RESUMÃO - FUNÇÕES

O que é domínio?

Domínio são os valores de x para os quais a função existe. Se tivermos $y = 5/x$, por exemplo, o domínio será $x \in \mathbb{R} \mid x \neq \emptyset$, já que não existe resultado para uma divisão cujo denominador é $\emptyset$ no conjunto dos Reais.

O que é contradomínio?

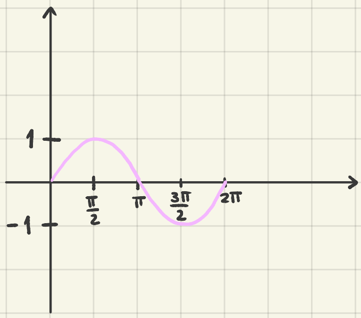
É o conjunto ao qual as saídas da função pertencem.

O que é imagem?

são especificamente os elementos $y \in$ contradomínio resultantes da aplicação da função nos elementos $x \in$ domínio.

Exemplo que mostra a diferença entre contradomínio e imagem:

$f(x) = \text{sen}(x)$



Domínio = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

pois não existe seno de ângulo negativo

Contradomínio = $\{y \in \mathbb{R}\}$ pois o gráfico é uma linha contínua

Imagem = $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

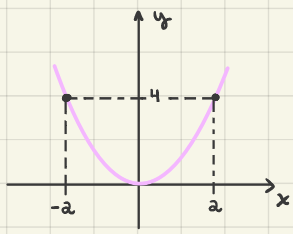
pois o resultado do seno de um ângulo sempre varia apenas entre $\emptyset$ e 1.

- A imagem é um subconjunto do contradomínio!
- Se não for indicado na questão, geralmente assumimos que o contradomínio é o conjunto dos números Reais.

FUNÇÃO PAR

$f(x) = f(-x)$

ex.: $f(x) = x^2$

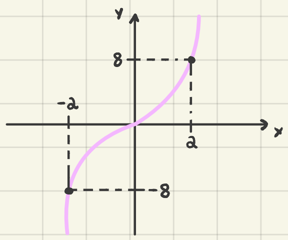


Simétrica em relação à ordenada (eixo y).

FUNÇÃO ÍMPAR

$f(x) = -f(x)$

ex.: $f(x) = x^3$

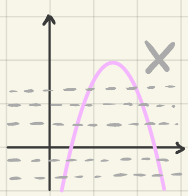


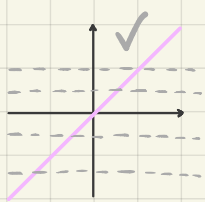
Simétrica em relação à origem (ponto $\emptyset, \emptyset$).

FUNÇÃO INJETORA

nesse tipo de função, 2 valores distintos do domínio NÃO podem ter a mesma imagem.

Dica: imagine linhas horizontais sobre o gráfico. Se alguma delas "cortar" o gráfico mais de uma vez, a função NÃO é injetora.





FUNÇÃO SOBREJETORA

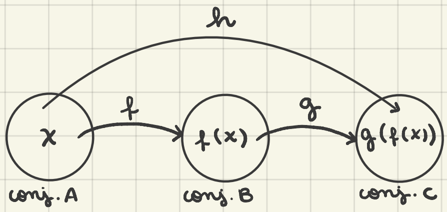
Quando a imagem é IGUAL ao conjunto do contradomínio.

ex.: $f(x) = x + 1$

y pode assumir o valor de todo e qualquer número Real. Im = CD.

FUNÇÃO COMPOSTA

Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, denominamos função composta de g e f a função $h: A \to C$, tal que $h = (g \circ f)(x) = (g(f(x))$.



Para resolver, devemos substituir x por f(x) na função g(x).

FUNÇÃO AFIM

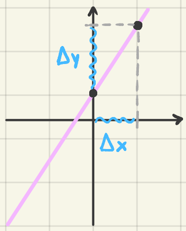
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\boxed{f(x) = ax + b}$

- Seu gráfico é sempre uma reta.
- Para construir o gráfico, precisamos somente das coordenadas de 2 pontos.

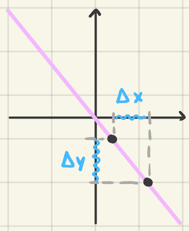
a → coeficiente angular → relaciona-se com a inclinação da reta (taxa de variação).

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{\text{variação de } y}{\text{variação de } x} \to \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a > 0 → variação crescente



a < 0 → variação decrescente

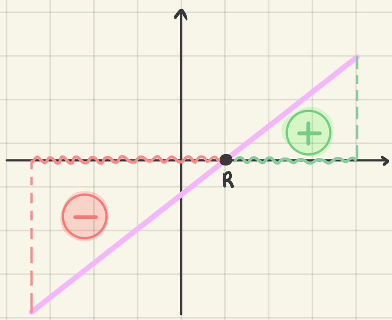


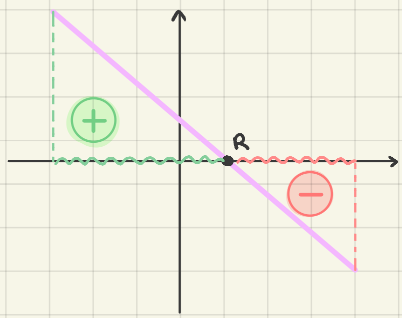
b → coeficiente linear → é exatamente onde a reta corta o eixo y (quando $x = 0$).

- Chama-se "zero" ou "raiz" de uma função o número real x tal que $f(x) = 0$. É onde o gráfico corta o eixo x, pois $y = 0$
- Estudar o sinal da função consiste em determinar os valores de x para os quais: $\underbrace{f(x) > 0}_{\text{acima do eixo x}}$; $\underbrace{f(x) < 0}_{\text{abaixo do eixo x}}$; $f(x) = 0$.

$$a > 0 \begin{cases} y > 0 \text{ quando } x > R \\ y < 0 \text{ quando } x < R \end{cases}$$

$$a < 0 \begin{cases} y > 0 \text{ quando } x < R \\ y < 0 \text{ quando } x > R \end{cases}$$





FUNÇÃO QUADRÁTICA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$

- Seu gráfico é uma parábola.

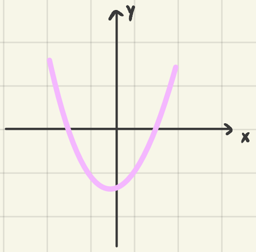
- Os zeros dessa função (interseções com o eixo x, quando $y = 0$) são dados pela fórmula de Bhaskara ou por soma e produto.

$x_1 + x_2 = -b/a$ e $x_1 \cdot x_2 = c/a$

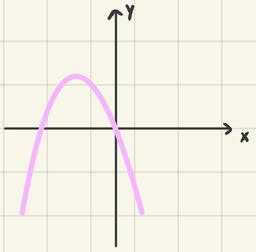
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

a → sentido da concavidade

a > 0 → para cima

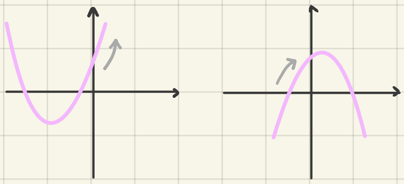


a < 0 → para baixo



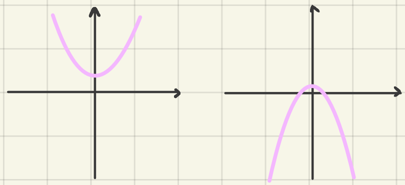
b → como a parábola corta o eixo y.

b > 0 → crescendo



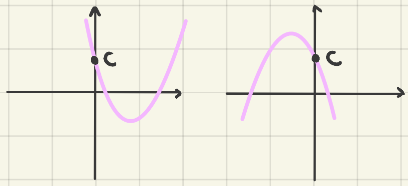
b < 0 → decrescendo

b = 0 → "reto"

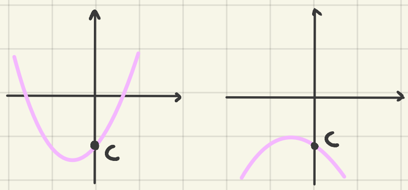


c → onde a parábola corta o eixo y (quando $x = 0$, $y = c$).

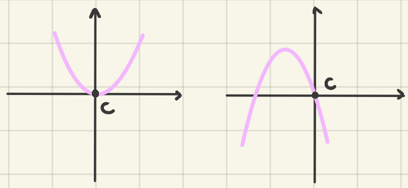
c > 0 → corta em $y > 0$



c < 0 → corta em $y < 0$

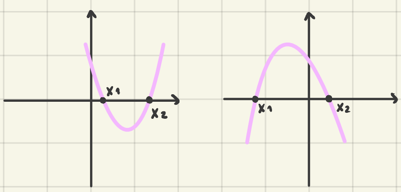


c = 0 → corta em $y = 0$ (origem)

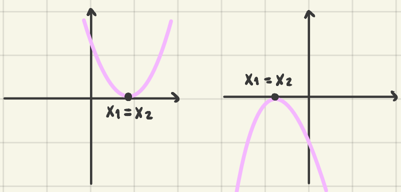


Δ → quantidade de raízes

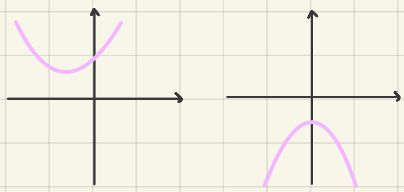
Δ > 0 → 2 raízes reais e distintas



Δ = 0 → 2 raízes reais e iguais



Δ < 0 → não possui raiz real (não toca no eixo x)

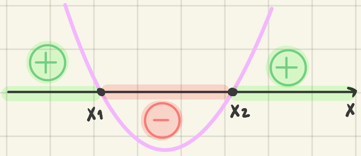


- As coordenadas do vértice da parábola são definidas por: $X_v = \dfrac{-b}{2a}$ e $Y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$

- Estudo do sinal:

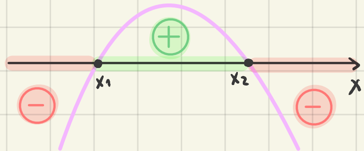
$\Delta > 0$

$a > 0$



$Y > 0$ quando $x < x_1$ ou $x_2 < x$
$Y < 0$ quando $x_1 < x < x_2$

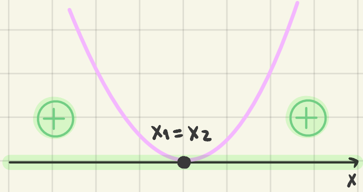
$a < 0$



$Y > 0$ quando $x_1 < x < x_2$
$Y < 0$ quando $x < x_1$ ou $x_2 < x$

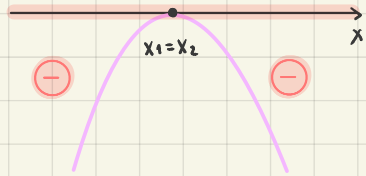
$\Delta < 0$

$a > 0$



Y é sempre maior que 0.

$a < 0$



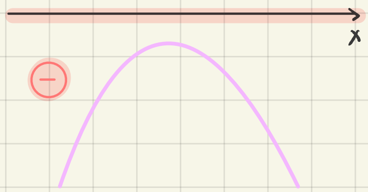
Y é sempre menor que 0.

$\Delta = 0$

$a > 0$

Y é sempre maior que 0.

$a < 0$



Y é sempre menor que 0.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\boxed{f(x) = a^x}$

- O domínio da função exponencial é o conjunto dos Reais, visto que não há restrições para os valores que x pode assumir.

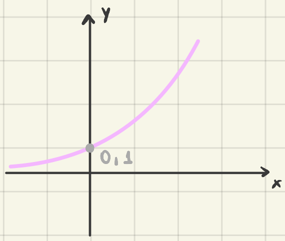
- O contradomínio também é formado pelos reais, pois o gráfico é uma linha contínua.

- A imagem da função exponencial é a seguinte: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

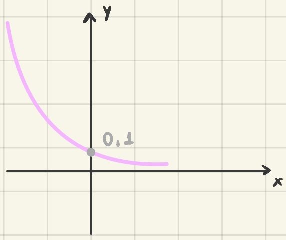
↳ Ou seja: o valor de saída y é sempre positivo.

↳ Dessa forma, a curva exponencial não toca o eixo x (pois y nunca é igual a zero, já que $a^0 = 1$) e não passa pelos quadrantes III e IV do plano cartesiano (abaixo da abscissa).

$a > 1$ função crescente



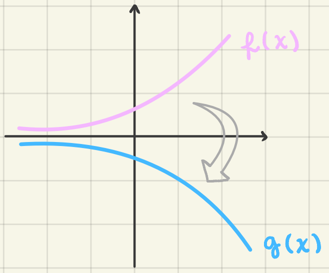
$0 < a < 1$ função decrescente



- **VARIAÇÕES da equação exponencial:**

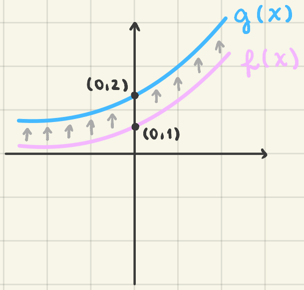
☆ Se a base for um número negativo, desenhamos o gráfico com os valores da mesma base positiva e espelhamos em relação ao eixo x.

exemplo: $g(x) = -3^x$ → se considerarmos $f(x) = 3^x$, então temos: $g(x) = -f(x)$

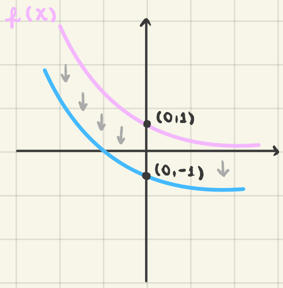


☆ Se houver soma ou subtração na função, transladamos o gráfico para cima ou para baixo.

exemplo: $g(x) = 3^x + 1$ → $g(x) = f(x) + 1$

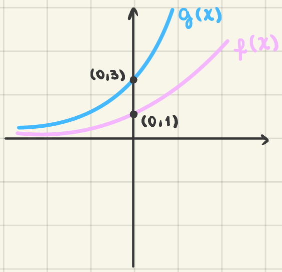


exemplo: $g(x) = (0{,}4)^x - 2$ → se $f(x) = (0{,}4)^x$, então $g(x) = f(x) - 2$

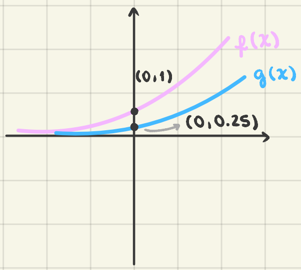


☆ Se houver multiplicação ou divisão, aumentamos ou diminuímos a inclinação da curva.

exemplo: $g(x) = 3 \cdot 4^x$ → se $f(x) = 4^x$, então: $g(x) = 3 \cdot f(x)$



exemplo: $g(x) = \dfrac{4^x}{4}$

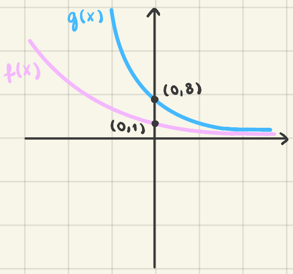


☆ Se houver soma ou subtração no expoente, dividir a potência em 2 bases iguais que se multiplicam.

exemplo: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ → $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 2^3$ → $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 8$ → $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

→ $g(x) = 8 \cdot f(x)$



LOGARITMO

$\log_a b = z \iff a^z = b$

- $\log_a b = z$
  - → logaritmando: deve ser maior que ∅ → ∅ ... $\mathbb{R}$
  - → logaritmo: não há restrição
  - → base: deve ser maior que ∅ e diferente de 1 → ∅, 1 ... $\mathbb{R}$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

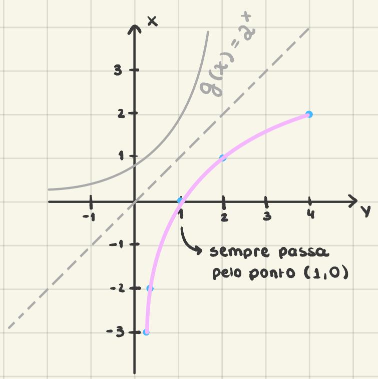
- Seja um número real a $(0 < a \neq 1)$, chamamos de função logarítmica de base a a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $\boxed{f(x) = \log_a x}$

- O domínio é constituído pelos reais não-nulos e positivos. Como o valor de entrada x é o logaritmando, ele deve ser obrigatoriamente maior que ∅. → como consequência, o gráfico nunca toca o eixo y.

- A base a é que define o gráfico. O gráfico da função logarítmica surge quando espelhamos o gráfico da função exponencial correspondente em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

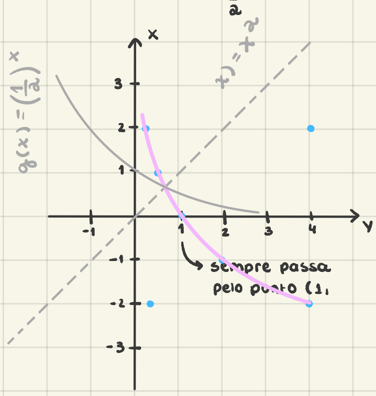
$a > 1$ → crescente

ex.: $f(x) = \log_2 x$



$a < 0 < 1$ → decrescente

ex.: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



- Isso significa que são funções inversas. Para encontrar a função inversa, trocamos o x pelo y e isolamos o y. Veja:

$\log_3 x = y \to \log_3 y = x$

$3^x = y \to f(x) = 3^x$

$f(x) = f^{-1}(x)$

- A assíntota vertical do gráfico (ponto na reta x no qual o limite tende ao infinito) ocorre quando o logaritmando é igual a zero.