INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

Robótica Industrial

Engenharia de Controle e Automação – 9º Período

PROF. LUCAS VAGO SANTANA

lucas@ifes.edu.br

Aula 07 – Cinemática Inversa e de Velocidade em 3D

- Movimento em 3D
- Cinemática Inversa e o Posicionamento em 3D
  - Obtendo o Jacobiano em 3D
  - Exemplo: Manipulador 2R em 3D
- Cinemática Inversa e a Orientação em 3D
  - O punho esférico
  - Arranjo 3R com punho esférico
  - Erros de orientação: como tratar?

Referências Bibliográficas

- CORKE, Peter. **QUT Robot Academy: The open online robotics education resource**. Disponível em: <https://robotacademy.net.au/>. Acesso em 27 fev. 2020.
- SCIAVICCO, Lorenzo; SICILIANO, Bruno. **Modelling and Control of Robot Manipulators**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- SPONG, Mark W.; HUTCHINSON, Seth; VIDYASAGAR, M. **Robots Modeling and Control**. 1. ed. John Wiley & Sons, 2005.
- CORKE, Peter. **Robotics, Vision and Control: Fundamentals Algorithms in MATLAB**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017.
- NIKU, Saeed B. **Introduction to Robotics: Analysis, Control, Applications**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- LYNCH, Kevin M.; PARK, Frank C. **Modern Robotics: Mechanics, Planning and Control**. 1. ed. Cambridge University Press, 2017.
- SICILIANO, Bruno; KHATIB, Oussama. **Springer Handbook of Robotics**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.

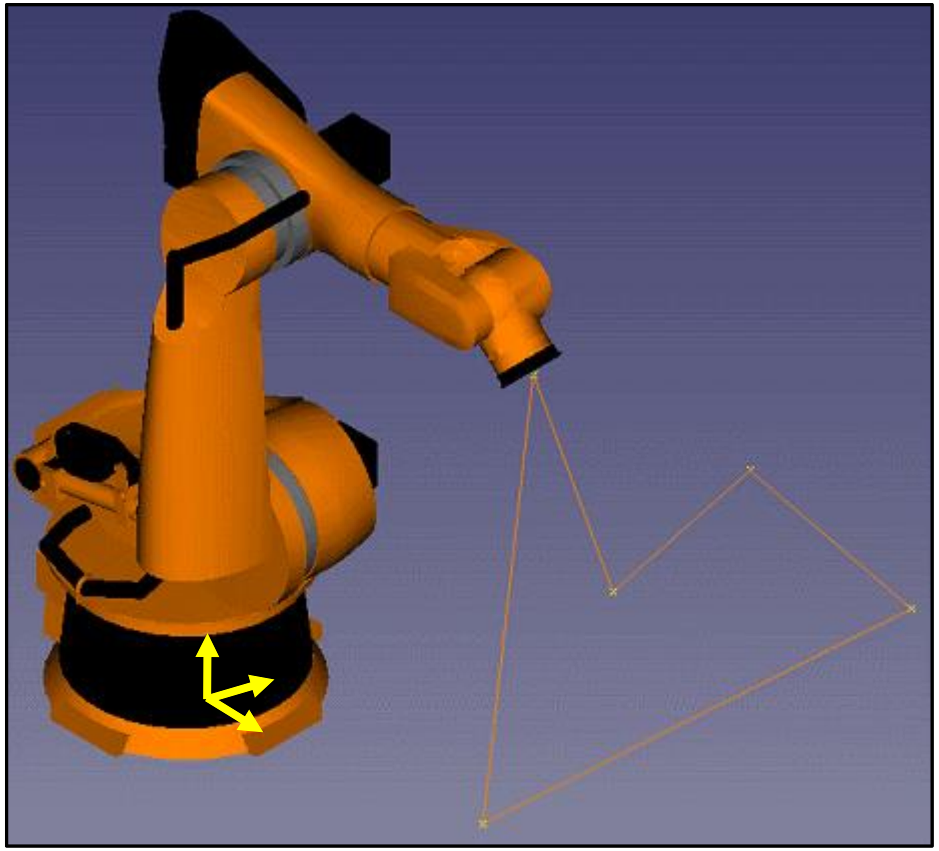
Movimento em 3D

Movimento em 3D

- Movendo-se em 3D, o efetuador final sofre variações simultâneas nas velocidades linear a angular;
- Em 3D, tal variação se mapeia como:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \text{Parte Linear} \\ \\ \longrightarrow \text{Parte Rotacional} \end{matrix}$$

(Twist)

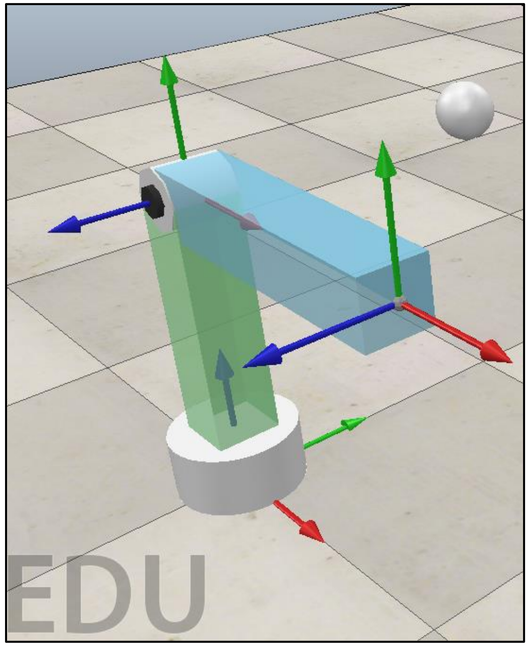


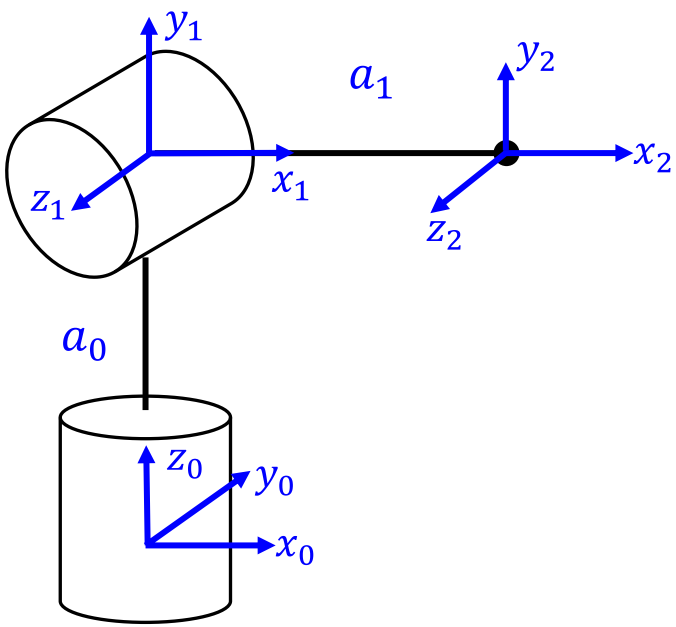
https://wiki.freecadweb.org/Robot_tutorial

Cinemática Inversa e o Posicionamento 3D – Método Analítico

Exemplo: Manipulador 2R em 3D

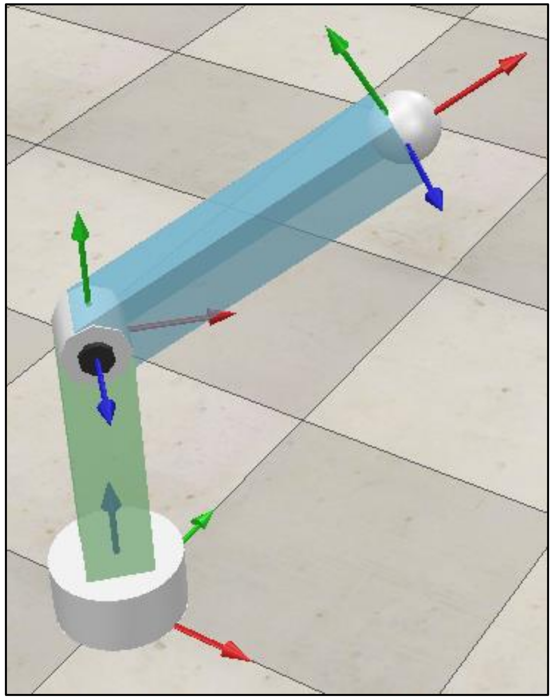
- Dado o arranjo do Manipulador 2R em 3D, determine sua cinemática inversa.



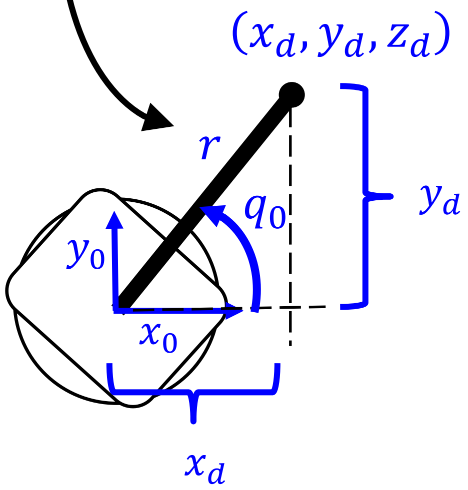


Exemplo: Manipulador 2R em 3D

- Vista superior ($q_n \neq 0°$):



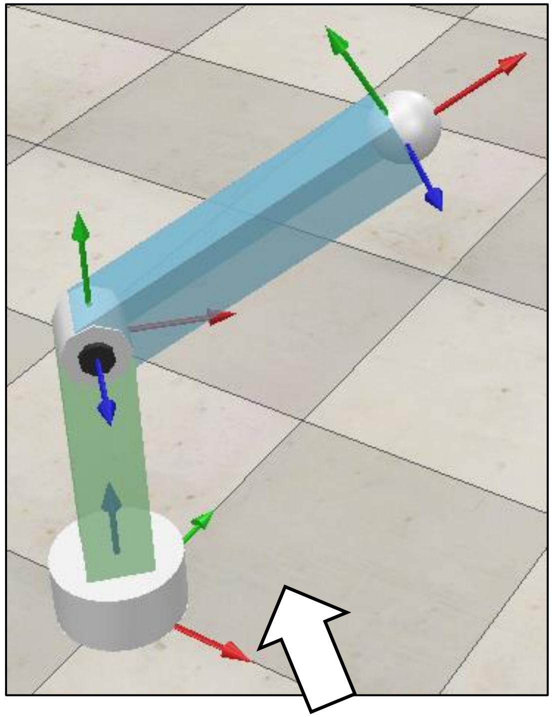
Observar que $r \neq a_1$
r é uma projeção de a_1 no plano x_0, y_0



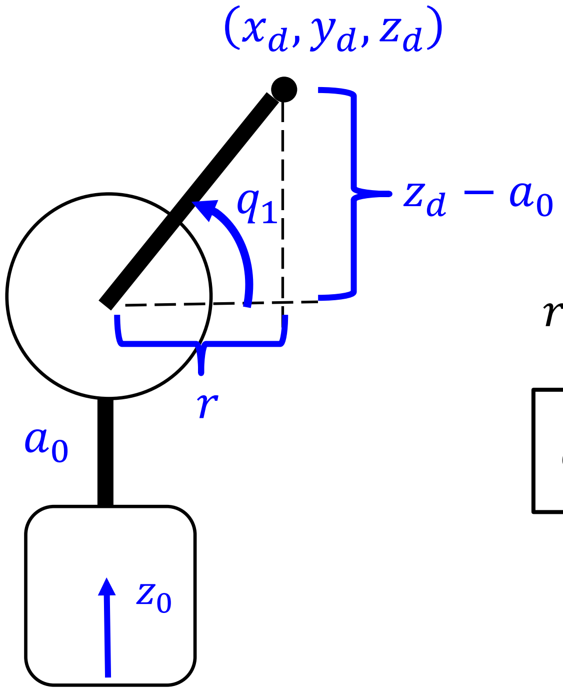
$$q_0 = \text{atan}\left(\frac{y_d}{x_d}\right)$$

Exemplo: Manipulador 2R em 3D

- Vista lateral ($q_n \neq 0°$):



Olhando o robô dessa perspectiva.

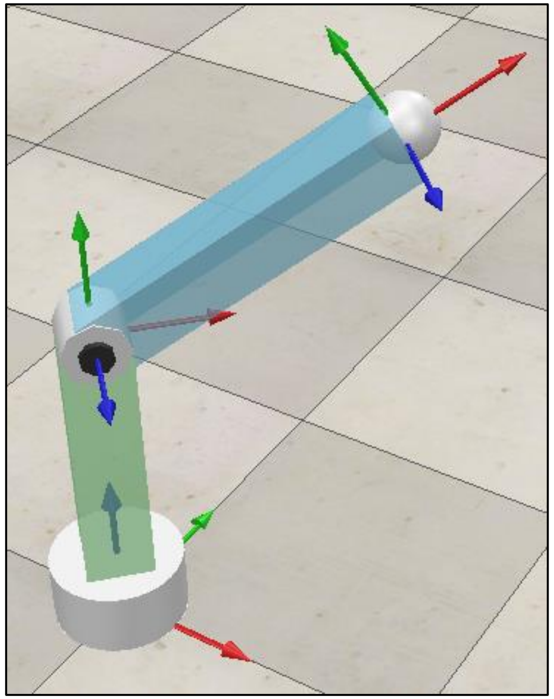


$$r = \sqrt{x_d^2 + y_d^2}$$

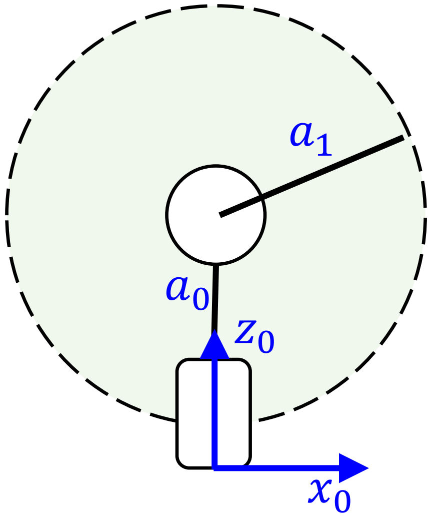
$$\boxed{q_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{z_d - a_0}{r}\right)}$$

Exemplo: Manipulador 2R em 3D

- Análise do espaço de trabalho (desconsidera colisão):

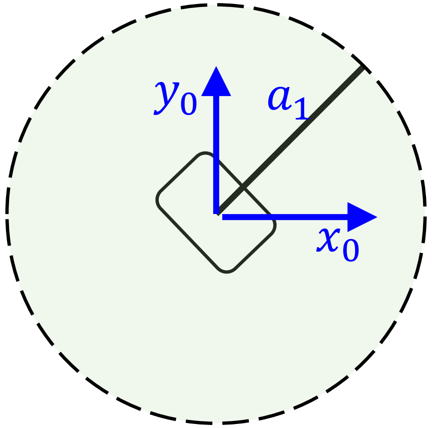


Vista lateral



$$a_0 - a_1 \leq z_d \leq a_0 + a_1$$

Vista superior

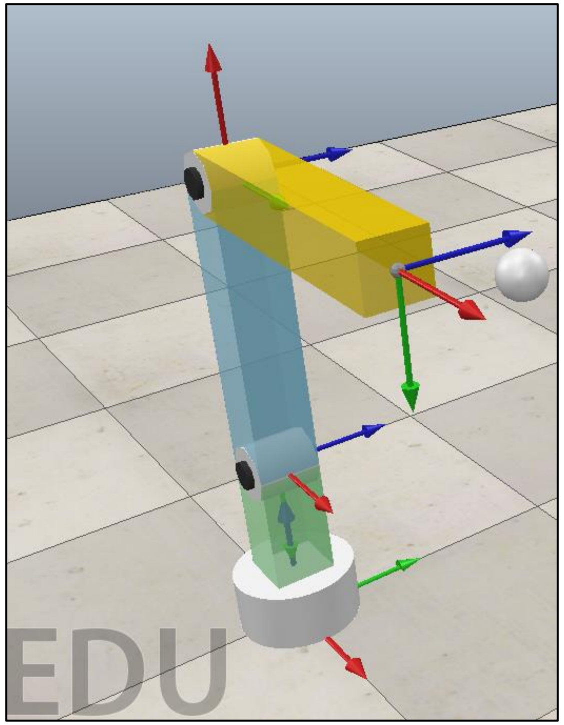


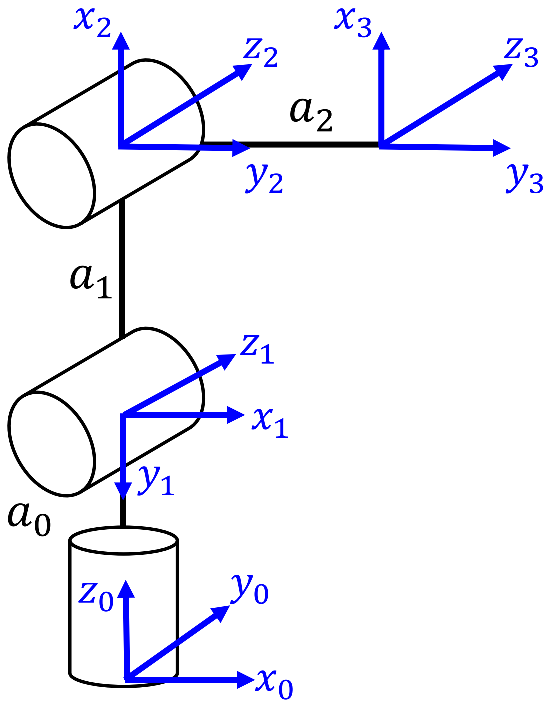
$$r = \sqrt{x_d^2 + y_d^2}$$

$$r \leq a_1$$

Exemplo: Manipulador Antropomórfico

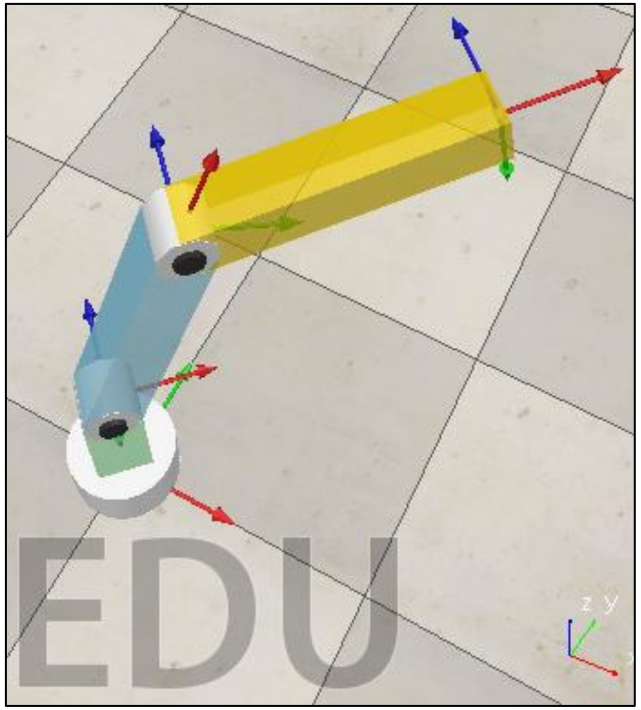
- Dado o arranjo do Manipulador 2R em 3D, determine sua cinemática inversa.

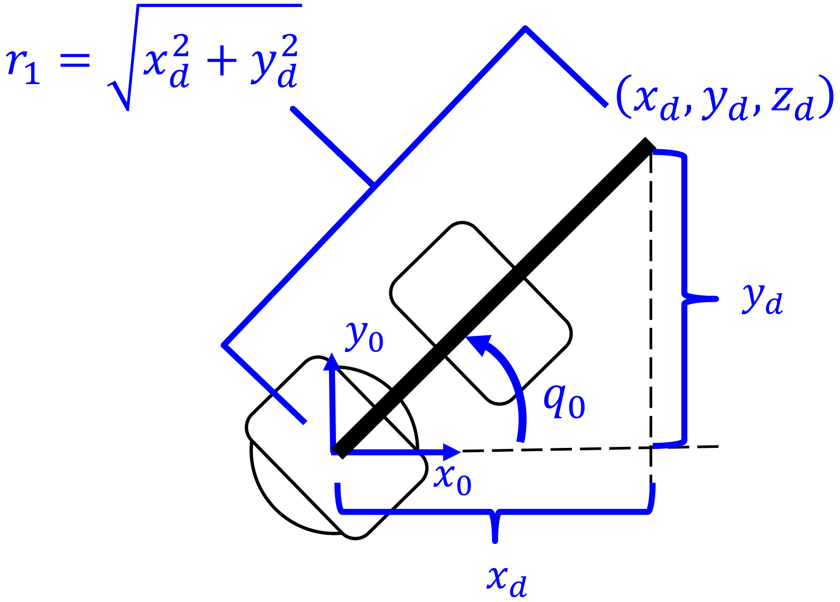




Exemplo: Manipulador Antropomórfico

- Vista superior ($q_n \neq 0°$):

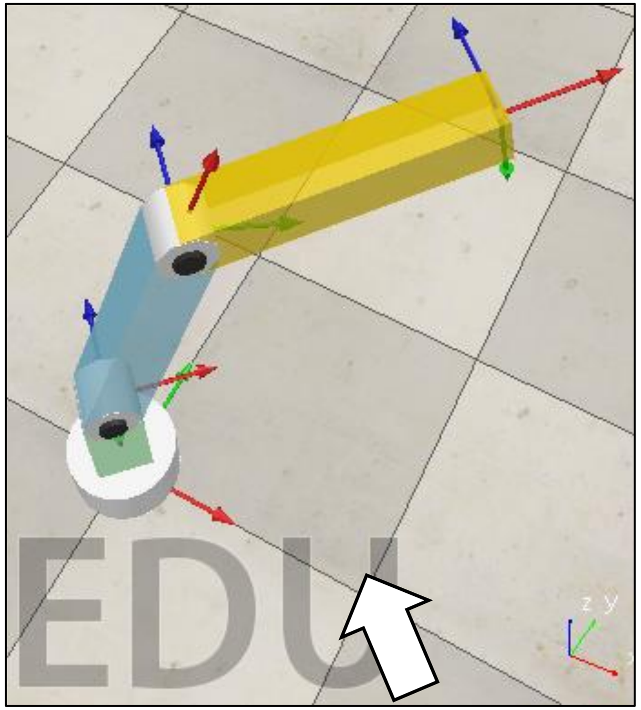




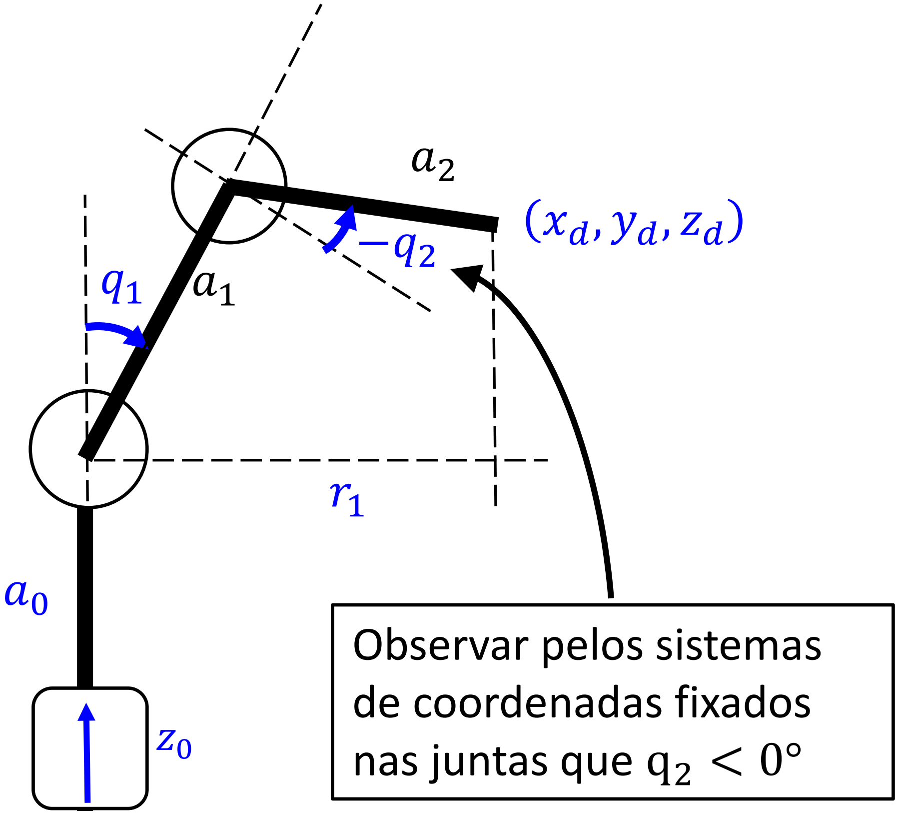
$$q_0 = \operatorname{atan}\left(\frac{y_d}{x_d}\right)$$

Exemplo: Manipulador Antropomórfico

- Vista lateral ($q_n \neq 0°$):



Olhando robô dessa perspectiva



Exemplo: Manipulador Antropomórfico

- Observe que:

$$r_1 = \sqrt{x_d^2 + y_d^2} \qquad r_2 = z_d - a_0 \qquad r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

$$q_1 + \beta + \gamma = 90°$$

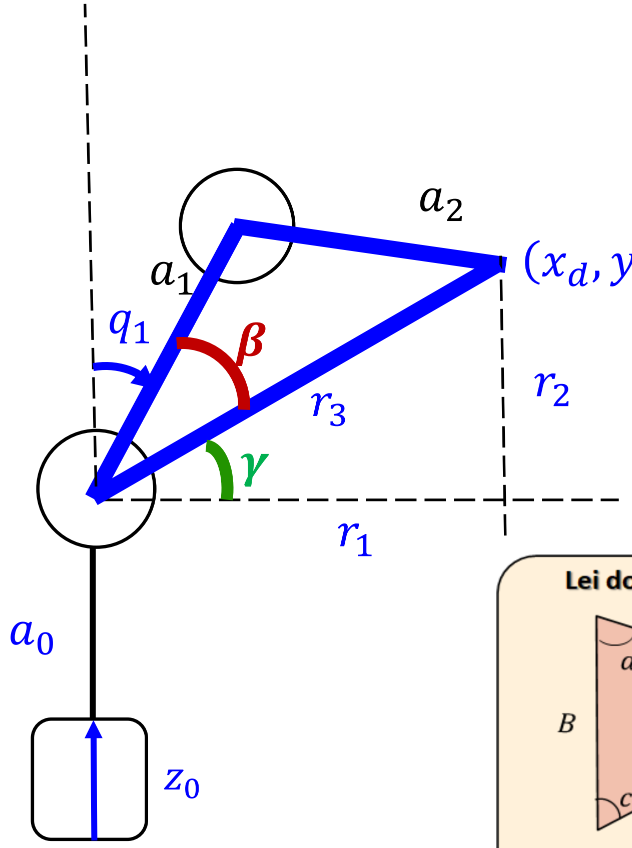
$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

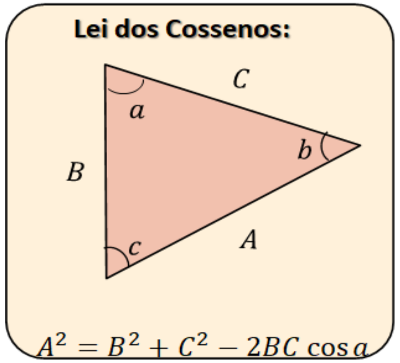
Lei dos cossenos:

$$a_2^2 = r_3^2 + a_1^2 - 2\,\mathrm{r}_3\,\mathrm{a}_1 \cos(\beta)$$

$$\beta = \mathrm{acos}\left(\frac{r_3^2 + a_1^2 - a_2^2}{2\, r_3\, a_1}\right)$$

$$\boxed{q_1 = 90° - \beta - \gamma}$$





Exemplo: Manipulador Antropomórfico

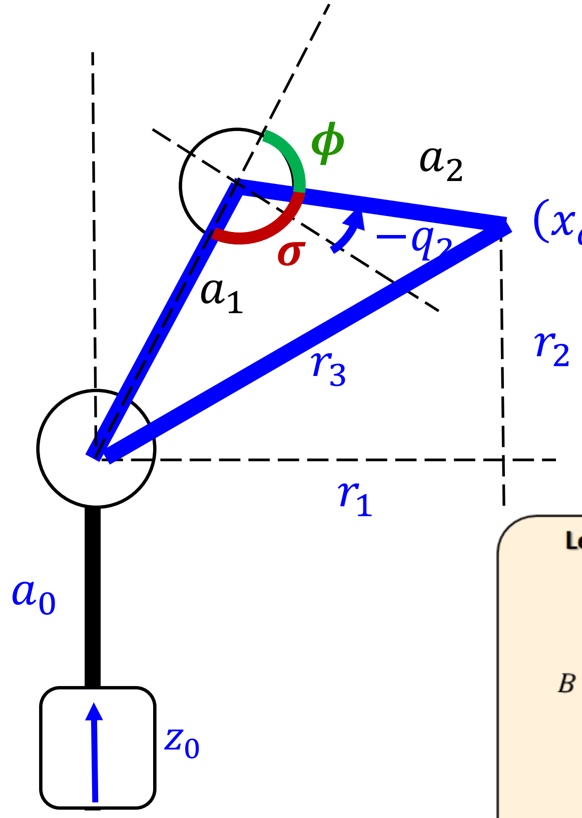
- Observe que:

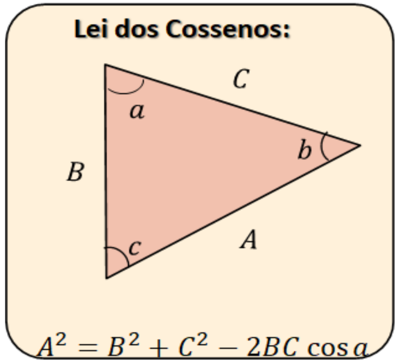
$$\phi = 180° - \sigma$$
$$\phi = 90° - (-q_2)$$

$$q_2 = 90° - \sigma$$

$$r_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2\, a_1\, a_2 \cos(\sigma)$$
$$\cos(\sigma) = \frac{a_1^2 + a_2^2 - r_3^2}{2\, a_1\, a_2}$$

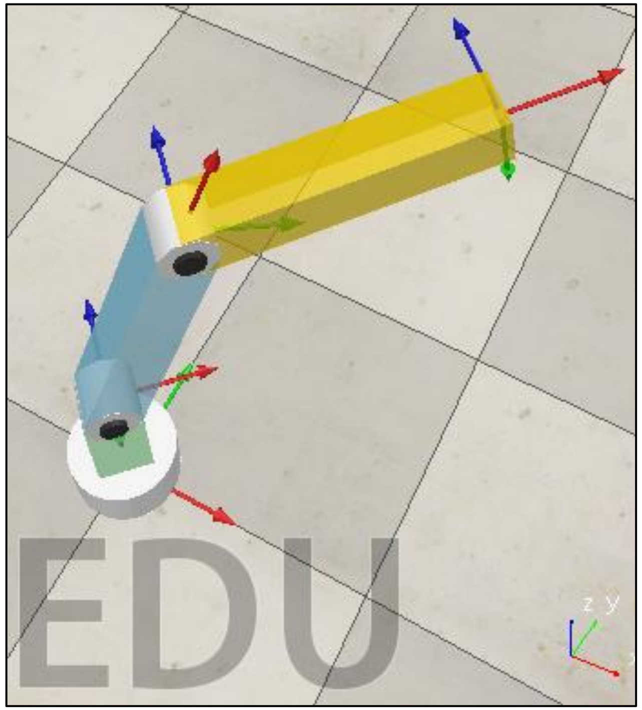
$$\boxed{q_2 = 90° - \cos^{-1}\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - r_3^2}{2\, a_1\, a_2}\right)}$$

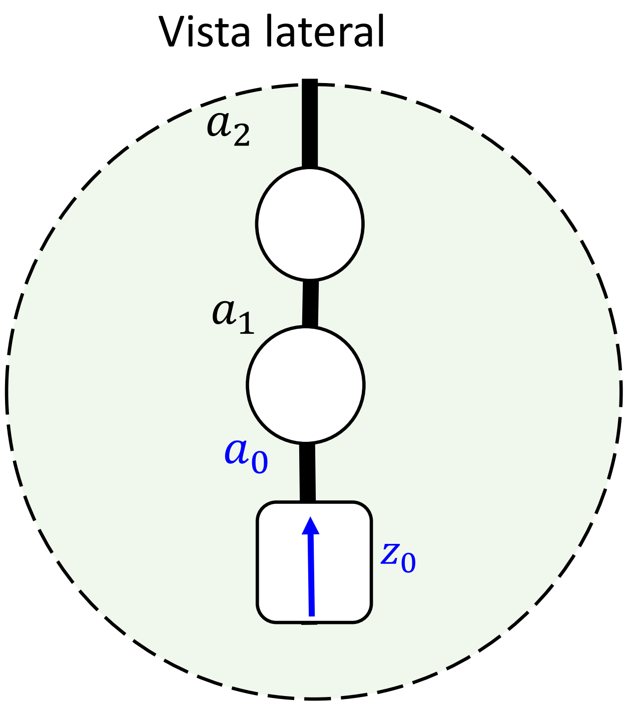




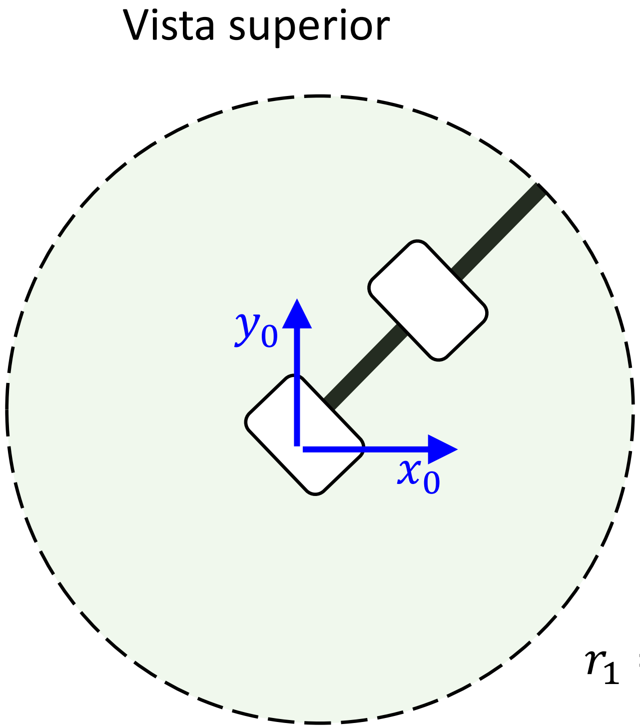
Exemplo: Manipulador 3R em 3D

- Análise do espaço de trabalho (desconsidera colisão):





$$a_0 - (a_1 + a_2) \leq z_d \leq a_0 + a_1 + a_2$$



$$r_1 = \sqrt{x_d^2 + y_d^2}$$

$$r_1 \leq a_1 + a_2$$

Tarefa de Simulação

- Implementar e simular no CoppeliaSim o manipulador 2R em 3D e sua cinemática inversa;
- Implementar e simular no CoppeliaSim o manipulador 3R em 3D e sua cinemática inversa;
- Usar como solução da cinemática inversa o equacionamento analítico.

INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

Cinemática Inversa e o Posicionamento 3D – Método Numérico

Jacobiano em 3D

- A relação permanece válida:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

- Porém, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ em 3D é mais difícil de se obter;
- Interessados em detalhes:
  - Capítulo 3 (Seções 3.1 e 3.2) do livro ***Modelling and Control of Robot Manipulators*** (Sciavicco e Siciliano; 2000);
  - Capítulo 4 (Seções 4.6 e 4.7) do livro ***Robots Modelling and Control*** (Spong, Hutchinson e Vidyasagar; 2004)

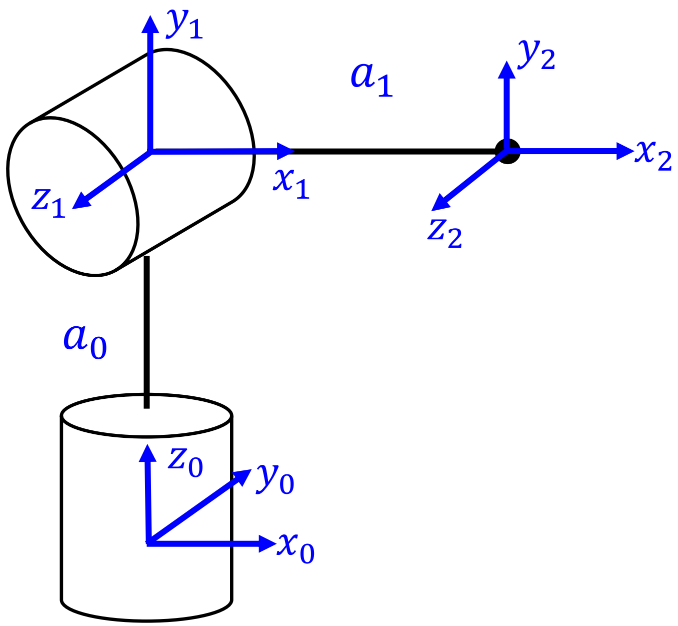
Obtendo o Jacobiano em 3D

Parte do Jacobiano	Se a junta for Prismática	Se a junta for Rotacional
Linear (Posição)	${}^{0}R_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	${}^{0}R_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times ({}^{0}o_n - {}^{0}o_{i-1})$
Rotacional (Ângulos)	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$	${}^{0}R_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

- $\boldsymbol{J}$ é $6 \times n$
- n: número total de juntas do robô
- i: índice da coluna de $\boldsymbol{J}$ em preenchimento (começa em 1)
- ${}^{0}R_{i-1}$: matriz de rotação do sistema {i-1} para {0}
- ${}^{0}o_n$: coordenadas da origem do sistema {n} no referencial {0}
- ${}^{0}o_{i-1}$: coordenadas da origem do sistema {i-1} no referencial {0}

Exemplo: Manipulador 2R em 3D

- Dado o arranjo cinemático em 3D, determinar o Jacobiano:
  - Determinar os sistemas de coordenadas pelas regras DH;
  - Preencher a tabela de DH;



Índice da Junta (i)	θ_i	d_i	a_i	α_i
0	q0	a0	0	90
1	q1	0	a1	0

θ: Rotação em torno de z;
d: Translação sobre z;
a: Translação sobre x;
α: Rotação em torno de x;

Exemplo: Manipulador 2R em 3D

- Calcular e descrever as transformações homogêneas no formato simbólico, linha a linha;

$$
{}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} \cos(q_0) & 0 & \sin(q_0) & 0 \\ \sin(q_0) & 0 & -\cos(q_0) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & a_1\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & a_1\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

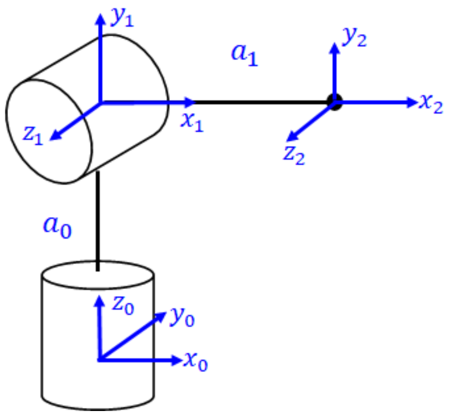
$$
{}^{0}T_{2} = {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} \cos(q_0)\cos(q_1) & -\sin(q_1)\cos(q_0) & \sin(q_0) & a_1\cos(q_0)\cos(q_1) \\ \sin(q_0)\cos(q_1) & -\sin(q_0)\sin(q_1) & -\cos(q_0) & a_1\sin(q_0)\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & a_0 + a_1\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

https://colab.research.google.com/drive/1xIUpXViZPUGjAbTTqxw0nJR_kBCsHaRC

Exemplo: Manipulador 2R em 3D

- Preencher o Jacobiano baseado na tabela

Parte do Jacobiano	Se a junta for Rotacional
Linear (Posição)	${}^0R_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times ({}^0o_n - {}^0o_{i-1})$
Rotacional (Ângulos)	${}^0R_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$



$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\\\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times ({}^0o_2 - {}^0o_0) & {}^0R_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times ({}^0o_2 - {}^0o_1) \\ {}^0R_0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} & {}^0R_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{q}_0\\\dot{q}_1\end{bmatrix}$$

$i = 1$ $\quad$ $i = 2$ $\quad$ $n = 2$

Exemplo: Manipulador 2R em 3D

- Identificar os elementos

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\\ \omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\times({}^0o_2 - {}^0o_0) & {}^0R_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\times({}^0o_2 - {}^0o_1) \\ {}^0R_0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} & {}^0R_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_0\\ \dot{q}_1\end{bmatrix}$$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix}\cos(q_0) & 0 & \sin(q_0) & 0\\ \sin(q_0) & 0 & -\cos(q_0) & 0\\ 0 & 1 & 0 & a_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$${}^0R_0 = I_{3\times3} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$${}^0o_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$${}^0o_1 = [0 \quad 0 \quad a_0]^T$$

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix}\cos q_0 & 0 & \sin q_0\\ \sin q_0 & 0 & -\cos q_0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$${}^0o_2 = \begin{bmatrix}a_1\cos q_0\cos q_1\\ a_1\sin q_0\cos q_1\\ a_0 + a_1\sin q_1\end{bmatrix}$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix}\cos(q_0)\cos(q_1) & -\sin(q_1)\cos(q_0) & \sin(q_0) & a_1\cos(q_0)\cos(q_1)\\ \sin(q_0)\cos(q_1) & -\sin(q_0)\sin(q_1) & -\cos(q_0) & a_1\sin(q_0)\cos(q_1)\\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & a_0 + a_1\sin(q_1)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Exemplo: Manipulador 2R em 3D

- Substituir valores e efetuar operações:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} a_1 \cos q_0 \cos q_1 \\ a_1 \sin q_0 \cos q_1 \\ a_0 + a_1 \sin q_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) & \begin{bmatrix} \cos q_0 & 0 & \sin q_0 \\ \sin q_0 & 0 & -\cos q_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} a_1 \cos q_0 \cos q_1 \\ a_1 \sin q_0 \cos q_1 \\ a_0 + a_1 \sin q_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos q_0 & 0 & \sin q_0 \\ \sin q_0 & 0 & -\cos q_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \cos q_0 \cos q_1 \\ a_1 \sin q_0 \cos q_1 \\ a_0 + a_1 \sin q_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sin q_0 \\ -\cos q_0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \cos q_0 \cos q_1 \\ a_1 \sin q_0 \cos q_1 \\ a_1 \sin q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sin q_0 \\ -\cos q_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Produto Cruzado entre Vetores

Exemplo: Manipulador 2R em 3D

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\\\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_1\cos q_0\cos q_1\\a_1\sin q_0\cos q_1\\a_0+a_1\sin q_1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\sin q_0\\-\cos q_0\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_1\cos q_0\cos q_1\\a_1\sin q_0\cos q_1\\a_1\sin q_1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\sin q_0\\-\cos q_0\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_0\\\dot{q}_1\end{bmatrix}$$

Produto Cruzado (Cola):

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\\\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1\sin q_0\cos q_1 & -a_1\sin q_1\cos q_0\\a_1\cos q_0\cos q_1 & -a_1\sin q_0\sin q_1\\0 & a_1\sin^2 q_0\cos q_1+a_1\cos^2 q_0\cos q_1\\0 & \sin q_0\\0 & -\cos q_0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_0\\\dot{q}_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\\\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}-a_1\sin q_0\cos q_1 & -a_1\cos q_0\sin q_1\\a_1\cos q_0\cos q_1 & -a_1\sin q_0\sin q_1\\0 & a_1\cos q_1\\0 & \sin q_0\\0 & -\cos q_0\\1 & 0\end{bmatrix}}^{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})}\begin{bmatrix}\dot{q}_0\\\dot{q}_1\end{bmatrix}$$

Tarefa de Simulação

- Simular no CoppeliaSim o **manipulador 2R em 3D** e sua cinemática inversa pelo **método numérico**;
- Adaptar o código para implementar e simular no CoppeliaSim o **manipulador 3R em 3D** e sua cinemática inversa.