# Teste t-Student para duas médias
# (Amostras pareadas)

Uma amostra pareada corresponde ao levantamento de dados da mesma amostra em duas situações nas quais tenha interferido algum fator cujo efeito deseja-se avaliar.

Exemplos:
- Comparar o peso de um grupo de pessoas antes e depois de passarem por uma dieta rigorosa;
- Verificar o tempo de resposta de um sistema antes e depois de algumas modificações serem implementadas;
- Verificar a pressão arterial de indivíduos antes e depois de ingerirem uma medição.

Uma amostra pareada de *n* observações, antes e depois da intervenção de um fator, pode ser representada como no Quadro 1.

Quadro 1 - Estrutura de dados para amostras pareadas

| Indivíduo | Antes do fator | Depois do fator | Diferença *d* |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_1$ | $y_1$ | $d_1 = x_1 - y_1$ |
| 2 | $x_2$ | $y_2$ | $d_2 = x_2 - y_2$ |
| ... | ... | ... | ... |
| n | $x_n$ | $y_n$ | $d_n = x_n - y_n$ |

Suposições para utilizarmos o teste de hipóteses para comparação duas médias com amostras pareadas:

1. Deve-se escolher de maneira aleatória duas amostras dependentes de duas populações.
2. Ambas as populações devem ter distribuição Normal. Se elas se afastam radicalmente da distribuição Normal, devemos utilizar os métodos não-paramétricos.

Passos para realização do teste de hipóteses para comparação duas médias com amostras pareadas:

1º Passo: Estabeleça o nível de significância ($\alpha$) a ser adotado.

2º Passo: Estabelecer as hipóteses:

$H_0$: Não há diferença entre as médias pareadas (antes e depois), ou seja, $\mu_1 = \mu_2$

$H_1$: As duas medidas realizadas (antes e depois) são significativamente diferentes em relação à variável testada, ou seja, $\mu_1 \neq \mu_2$.

Devemos determinar as hipóteses estatísticas a partir do problema a ser resolvido. Nesse material, trataremos somente da hipótese bilateral.

3º Passo: Calcular as diferenças *d* entre os pares de observações de cada indivíduo.

4º Passo: Encontrar o valor $\bar{d}$, que é a média das diferenças $d_i$:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

5º Passo: Calcular o desvio padrão ($s_d$) das diferenças $d_i$:

$$s_d = \sqrt{\frac{n\left(\sum d_i^2\right) - \left(\sum d_i\right)^2}{n(n-1)}}$$

6º Passo: Calcular a estatística de teste $T_p$:

$$T_p = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

7º Passo: Calcular o valor p:

$Valor\ p = 2 \times P\left(t > \left|T_p\right|\right)$, com *n-1* graus de liberdade.

Conclusão:

- ✓ Se o valor p $\leq$ nível de significância ($\alpha$), então há indícios para rejeitarmos $H_0$.
- ✓ Se o valor p > nível de significância ($\alpha$), então há evidências suficientes para aceitarmos $H_0$.

8º Passo: Outra opção seria construir o intervalo de confiança:

$$\bar{d} \pm \left(t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\right) \times \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

Conclusão:

- ✓ Se os limites do intervalo de confiança não contêm 0 (zero), então há indícios para rejeitarmos $H_0$.
- ✓ Se os limites do intervalo de confiança contêm 0 (zero), então há evidências suficientes para aceitarmos $H_0$.

**Exemplo 1**

O Captopril é um remédio destinado a baixar a pressão sistólica. Feito o teste com este remédio em pacientes, mediram-se suas pressões sistólicas (em mmHg) antes e depois de tomarem o remédio, com os resultados constantes da tabela a seguir. Pode-se dizer que haja diferença nas medidas da pressão sistólica antes e depois da ingestão do remédio?

Tabela 1 – Pressão sistólica dos pacientes antes e depois de tomarem o Captopril

| Pressão sistólica (em mmHg) | |
|---|---|
| Antes | Depois |
| 200 | 191 |
| 174 | 170 |
| 198 | 177 |
| 170 | 167 |
| 179 | 159 |

1º Passo: Nível de significância ($\alpha$) = 5%, ou seja, 0,05 $\rightarrow$ Como o nível de significância não foi especificado no problema, adotaremos o "padrão".

2º Passo: Hipóteses:

$H_0$: Não há diferença na pressão sistólica média dos pacientes, antes e depois, de tomarem o Captopril.

$H_1$: A pressão sistólica média dos pacientes é significativamente diferente quando comparada antes e depois da medicação.

3º Passo: Calcular as diferenças $d_i$.

| Pressão sistólica (em mmHg) | | Diferenças $d_i$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|---|
| Antes | Depois | | |
| 200 | 191 | (200-190)=+9 | +81 |
| 174 | 170 | (174-170)=+4 | +16 |
| 198 | 177 | +21 | +441 |
| 170 | 167 | +3 | +9 |
| 179 | 159 | +20 | +400 |
| Soma | | +57 | +947 |

4º Passo: Encontrar o valor $\bar{d}$, que é a média das diferenças $d_i$:

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{9+4+21+3+20}{5} = \frac{57}{5} = 11{,}4$$

5º Passo: Calcular o desvio padrão ($s_d$) das diferenças $d_i$:

$$s_d = \sqrt{\frac{n\left(\sum d_i^2\right) - \left(\sum d_i\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{5(947) - (57)^2}{5(5-1)}} = \sqrt{\frac{1486}{20}} = \sqrt{74{,}3} = 8{,}62$$

6º Passo: Calcular a estatística de teste $T_p$:

$$T_p = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{11{,}4}{\frac{8{,}62}{\sqrt{5}}} = \frac{11{,}4}{3{,}85} = 2{,}96$$

Temos duas maneiras de concluir o teste de hipóteses, uma seria utilizar o intervalo de confiança e a outra seria utilizar o valor p. A seguir realizamos os cálculos utilizando as duas opções:

7º Passo: Vamos calcular o valor p utilizando a tabela t-Student:

$Valor\ p = 2 \times P(t > |2{,}96|) = 2 \times 0{,}025 = 0{,}05$, com *n-1=4* graus de liberdade.

Conclusão:

*Como o valor p $\leq$ nível de significância ($\alpha$), então há indícios para rejeitarmos $H_0$, ou seja, podemos dizer que a pressão sistólica média dos pacientes é diferente quando comparamos antes e depois da ingestão do Captopril.*

8º Passo: O cálculo do intervalo de confiança segue a fórmula a seguir:

$$\bar{d} \pm \left(t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\right) \times \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

Consultando a tabela t-Student na linha *n-1=4* e na coluna $\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$, obteremos o valor 2,776. Substituindo os dados na fórmula teremos:

$$\bar{d} \pm \left(t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\right) \times \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

$$11{,}4 \pm 2{,}776 \times \frac{8{,}62}{\sqrt{5}}$$

$$11{,}4 \pm 2{,}776 \times 3{,}85$$

$$11{,}4 \pm 10{,}7$$

$$\left[+0{,}7 \quad ; \quad +22{,}1\right]$$

Conclusão:

*Como os limites do intervalo de confiança não contêm 0 (zero), então há indícios para rejeitarmos $H_0$, ou seja, podemos dizer que a pressão sistólica média dos pacientes é diferente quando comparamos ante e depois da ingestão do Captopril. Além disso, como os limites do intervalo de confiança têm ambos sinais positivos* $\left[+0{,}7 \quad ; \quad +22{,}1\right]$, *podemos dizer que a pressão sistólica média dos pacientes antes de tomarem o medicamento é maior do que após a ingestão do comprimido.*

**Exercícios**

1. Uma distribuidora de combustíveis deseja verificar se um novo tipo de gasolina é eficaz na revitalização de motores velhos. Com esse objetivo, seleciona 12 automóveis de um mesmo modelo com mais de 8 anos de uso e, após regulagem de seus motores, verifica o consumo de combustível (em km/litro). Em seguida, o carro é abastecido com o novo tipo de combustível durante 15 semanas, e uma nova aferição do consumo é feita. Defina as variáveis aleatórias $X_i$ e $Y_i$ como o rendimento do automóvel *i* respectivamente *antes* e *após* as 15 semanas. Vemos que $X_i$ e $Y_i$ foram medidas em uma mesma unidade amostral e, assim, é razoável assumir que exista alguma dependência entre elas. Ao medir a característica de interesse em duas ocasiões, para cada uma das unidades amostrais, pretende-se diminuir a influência de outros fatores e ressaltar um possível efeito do tipo de gasolina no desempenho do veículo.
   Os dados coletados para os 12 automóveis são apresentados na tabela a seguir:

| Automóvel | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Após | 11,6 | 8,8 | 9,9 | 9,5 | 11,6 | 9,1 | 10,6 | 10,8 | 13,4 | 10,6 | 10,5 | 11,4 |
| Antes | 8,1 | 7,9 | 6,8 | 7,8 | 7,6 | 7,9 | 5,7 | 8,4 | 8 | 9,5 | 8 | 6,8 |

   Utilizando um nível de significância de 5%, verifique se houve diferença no rendimento dos veículos.

2. Dez cobaias foram submetidas ao tratamento de engorda com certa ração. Os pesos em gramas, antes e após o teste são dados a seguir (supõe-se que provenham de distribuições normais). Considerando um nível de 1% de significância, podemos concluir que existe diferença no peso médio dos animais antes e após o tratamento de engorda?

| Cobaia | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antes | 635 | 704 | 662 | 560 | 603 | 745 | 698 | 575 | 633 | 669 |
| Depois | 640 | 712 | 681 | 558 | 610 | 740 | 707 | 585 | 635 | 682 |

Gabarito:

1.

| Automóvel | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Após | 11,6 | 8,8 | 9,9 | 9,5 | 11,6 | 9,1 | 10,6 | 10,8 | 13,4 | 10,6 | 10,5 | 11,4 |
| Antes | 8,1 | 7,9 | 6,8 | 7,8 | 7,6 | 7,9 | 5,7 | 8,4 | 8 | 9,5 | 8 | 6,8 |
| d | 3,5 | 0,9 | 3,1 | 1,7 | 4 | 1,2 | 4,9 | 2,4 | 5,4 | 1,1 | 2,5 | 4,6 |
| $d^2$ | 12,25 | 0,81 | 9,61 | 2,89 | 16 | 1,44 | 24,01 | 5,76 | 29,16 | 1,21 | 6,25 | 21,16 |

$\Sigma d=$ 35,3

$\Sigma d^2=$ 130,55

$\bar{d}$ = 2,941667

$s_d=$ 1,558238

$T_p=$ 6,539586

valor p = 2x(0,0005)=0,001

2.

| Cobaia | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antes | 635 | 704 | 662 | 560 | 603 | 745 | 698 | 575 | 633 | 669 |
| Depois | 640 | 712 | 681 | 558 | 610 | 740 | 707 | 585 | 635 | 682 |
| $d_i$ | -5 | -8 | -19 | 2 | -7 | 5 | -9 | -10 | -2 | -13 |
| $d_i^2$ | 25 | 64 | 361 | 4 | 49 | 25 | 81 | 100 | 4 | 169 |

$\Sigma d=$ -66

$\Sigma d^2=$ 882

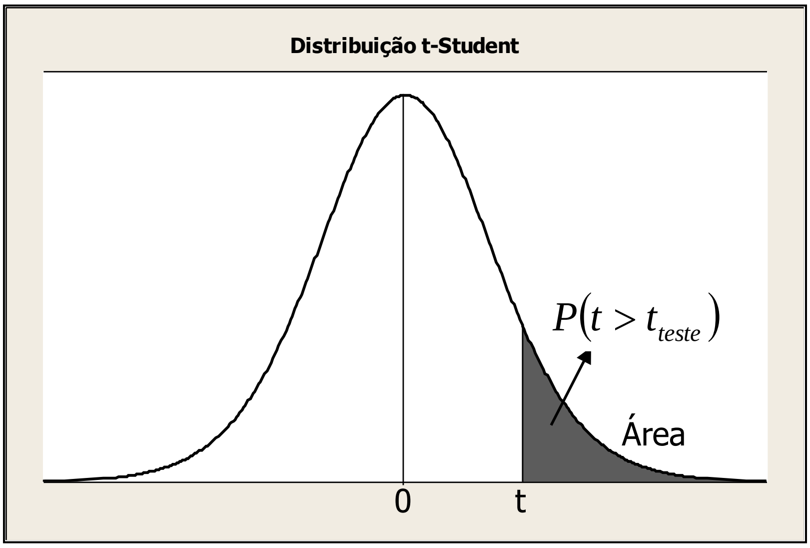
$\bar{d}$ = -6,6

$s_d=$ 7,04

$T_p=$ -2,96

valor p = 2x(0,01)=0,02

# DISTRIBUIÇÃO t-STUDENT




| g.l | 0,25 | 0,125 | 0,1 | 0,05 | 0,025 | 0,0125 | 0,01 | 0,005 | 0,0025 | 0,001 | 0,0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2,414 | 3,078 | 6,314 | 12,71 | 25,45 | 31,82 | 63,66 | 127,3 | 318,3 | 636,6 |
| **2** | 0,817 | 1,604 | 1,8856 | 2,92 | 4,303 | 6,205 | 6,965 | 9,925 | 14,09 | 22,33 | 31,6 |
| **3** | 0,765 | 1,423 | 1,6377 | 2,3534 | 3,182 | 4,177 | 4,541 | 5,841 | 7,453 | 10,21 | 12,92 |
| **4** | 0,741 | 1,344 | 1,5332 | 2,1319 | 2,776 | 3,495 | 3,747 | 4,604 | 5,598 | 7,173 | 8,61 |
| **5** | 0,727 | 1,301 | 1,4759 | 2,0151 | 2,571 | 3,163 | 3,365 | 4,032 | 4,773 | 5,893 | 6,869 |
| **6** | 0,718 | 1,273 | 1,4398 | 1,9432 | 2,447 | 2,969 | 3,143 | 3,707 | 4,317 | 5,208 | 5,959 |
| **7** | 0,711 | 1,254 | 1,4149 | 1,8946 | 2,365 | 2,841 | 2,998 | 3,499 | 4,029 | 4,785 | 5,408 |
| **8** | 0,706 | 1,24 | 1,3968 | 1,8596 | 2,306 | 2,752 | 2,896 | 3,355 | 3,833 | 4,501 | 5,041 |
| **9** | 0,703 | 1,23 | 1,383 | 1,8331 | 2,262 | 2,685 | 2,821 | 3,25 | 3,69 | 4,297 | 4,781 |
| **10** | 0,7 | 1,221 | 1,3722 | 1,8125 | 2,228 | 2,634 | 2,764 | 3,169 | 3,581 | 4,144 | 4,587 |
| **11** | 0,697 | 1,214 | 1,3634 | 1,7959 | 2,201 | 2,593 | 2,718 | 3,106 | 3,497 | 4,025 | 4,437 |
| **12** | 0,695 | 1,209 | 1,3562 | 1,7823 | 2,179 | 2,56 | 2,681 | 3,055 | 3,428 | 3,93 | 4,318 |
| **13** | 0,694 | 1,204 | 1,3502 | 1,7709 | 2,16 | 2,533 | 2,65 | 3,012 | 3,372 | 3,852 | 4,221 |
| **14** | 0,692 | 1,2 | 1,345 | 1,7613 | 2,145 | 2,51 | 2,625 | 2,977 | 3,326 | 3,787 | 4,14 |
| **15** | 0,691 | 1,197 | 1,3406 | 1,7531 | 2,131 | 2,49 | 2,602 | 2,947 | 3,286 | 3,733 | 4,073 |
| **16** | 0,69 | 1,194 | 1,3368 | 1,7459 | 2,12 | 2,473 | 2,583 | 2,921 | 3,252 | 3,686 | 4,015 |
| **17** | 0,689 | 1,191 | 1,3334 | 1,7396 | 2,11 | 2,458 | 2,567 | 2,898 | 3,222 | 3,646 | 3,965 |
| **18** | 0,688 | 1,189 | 1,3304 | 1,7341 | 2,101 | 2,445 | 2,552 | 2,878 | 3,197 | 3,611 | 3,922 |
| **19** | 0,688 | 1,187 | 1,3277 | 1,7291 | 2,093 | 2,433 | 2,539 | 2,861 | 3,174 | 3,579 | 3,883 |
| **20** | 0,687 | 1,185 | 1,3253 | 1,7247 | 2,086 | 2,423 | 2,528 | 2,845 | 3,153 | 3,552 | 3,85 |
| **21** | 0,686 | 1,183 | 1,3232 | 1,7208 | 2,08 | 2,414 | 2,518 | 2,831 | 3,135 | 3,527 | 3,819 |
| **22** | 0,686 | 1,182 | 1,3212 | 1,7172 | 2,074 | 2,405 | 2,508 | 2,819 | 3,119 | 3,505 | 3,792 |
| **23** | 0,685 | 1,18 | 1,3195 | 1,7139 | 2,069 | 2,398 | 2,5 | 2,807 | 3,104 | 3,485 | 3,768 |
| **24** | 0,685 | 1,179 | 1,3178 | 1,7109 | 2,064 | 2,391 | 2,492 | 2,797 | 3,091 | 3,467 | 3,745 |
| **25** | 0,684 | 1,178 | 1,3164 | 1,7081 | 2,06 | 2,385 | 2,485 | 2,787 | 3,078 | 3,45 | 3,725 |
| **26** | 0,684 | 1,177 | 1,315 | 1,7056 | 2,056 | 2,379 | 2,479 | 2,779 | 3,067 | 3,435 | 3,707 |
| **27** | 0,684 | 1,176 | 1,3137 | 1,7033 | 2,052 | 2,373 | 2,473 | 2,771 | 3,057 | 3,421 | 3,69 |
| **28** | 0,683 | 1,175 | 1,3125 | 1,7011 | 2,048 | 2,368 | 2,467 | 2,763 | 3,047 | 3,408 | 3,674 |
| **29** | 0,683 | 1,174 | 1,3114 | 1,6991 | 2,045 | 2,364 | 2,462 | 2,756 | 3,038 | 3,396 | 3,659 |
| **30** | 0,683 | 1,173 | 1,3104 | 1,6973 | 2,042 | 2,36 | 2,457 | 2,75 | 3,03 | 3,385 | 3,646 |
| **31** | 0,682 | 1,172 | 1,3095 | 1,6955 | 2,04 | 2,356 | 2,453 | 2,744 | 3,022 | 3,375 | 3,633 |
| **32** | 0,682 | 1,172 | 1,3086 | 1,6939 | 2,037 | 2,352 | 2,449 | 2,738 | 3,015 | 3,365 | 3,622 |
| **33** | 0,682 | 1,171 | 1,3077 | 1,6924 | 2,035 | 2,348 | 2,445 | 2,733 | 3,008 | 3,356 | 3,611 |
| **34** | 0,682 | 1,17 | 1,307 | 1,6909 | 2,032 | 2,345 | 2,441 | 2,728 | 3,002 | 3,348 | 3,601 |
| **35** | 0,682 | 1,17 | 1,3062 | 1,6896 | 2,03 | 2,342 | 2,438 | 2,724 | 2,996 | 3,34 | 3,591 |