

# Desenvolvimento de uma plataforma interativa de processamento de sinais

Mateus Fuga Osmarin

19 de abril de 2021

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Referenciais teóricos</b>	<b>3</b>
2.1	Sinais . . . . .	3
2.2	Convolução . . . . .	5
2.3	Transformadas de Fourier, Laplace e Z . . . . .	6
2.4	Sistemas lineares e invariantes no tempo . . . . .	12
2.5	Filtros digitais . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>14</b>

## Resumo

Este trabalho trata do desenvolvimento de uma plataforma interativa de processamento de sinais. A partir de uma interface gráfica, é possível realizar o projeto de filtros digitais tanto do tipo IIR quanto FIR, utilizando técnicas clássicas da literatura. O sistema busca endereçar a dificuldade de visualização no aprendizado do tópico de processamento de sinais, fazendo-se uma ferramenta didática alternativa.

**Palavras-chave:** Processamento de sinais. Projeto de filtros digitais. Visualização. Python.

# Capítulo 1

## Introdução

A disciplina de processamento de sinais é uma área ampla que permite entender e tratar matematicamente sinais, transformando-os segundo as necessidades envolvidas na sua aplicação. Majoritariamente, encontra-se no dia-a-dia sinais de natureza contínua no tempo, como a temperatura de um corpo, o som de um instrumento musical ou a velocidade de um automóvel. Ainda, existem sinais de natureza inerentemente discreta no tempo, como é o caso do preço de uma ação, as temperaturas máxima e mínima diárias de uma cidade ou o número diário de novos casos de COVID-19. Entretanto, é importante ressaltar que mesmo sinais de natureza contínua podem ser tratados de forma discreta por meio de procedimentos de amostragem adequados. Dessa forma, o processamento digital de sinais é uma técnica que pode ser aplicada a uma infinidade de casos.

Diante da generalidade envolvida, tem-se também um nível de abstração elevado no formalismo matemático que fundamenta a disciplina, o que resulta em dificuldades no aprendizado dessa importante área. Nesse sentido, a utilização de ferramentas como a FDATool do MATLAB traz benefícios tanto de produtividade para profissionais da área como facilitam o aprendizado para estudantes do tópico, por abordar de forma visual e intuitiva o projeto de filtros digitais. Utilizando esse tipo de ferramenta, pode-se variar parâmetros de projeto e visualizar o comportamento dos sistemas projetados de forma eficiente e facilitada, com gráficos que exibem as principais características do processo. Contudo, o MATLAB se trata de um software pago e, não obstante, tem-se observado um aumento crescente no interesse pela linguagem de programação Python por estudantes e profissionais da área, dada a grande quantidade de bibliotecas disponíveis para todo tipo de problemas.

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um software livre para projeto de filtros digitais utilizando a linguagem de programação Python, construindo uma interface gráfica amigável em GTK

para aumento de produtividade e facilitar o aprendizado na área de processamento de sinais, contando com uma revisão de conceitos importantes a servir como referência para utilização do sistema.

# Capítulo 2

## Referenciais teóricos

### 2.1 Sinais

Em essência, um sinal é algo que contém alguma informação, geralmente sobre o estado de um sistema físico [1]. Podemos definir matematicamente um sinal como sendo uma função, de uma ou mais variáveis independentes. A natureza dessas variáveis é diversa, sendo o tempo e o espaço as mais usuais. O som é um exemplo de sinal temporal, enquanto a temperatura em uma sala ao longo do dia se refere a um sinal espacial e temporal. No decorrer deste trabalho, serão considerados sinais de uma variável, sendo tomada como temporal por convenção, mas a teoria é igualmente válida para outros domínios.

Um sinal contínuo no tempo é definido como sendo uma função do tempo definida para todos os instantes:

$$x = x(t), t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

A figura 2.1 mostra um exemplo de sinal contínuo no tempo.

Um sinal discreto no tempo, por outro lado, é definido como uma sequência numérica:

$$x = x[n], n \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Para tratar discretamente sinais contínuos no tempo, pode-se amostrar o sinal contínuo em intervalos de tempo igualmente espaçados:

$$x_d[n] = x_a(nT_s) \quad (2.3)$$

onde  $x_d$  é a versão discretizada do sinal analógico  $x_a$  e  $T_s$  representa o período de amostragem. A figura 2.2 mostra o sinal da figura 2.1 discretizado.

Figura 2.1: Sinal contínuo no tempo

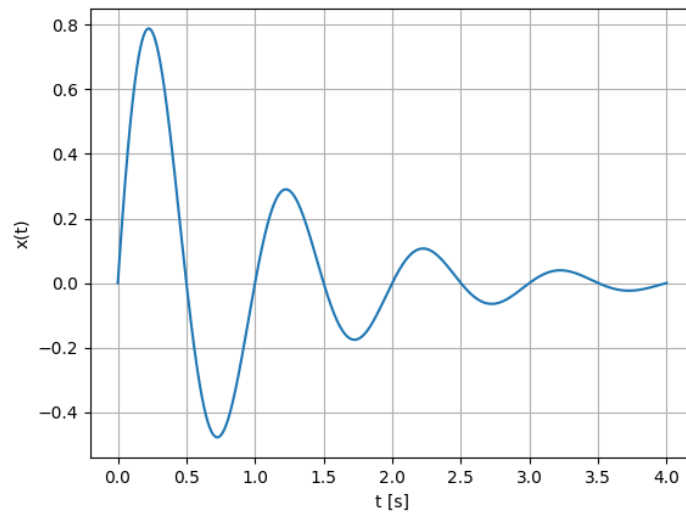
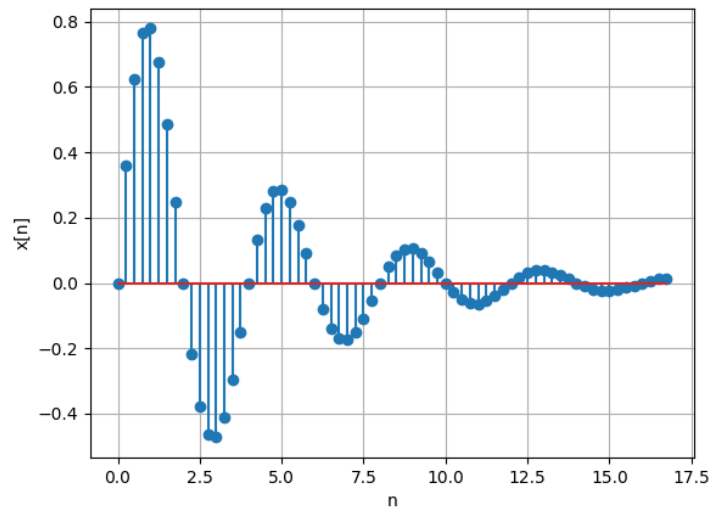


Figura 2.2: Sinal discreto no tempo



Dentre os sinais existentes, o impulso unitário ou delta de Dirac, é um dos mais importantes. Este sinal é definido, no caso contínuo, como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \infty & \text{para } t = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

satisfazendo a restrição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.5)$$

Uma propriedade notória do impulso unitário é que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (2.6)$$

sendo conhecida como propriedade da amostragem.

No caso discreto, o impulso unitário é definido como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq 0 \\ 1 & \text{para } n = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

A propriedade da amostragem para o caso discreto é expressa como:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta[n - n_0] = x[n_0] \quad (2.8)$$

## 2.2 Convolução

Dados dois sinais, é possível realizar um conjunto de operações sobre os mesmos. Dentre estas, tem-se as bem conhecidas operações de soma, subtração, multiplicação, divisão, derivação e integração. Em processamento de sinais, uma operação conhecida como convolução é muito utilizada, sendo definida por:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (2.9)$$

para o caso contínuo e

$$(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] g[n - k] \quad (2.10)$$

para o caso discreto.



Uma propriedade importante da convolução é

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \quad (2.11)$$

para o caso contínuo e

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] = x[n] \quad (2.12)$$

para o caso discreto. Esta propriedade exprime o fato de que o impulso unitário corresponde a uma função identidade para a convolução.

## 2.3 Transformadas de Fourier, Laplace e Z

Até aqui, os sinais foram descritos no domínio do tempo. É possível, no entanto, representar sinais no domínio da frequência através das transformações integrais conhecidas como transformada de Fourier, transformada de Laplace e transformada Z. O princípio de partida é a série de Fourier, que possibilita a representação de uma função T-periódica como uma série de senos e cossenos ou, equivalentemente, exponenciais complexas.

A série de Fourier é definida como:

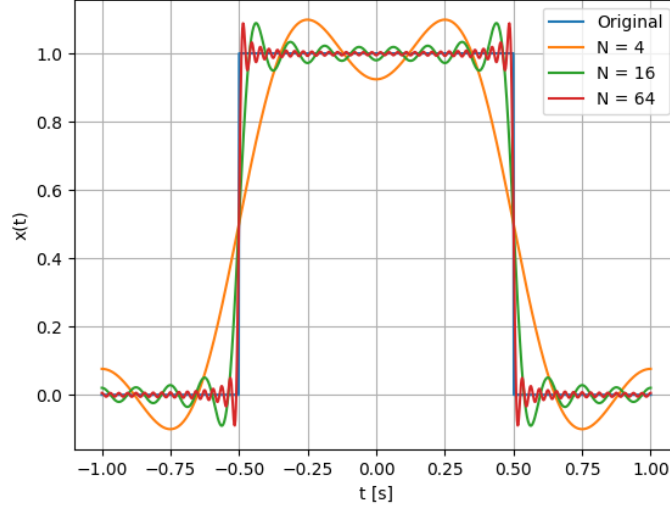
$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{i \frac{2\pi}{T} n t} \quad (2.13)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} n t} dt \quad (2.14)$$

são os coeficientes da série, e N é teoricamente infinito. A figura 2.3 mostra a expansão em série de Fourier do retângulo unitário para diferentes valores de N.

Figura 2.3: Expansão em série de Fourier do retângulo unitário



Para funções não-periódicas, generaliza-se a série de Fourier considerando o período como sendo infinito. No caso limite, tem-se:

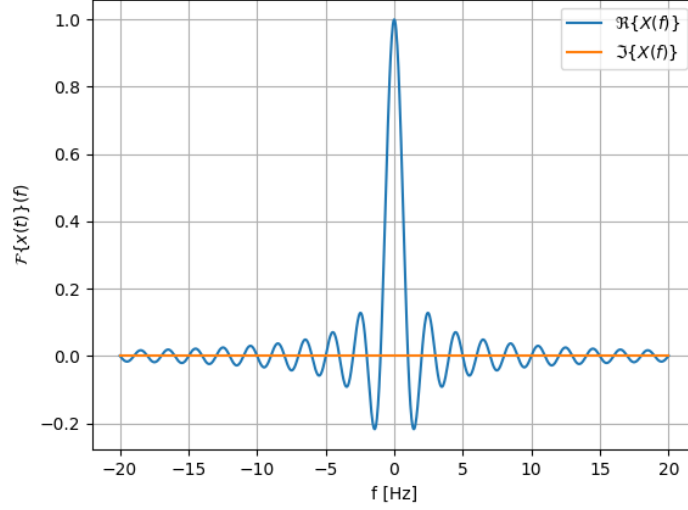
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{i2\pi ft} dt \quad (2.15)$$

onde

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.16)$$

e  $\hat{x}(f)$  é conhecida como a transformada de Fourier de  $x(t)$ . Segundo esta definição,  $f$  tem unidades de *hertz*. A figura 2.4 mostra a transformada de Fourier do retângulo unitário.

Figura 2.4: Transformada de Fourier do retângulo unitário



Ao amostrar um sinal com um período de amostragem  $T$  por meio de um pente de Dirac

$$\begin{aligned}
 x_T(t) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t - nT)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

e aplicar a transformada de Fourier, tem-se

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_T(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t - nT) e^{-i2\pi ft} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) e^{-i2\pi ft} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi fnT}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

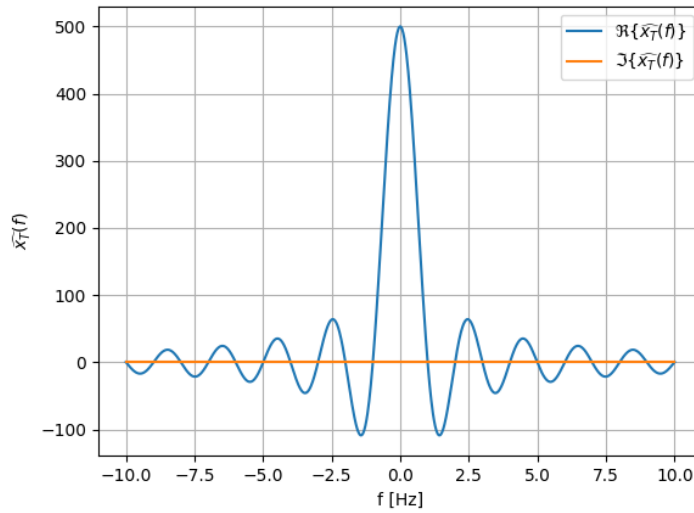
ao que se obtém a chamada transformada de tempo discreto de Fourier. Para

obter o sinal original, a transformada de tempo discreto de Fourier inversa é:

$$x[n] = T \int_{1/T} \hat{x}_T(f) e^{i2\pi f n T} df \quad (2.19)$$

A figura 2.5 mostra a transformada de tempo discreto de Fourier do retângulo unitário.

Figura 2.5: Transformada de tempo discreto de Fourier do retângulo unitário



Nesse caso, a discretização acontece no domínio do tempo, mas a frequência ainda é contínua. Discretizando a transformada de tempo discreto de Fourier para  $N$  amostras de um ciclo, obtém-se:

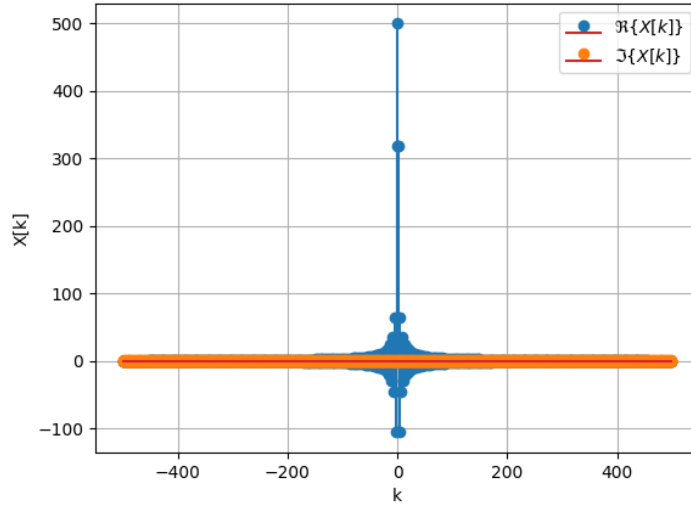
$$\begin{aligned} X[k] &= \hat{x}_T\left(\frac{k}{NT}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi \frac{k}{NT} n T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi \frac{k}{N} n} \end{aligned} \quad (2.20)$$

o que define a transformada discreta de Fourier. Para obter o sinal original, a transformada discreta de Fourier inversa é:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{i2\pi \frac{k}{N} n} \quad (2.21)$$

A figura 2.6 mostra a transformada discreta de Fourier do retângulo unitário.

Figura 2.6: Transformada discreta de Fourier do retângulo unitário



A transformada de Fourier pode ainda ser generalizada ao se considerar uma frequência complexa. O resultado é a transformada de Laplace:

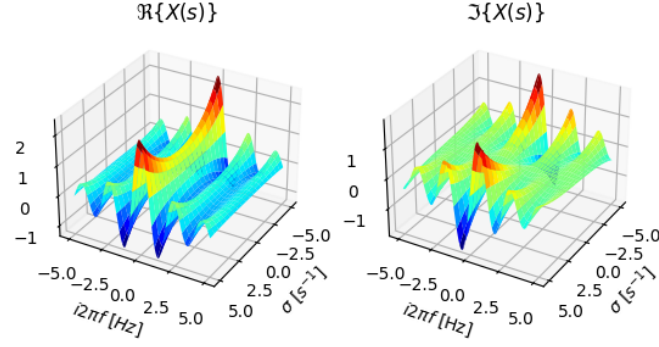
$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (2.22)$$

onde

$$s = \sigma + i\omega = \sigma + i2\pi f \quad (2.23)$$

A figura 2.7 mostra a transformada de Laplace do retângulo unitário.

Figura 2.7: Transformada de Laplace do retângulo unitário



Nota-se também que a transformada de Laplace pode ser vista como sendo a transformada de Fourier de  $x(t)e^{-\sigma t}$ . Para recuperar o sinal original, a transformada Inversa de Laplace é:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = \frac{1}{i2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} X(s)e^{st} ds \quad (2.24)$$

onde  $\gamma$  é um número real tal que o caminho de integração esteja na região de convergência de  $F(s)$ .

Novamente, amostrando um sinal por meio de um pente de Dirac (2.17) e aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$\begin{aligned} X_T(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta(t - nT)e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-snT} \end{aligned} \quad (2.25)$$

da qual, ao tomar  $z = e^{sT}$ , obtém-se a transformada Z de um sinal discreto:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}, z \in \mathbb{C} \quad (2.26)$$

Para recuperar o sinal original, a transformada Inversa Z é:

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\mathcal{C}} X(z)z^{n-1}dz \quad (2.27)$$

onde  $\mathcal{C}$  é um caminho fechado percorrido no sentido anti-horário, contendo a origem e inteiramente na região de convergência de  $X(z)$ .

## 2.4 Sistemas lineares e invariantes no tempo

## 2.5 Filtros digitais

## Capítulo 3

## Resultados



## Capítulo 4

### Considerações finais

# Bibliografia

- [1] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer e John R. Buck. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall.