__.__.__

Lista 01 - ATAL

· Mateus Pinto Mangueira - 115211466

1) a-) $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n^3$

Usando o método ~~[illegible]~~. Mestre:

$a = 5$ $\quad f(n) = n^3$ $\quad \Rightarrow \quad f(n) > n^{\log_b^a}$

$b = 2$ $\quad n^{\log_2^5}$

Temos então:

$T(n) = \Theta(f(n))$

$= \Theta(n^3)$

b-) $T(n) = 0{,}5T(n/2) + \frac{1}{n}$

Não é possível pois $a = 0{,}5 < 1$ e a tem que ser $>= 1$

c-) $T(n) = T(2n/3) + 1$

$a = 1$ $\quad f(n) = 1$

$b = 3$ $\quad n^{\log_3^1} = n^0 = 1$ $\quad \Rightarrow f(n) = n^{\log_b^a}$

$\hookrightarrow$ Obs: $\log_3^1 = 0$

Logo, temos que: $T(n) = \Theta(n^{\log_3^a} \log_3 n) = \Theta(1 . \log n) = \Theta(\log_3^n)$

d-) $T(n) = 2T(n-2) + T(2n/3) + n$

Não é possível resolve-la pois não está em um formato de solução de recorrência errado.

2.) a.)

b.) $T(n) = 7T(n/7) + n$

$T(n)$ ——— $T(\frac{n}{7})$ - - - - - - - n Custo do nível

$T(\frac{n}{7})$ $T(\frac{n}{7})$ $T(\frac{n}{7})$ $T(\frac{n}{7})$ $T(\frac{n}{7})$ $T(\frac{n}{7})$ - - - - $7 \cdot \frac{n}{7}$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$7^2 \cdot \frac{n}{49}$

$\vdots$

$\underbrace{n \times h}$

$1 = \frac{n}{7^i}$

$n = 7^i$

$\log n = \log 7^i$

$\frac{\log n}{\log 7} = i$

$i = \log_7 n$

níveis $= \log_7 n + 1$

$n \cdot (\log_7 n + 1) = n \log_7 n + n$

$= \Theta(n \log_7 n)$

3.) a.) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + O(n)$, $T(1) = O(1)$

1: $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n$

$T(\frac{n}{3}) = 3T(\frac{n}{9}) + \frac{n}{3}$

2: $T(n) = 3(3T(\frac{n}{9}) + \frac{n}{3}) + n$

$= 9T(\frac{n}{9}) + 2n$

3: $T(n) = 9\left(3T\left(\frac{n}{27}\right) + \frac{n}{9}\right) + 2n$

$= 27T\left(\frac{n}{27}\right) + 3n$

k: $T(n) = 3^k T\left(\frac{n}{3^k}\right) + kn$

$T(n) = 3^{\log_3 n} T\left(\frac{n}{3^{\log_3 n}}\right) + \log_3 n \cdot n$

$= n T(1) + n \log_3 n$

$= n + n \log_3 n$

$= O(n \log_3 n)$

b.) $T(n) = T(n-1) + O(2^{n-1})$, $T(1) = O(1)$

1: $T(n) = T(n-1) + O(2^{n-1})$

$* \ T(n-1) = T(n-2) + O(2^{n-2})$

2: $T(n) = T(n-2) + 2^{n-2} + 2^{n-1}$

$* \ T(n-2) = T(n-3) + 2^{n-3}$

3: $T(n) = T(n-3) + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1}$

k: $T(n) = T(n-k) + \sum^{k} 2^{n-i} =$

$T(1) + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i} = 1 + \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} - 1 = \frac{1-2^n}{1-2}$

$n - k = 1$

$n = k + 1$

$k = n - 1$

$= 1 + 2^n$

$T(n) = \Theta(2^n)$

4.) $T(n) = T(n-2) + 2\log n$ | $T(1) = O(1)$

Caso base temos: $T(1) = 1 \cdot \log 1 = 0 = O(1)$

Na hipótese: $T(n) = O(n \log n)$

Passo indutivo: $T(n+2) = T(n) + 2\log(n+2) =$

$O(n \log n) + 2\log(n+2)$

$T(n+2) = O((n+2)\log(n+2)) = O(n \log n)$

5.) a.) No caso base: quadrado(0): 0 que é verdade pela recorrência.
hipótese: quadrado(k) = k^2 e por fim tentamos provar que é verdade para $k+1$
Mostrando:
quadrado $(k+1) = 2(k+1) + k^2 - 1 = 2k + 2 + k^2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

b.) Invariante: $r \cdot p^m = base^{exp}$
Inicialização: $1 \cdot base^{exp} = base^{exp}$
Manutenção: para $m \% 2 = 0$:
$r p^m = r (p^2)^{m/2} = r p^m$
para $m \% 2 = 1$:
$r p^m = r p p^{(m-1)} = r p^m$
Finalização: $r \cdot p^m = r$, logo $p^m = 1 \rightarrow m = 0$

6.) Em uma sequência de n operações, temos $(\log_2 n) + 1$ potências de 2, isto é, $1, 2, 4 \ldots, 2^{(\log_2 n)}$
Sabendo que a i-ésima operação custo i, se i é uma potência de 2, o custo total disso será uma soma geométrica $\sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^i +$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{\log n} 2^i + n + n = 2^{1+\log} - 1 + n < 2n - 1 + n \leq 3n \in O(n)$

$\sum 1$, $i \leq n$ não é potência de 2.

O custo de operação não são caros, cada uma tendo um custo de 1. O custo total de todas as operações é basicamente $T(n) \leq 2n + n = 3n \in O(n)$