Robótica Móvel

Engenharia de Controle e Automação – 7º Período

PROF. LUCAS VAGO SANTANA

lucas@ifes.edu.br

Aula 02 - Fundamentos da Teoria de Controle

- Fundamentos de Teoria de Controle;
- Fundamentos de Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos;
- Exemplos de Simulação e Controle de Sistemas Dinâmicos;

INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

Referências Bibliográficas

- EGERSTEDT, Magnus. **Control of Mobile Robots**. Georgia Institute of Technology – Coursera. 2013. Acesso em 28/02/2019.
- MESSNER, Bill; TILBURY, Dawn; HILL, Rick; TAYLOR, J. D. **Control Tutorials for Matlab and Simulink**. Carnegie Mellon – 2017. Acesso em 28/02/2019.

Pergunta

- Como **garantir** que os robôs vão se mover de maneira segura e previsível dentro de seu espaço de trabalho?
- Em outras palavras:
  - Como **garantir** que os sensores e atuadores do robô os conduzirão sobre trajetórias elegantes sem colisões, quedas ou qualquer erro grosseiro?

Resposta

- Na prática, uma das formas de se garantir segurança e controle de eventos físicos é, ironicamente, chamada de Teoria de Controle;

Pergunta

- Mas afinal, o que é Teoria de Controle?

INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

Resposta

- *"Teoria de Controle é um conjunto de ferramentas matemáticas utilizadas para projetar controladores que influenciem sistemas dinâmicos a realizarem tarefas úteis"*.

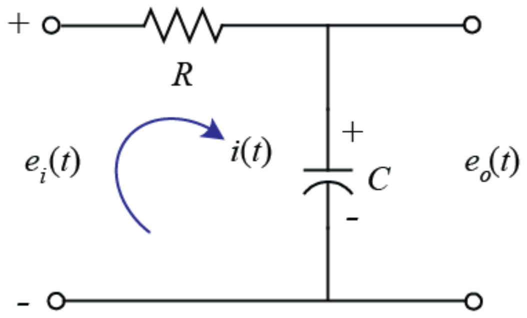
- Adaptado de (EGERSTEDT, 2013)

Noções sobre Teoria de Controle

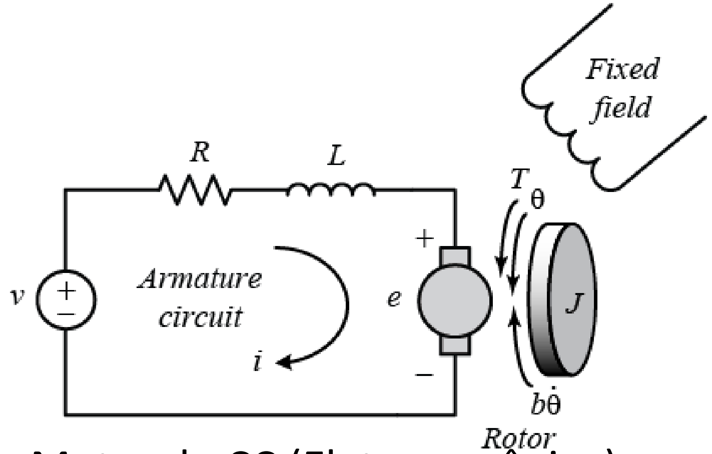
- **Teoria de controle** lida com **sistemas dinâmicos;**
- **Sistema dinâmico** é todo aquele que muda de condição com o passar do tempo;
- Neste contexto, os **modelos matemáticos** são **representações abstratas** utilizadas para descrever através de **equações diferenciais** a evolução de um **sistema dinâmico**;

Exemplos de Sistemas Clássicos

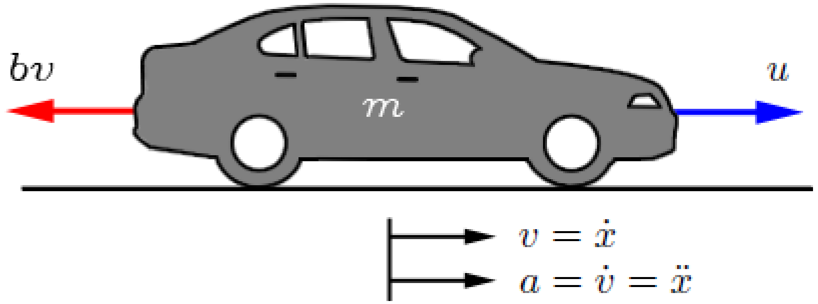
- Equações diferenciais de sistemas dinâmicos:



Circuito RC (Elétrico)
Fonte



Motor de CC (Eletromecânico)
Fonte



Controle de Cruzeiro (Mecânico)
Fonte

$$e_i - iR - \frac{1}{C}\int idt = 0$$

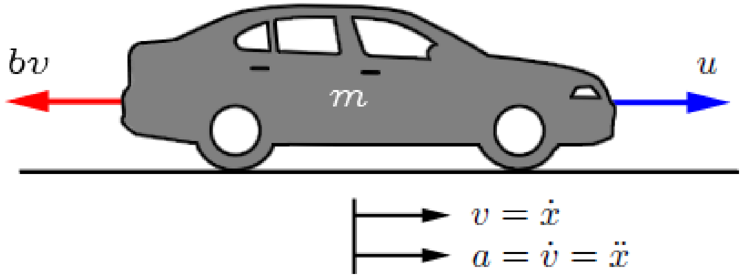
$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = \tau$$
$$L\frac{di}{dt} + Ri = v - e$$

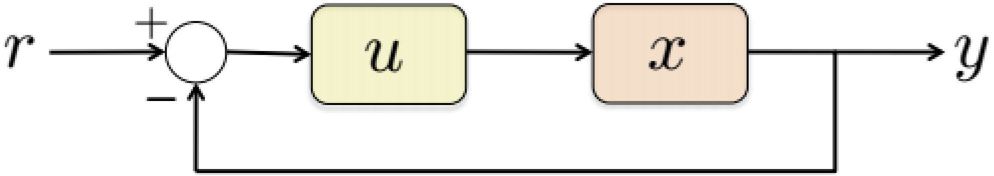
$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = K_\tau i$$
$$L\frac{di}{dt} + Ri = v - K_i\dot{\theta}$$

$$m\ddot{x} - b\dot{x} = u$$

Conceitos Importantes da Teoria de Controle

- **Estado(x):** o que o sistema está fazendo? Onde ele está? Em que velocidade? Com qual aceleração?
- **Dinâmica:** descrição matemática de como os estados mudam no tempo.
- **Referência(r):** o que o sistema deve fazer com seus estados?
- **Sinais de controle(u):** sinais projetados para levar os estados até sua referência.
- **Saídas(y):** informações diretamente mensuráveis do sistema.
- **Realimentação:** Conexão entre os sinais de referência e as saídas do sistema.





Conceitos Importantes da Teoria de Controle

- Aplicar a **Teoria de Controle** significa:
  - Escolher u de forma a conduzir os estados x até r;
- Garantindo:
  - **Estabilidade** – O sistema não explode; O drone não cai; O carro não requisitará aceleração infinita; etc...
  - **Rastreabilidade** – O sistema alcança r em tempo finito;
  - **Robustez** – O controlador supera a inexatidões de seu projeto;
  - **Rejeição a distúrbios** – O controlador supera intervenções externas ou não previstas no seu funcionamento;
  - **Otimalidade** – Controlador leva o sistema até r da forma mais eficiente possível, isto é, gastando o mínimo de energia;

A Importância dos Modelos Matemáticos

- Tais garantias são **dependentes** dos **modelos matemáticos** dos sistemas;
- São estes modelos que **descrevem (ou melhor, tentam descrever) o comportamento** dinâmico que o **sistema real** possui;
- É analisando **modelos matemáticos**, que o engenheiro de controle consegue, por exemplo:
  - Saber o que está acontecendo com determinado estado do sistema;
  - Prever o que pode vir a acontecer em função de alguma influência no sistema;
  - Limitar sinais e estados do sistema em condições práticas realizáveis;
  - Etc ...

Representação Matemática de Sistemas Dinâmicos em Tempo Discreto

Modelos Dinâmicos em Tempo Discreto

- Representações em **tempo discreto** são dadas pelas **equações a diferença;**
- Uma **equação a diferença** representam a diferença entre intervalos de tempo discretos (k) e ($k+1$);
- Uma representação genérica é dada por:

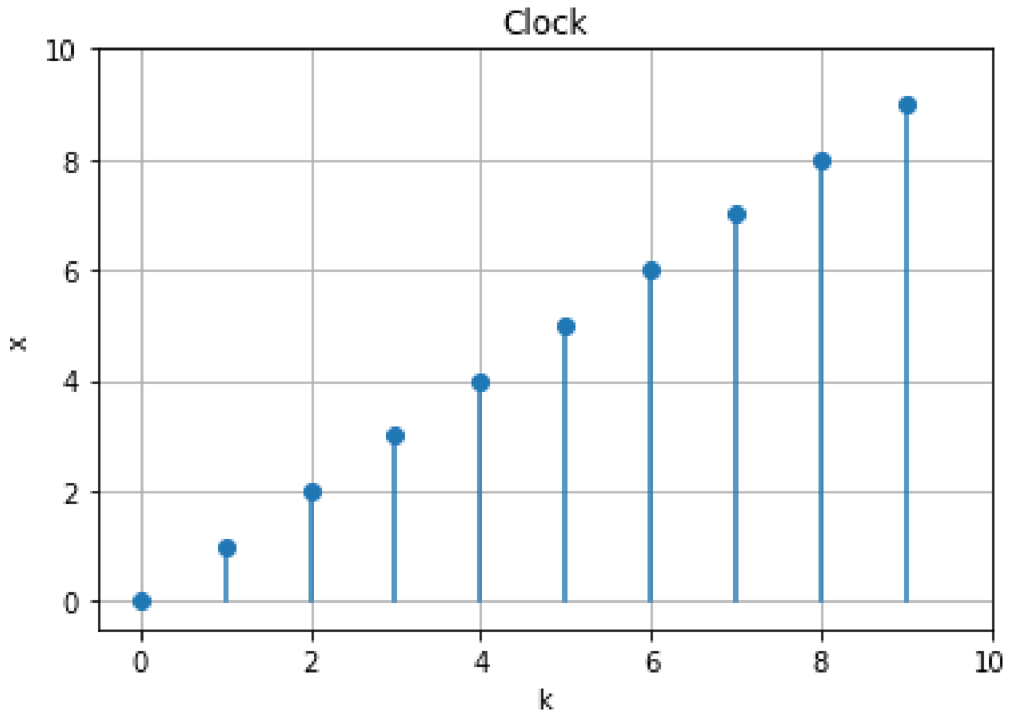
$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

- Onde, um determinado estado (x_{k+1}) é função de seu estado anterior (x_k) e de um sinal de modificação/controle (u_k);

Modelos Dinâmicos em Tempo Discreto

- Exemplo trivial:
  - Relógio de incremento unitário;
  - Condições iniciais $k = 0$, $x_k = 0$;

$$x_{k+1} = x_k + 1$$



Exercício de Programação 01

- Bom, já que é um problema trivial, eis um exercício para o estudante:
  - Implemente a equação a diferença do relógio de incremento unitário e a utilize para *plotar* um gráfico deste sistema.
  - Você conseguiria fazer?

Exercício de Programação 01

- Os ambientes científicos comumente selecionados para isto seriam:

Exercício de Programação 01

- Porém, neste curso será utilizada a Linguagem de Programação Python;

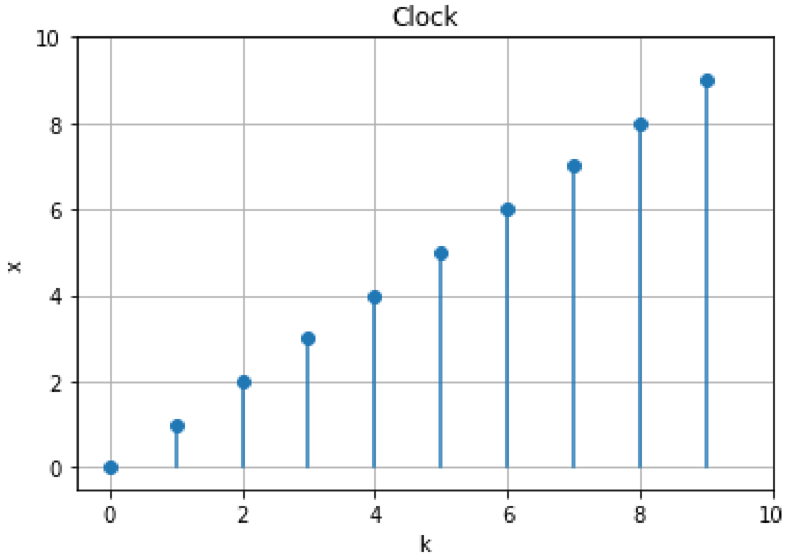
- Recomenda-se para programação *offline* a plataforma Anaconda (https://www.anaconda.com/distribution);
- Ela instala pacotes científicos importantes junto com o IDE *Spyder* (parecida com Matlab e Octave).

- Recomenda-se para programação *online* a plataforma *Google Colab* (https://colab.research.google.com);
- Ela usa computadores e nuvem *Jupyter Notebooks* que processam códigos em Python;
- Já possui pacotes científicos importantes pré-instalados e disponíveis para uso.

INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

Exercício de Programação 01

- Acesse o código deste exemplo no *Jupyter Notebook* disponível em:
  - https://colab.research.google.com/drive/1I4CL6yu9-J6_XzHfh8-pnqWEFKSkkmlO
  - Siga as instruções;
- Se preferir o ambiente *offline*:
  - Copie os códigos para o IDE *Spyder*;
  - Faça a simulação.



$$x_{k+1} = x_k + 1$$

INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

Representação Matemática de Sistemas Dinâmicos em Tempo Contínuo

Modelos Dinâmicos em Tempo Contínuo

- As **Leis da Física** que explicam fenômenos naturais são formuladas para **tempo contínuo**:
  - Leis de Newton;
  - Leis de Kirchhoff;
  - Equações de Maxwell;
  - Etc ...
- No qual **não há** a noção discreta de **estado atual, estado anterior, próximo estado**;

Modelos Dinâmicos em Tempo Contínuo

- Porém, em tempo contínuo há a noção de **derivada temporal** que representa a **taxa de variação** de um estado em função do tempo;
- Tais equações podem ser **convertidas em equações a diferença**, que são computacionalmente implementáveis, e utilizadas na solução de problemas dinâmicos;

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad \dot{x} = f(x,u) \qquad \leftarrow$$

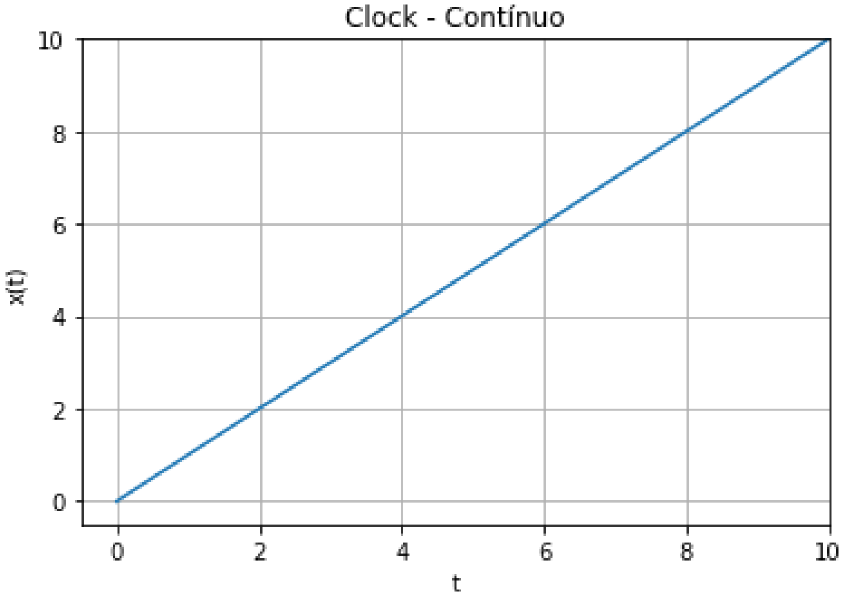
Equações diferenciais

Modelos Dinâmicos em Tempo Contínuo

- Mas antes, outro exemplo trivial:
  - O relógio de segundos em tempo contínuo é modelado como $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 1$;
  - Cuja solução analítica seria dada por:

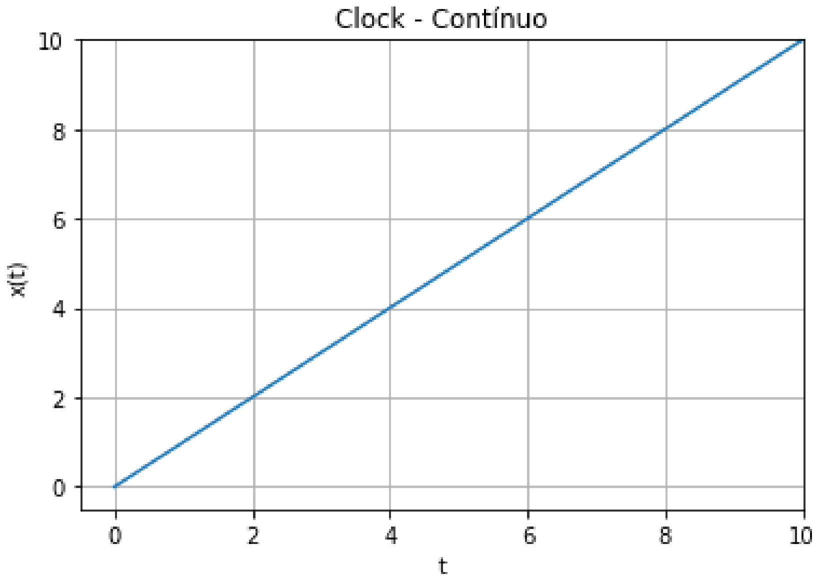
$$\int dx = \int 1dt$$

$$x(t) = t$$



Exercício de Programação 02

- Como implementar?
- Acesse o código deste exemplo no *Jupyter Notebook* disponível em:
  - https://colab.research.google.com/drive/1I4CL6yu9-J6_XzHfh8-pnqWEFKSkkmlO
  - Siga as instruções;
- Se preferir o ambiente *offline*:
  - Copie os códigos para o IDE *Spyder*;
  - Faça a simulação.



$$x(t) = t$$

Reflexão sobre a Implementação

- No exercício anterior, houve de fato uma representação contínua da equação do relógio?
  - Na verdade não;
  - A implementação se manteve discreta, mudando apenas o passo do relógio de 1 segundo para 0,001 segundo e a forma de plotar o gráfico.
- Em outras palavras, qualquer modelo implementado em um sistema digital é na verdade uma **aproximação numérica do sistema contínuo**;
- Tal aproximação, segue o **intervalo de amostragem** (Δt) do sistema digital.
- Quanto **menor** for o Δt, **melhor a aproximação** com o sistema contínuo.