INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
MINAS GERAIS
Campus Sabará

Lista 1 - Teoria de Grafos

Professor: Carlos Alexandre Silva

Definições, Teoremas, Corolários, Observações, Lemas

Variáveis: G é o grafo; N é o conjunto de vértices do grafo; M é o conjunto de arestas do grafo; $d(x_i)$ é o grau do vértice x_i.

Tópico: Conceitos

Observação 1. *Se todos os vértices de uma cadeia (ou passeio) forem distintos, a cadeia (ou passeio) será denominada* ***caminho****.*

Observação 2. *Quando o grafo G é* ***orientado****, a sequência de arcos distintos que repete somente o primeiro e o último nó visitado se chama* ***circuito****.*

Definição 1. *A relação entre o número de arestas e vértices, muitas vezes denominado* ***densidade*** *de G, pode ser medida pela razão $\epsilon(G)$, tal que:*

$$\epsilon(G) = \frac{|M|}{|N|} = \frac{1}{2} d_M(G),$$

onde $d_M(G)$ é denominada ***média dos graus de*** *G e pode ser obtida por:*

$$d_M(G) = \frac{1}{|N|} = \sum_{x_i \in N} d(x_i)$$

Lema 1. *O somatório dos graus dos vértices de um grafo é igual a $2m$, onde m representa o número de arestas do grafo.*

Definição 2. *Um grafo G é dito par se* ***todos os seus vértices possuírem grau par****.*

Observação 3. *Um grafo com todos os vértices possuindo grau ímpar* ***não é um grafo ímpar****.*

Observação 4. ***Maximal*** *deve ser distinto de* ***máximo****.* ***Maximal*** *é condição de pertinência.*

Observação 5. ***Grafos conexos*** *possuem apenas uma* ***componente conexa****.*

Definição 3. *O* rank *"r", ou* ***posto****, de um grafo G com n vértices e c componentes conexas é dado por:*

$$r = n - c$$

Definição 4. ***Nulidade*** *L de um grafo G com m arestas, n vértices e c componentes conexas, é definida como:*

$$L = m - n + c = m - r$$

Teorema 1. *Um grafo G bipartido se e somente se todo ciclo em G for par.*

Teorema 2. *O número de arestas em um grafo completo $G = (N, M)$ é*

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

onde $n = |N|$

Observação 6. *Um grafo regular com grau* ***três*** *é denominado* ***cúbico****. Um grafo com grau* ***quatro*** *é denominado* ***quartic****.*

Teorema 3. *O número de vértices de grau ímpar de um grafo é sempre par.*

Teorema 4 (Teorema de Euler)**.**
$$n + f - m = 2,$$
onde $n = |N|$, $m = |M|$ *e* f *denota o número de regiões.*

Corolário 1 (Corolário do Teorema de Euler)**.**
$$m \leq 3n - 6,$$
onde $n = |N|$ *e* $m = |M|$*.*

Definição 5. *Um grafo* H *é chamado* ***minor*** *- ou* ***menor*** *- de um grafo* G *se* H *é isomorfo a um grafo que pode ser obtido por uma sequência finita de* ***contrações de arestas*** *de* G*.*

Teorema 5. *Um grafo* G *é planar se e somente se não possui* K_5 *ou ao* $K_{3,3}$ *como minor.*

Observação 7. *A adição de arestas é também denominada de* ***join****.*

Observação 8. *A* ***matriz de adjacência*** *ocupa* $O(n^2)$ *posições de memória.*

Observação 9. *A* ***matriz de incidência*** *ocupa* $O(nm)$ *posições de memória.*

Observação 10. *A* ***lista de adjacência*** *ocupa* $O(n + m)$ *posições de memória.*

Observação 11. *A* ***representação vetorial*** *ocupa* $O(m + n)$ *posições de memória.*

Tópico: Árvores

Teorema 6. *Em um grafo* G *o número de subgrafos árvores com* n *vértices e com grau especificado* k*, é igual a:*
$$n(T^k) = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

Teorema 7 (Fórmula de Caley)**.** *O número de árvores distintas em um grafo completo com* n *vértices é* n^{n-2}*.*

Observação 12. *Todo grafo conexo possui* ***pelo menos uma árvore geradora****.*

Definição 6. *Uma floresta é* ***um conjunto de árvores*** *sem vértices em comum.*
Uma floresta geradora é uma floresta que contém ***todos os vértices*** *de* G*.*

Observação 13. *A determinação das árvores geradoras mínima ou máxima pode ser feita em tempo polinomial.*

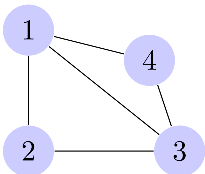
Observação 14. *O número de vértices em uma* ***árvore binária cheia é*** $2^{h+1} - 1$*, onde* h *é altura da árvore.*

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
MINAS GERAIS
Campus Sabará

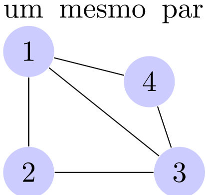
EXERCÍCIOS

1. Considerando grafos não-direcionados, defina e dê exemplos de:

a) Grafo: Estrutura abstrata que representa um conjunto de elementos denominados vértices e suas relações de interdependência ou arestas. Matematicamente um grafo G

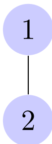


b) Multigrafo: Grafo não-direcionado que possui no mínimo duas arestas paralelas. Um grafo direcionado que possui dois ou mais arcos de mesma direção ligando a um mesmo par de vértices.

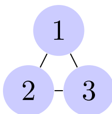


c) Ordem de um grafo: Quantidade de vértices presentes em um grafo. Exemplo K_1:

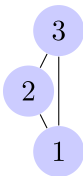
d) Grafo completo: Se existe uma aresta associada a cada par de vértices de G.



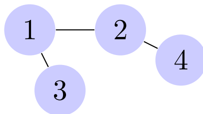
e) Clique: Um grafo clique de um grafo G é um subgrafo completo de G.



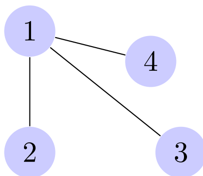
f) Grafo conexo: Um grafo é conexo se para todo par de vértices existe pelo menos um caminho entre eles.



g) Árvore: Tem de ser conexo e não possui ciclos, ou seja, não possui caminhos fechados. Em uma árvore, um vértice com grau 1 é denominado folha ou vértice terminal.



h) Árvore geradora: Uma árvore geradora de um grafo G é um subgrafo gerador acíclico. Todo grafo conexo possui pelo menos 1 árvore geradora.



2. Marque **V** ou **F** e justifique sua resposta:

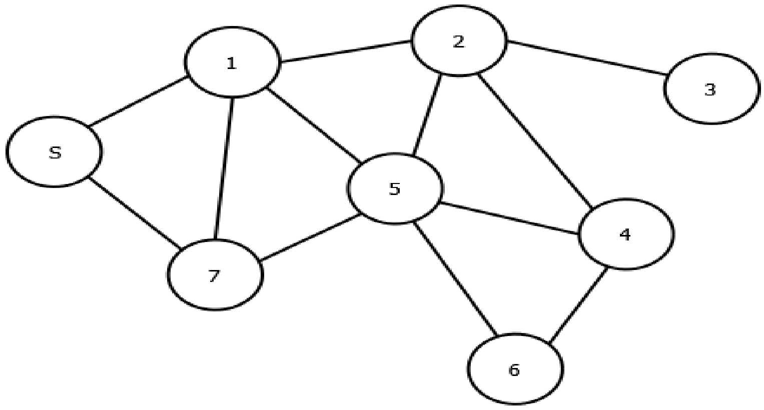
(**V**) Todo grafo conexo possui pelo menos uma subárvore que contém todos os seus vértices.

(**V**) Seja $G = (N, A)$ e $|N| = n$. Se G for completo e $n = 5$, então certamente existem 125 árvores distintas em G.

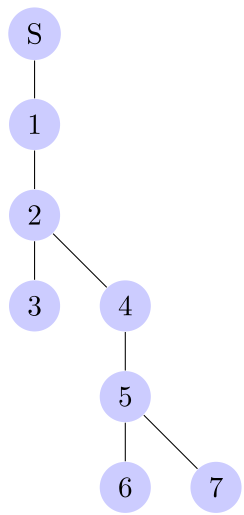
(**F**) Uma *minimum spanning tree* de um grafo G é a árvore geradora de maior custo dentre todas as possíveis em G.

(**F**) Seja $G_1 = (N_1, A_1)$ e $G_2 = (N_2, A_2)$ com $|A_1| = m_1, |N_1| = n_1$ e $|A_2| = 3m_1, |N_2| = n_2$. Considerando $N_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\}$ e $N_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\}$, então é correto afirmar que $\sum_{i=1}^{n_1} d(a_i) + \sum_{i=1}^{n_2} d(b_i) = 8m_1$.

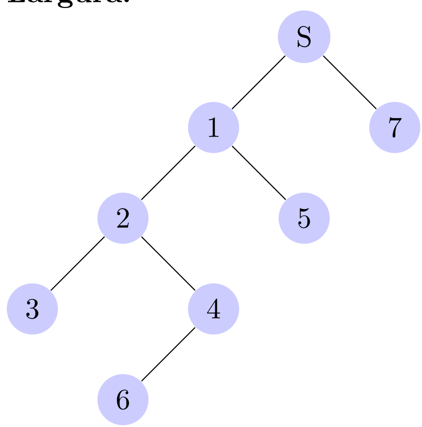
3. Aplique a **busca em largura** e **busca em profundidade** no grafo abaixo. Para cada busca enumere a ordem de busca de cada aresta do grafo. O vértice inicial é o vértice **S**.



Profundidade:



Largura:



4. Prove que o somatório dos graus dos vértices de um grafo simples que possui n vértices e m arestas é igual a $2m$.
R: Cada aresta possui pelo menos 2 vértices, um do qual ela parte e outro no qual ela chega, ou seja, sempre temos 2 vértices o de saída e o de chegada; tendo assim 2m.

5. Prove que um grafo com n vértices não é bipartido se ele possuir um número de arestas maior que $\dfrac{n^2}{4}$.

6. Se existem nove times de futebol em uma liga, é possível programar um torneio em que cada time jogue com exatamente três outros times?

7. Escreva V no caso de a alternativa ser verdadeira e F em caso contrário:

   Um caminho segundo a Teoria dos Grafos é:

   ( ) qualquer conexão entre dois vértices.
   ( ) uma sequência de arestas contínua sem vértices repetidos.
   ( ) uma sequência de arestas sem repetição de arestas ou vértices.
   ( ) qualquer sequência de arestas, desde que seja aberta.

   Um grafo é conexo se:

   ( ) para qualquer vértice pertencente ao grafo sempre for possível encontrar um caminho até outro vértice distinto e também pertencente ao grafo.
   ( ) para qualquer vértice do grafo sempre é possível encontrar um ciclo.
   ( ) o grafo for simples e o número de arestas for igual a pelo menos $n + 1$.
   ( ) o menor grau dos vértices do grafo for dois.

   Um grafo será planar se:

   ( ) não contiver como subgrafo um K_5 ou um $K_{3,3}$.
   ( ) o grau máximo de seus vértices for 3.
   ( ) for um subgrafo do grafo de Petersen.

   De forma geral

   ( ) o número de vértices de um grafo com todos os vértices com grau ímpar é sempre par.
   ( ) é impossível existir um grafo com um número par de vértices com grau par se nesse grafo existirem dois vértices com grau ímpar.
   ( ) um grafo desconexo deve possuir pelo menos duas cinturas.
   ( ) um grafo desconexo não possui cintura.

8. Prove a seguinte afirmação (teorema): "O número de vértices de graus ímpar em um grafo é sempre par"

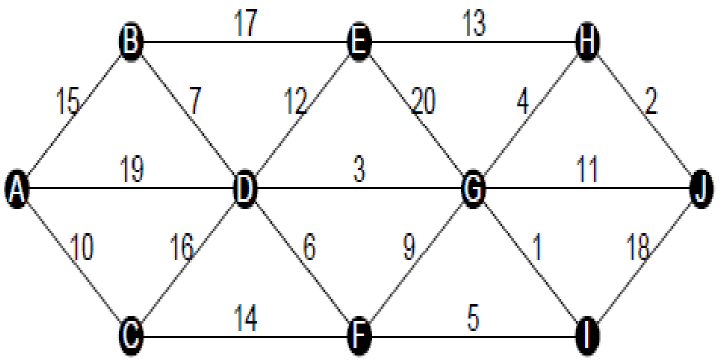
9. Considerem que existam 3 casas e que cada uma delas precisa ser ligada ao sistema de eletricidade, gás e água. Por questões de segurança,deseja-se saber se é possível fazer as ligações sem que haja cruzamento das tubulações. Represente este problema através de um grafo. Comente sua resposta.

10. O grafo de interseção de uma coleção de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é o grafo que tem um vértice para cada um dos conjuntos da coleção e tem uma aresta conectando os vértices se esses conjuntos têm uma interseção não vazia. Construa o grafo de interseção para as seguintes coleções de conjuntos. Considere $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ e $A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$.

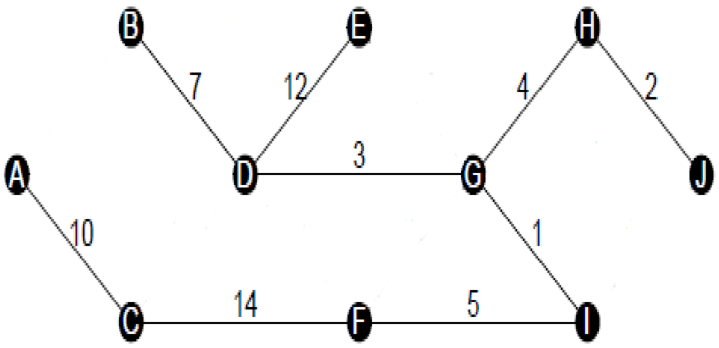
11. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5?

12. Aplique os algoritmos de Prim e Kruskal para determinar a AGM (Árvore Geradora Mínima) dos grafos abaixo:

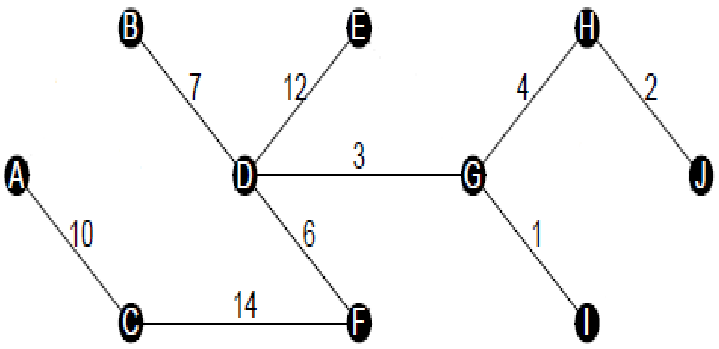
a)



Prim:

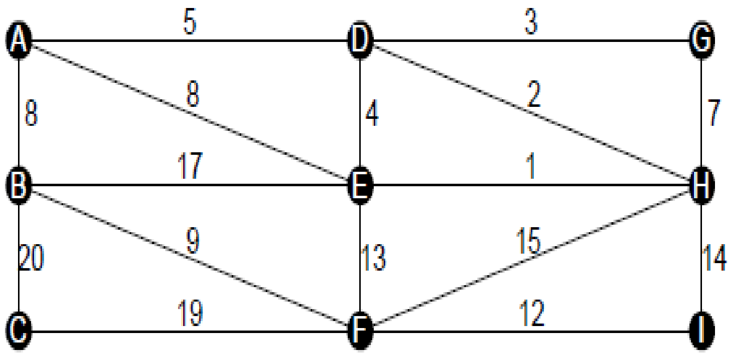


Kruskal:



b)

13. Implemente os algoritmos de Prim e Kruskal disponíveis em:



`https://www.geeksforgeeks.org/kruskals-minimum-spanning-tree-algorithm-greedy-algo-2/`

Escolha a linguagem que for melhor para você e teste os algoritmos nos exemplos a) e b) do exercício anterior. Não faça o teste *online*, pegue o código na página e compile/execute em seu computador.

Exemplo de Grafo usando pacote tikz