Prof. Dr. Stefan Michael Blawid
Departamento de Engenharia de Computação
Centro de Informática

Tel. (81) 2126-8430 r: 4328
sblawid@cin.ufpe.br
https://sites.google.com/a/cin.ufpe.br/if817/

Aula Prática: Equações de Primeira Ordem

Aula 2-1

1. Mostre que o exemplo não linear $dy/dt = y^2$ é resolvido por $y = C/(1-Ct)$ para C = **constante.** Por que a solução $dy/dt = y^2$ crescerá mais rápido que a solução $dy/dt = y$ (se iniciarmos os dois a partir de $y = 1$ em $t = 0$)?
2. Quais dessas equações diferenciais são lineares? (i) $dy/dt+\sin(y) = t$; (ii) $dy/dt = t^2 (y-t)$; (iii) $dy/dt+\exp(t)\ y = t^{10}$.
3. A regra do produto fornece qual derivada para $\exp(t) \exp(-t)$? O que significa o resultado?
4. $dy/dt = y+1$ não é resolvido por $y = \exp(t)+t$, ou seja, não podemos apenas adicionar as soluções a $dy/dt = y$ e $dy/dt = 1$. Substitua $y = \exp(t) + t$ para mostrar que falha. Qual número c transforma $y = \exp(t) + c$ em uma solução correta?
5. Defina $t = 2$ na série infinita para e^2. A soma deve ser e vezes e, próxima a 7,39. Quantos termos da série alcançam uma soma de 7? Quantos termos para passar 7,3?
6. Encontre $y(t)$ se $dy/dt = a\ y$ e $y(T) = 1$ (em vez de $y(0) = 1$).
7. Se $dy/dt = (\ln 2)\ y$, explique por que $y(1) = 2\ y(0)$. Se $dy/dt = -(\ln 2)\ y$, como $y(1)$ está relacionado a $y(0)$?
8. Em um investimento de um ano de $y(0) =$ R$100, suponha que a taxa de juros salte de 6% para 10% após seis meses. A taxa equivalente para um ano inteiro é igual a 8% ou superior a 8% ou inferior a 8%?
9. Escreva os quatro primeiros termos da série para $y = \exp(t^2)$. Verifique se $dy/dt = 2\ t\ y$.
10. Para $dy/dt = y$, o primeiro passo de Euler escolhe $Y1 = (1+\Delta t)\ Y0$. Euler para trás escolhe $Y1 = Y0/(1-\Delta t)$. Explique por que $1+\Delta t$ é menor que o $\exp(\Delta t)$ exato e $1/(1-\Delta t)$ é maior que $\exp(\Delta t)$.

Aula 2-2

1. Todas as soluções para $dy/dt = -y + 2$ se aproximam do estado estacionário em que dy/dt é zero e $y = y\infty$. Essa constante $y = y\infty$ é uma solução específica yp. Qual $yn = C \exp(-t)$ combina com este estado estacionário yp para começar com $y(0) = 4$? Para a mesma equação $dy/dt = -y + 2$, escolha a solução nula yn que começa em $y(0) = 4$. Encontre a solução específica yp que começa em $yp(0) = 0$.
2. Escreva as equações (i) $dy/dt + 2y = 6$ e (ii) $dy/dt + 2y = -6$ como $Y' = -2Y$ com $Y = y-y\infty$. O que é $Y(0)$?
3. Suponha que a função de etapa seja ativada em $T = 4$ e desativada em $T = 6$. Então $q(t) = H(t-4) - H(t-6)$. Começando com $y(0) = 0$, resolva $dy/dt + 2y = q(t)$. O que é $y\infty$?
4. Resolva estas equações diferenciais começando em $y(0) = 2$: (i) $dy/dt - y = \delta(t - 2)$ e (ii) $dy/dt + y = \delta(t - 2)$. O que é $y\infty$?
5. Quando $c = 2{,}01$ está muito próximo de $a = 2$, resolva $y - 2y = \exp(ct)$ iniciando em $y(0) = 1$. Por mão ou por computador, desenhe o gráfico de $y(t)$.

6. Resolva essas equações separáveis começando em $y(0)=0$: (i) $dy/dt = ty$ e (ii) $dy/dt = t^m y^n$
7. Para qual número A é $dy/dt = (ct-ay) / (At + by)$ uma equação exata? Para este A, resolva a equação encontrando uma função adequada $F(y, t) + C(t)$.
8. Estas equações são lineares e separáveis: Resolva (i) $dy/dt = (y+4) \cos(t)$ e (ii) $dy/dt = y \exp(t)$
9. Teste a condição de exatidão $\partial g/\partial y = -\partial f/\partial t$ e resolva (i) $dy/dt = (-3t^2 - 2y^2)/(4ty + 6y^2)$ e (ii) $dy/dt = [1 + y \exp(ty)]/[2y + t \exp(ty)]$
10. Mostre que $dy/dt = -y^2/2ty$ é exato, mas a mesma equação $dy/dt = -y/2t$ não é exata. Resolva ambas as equações.

Aula 2-3

1. Escreva $2 + 3i$ como $r \exp(i\phi)$. Escreva $y = \exp(iwt) / (2 + 3i)$ na forma polar. Então encontre as partes reais e imaginárias de y. E também encontre essas partes reais e imaginárias diretamente de $(2 - 3i) \exp(iwt) / (2 - 3i)(2 + 3i)$.
2. Escreva soluções complexas $Yp = Y \exp(iwt)$ para estas três equações: (i) $dy/dt - 3y = 5 \exp(2it)$, (ii) $dy/dt = R \exp[i (wt-\phi)]$ e (iii)) $dy/dt = 2y - \exp(it)$.
3. Encontre a solução real para $dy/dt - 2y = \cos(wt)$ a partir de $y(0) = 0$, em três etapas: Resolva a equação complexa $dz/dt - 2z = \exp(iwt)$, pegue $Yp = Re\{z\}$ e adicione a solução nula $Yn = C \exp(2t)$ com o C correto.
4. Resolver as equações (i) $dy/dt + y = \exp(i \sqrt{3}\, t)$, (ii) $dy/dz - y = \exp(i \sqrt{3}\, t)$ e (iii) $dy/dt - \sqrt{3}\, y = \exp(it)$. Use a forma polar do fator de resposta (ganho e atraso de fase). Em seguida, pegue a parte real de cada equação e a parte real de cada solução.
5. A corrente elétrica I em um circuito RL é a solução $Re\{I\}$ de $L\, dI/dt + R\, I(t) = V \exp(iwt)$. Determine $Z = V/I$ assumindo $I(t) = I \exp(i wt)$. Qual é a magnitude e o ângulo de fase de Z. A magnitude da corrente é maior ou menor por causa de L?
6. Resolva $dy/dt = y + t^2$ de $y(0) = 1$.
7. As funções $y(t)$ e $Y(t)$ são soluções de (i) $dy/dt = 2y + \exp(t)$ e (ii) $dY/dt = Y + \exp(2t)$, respectivamente. Começando com $y(0) = Y(0) = 1$, $y(t)$ ou $Y(t)$ eventualmente se tornam maiores?
8. Qual é o fator de crescimento $G(t,s)$ para a equação $dy/dt = \sin(t)\, y + Q \sin(t)$? Qual é a solução nula $yn(t)$ com $yn(0) = 1$ e a solução específica $yp(t)$ com $yp(0) = 0$.
9. Qual é o fator de crescimento $G(s,t)$ para a equação $dy/dt = y/(t+1) + 10$? Qual é a solução nula $yn(t)$ com $yn(0) = 1$ e a solução específica $yp(t)$ com $yp(0) = 0$.
10. Por que $G(s,t) = 1/G(t,s)$? Por que $G(t,s) = G(t,S)\, G(S,s)$?

Aula 2-4

1. Se $dy/dt = ay + q \exp(iwt)$, com t em segundos e y em metros, quais são as unidades para a e q e w?
2. A equação logística $dy/dt = ay - by^2$ geralmente mede o tempo t em anos (e y conta as pessoas). Quais são as unidades de a e b?
3. Por que nosso exemplo favorito $dy/dt = y + 1$ é muito dimensionalmente insatisfatório? Resolva-o de qualquer maneira começando em $y(0) = -1$ e em $y(0) = 0$.
4. A equação da diferença $Y_{n+1} = c Y_n + Q_n$ produz $Y_1 = c Y_0 + Q_0$. Mostre que a próxima etapa produz $Y_2 = c2 Y_0 + c Q_0 + Q_1$.
5. Suponha que um fungo dobra de tamanho todos os dias e pesa um quilo após 10 dias. Se outro fungo tivesse o dobro do tamanho no início, ele pesaria um quilo em 5 dias?
6. Equação logística: Se a capacidade de carga da Terra é $a/b = 14$ bilhões de pessoas, qual será a população no ponto de inflexão? O que é dy/dt nesse ponto?
7. Altere a equação logística para $dy/dt = y + y^2$. Agora, o termo não linear é positivo, e a cooperação de y com y promove o crescimento. Use $z = 1/y$ para encontrar e resolver uma

equação linear para z, começando com $z(0) = y(0) = 1$. Mostre que $y(T) = \infty$ quando $\exp(-T) = 1/2$.

8. A equação de Bernoulli $dy/dt = ay - by^n$ tem um termo de competição by^n. Resolva a equação introduzindo $z = y^{1-n}$.
9. Decida estabilidade ou instabilidade para os estados estacionários de (i) $dy/dt = 2\ (1-y)\ (1-\exp[y])$ e (ii) $dy/dt = (1-y^2)\ (4-y^2)$
10. Para uma equação autônoma $dy/dt = f(y)$, por que é impossível $y(t)$ aumentar ao mesmo tempo $t1$ e diminuir no outro tempo $t2$?