

Desenvolvimento de uma plataforma interativa de processamento de sinais

Mateus Fuga Osmarin

21 de abril de 2021

Sumário

1	Introdução	1
2	Referenciais teóricos	3
2.1	Sinais	3
2.2	Transformadas de Fourier, Laplace e Z	5
2.3	Convolução	11
2.4	Sistemas lineares e invariantes no tempo	12
2.5	Filtros digitais	14
3	Resultados	15
4	Considerações finais	16

Resumo

Este trabalho trata do desenvolvimento de uma plataforma interativa de processamento de sinais. A partir de uma interface gráfica, é possível realizar o projeto de filtros digitais tanto do tipo IIR quanto FIR, utilizando técnicas clássicas da literatura. O sistema busca endereçar a dificuldade de visualização no aprendizado do tópico de processamento de sinais, fazendo-se uma ferramenta didática alternativa.

Palavras-chave: Processamento de sinais. Projeto de filtros digitais. Visualização. Python.

Capítulo 1

Introdução

A disciplina de processamento de sinais é uma área ampla que permite entender e tratar matematicamente sinais, transformando-os segundo as necessidades envolvidas na sua aplicação. Majoritariamente, encontra-se no dia-a-dia sinais de natureza contínua no tempo, como a temperatura de um corpo, o som de um instrumento musical ou a velocidade de um automóvel. Ainda, existem sinais de natureza inerentemente discreta no tempo, como é o caso do preço de uma ação, as temperaturas máxima e mínima diárias de uma cidade ou o número diário de novos casos de COVID-19. Entretanto, é importante ressaltar que mesmo sinais de natureza contínua podem ser tratados de forma discreta por meio de procedimentos de amostragem adequados. Dessa forma, o processamento digital de sinais é uma técnica que pode ser aplicada a uma infinidade de casos.

Diante da generalidade envolvida, tem-se também um nível de abstração elevado no formalismo matemático que fundamenta a disciplina, o que resulta em dificuldades no aprendizado dessa importante área. Nesse sentido, a utilização de ferramentas como a FDATool do MATLAB traz benefícios tanto de produtividade para profissionais da área como facilitam o aprendizado para estudantes do tópico, por abordar de forma visual e intuitiva o projeto de filtros digitais. Utilizando esse tipo de ferramenta, pode-se variar parâmetros de projeto e visualizar o comportamento dos sistemas projetados de forma eficiente e facilitada, com gráficos que exibem as principais características do processo. Contudo, o MATLAB se trata de um software pago e, não obstante, tem-se observado um aumento crescente no interesse pela linguagem de programação Python por estudantes e profissionais da área, dada a grande quantidade de bibliotecas disponíveis para todo tipo de problemas.

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um software livre para projeto de filtros digitais utilizando a linguagem de programação Python, construindo uma interface gráfica amigável em GTK

para aumento de produtividade e facilitar o aprendizado na área de processamento de sinais, contando com uma revisão de conceitos importantes a servir como referência para utilização do sistema.

Capítulo 2

Referenciais teóricos

2.1 Sinais

Em essência, um sinal é algo que contém alguma informação, geralmente sobre o estado de um sistema físico [1]. Podemos definir matematicamente um sinal como sendo uma função, de uma ou mais variáveis independentes. A natureza dessas variáveis é diversa, sendo o tempo e o espaço as mais usuais. O som é um exemplo de sinal temporal, enquanto a temperatura em uma sala ao longo do dia se refere a um sinal espacial e temporal. No decorrer deste trabalho, serão considerados sinais de uma variável, sendo tomada como temporal por convenção, mas a teoria é igualmente válida para outros domínios.

Um sinal contínuo no tempo é definido como sendo uma função do tempo definida para todos os instantes:

$$x = x(t), t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

A figura 2.1 mostra um exemplo de sinal contínuo no tempo.

Um sinal discreto no tempo, por outro lado, é definido como uma sequência numérica:

$$x = x[n], n \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Para tratar discretamente sinais contínuos no tempo, pode-se amostrar o sinal contínuo em intervalos de tempo igualmente espaçados:

$$x_d[n] = x_a(nT_s) \quad (2.3)$$

onde x_d é a versão discretizada do sinal analógico x_a e T_s representa o período de amostragem. A figura 2.2 mostra o sinal da figura 2.1 discretizado.

Figura 2.1: Sinal contínuo no tempo

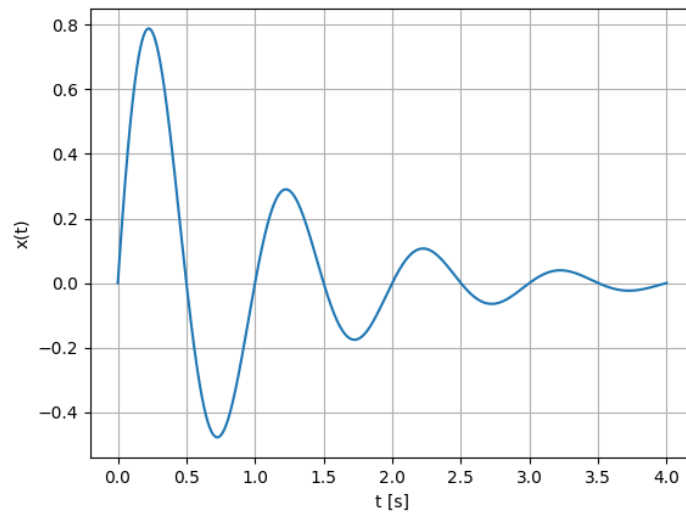
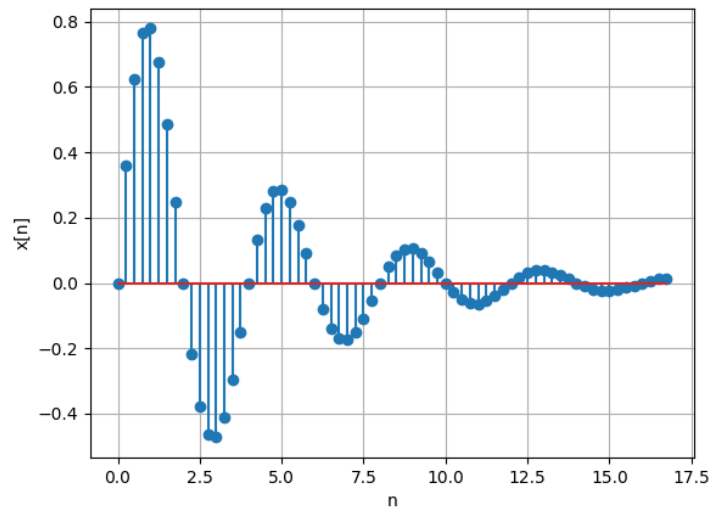


Figura 2.2: Sinal discreto no tempo



Dentre os sinais existentes, o impulso unitário ou delta de Dirac, é um dos mais importantes. Este sinal é definido, no caso contínuo, como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \infty & \text{para } t = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

satisfazendo a restrição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.5)$$

Uma propriedade notória do impulso unitário é que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (2.6)$$

sendo conhecida como propriedade da amostragem.

No caso discreto, o impulso unitário é definido como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq 0 \\ 1 & \text{para } n = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

A propriedade da amostragem para o caso discreto é expressa como:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta[n - n_0] = x[n_0] \quad (2.8)$$

2.2 Transformadas de Fourier, Laplace e Z

Até aqui, os sinais foram descritos no domínio do tempo. É possível, no entanto, representar sinais no domínio da frequência através das transformações conhecidas como transformada de Fourier, transformada de Laplace e transformada Z. O princípio de partida é a série de Fourier, que possibilita a representação de uma função T-periódica como uma série de senos e cossenos ou, equivalentemente, exponenciais complexas.

A série de Fourier é definida como:

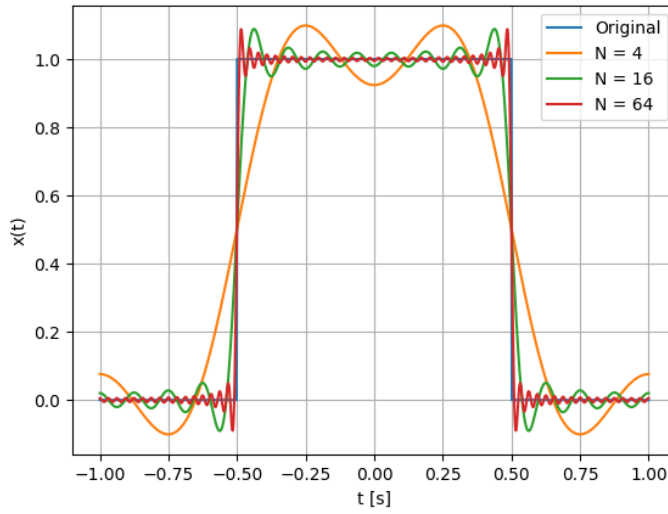
$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nt} \quad (2.9)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \quad (2.10)$$

são os coeficientes da série, e N é teoricamente infinito. A figura 2.3 mostra a expansão em série de Fourier do retângulo unitário para diferentes valores de N .

Figura 2.3: Expansão em série de Fourier do retângulo unitário



Para funções não-periódicas, generaliza-se a série de Fourier considerando o período como sendo infinito. No caso limite, tem-se:

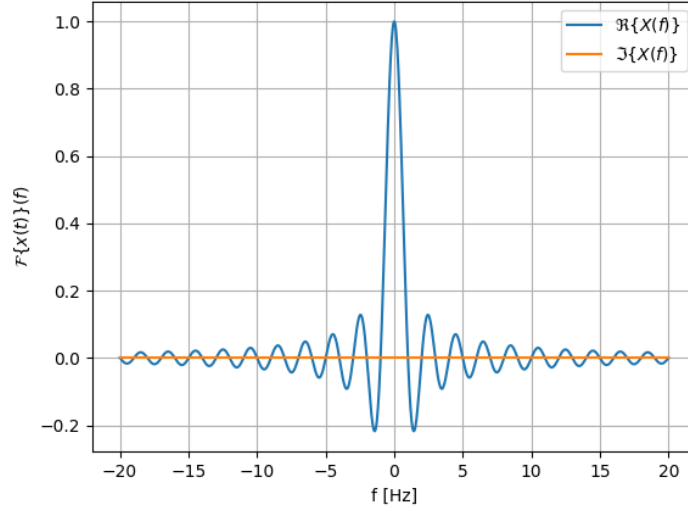
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{i2\pi ft} df \quad (2.11)$$

onde

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.12)$$

e $\hat{x}(f)$ é conhecida como a transformada de Fourier de $x(t)$. Segundo esta definição, f tem unidades de *hertz*. A figura 2.4 mostra a transformada de Fourier do retângulo unitário.

Figura 2.4: Transformada de Fourier do retângulo unitário



Ao amostrar um sinal com um período de amostragem T por meio de um pente de Dirac

$$\begin{aligned}
 x_T(t) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t - nT)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

e aplicar a transformada de Fourier, tem-se

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_T(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t - nT) e^{-i2\pi ft} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) e^{-i2\pi ft} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi fnT}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

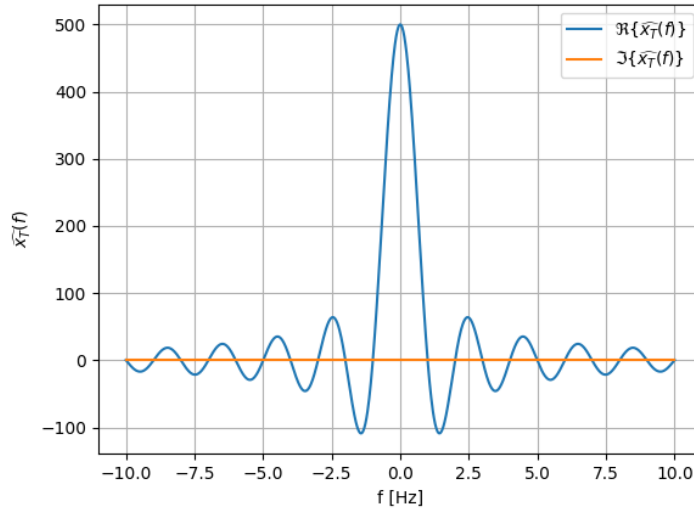
ao que se obtém a chamada transformada de tempo discreto de Fourier. Para

obter o sinal original, a transformada de tempo discreto de Fourier inversa é:

$$x[n] = T \int_{1/T} \hat{x}_T(f) e^{i2\pi f n T} df \quad (2.15)$$

A figura 2.5 mostra a transformada de tempo discreto de Fourier do retângulo unitário.

Figura 2.5: Transformada de tempo discreto de Fourier do retângulo unitário



Nesse caso, a discretização acontece no domínio do tempo, mas a frequência ainda é contínua. Discretizando a transformada de tempo discreto de Fourier para N amostras de um ciclo, obtém-se:

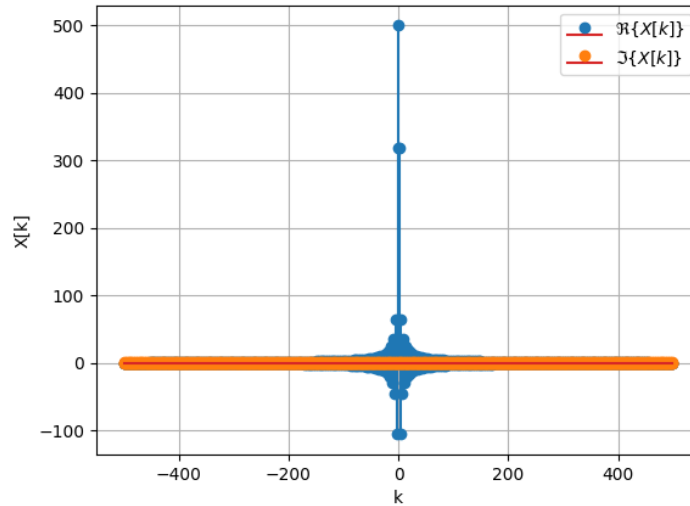
$$\begin{aligned} X[k] &= \hat{x}_T\left(\frac{k}{NT}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi \frac{k}{NT} n T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi \frac{k}{N} n} \end{aligned} \quad (2.16)$$

o que define a transformada discreta de Fourier. Para obter o sinal original, a transformada discreta de Fourier inversa é:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{i2\pi \frac{k}{N} n} \quad (2.17)$$

A figura 2.6 mostra a transformada discreta de Fourier do retângulo unitário.

Figura 2.6: Transformada discreta de Fourier do retângulo unitário



A transformada de Fourier pode ainda ser generalizada ao se considerar uma frequência complexa. O resultado é a transformada de Laplace:

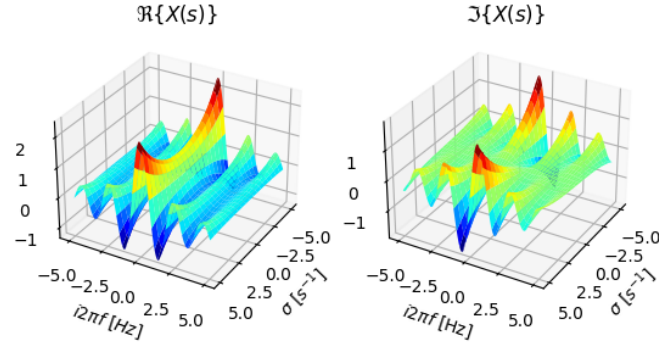
$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (2.18)$$

onde

$$s = \sigma + i\omega = \sigma + i2\pi f \quad (2.19)$$

A figura 2.7 mostra a transformada de Laplace do retângulo unitário.

Figura 2.7: Transformada de Laplace do retângulo unitário



Nota-se também que a transformada de Laplace pode ser vista como sendo a transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$. Para recuperar o sinal original, a transformada de Laplace inversa é:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = \frac{1}{i2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} X(s)e^{st} ds \quad (2.20)$$

onde γ é um número real tal que o caminho de integração esteja na região de convergência de $F(s)$.

Novamente, amostrando um sinal por meio de um pente de Dirac (2.13) e aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$\begin{aligned} X_T(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta(t - nT)e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-snT} \end{aligned} \quad (2.21)$$

da qual, ao tomar $z = e^{sT}$, obtém-se a transformada Z de um sinal discreto:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}, z \in \mathbb{C} \quad (2.22)$$

Para recuperar o sinal original, a transformada Z inversa é:

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}[n] = \frac{1}{i2\pi} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{n-1} dz \quad (2.23)$$

onde \mathcal{C} é um caminho fechado percorrido no sentido anti-horário, contendo a origem e inteiramente na região de convergência de $X(z)$.

2.3 Convolução

Dados dois sinais, é possível realizar um conjunto de operações sobre os mesmos. Dentre estas, tem-se as bem conhecidas operações de soma, subtração, multiplicação, divisão, derivação e integração. Em processamento de sinais, uma operação conhecida como convolução é muito utilizada, sendo definida por:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (2.24)$$

para o caso contínuo e

$$(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] g[n - k] \quad (2.25)$$

para o caso discreto.

Uma propriedade importante da convolução é

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \quad (2.26)$$

para o caso contínuo e

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] = x[n] \quad (2.27)$$

para o caso discreto. Esta propriedade exprime o fato de que o impulso unitário corresponde a uma identidade para a convolução.

Ainda, outra propriedade importante da convolução está em sua relação com as transformadas de Fourier, Laplace e Z. Tomando a transformada de

Laplace como exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] e^{-st} dt \\
&= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-st} dt d\tau \\
&= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(\tau) \int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)e^{-st} dt d\tau \\
&= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(\tau) \int_{u=-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-s(u+\tau)} du d\tau \\
&= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \int_{u=-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-su} du \\
&= \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \mathcal{L}\{g(t)\}(s)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

ou seja, no domínio da frequência a operação de convolução corresponde à multiplicação. A equação 2.28 é conhecida como teorema do convolução.

2.4 Sistemas lineares e invariantes no tempo

Um sistema é essencialmente algo que mapeia um sinal de entrada em um sinal de saída, ou seja:

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} \tag{2.29}$$

para um sistema analógico e

$$y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\} \tag{2.30}$$

para um sistema discreto, onde $\mathcal{H}\{\cdot\}$ denota o sistema.

Dentre todos os sistemas possíveis, tem-se classes de sistemas que são interessantes pelas propriedades que apresentam. Um sistema linear é um sistema que tem a propriedade:

$$\mathcal{H}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = a\mathcal{H}\{x_1(t)\} + b\mathcal{H}\{x_2(t)\} \tag{2.31}$$

para o caso contínuo e

$$\mathcal{H}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathcal{H}\{x_1[n]\} + b\mathcal{H}\{x_2[n]\} \tag{2.32}$$

para o caso discreto. Sistemas com essa propriedade tem a característica de, por exemplo, ao se dobrar a amplitude da entrada, dobrar-se também a amplitude da saída.

Um sistema invariante no tempo é um sistema que tem a propriedade:

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = y(t) \Leftrightarrow \mathcal{H}\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0) \quad (2.33)$$

para o caso contínuo e

$$\mathcal{H}\{x[n]\} = y[n] \Leftrightarrow \mathcal{H}\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0] \quad (2.34)$$

para o caso discreto. Sistemas com essa propriedade tem a característica de ao se atrasar a entrada, atrasar-se também a saída pela mesma quantidade.

Sistemas que são lineares e invariantes no tempo podem ser tratados matematicamente de forma generalizada como se segue. Sendo $\mathcal{H}\{\cdot\}$ um sistema linear e invariante no tempo, e como, de acordo com as equações 2.26 e 2.27, sinais podem ser representados por uma convolução com o impulso unitário, tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{H}\{x(t) * \delta(t)\} = \mathcal{H}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\mathcal{H}\{\delta(t - \tau)\}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

para o caso contínuo e

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathcal{H}\{x[n] * \delta[n]\} = \mathcal{H}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\mathcal{H}\{\delta[n - k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k] \\ &= x[n] * h[n] \end{aligned} \quad (2.36)$$

para o caso discreto. Nas equações 2.35 e 2.36, $h(t)$ e $h[n]$ representam a resposta do sistema a um impulso unitário. Assim, um sistema linear e invariante no tempo pode ser descrito totalmente por sua resposta ao impulso.

No domínio da frequência, o teorema da convolução 2.28 fornece:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = X(s)H(s) \quad (2.37)$$

para um sistema analógico e

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{x[n] * h[n]\} = X(z)H(z) \quad (2.38)$$

para um sistema discreto. Chama-se $H(s)$ e $H(z)$ a função de transferência do sistema $\mathcal{H}\{\cdot\}$.

2.5 Filtros digitais

Capítulo 3

Resultados

Capítulo 4

Considerações finais

Bibliografia

- [1] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer e John R. Buck. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall.