Grafos

Ricardo Dutra da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Ordenação Topológica

Entrada

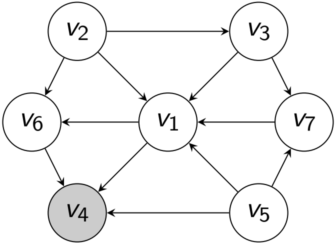
Grafo direcionado $G = (V, E)$ sem ciclos (DAG).

Saída

Rótulo $w.r$ para todo vértice $w \in V$ de forma que se $(u, v) \in E$ então $u.r < v.r$.

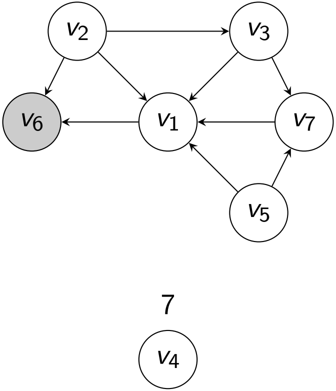
Teorema

Todo DAG possui um sorvedouro.

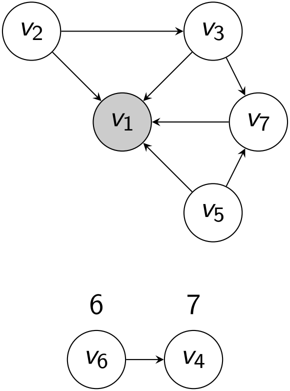


Podemos dar um valor alto para o sorvedouro, removê-lo do grafo e continuar o processo para outro sorvedouro.

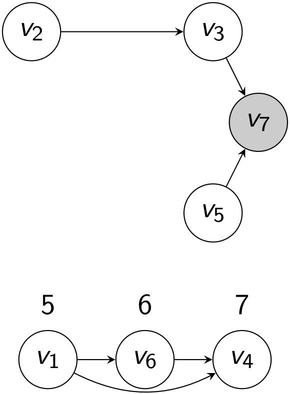
Ordenação Topológica



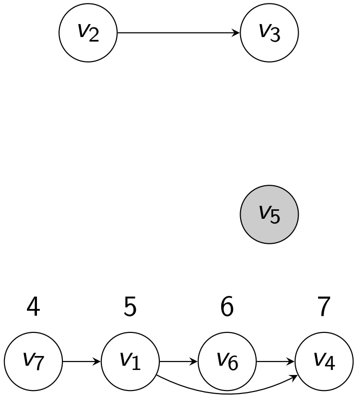
Ordenação Topológica



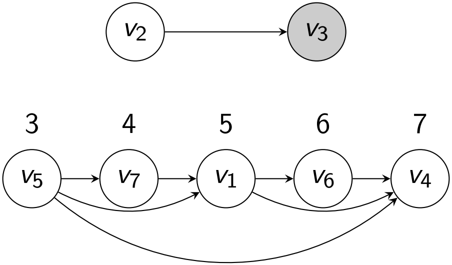
Ordenação Topológica



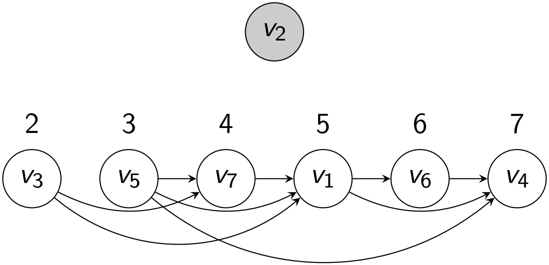
Ordenação Topológica



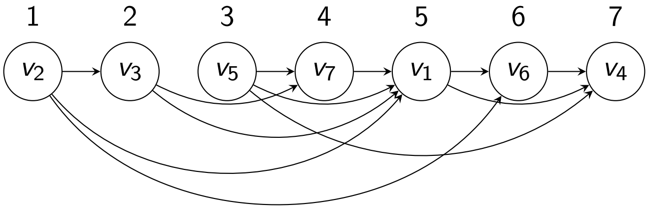
Ordenação Topológica



Ordenação Topológica



Ordenação Topológica



Ordenação Topológica

Algoritmo: $\mathrm{OT}(G)$

rotulo $\leftarrow |V|$
para $v \in V$ **faça**
    v.visitado $\leftarrow$ falso

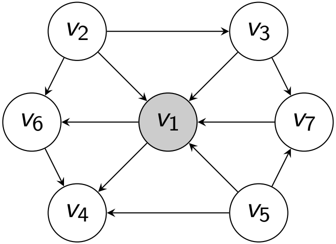
para $v \in V$ **faça**
    se v*.visitado* $=$ *falso* **então**
        $\mathrm{BP}(G,\ v)$

Algoritmo: $\mathrm{BP}(G,\ v)$

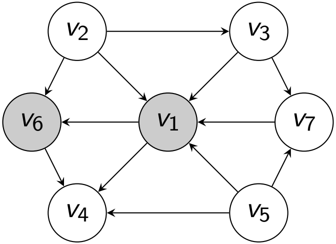
v.visitado $\leftarrow$ verdadeiro
para $(v, w) \in E$ **faça**
    se w*.visitado* $=$ *falso* **então**
        $\mathrm{BP}(G,\ w)$

v.r $\leftarrow$ rotulo
rotulo $\leftarrow$ rotulo-1

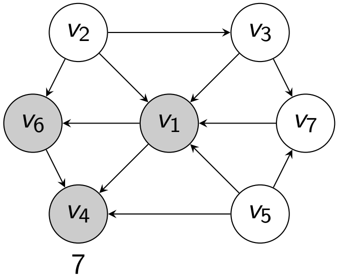
Ordenação Topológica



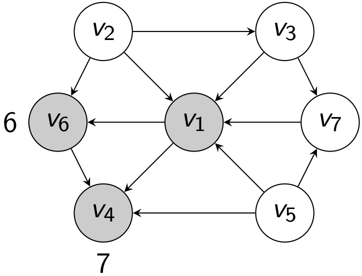
Ordenação Topológica



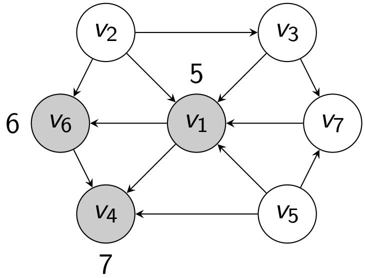
Ordenação Topológica

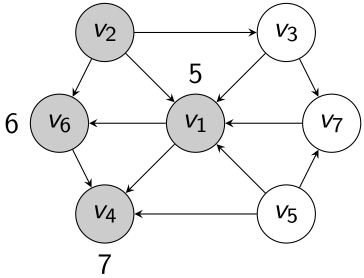


Ordenação Topológica



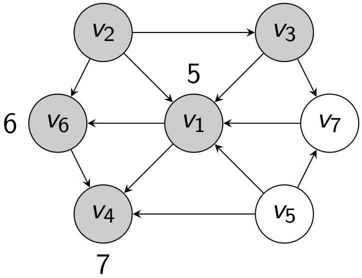
Ordenação Topológica

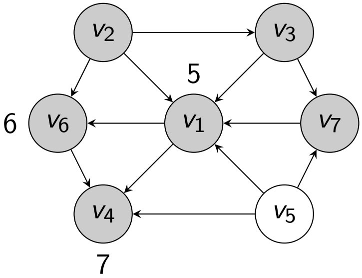




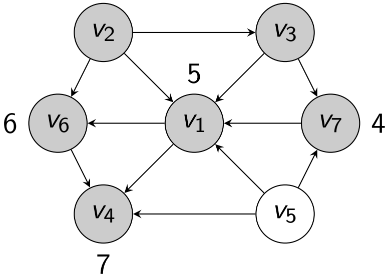
5
6
7
v_2
v_3
v_6
v_1
v_7
v_4
v_5

Ordenação Topológica

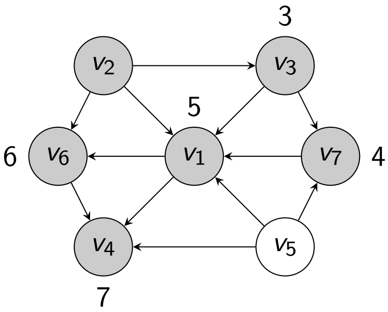



v_2
v_3
5
6
v_6
v_1
v_7
v_4
v_5
7

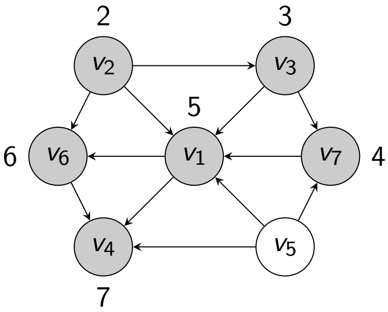
Ordenação Topológica



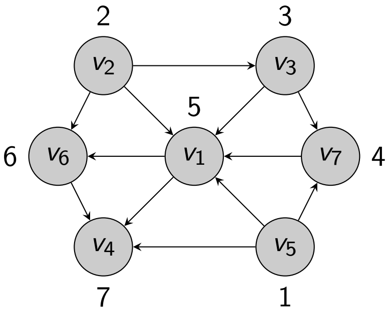
Ordenação Topológica



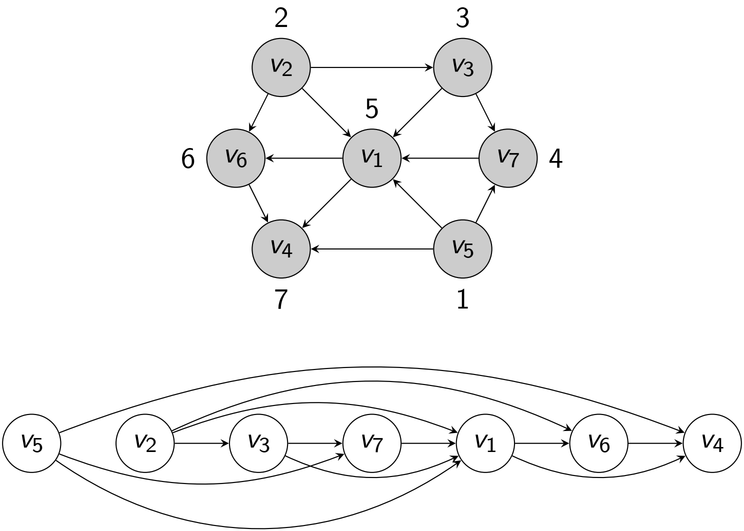
Ordenação Topológica



Ordenação Topológica



Ordenação Topológica



Demonstração.

Considere uma aresta $(u, v) \in E$. Durante a busca em profundidade há duas possibilidades para a ordem em que seus vértices são visitados:

1. u é visitado antes de v;
2. v é visitado antes de u;

$\square$

Demonstração.

Considerando u visitado antes de v, a busca em profundidade seguirá por todos os vértices alcançáveis a partir de u, inclusive v. O rótulo de u somente é atribuído após todos os os vértices alcançáveis terminaram a execução de sua chamada recursiva e receberam seus rótulos. Portanto, $u.r < u.v$. $\square$

Demonstração.

Considerando v visitado antes de u, a execução da chamada recursiva de v termina antes da chamada recursiva de u começar. Portanto, $u.r < u.v$. □

A complexidade $\mathcal{O}(n + m)$ do algoritmo é herdada da busca em profundidade.