

Cheat Sheet: FMC - Unidade 2

Mateus Dias
Tecnologia da Informação - IMD/UFRN

03/10/2025

DEFINIÇÃO 0 - Divisores e Múltiplos

Essa definição não faz, realmente, parte do conteúdo, mas é fundamental para o entendimento de todas as próximas definições.

Parte 1 - Divisores

Um número inteiro d é divisor de um número inteiro a se, e somente se, ao dividir a por d , o resto for **zero**, ou seja, a divisão é exata.

Por exemplo, para o número 24 temos 8 divisores. São eles:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

Parte 2 - Múltiplos

Um número inteiro b é múltiplo de um número inteiro a se, e somente se, existe um número inteiro k tal que:

$$b = ak$$

Por exemplo, se $a = 3$, os múltiplos de 3 são:

- Se $k = 2$, $b = 3 \cdot 2 = 6$
- Se $k = 5$, $b = 3 \cdot 5 = 15$

O conjunto dos múltiplos de 3 é:

$$M(3) = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$$

Parte 3 - Relação entre Divisores e Múltiplos

Se b é um **múltiplo** de a , isso significa que a é um **divisor** de b . Esta relação será explorada melhor na definição de **divisibilidade**.

DEFINIÇÃO 1 - Divisibilidade

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a divide b se, e somente se $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que: $ak = b$.

$$a \mid b \iff (\exists k \in \mathbb{Z})(ak = b).$$

DEFINIÇÃO 2 - Módulo

Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$. a é congruente a b módulo m se, e somente se $m \mid a - b$.

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a - b$$

Também é possível usar o módulo para representar o resto de uma divisão. Pela definição de divisão euclidiana, sabe-se que um número arbitrário $D \in \mathbb{Z}$ pode ser representado como

$$D = dq + r.$$

Com **D** sendo o **dividendo**, **d** o **divisor**, **q** o **quociente** e **r** o **resto** ($0 \leq r < |d|$). Nesse sentido, podemos afirmar que:

$$D \bmod d = r.$$

TEOREMA 1

Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 0$. a é congruente a b módulo m se, e somente se $a \bmod m = b \bmod m$.

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a \bmod m = b \bmod m.$$

Prova (\implies)

Suponha $a, b, m \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv b \pmod{m}$.

Pelas definições 2 e 1, respectivamente, temos que:

$$\begin{aligned} m \mid a - b \\ mk = a - b \\ a = b + mk \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

Pela definição do resto, ao dividir b por m , temos:

$$b = q_b \cdot m + r_b \quad \text{(II)}$$

Onde $q_b \in \mathbb{Z}$ e $r_b = b \bmod m$, com $0 \leq r_b < m$.
Substituindo **(II)** em **(I)**:

$$\begin{aligned} a &= (q_b \cdot m + r_b) + mk \\ a &= mq_b + mk + r_b \\ a &= m \cdot (q_b + k) + r_b \end{aligned}$$

Tome $q_a = q_b + k$. Como $q_a \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_b < m$, podemos dizer que r_b é o resto da divisão de a por m , isto é, $a \bmod m = r_b$.
Como $r_b = b \bmod m$, temos que:

$$a \bmod m = b \bmod m.$$

Prova (\Leftarrow)

Suponha $a, b, m \in \mathbb{Z}$ tal que $a \bmod m = b \bmod m$. Seja r o valor comum do resto, de forma que:

$$r = a \bmod m = b \bmod m$$

Pela definição do resto, podemos escrever a e b como:

$$\begin{aligned} a &= q_a \cdot m + r \\ b &= q_b \cdot m + r \end{aligned}$$

Onde $q_a, q_b \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < m$. Dessa forma, a diferença $a - b$ fica desta forma:

$$\begin{aligned} a - b &= (q_a \cdot m + r) - (q_b \cdot m + r) \\ a - b &= q_a \cdot m + r - q_b \cdot m - r \\ a - b &= m \cdot (q_a - q_b) \end{aligned}$$

Seja $k = q_a - q_b$. Como $q_a \in \mathbb{Z}$ e $q_b \in \mathbb{Z}$ temos que $k \in \mathbb{Z}$. Portanto:

$$a - b = mk$$

Pela definição 1 e 2, respectivamente, temos que:

$$\begin{aligned} m &\mid a - b \\ a &\equiv b \pmod{m} \end{aligned}$$

■

DEFINIÇÃO 3 - Máximo Divisor Comum

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a, b \neq 0$. O MDC de a e b , denotado por $mdc(a, b)$ é o único inteiro positivo d que satisfaz as seguintes condições:

1. $d \mid a$
2. $d \mid b$
3. $\forall c \in \mathbb{Z}[(c \mid a) \wedge (c \mid b)] \implies c \mid d$

Em outros termos, d é o maior número inteiro positivo que divide a e b ao mesmo tempo.

Exemplos

1. Calcular o $mdc(12, 18)$.

Divisores de 12: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Divisores de 18: $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Divisores comuns: $\{1, 2, 3, 6\}$

Máximo Divisor Comum (MDC): 6

Algoritmo de Euclides

O algoritmo de Euclides é um método simples para encontrar o MDC entre dois números inteiros diferentes de zero. Ele é um derivado da divisão euclidiana:

$$D = dq + r.$$

Com **D** sendo o **dividendo**, **d** o **divisor**, **q** o **quociente** e **r** o **resto** ($0 \leq r < |d|$).

Se queremos calcular $mdc(a, b)$, podemos assumir $D_1 = \max(a, b)$ como o dividendo inicial e $d_1 = \min(a, b)$ como o divisor inicial.

O algoritmo procede em etapas sucessivas, onde o resto de cada divisão se torna o novo divisor e o divisor anterior se torna o novo dividendo, até que $r_i = 0$ (onde i é o número de iterações). O último resto **não nulo** é o $mdc(a, b)$.

Exemplos

2. Calcular o $mdc(270, 192)$.

$$270 = 192 \cdot 1 + 78 \tag{1}$$

$$192 = 78 \cdot 2 + 36 \tag{2}$$

$$78 = 36 \cdot 2 + 6 \tag{3}$$

$$36 = 6 \cdot 6 + 0 \tag{4}$$

Portanto, o **mdc(270, 192)** é igual ao último resto não nulo, ou seja, **6**.

DEFINIÇÃO 4 - Mínimo Múltiplo Comum

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. O $mmc(a, b)$ é o menor número inteiro positivo que é múltiplo de a e b simultaneamente.

Exemplos

1. Calcular o $mmc(4, 6)$.

Múltiplos de 4: $\{4, 8, \mathbf{12}, 16, 20, 24, \dots\}$

Múltiplos de 6: $\{6, \mathbf{12}, 18, 24, 30, 36, \dots\}$

O menor dos múltiplos comuns é 12, portanto $mmc(4, 6) = 12$.

Métodos para calcular o MMC

É possível conectar os conceitos de MMC e MDC com uma fórmula relacionada à Matemática Discreta:

$$mmc(a, b) = \frac{|a \cdot b|}{mdc(a, b)}$$

Este é o método que apresenta maior eficiência computacional para calcular o MMC entre dois números, mas também existe o método da fatoração prima (mais útil para calcular o MMC entre três ou mais números):

1. **Fatore** todos os números em seus fatores primos;
2. O **MMC** é o produto de todos os fatores primos distintos, cada um elevado à maior potência em que ele aparece em qualquer uma das fatorações.

Exemplos

2. Calcular o $mmc(12, 18)$ usando o primeiro método.

1. Calcular o **mdc(12, 18)**:

Segundo o método apresentado na **definição 3**:

$$18 = 12 \cdot 1 + 6 \tag{1}$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0 \tag{2}$$

Portanto, $mdc(12, 18) = \mathbf{6}$.

2. Substituir na fórmula:

$$mmc(12, 18) = \frac{|12 \cdot 18|}{6}$$

$$mmc(12, 18) = \frac{216}{6}$$

$$mmc(12, 18) = 36$$

3. Calcular o $mmc(12, 18)$ usando o segundo método.

1. Fatore 12 e 18 em seus respectivos fatores primos:

$$12 = 2^2 \cdot 3^1$$

$$18 = 2^1 \cdot 3^2$$

2. Fatores e maiores potências:

- Fator 2: 2^2
- Fator 3: 3^2

3. Cálculo:

$$mmc(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2$$

$$mmc(12, 18) = 4 \cdot 9$$

$$mmc(12, 18) = 36$$

O MMC entre a e b também pode ser interpretado como “o primeiro número em que a irá *se encontrar* com b quando ambos forem multiplicados por números naturais”.

TEOREMA 2 - Teorema de Bézout

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a, b > 0$. O $\text{mdc}(a, b)$ pode ser escrito como uma combinação linear de a e b :

$$\text{mdc}(a, b) = sa + tb$$

Com $s, t \in \mathbb{Z}$.

O método para descobrir os valores de s e t é substituir consecutivamente os valores no algoritmo de Euclides.

Exemplos

1. Expressar o $\text{mdc}(270, 192)$ como uma combinação linear de 270 e 192.

$$270 = 192 \cdot 1 + 78$$

$$192 = 78 \cdot 2 + 36$$

$$78 = 36 \cdot 2 + 6$$

$$36 = 6 \cdot 6 + 0$$

$$6 = 78 - 2 \cdot 36$$

$$6 = 78 - 2 \cdot (192 - 2 \cdot 78)$$

$$6 = (270 - 1 \cdot 192) - 2 \cdot (192 - 2 \cdot (270 - 1 \cdot 192))$$

$$6 = 270 - 1 \cdot 192 - 2 \cdot 192 + 4 \cdot 270 - 4 \cdot 192$$

$$6 = 5 \cdot 270 - 7 \cdot 192$$

Portanto, $s = 5, t = -7$.

DEFINIÇÃO 5 - Inverso Multiplicativo Modular

Este é um conceito essencial que se relaciona com o conceito de congruência linear (**definição 6**).

Sejam $a, m \in \mathbb{Z}$. O inverso multiplicativo modular de $a \bmod m$ é o inteiro x tal que:

$$ax \equiv 1 \pmod{m}$$

Condição de existência

O inverso multiplicativo modular de $a \bmod m$ existe se, e somente se $\text{mdc}(a, m) = 1$, isto é, se a e m forem **coprimos** ou **primos entre si**.

Métodos para encontrar

É possível encontrar o inverso multiplicativo de $a \bmod m$ facilmente usando o **teorema 2 - teorema de Bézout**.

Ao escrever o $\text{mdc}(a, m)$ como uma combinação linear de a e m , o coeficiente de a é o seu inverso multiplicativo.

Exemplos

1. Encontrar o inverso multiplicativo de 3 mod 7.

$$3x \equiv 1 \pmod{7}$$

Primeiro, precisamos calcular $\text{mdc}(3, 7)$.

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

Como $\text{mdc}(3, 7) = 1$, o inverso multiplicativo existe.

Agora, escrevemos 1 como uma combinação linear de 3 e 7.

$$1 = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 3$$

O coeficiente de 3 é -2, então $x = -2$.

Como o inverso multiplicativo encontrado é um número negativo, podemos fazer a operação $x \bmod m$ para encontrar um inverso multiplicativo positivo (o que é uma boa prática).

$$-2 \bmod 7 = 5$$

Logo, o inverso multiplicativo que procuramos é **5**.

Obs: Para encontrar um inverso multiplicativo positivo também é possível somar m a x até que x seja maior ou igual a 1.

DEFINIÇÃO 6 - Congruência Linear

Uma congruência linear é uma equação na forma $ax \equiv b \pmod{m}$. Uma congruência linear tem solução se, e somente se $\text{mdc}(a, m) \mid b$.

Para resolver a congruência linear, é necessário seguir os seguintes passos:

1. Encontrar o inverso multiplicativo de a – denotado por \bar{a} ou a^{-1} – utilizando o método descrito na **definição 5**.

$$a\bar{a} \equiv 1 \pmod{m}$$

2. Multiplicar os dois lados da congruência por \bar{a} .

$$\bar{a}ax \equiv \bar{a}b \pmod{m}$$

3. Simplificando, o resultado fica:

$$x \equiv \bar{a}b \pmod{m}$$

4. Se $\bar{a}b < 1$ ou $\bar{a}b \geq m$, é necessário executar a operação $(\bar{a}b \bmod m)$ para encontrar a menor congruência natural.

Exemplos

1. Calcular $17x \equiv 82 \pmod{11}$

$$17\bar{a} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$17 = 11 \cdot 1 + 6$$

$$11 = 6 \cdot 1 + 5$$

$$6 = 5 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 6 - 1 \cdot 5$$

$$1 = 6 - 1 \cdot (11 - 1 \cdot 6)$$

$$1 = (17 - 1 \cdot 11) - 1 \cdot (11 - 1 \cdot (17 - 1 \cdot 11))$$

$$1 = 17 - 1 \cdot 11 - 1 \cdot 11 + 1 \cdot 17 - 1 \cdot 11$$

$$1 = 2 \cdot 17 - 3 \cdot 11$$

$$\bar{a} = 2$$

$$2 \cdot 17x \equiv 2 \cdot 82 \pmod{11}$$

$$34x \equiv 164 \pmod{11}$$

$x \equiv 10 \pmod{11}$

Também é possível escrever a solução na forma de um conjunto solução, usando as definições 2 e 1 (**módulo e divisibilidade**), respectivamente:

$$11 \mid x - 10$$

$$11k = x - 10$$

$$x = 11k + 10$$

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 10 + 11k, k \in \mathbb{Z}\}$$

TEOREMA 3 - Teorema Chinês do Resto

O teorema chinês do resto é um teorema que pode ser usado para resolver sistemas de congruências lineares do tipo:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_{n-1} \pmod{m_{n-1}} \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Obs: A solução só existe se $\text{mdc}(m_i, m_j) = 1$ para todo $i \neq j$.

Algoritmo de solução

1. Calcular o módulo total (M):

$$M = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$$

2. Calcular os M_i :

M_i é o produto de todos os módulos do sistema, excluindo o módulo m_i .

3. Encontrar o inverso y_i :

$$M_i \cdot y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$$

4. Calcular a solução (x):

$$x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \dots + a_n M_n y_n \pmod{M}$$

Obs: Na maioria das vezes, a solução final será o resto da divisão dessa soma por M .

Exemplos

1. Calcular a solução de:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

1. Módulo total (**M**):

$$M = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$M = 105$$

2. Cálculo dos **M_i**:

$$M_1 = 5 \cdot 7 = 35$$

$$M_2 = 3 \cdot 7 = 21$$

$$M_3 = 3 \cdot 5 = 15$$

3. Inverso y_i :

$$35 \cdot y_1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$21 \cdot y_2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$15 \cdot y_3 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$y_1 = 2$$

$$y_2 = 1$$

$$y_3 = 1$$

4. Solução x :

$$x \equiv (2 \cdot 35 \cdot 2) + (3 \cdot 21 \cdot 1) + (2 \cdot 15 \cdot 1) \pmod{105}$$

$$x \equiv 140 + 63 + 30 \pmod{105}$$

$$x \equiv 233 \pmod{105}$$

$x \equiv 23 \pmod{105}$

TEOREMA 4 - Pequeno Teorema de Fermat

Este é um teorema desenvolvido pelo matemático francês Pierre de Fermat, e possibilita a simplificação de cálculos com potências grandes na aritmética modular.

O teorema pode ser enunciado de duas formas:

Primeira forma

Seja p um número primo e $a \in \mathbb{Z}$. Então:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Ou seja, se elevarmos a à potência do primo p e depois dividirmos o resultado por p , o resto é igual ao resto da divisão de a por p .

Segunda forma

Esta é a forma mais usada.

Seja p um número primo e $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p \nmid a$ (ou seja, $\text{mdc}(a, p) = 1$). Então:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Ou seja, se elevarmos a à potência de $p - 1$ e depois dividirmos o resultado por p , o resultado vai sempre ser igual a 1.

Exemplos

1. Calcular $2^{23} \bmod 5$ (ou seja, o resto da divisão de 2^{23} por 5).

Como 5 é um número primo, é possível utilizar o pequeno teorema de Fermat.

$$2^{5-1} \equiv 1 \pmod{5} \tag{1}$$

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5} \tag{2}$$

$$(2^4)^5 \equiv 1^5 \pmod{5} \tag{3}$$

$$(2^4)^5 \cdot 2^3 \equiv 1^5 \cdot 2^3 \pmod{5} \tag{4}$$

$$2^{23} \equiv 8 \pmod{5} \tag{5}$$

$$2^{23} \equiv 3 \pmod{5} \tag{6}$$

Portanto, o resto da divisão de 2^{23} por 5 é igual a 3.

NOTA: Aqui acabam (supostamente) os conteúdos da primeira prova da unidade 2 (que foi dividida em duas partes, sendo a primeira no dia **15 de outubro**).