

Algoritmos Gulosos

Ricardo Dutra da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

- Formula uma escolha.
- Iterativamente aplica a escolha.
- A escolha é chamada de escolha gulosa.
- Fácil propor um algoritmo.
- Difícil propor um correto.

Pontos importantes para formular a solução gulosa:

- escolha gulosa;
- subproblemas: o que falta resolver após a escolha gulosa;
- subestrutura ótima: soluções ótimas dos subproblemas implicam em solução ótima para o problema.

Seleção de Atividades

Entrada

Conjunto de n atividades $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ com intervalo de tempo determinado por início e fim $[a_i.s, a_i.t)$, $a_i.s < a_i.t$.

Saída

Conjunto máximo de atividade $B \subseteq A$ sem sobreposição, ou seja, $\forall_{a,b \in B} [a.s, a.t) \cap [b.s, b.t) = \emptyset$.

Algumas propostas de escolhas gulosas:

- atividade que começa antes;
- atividade com menor intervalo;
- atividade com menos conflitos;
- atividade com menor término;
- atividade com maior começo.

Seleção de Atividades

Atividade que começa antes.

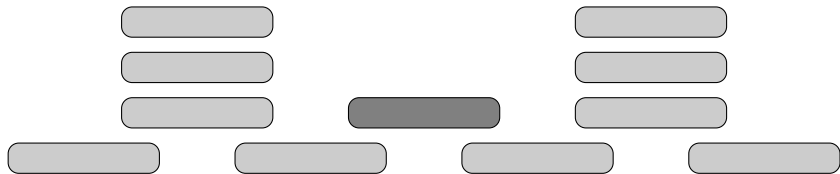


Seleção de Atividades

Atividade com menor intervalo.

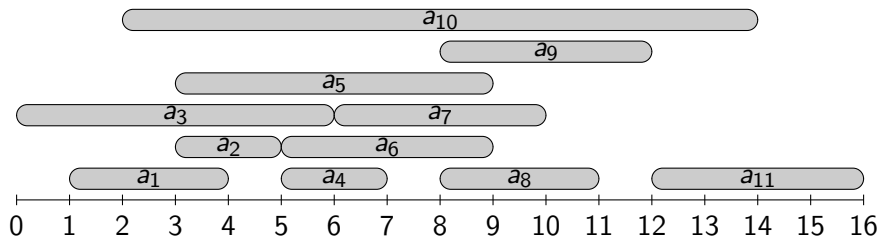


Atividade com menos conflitos.



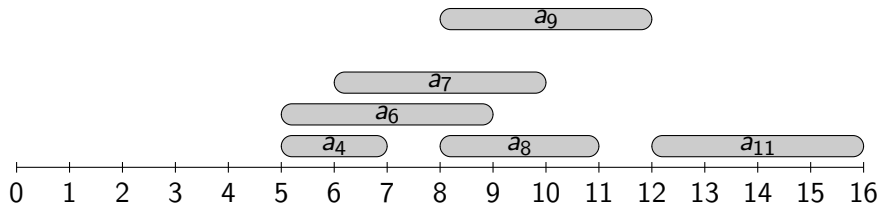
Seleção de Atividades

- Escolha gulosa: atividade com menor término.
- Subproblemas: $A_k = \{a_i \in A \mid a_i.s \geq a_k.t\}$.



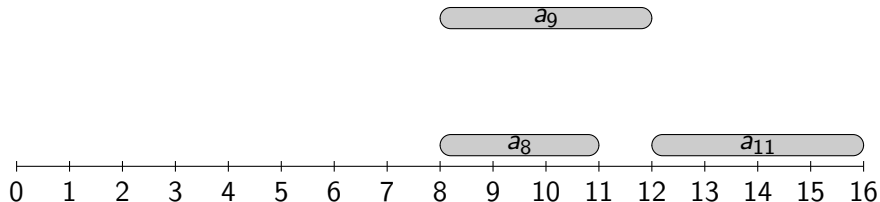
Seleção de Atividades

- Escolha gulosa: a_1 .
- Solução: $B = \{a_1\}$.
- Subproblema restante: A_1



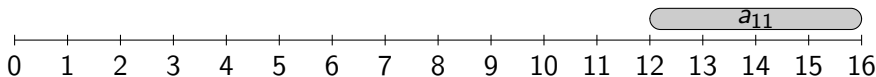
Seleção de Atividades

- Escolha gulosa: a_4 .
- Solução: $B = \{a_1, a_4\}$.
- Subproblema restante: A_4



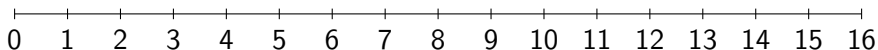
Seleção de Atividades

- Escolha gulosa: a_8 .
- Solução: $B = \{a_1, a_4, a_8\}$.
- Subproblema restante: A_8



Seleção de Atividades

- Escolha gulosa: a_{11} .
- Solução: $B = \{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$.
- Subproblema restante: A_{11}



Seleção de Atividades

- Supomos as atividades ordenadas por tempo de término.
- Complexidade: $T(n) = \mathcal{O}(n)$

Algoritmo: SELECAO($A[1 \dots n]$)

```
1  $B \leftarrow \{1\}$ 
2  $k \leftarrow 1$ 
3 para  $i = 2$  até  $n$  faça
4   se  $A[i].s \geq A[k].t$  então
5      $B \leftarrow B \cup \{i\}$ 
6      $k \leftarrow i$ 
```

Teorema

A escolha gulosa pertence a uma solução do problema de seleção de atividades.

Demonstração.

Considere um subproblema A_k qualquer e uma solução ótima B_k para o subproblema. Considere também $a_j \in B_k$ como a tarefa com menor tempo de finalização em B_k , e $a_g \in A_k$ como a escolha gulosa.

Temos duas possibilidades para a solução B_k :

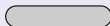
- $a_j = a_g$ ou
- $a_j \neq a_g$.



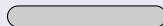
Demonstração.

Caso $a_j = a_g$, então a escolha gulosa está na solução trivialmente.

$$a_j = a_g$$

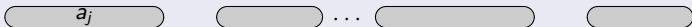


...



Demonstração.

Caso $a_j \neq a_g$,



sabemos que o término de a_g é anterior o igual ao término de a_j



e podemos substituir a_j por a_g mantendo uma solução ótima B'_k ($|B'_k| = |B_k|$).



Teorema

A formulação da solução possui subestrutura ótima. Se B é uma solução ótima para A , então $B_g = B - \{a_g\}$ é uma solução ótima para A_g .

Demonstração.

A solução B possui $|B| = |B_g| + 1$ elementos. Para efeito de contradição, vamos supor que B_g não é ótima.

Portanto, temos uma solução melhor B_g^* que podemos substituir no lugar de B_g e ainda incluir a escolha gulosa a_g . Assim,

$$\begin{aligned} |B| &= |B_g| + 1 \\ &< |B_g^*| + 1 \\ &< |B^*| \end{aligned}$$

o que contradiz B ser ótima. Logo, B_g é ótima.



