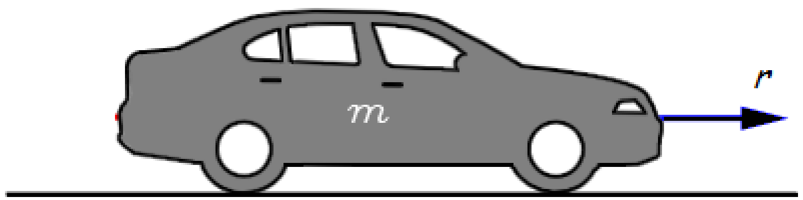
Exemplo – Modelagem e Simulação de um Sistema Dinâmico

Lucas Vago Santana

Campus Linhares

Exemplo – Modelagem e Simulação

- ***Cruise Control*:**
  - **Objetivo:** Fazer um carro seguir uma velocidade de referência (r);

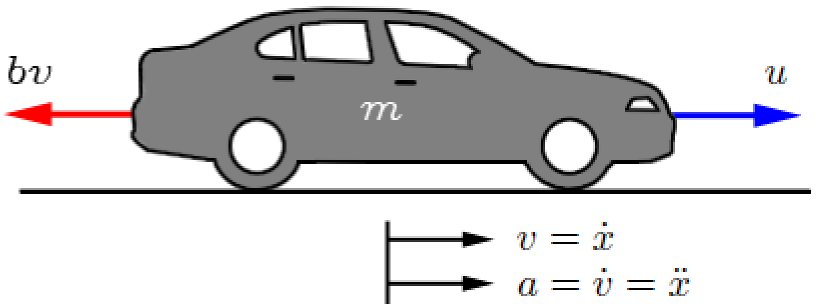


Adaptado de: http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=CruiseControl&section=SystemModeling

Mas antes de controlar, vamos entender o problema

Exemplo – Modelagem e Simulação

- Definido o diagrama abaixo, determine a equação diferencial que governa o movimento do veículo.



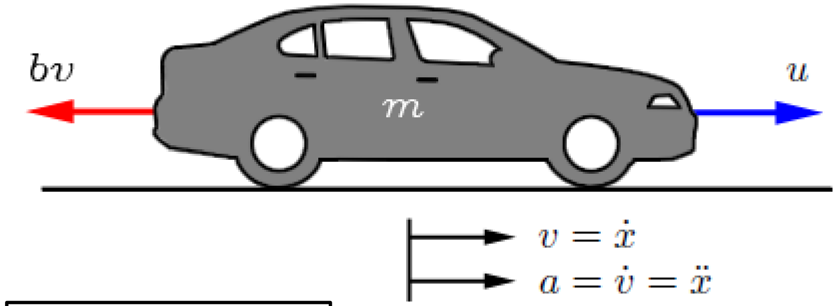
u – Força de controle ou sinal de controle (acelerador/freio)
x – posição do veículo na dimensão avaliada
$v = \dot{x}$ – velocidade do veículo
$a = \ddot{x}$ – aceleração do veículo
m – massa do veículo
b – coeficiente de arrasto linear (atrito, vento)

2ª Lei de Newton:

$$\sum F = ma \quad \rightarrow \quad F_{controle} + F_{arrasto} = ma \quad \rightarrow \quad u - bv = ma \quad \rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} = u}$$

Exemplo – Modelagem e Simulação

- Supondo as condições:
  - $t_0 = 0\ seg$
  - $x_0 = 0\ m$
  - $m = 1000\ kg$
  - $b = 50\,\frac{\mathrm{N.s}}{\mathrm{m}}$
  - $u = 100\ N$



$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} = u}$$

- Imagine como responder às perguntas:
  - Qual será a posição deste veículo em $t = 30\ seg$?
  - Qual será a velocidade deste veículo em $t = 30\ seg$?
  - Qual a intensidade da força de arrasto em $t = 30\ seg$?

Exemplo – Modelagem e Simulação

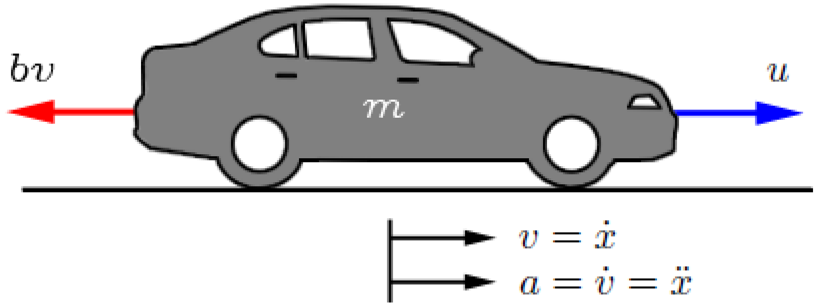
- Para problemas mais simples, tais respostas poderiam ser obtidas de forma analítica:
  - Resolvendo a EDO através, por exemplo, da Transformada de Laplace:
    - Considerando as condições iniciais nulas:
    - Separar por fração parcial;
    - Resolver a Transformada Inversa de Laplace;
    - Encontrar a solução analítica;

Exemplo – Modelagem e Simulação

- Porém, na prática, a solução analítica fará pouco sentido pois:
  - A entrada pode variar no tempo, mudando sua característica degrau para rampa ou outra função;
  - A inserção de um controlador mudará totalmente a dinâmica da resposta em malha-fechada;
  - Etc ...
- Além disso, atualmente:
  - Todas as soluções de engenharia são implementadas com computador digitais;
  - Onde há mais sentido no uso de métodos numéricos;

Reflexão – Modelagem e Simulação

- O que nos leva a refletir sobre a seguinte questão:
  - Se a equação $m\ddot{x} + b\dot{x} = u$ é contínua (analógica),
  - Como transformá-la em código de computador (digitalizar/discretizar)?



Método de Euler

- A resposta vem de algum dos métodos do **Cálculo Numérico**;
- O mais simples se chama **Método de Euler**;
- Que em resumo é um algoritmo de **Integração ou Derivação Numérica** de sinais quaisquer;

Método de Euler – Resumo

- Se a **derivada de um sinal $\dot{x}$ é conhecida**, pode-se integrá-la entre dois intervalos sucessivos de amostragem:

$$\boxed{x_{k+1} \approx x_k + \dot{x}_k \Delta t}$$

- Analogamente, se **o sinal x é conhecido**, pode-se derivá-lo entre dois intervalos sucessivos de amostragem:

$$\boxed{\dot{x}_k \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}}$$

x – representa uma informação (sinal)
$\dot{x}$ – representa a derivada desse sinal
k – notação de tempo discreto
$\Delta t = (t_{k+1} - t_k)$ – representa um intervalo de amostragem discreto

Método de Euler – Interpretação

- A origem deste Método de Euler é a própria definição da derivada do sinal, considerado no exemplo como a função $x(t)$, no ponto t:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t}$$

Método de Euler – Interpretação

- Considerando:
  - Δt representa um intervalo de amostragem entre dois instantes discretos $(t = k)$ e $(t + \delta t) = (k + 1)$;
  - Δt é pequeno o suficiente, para se interpretar que $\Delta t \to 0$:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} \longrightarrow \boxed{\dot{x}(k) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t}}$$

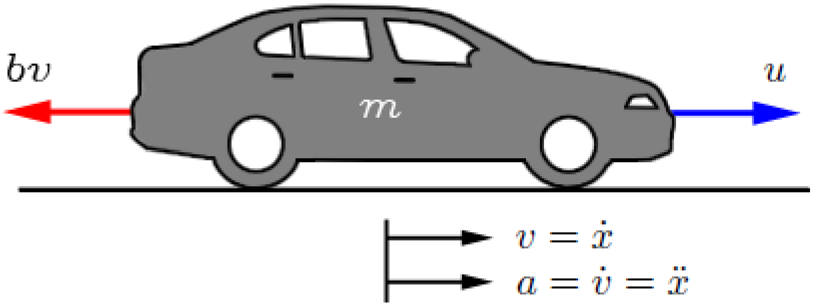
Exercício de Programação 03

- Acesse o código deste exemplo no *Jupyter Notebook* disponível em:
  - https://colab.research.google.com/drive/1Xrs30YAKfnOjOMiK-tr7B9uWWcxkKn0m
  - Siga as instruções;
- Se preferir o ambiente *offline*:
  - Copie os códigos para o IDE *Spyder*;
  - Faça a simulação.

Exercício de Programação 04

- Acesse o código deste exemplo no *Jupyter Notebook* disponível em:
  - https://colab.research.google.com/drive/1Xrs30YAKfnOjOMiK-tr7B9uWWcxkKn0m
  - Siga as instruções;
- Se preferir o ambiente *offline*:
  - Copie os códigos para o IDE *Spyder*;
  - Faça a simulação.

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} = u}$$



Parte 04

INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

Implementação e Sintonia de Controladores PID para Sistemas Dinâmicos

Projetar um Controlador

- Consiste em selecionar u de forma a conduzir os estados x até r;
- Em outras palavras, significa inserir propriedades assintóticas ao sinal de ***erro*** do sistema:
  - $e(t) = r(t) - x(t);$
  - $\lim_{t \to \infty} e(t) = 0;$
- Garantindo:
  - Estabilidade BIBO (*Bounded-Input Bounded-Output*);
  - Rastreamento;
  - Robustez e rejeição a distúrbios.

Projeto de Controladores

- A Teoria de Controle estuda técnicas de projeto por área:
  - Linear (P, PI, PID, Realimentação de Estados...)
  - Não-linear (Candidata de *Lyapunov* , Linearização por realimentação ...)
  - Robusto (Modo Deslizante, H_∞ ...)
  - Adaptativo (Adaptação de parâmetros, de ganhos, ...)
  - Inteligente (*Fuzzy*, Redes Neurais, ...)
  - Ótimo (LQR, LQG, ...)
  - Preditivo (MPC, NMPC)
  - Etc .
  - Porém ...

PID – O Controlador "sem Projeto"

- Uma das arquitetura de maior sucesso é a Proporcional – Integral – Derivativo (PID)

$$u(t) = k_p \ * \ e(t) + k_i \ * \int_0^t e(\tau)\, d\tau + k_d * \frac{de(t)}{dt}$$

  - Em muitos casos é uma arquitetura estável;
  - Fácil de compreender e de ajustar (sintonizar) ganhos;
  - Realiza rastreamento de **referências constantes** ou de variação lenta;
  - Possui robustez contra variações paramétricas via parcela integral;
  - É ***"independente"*** do modelo matemático, assumindo que a planta **seja linear** ou linearizada sobre um ponto de operação;
  - Em resumo, é uma boa arquitetura de controle que não resolve tudo, mas resolve muita coisa.

PID – Como Funciona

$$u(t) = \underbrace{k_p \ * \ e(t)}_{P} + \underbrace{k_i \ * \int_0^t e(\tau)d\tau}_{I} + \underbrace{k_d * \frac{de(t)}{dt}}_{D}$$

- **P:** Contribui para reação instantânea do controlador ao erro. Porém, quando isolado não permite rastreamento.
  - Associado ao valor corrente do sinal de erro (noção de presente)
- **I:** Contribui para o rastreamento e robustez. Tem resposta lenta, pode causar oscilações e saturação de atuadores.
  - Associado à memória do sinal de erro (noção de passado)
- **D:** Contribui na antecipação de reação do controlador ao erro. Porém, é sensível a ruído.
  - Associado à antecipação do sinal de erro (noção de futuro)

INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

PID – Implementação

- Proporcional – Integral – Derivativo (PID).

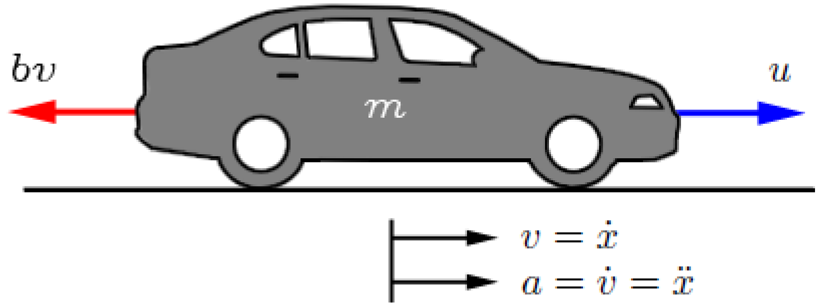
$$u(t) = k_p \ * \ e(t) + k_i \ * \int_0^t e(\tau)d\tau + k_d * \frac{de(t)}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
&e = r - x \\
&dE = (e - e_{old})/\Delta t \\
&iE = iE + e * \Delta t \\
&u = kp * e + ki * iE + kd * dE \\
&e_{old} = e
\end{aligned}
$$

Exercício de Programação 05

- Acesse o código deste exemplo no *Jupyter Notebook* disponível em:
  - https://colab.research.google.com/drive/1oYqaudy2o-9D5-Eq_zlGC_QfIZDMb6NZ
  - Siga as instruções;
- Se preferir o ambiente *offline*:
  - Copie os códigos para o IDE *Spyder*;
  - Faça a simulação.

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} = u}$$



PID – Observações Finais

- Na prática, há necessidade de contornar:
  - A saturação dos atuadores via funções de truncamento ou analíticas;
  - Ruídos através de filtros;
- A ação integral tende a saturar os atuadores (Efeito *wind-up* do Integrador);
- A ação derivativa amplifica ruídos sensoriais;
- Artigo do Portal Embarcados sobre este tipo de implementação:
  - https://www.embarcados.com.br/controle-pid-em-sistemas-embarcados/

Exercício de Programação 06

- Considere o esquema como representação 1D do voo de um quadrirotor comercial com piloto automático;
- Saiba que este dispositivo realiza a manobra *hover*, isto é, a sustentação da massa no ar é realizada automaticamente.
- Considerando u o sinal de propulsão do veículo e $m = 0.5\ Kg$ sua massa, modele o problema aplicando a 2ª Lei de Newton:

$$\sum F = ma$$

- Sintetize um controlador PID para regular a altitude do veículo para $r = 2\ m$.