	A	F	F
B,E		?			?		
D,G	A	A	A	A	A	A	A



T - arestas selecionadas

A,B	B,C	D,E	F,G	A,D	D,G
-----	-----	-----	-----	-----	-----



Custo=17

# Kruskal

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-

< Vértices Escolhidos >



# PRIM



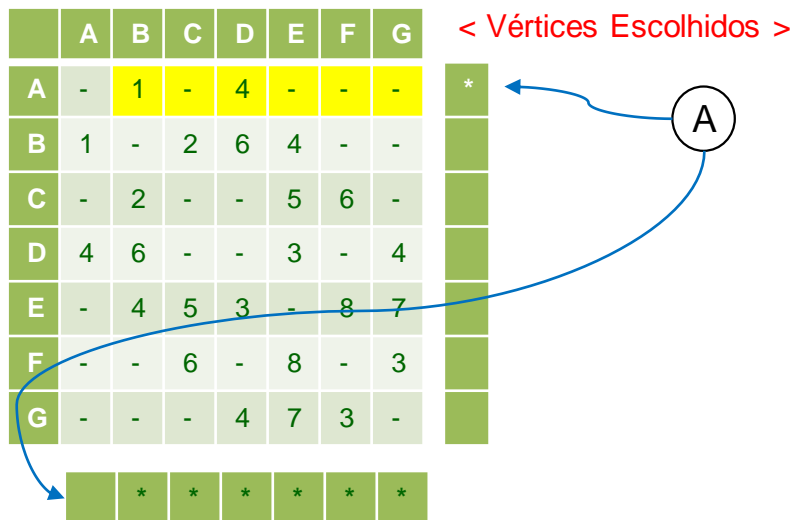
<Vértices não escolhidos>



T – arestas selecionadas



	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



# PRIM



T – arestas selecionadas

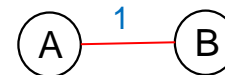


	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



	A	B	C	D	E	F	G	
A	-	1	-	4	-	-	-	*
B	1	-	2	6	4	-	-	*
C	-	2	-	-	5	6	-	
D	4	6	-	-	3	-	4	
E	-	4	5	3	-	8	7	
F	-	-	6	-	8	-	3	
G	-	-	-	4	7	3	-	

< Vértices Escolhidos >



# PRIM

		*	*	*	*	*
--	--	---	---	---	---	---

<Vértices não escolhidos>



T – arestas selecionadas

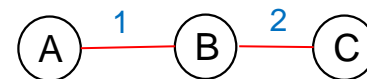
A,B					
-----	--	--	--	--	--

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



	A	B	C	D	E	F	G	
A	-	1	-	4	-	-	-	*
B	1	-	2	6	4	-	-	*
C	-	2	-	-	5	6	-	*
D	4	6	-	-	3	-	4	
E	-	4	5	3	-	8	7	
F	-	-	6	-	8	-	3	
G	-	-	-	4	7	3	-	

< Vértices Escolhidos >



# PRIM

			*	*	*	*
--	--	--	---	---	---	---

<Vértices não escolhidos>



T – arestas selecionadas

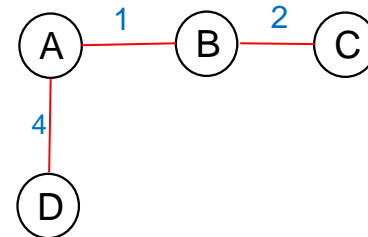
A,B	B,C				
-----	-----	--	--	--	--

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



	A	B	C	D	E	F	G	
A	-	1	-	4	-	-	-	*
B	1	-	2	6	4	-	-	*
C	-	2	-	-	5	6	-	*
D	4	6	-	-	3	-	4	*
E	-	4	5	3	-	8	7	
F	-	-	6	-	8	-	3	
G	-	-	-	4	7	3	-	

< Vértices Escolhidos >



# PRIM

				*	*	*
--	--	--	--	---	---	---

<Vértices não escolhidos>



T – arestas selecionadas

A,B	B,C	A,D			
-----	-----	-----	--	--	--

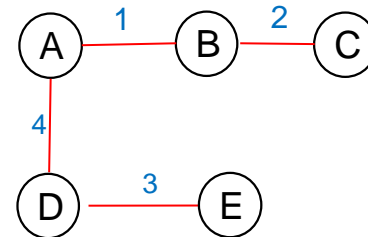


	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



	A	B	C	D	E	F	G	
A	-	1	-	4	-	-	-	*
B	1	-	2	6	4	-	-	*
C	-	2	-	-	5	6	-	*
D	4	6	-	-	3	-	4	*
E	-	4	5	3	-	8	7	*
F	-	-	6	-	8	-	3	
G	-	-	-	4	7	3	-	

< Vértices Escolhidos >



# PRIM

					*	*
--	--	--	--	--	---	---

<Vértices não escolhidos>



T – arestas selecionadas

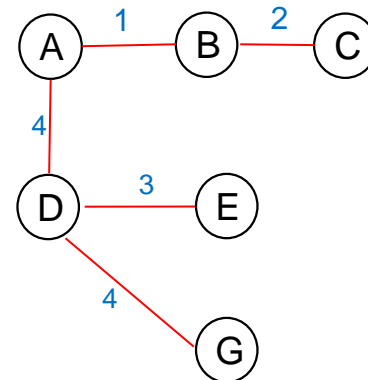
A,B	B,C	A,D	D,E		
-----	-----	-----	-----	--	--

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



	A	B	C	D	E	F	G	
A	-	1	-	4	-	-	-	*
B	1	-	2	6	4	-	-	*
C	-	2	-	-	5	6	-	*
D	4	6	-	-	3	-	4	*
E	-	4	5	3	-	8	7	*
F	-	-	6	-	8	-	3	
G	-	-	-	4	7	3	-	*

< Vértices Escolhidos >



# PRIM

					*	
--	--	--	--	--	---	--

<Vértices não escolhidos>



T – arestas selecionadas

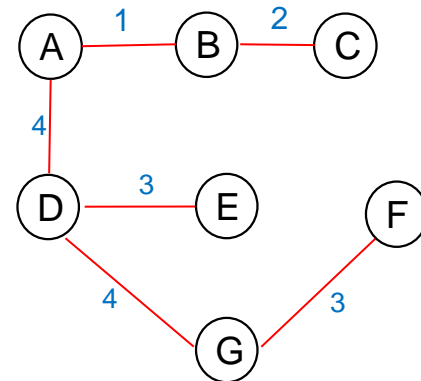
A,B	B,C	A,D	D,E	D,G	
-----	-----	-----	-----	-----	--

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	1	-	4	-	-	-
B	1	-	2	6	4	-	-
C	-	2	-	-	5	6	-
D	4	6	-	-	3	-	4
E	-	4	5	3	-	8	7
F	-	-	6	-	8	-	3
G	-	-	-	4	7	3	-



	A	B	C	D	E	F	G	
A	-	1	-	4	-	-	-	*
B	1	-	2	6	4	-	-	*
C	-	2	-	-	5	6	-	*
D	4	6	-	-	3	-	4	*
E	-	4	5	3	-	8	7	*
F	-	-	6	-	8	-	3	*
G	-	-	-	4	7	3	-	*

< Vértices Escolhidos >



# PRIM



<Vértices não escolhidos>



T – arestas selecionadas

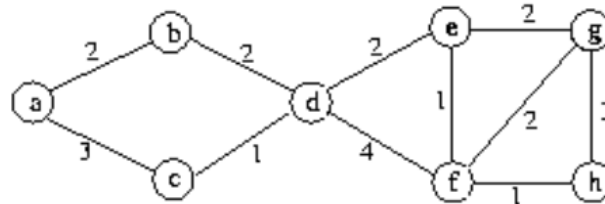
A,B	B,C	A,D	D,E	D,G	F,G
-----	-----	-----	-----	-----	-----



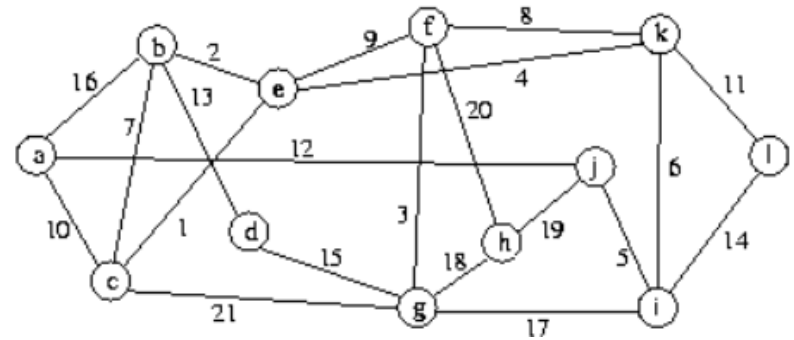
Custo=17

# Atividades Práticas...

Utilize o algoritmo de Kruskal no grafo (a) e Prim no grafo (b) para identificar a AGM. *<apresente todas as estruturas de dados>*



(a)



(b)

# Unoeste

