



INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO



Robótica Industrial

Engenharia de Controle e Automação – 9º Período

PROF. LUCAS VAGO SANTANA

lucas@ifes.edu.br



Aula 06 – Cinemática Inversa e de Velocidade em 2D

- Recordando: O que é cinemática inversa?
- Cinemática Inversa em 2D: Método Analítico da Trigonometria
- Cinemática inversa em 2D: Método Numérico
 - Cinemática de Velocidade em 2D;
 - O Jacobiano do Manipulador;
 - Resolved Rate of Motion;
 - Solução numérica pelo método de Inversão do Jacobiano.



Referências Bibliográficas

- CORKE, Peter. **Robotics, Vision and Control: Fundamentals Algorithms in MATLAB**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017.
- CORKE, Peter. **QUT Robot Academy: The open online robotics education resource**. Disponível em: <<https://robotacademy.net.au/>>. Acesso em 27 fev. 2020.
- NIKU, Saeed B. **Introduction to Robotics: Analysis, Control, Applications**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- SPONG, Mark W.; HUTCHINSON, Seth; VIDYASAGAR, M. **Robots Modeling and Control**. 1. ed. John Wiley & Sons, 2005.
- LYNCH, Kevin M.; PARK, Frank C. **Modern Robotics: Mechanics, Planning and Control**. 1. ed. Cambridge University Press, 2017.
- SICILIANO, Bruno; KHATIB, Oussama. **Springer Handbook of Robotics**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.
- SCIAVICCO, Lorenzo; SICILIANO, Bruno. **Modelling and Control of Robot Manipulators**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.



Recordando:
O que é a Cinemática Inversa?



Cinemática Inversa

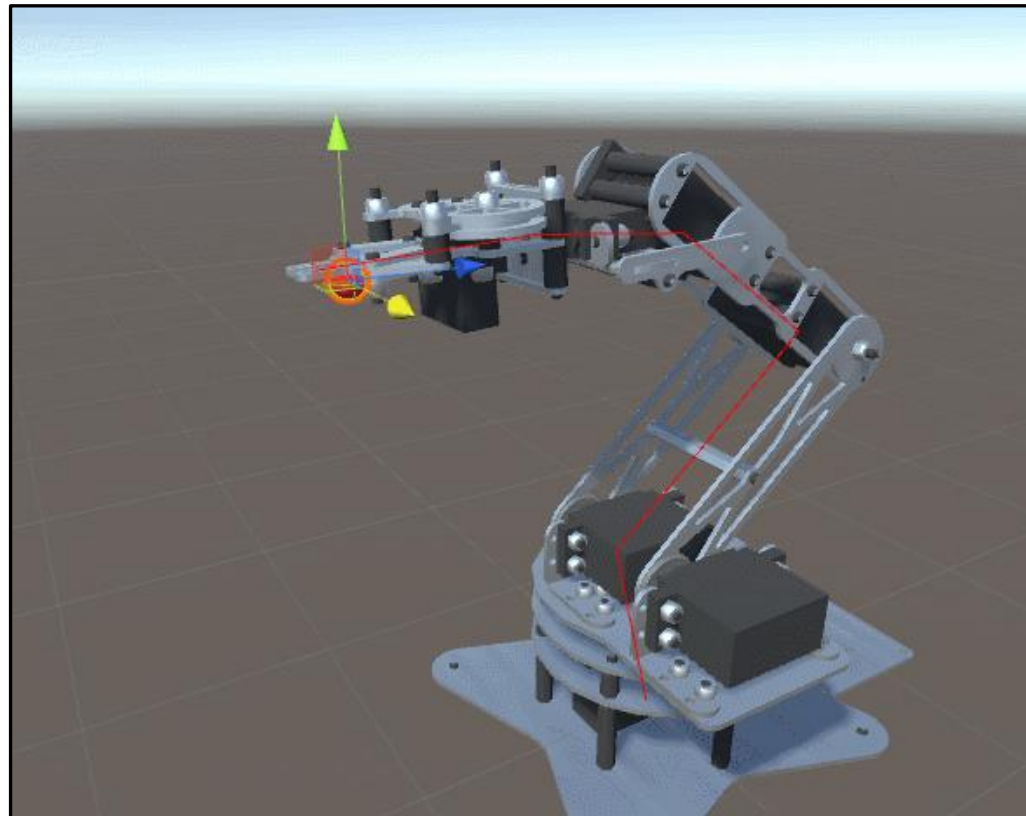
- Dada a posição do efetuador final, quais condições das juntas levam o robô até lá?

Cinemática Inversa é um problema muito complexo.

Ainda hoje há publicações de trabalhos inovando sobre este conceito.

Exemplo:

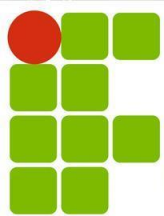
LIAO, Z. et al. A novel solution of inverse kinematic for 6R robot manipulator with offset joint based on screw theory. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Thousand Oaks, California, v. 17, n. 3, 2020. [[LINK](#)]



<https://www.alanzucconi.com/2017/04/06/forward-kinematics/>



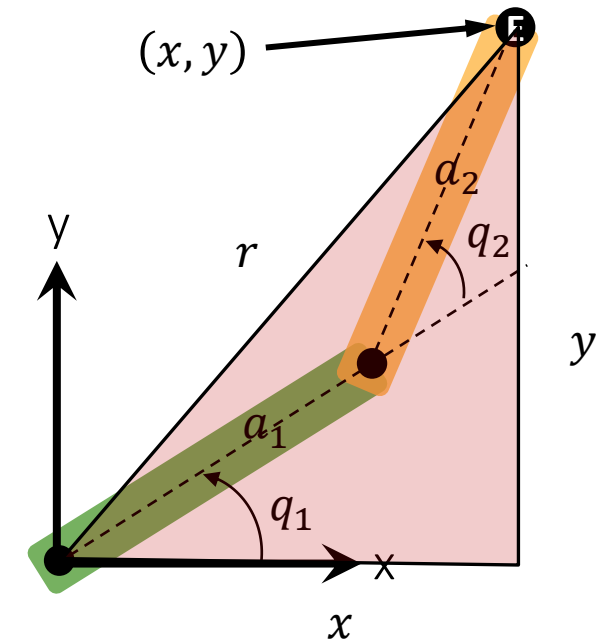
Cinemática Inversa via Método Analítico da Trigonometria

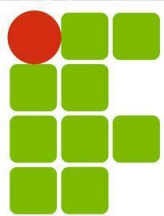


Cinemática Inversa do Robô RR

- Dado o manipulador planar RR;
- Aplicar o teorema de Pitágoras:

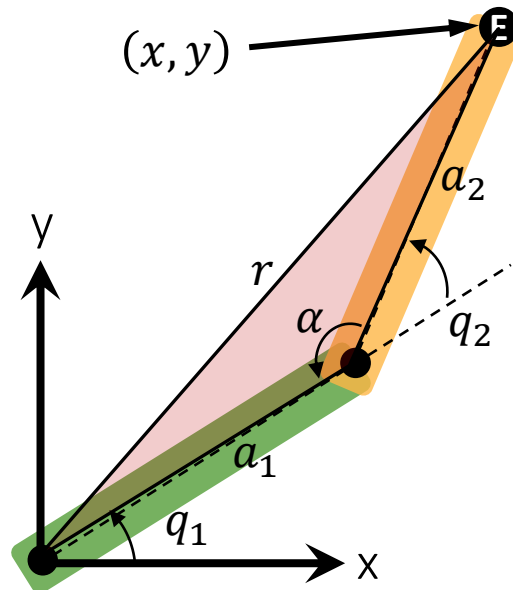
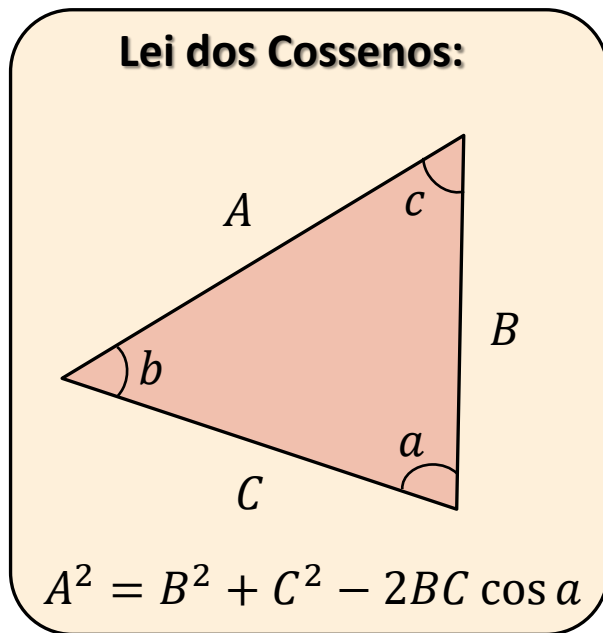
$$r^2 = x^2 + y^2$$





Cinemática Inversa do Robô RR

- Aplicar a lei dos cossenos em função de α e dos elos do robô:



$$r^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \alpha$$



Cinemática Inversa do Robô RR

- Dada a expressão anterior, isolar $\cos \alpha$:

$$r^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1^2 + a_2^2 - r^2}{2a_1a_2}$$

- Ao substituir r^2 , encontra-se:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{a_1^2 + a_2^2 - x^2 - y^2}{2a_1a_2}$$

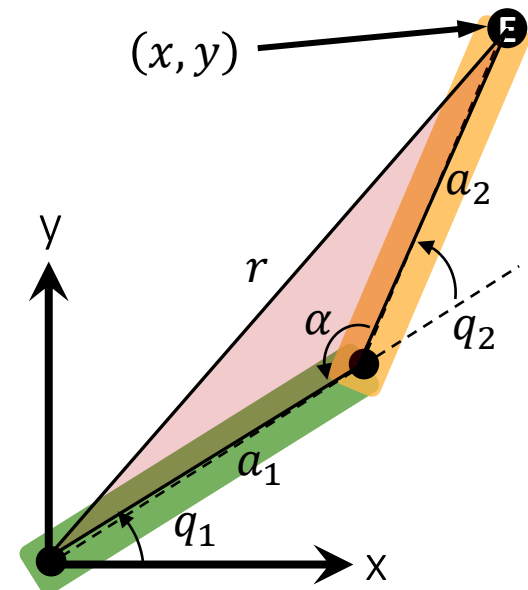
- Observe no desenho que:

$$q_2 = \pi - \alpha$$

- Aplicando cosseno em ambos os lados:

$$\cos q_2 = \cos(\pi - \alpha)$$

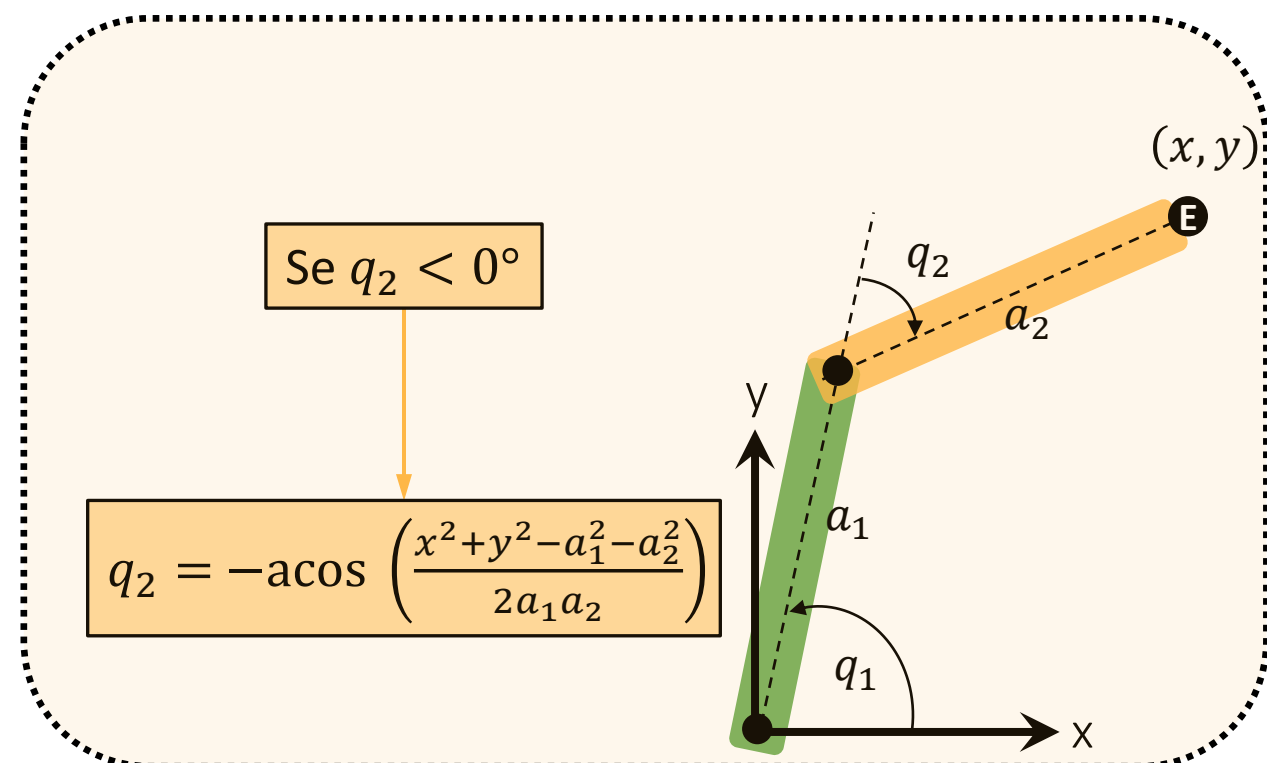
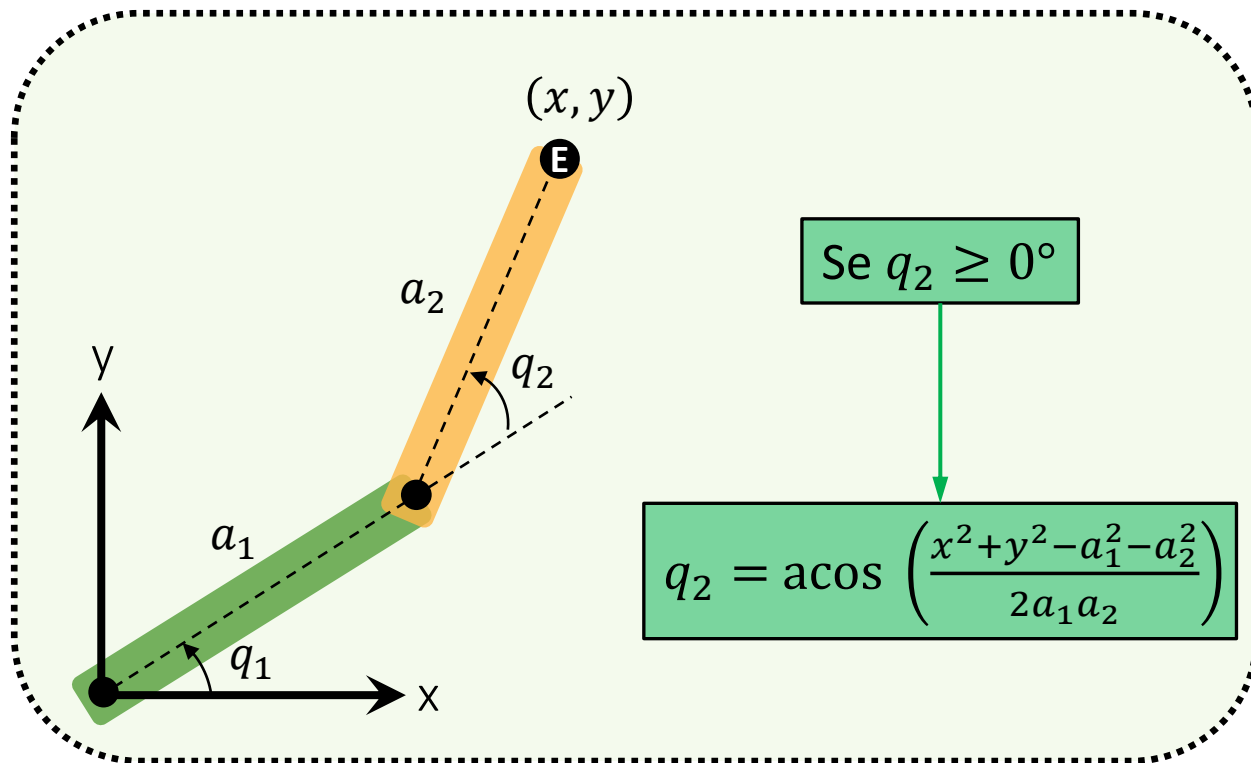
$$\cos q_2 = -\cos \alpha \quad \xrightarrow{\text{arco cosseno}} \quad q_2 = \arccos \left(\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \right)$$





Cinemática Inversa do Robô RR

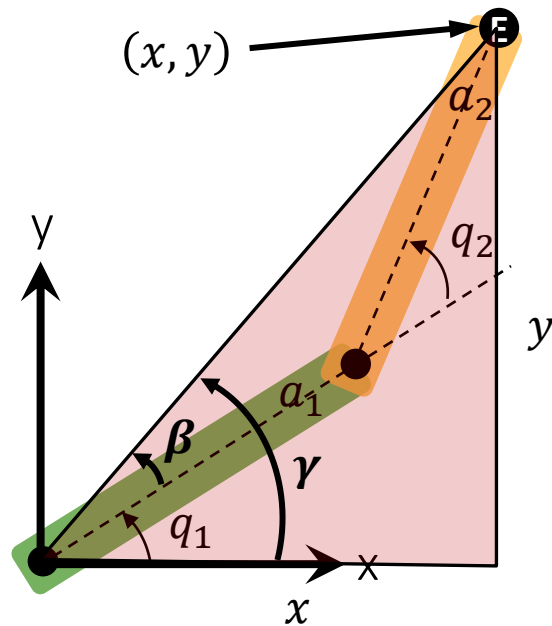
- Observar que existem duas soluções neste problema:





Cinemática Inversa do Robô RR

- Reconsidere o triângulo observando os ângulos q_1 , γ e β :



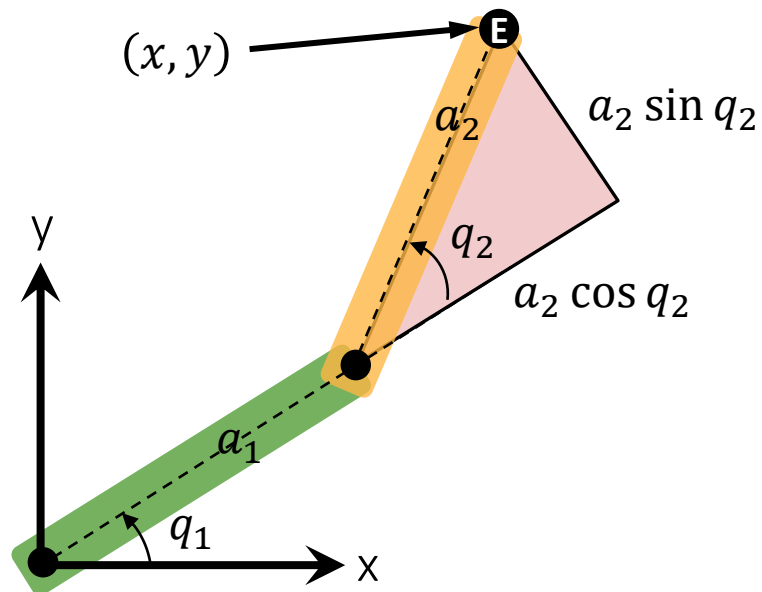
$$q_1 = \gamma - \beta$$

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$



Cinemática Inversa do Robô RR

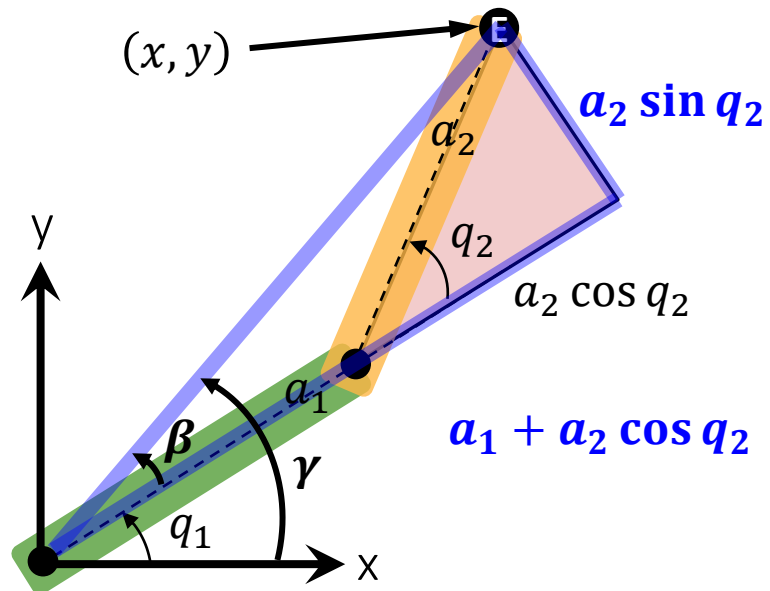
- Agora, para encontrar β , considere as laterais do triângulo:





Cinemática Inversa do Robô RR

- Assim, as laterais para o novo triângulo ficam:

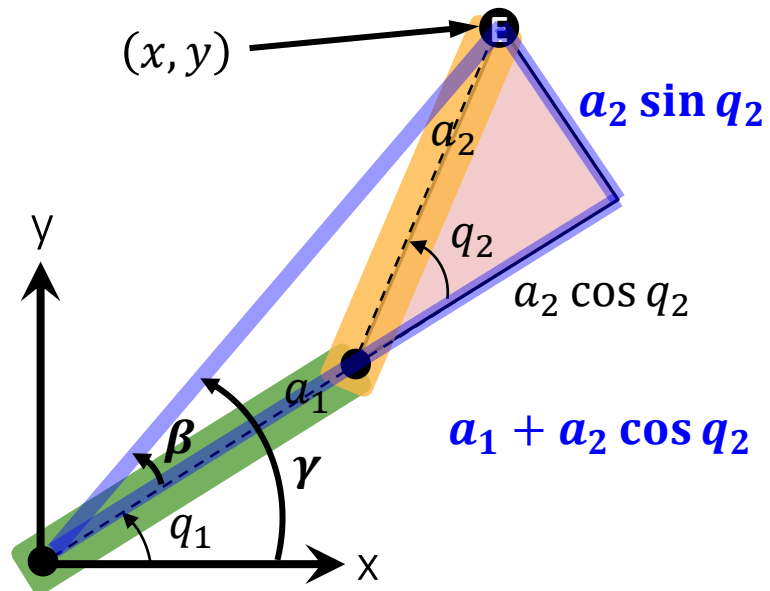


$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{a_2 \sin q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2} \right)$$



Cinemática Inversa do Robô RR

- Retomando as relações encontradas:

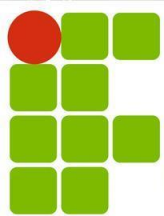


$$q_1 = \gamma - \beta$$

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

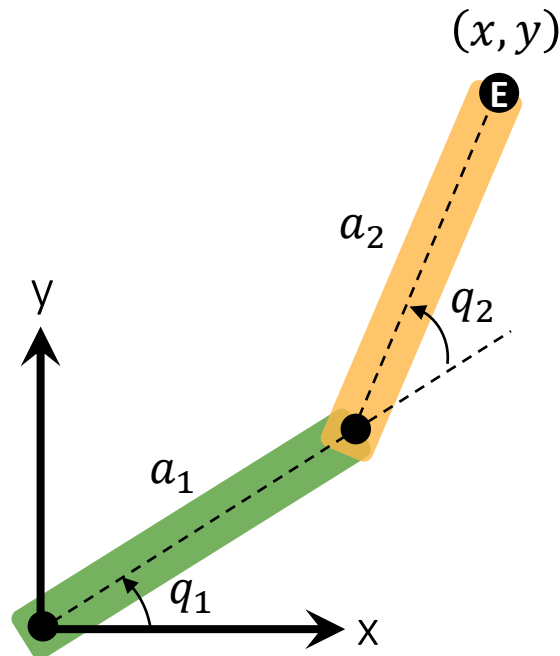
$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{a_2 \sin q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2} \right)$$

$$q_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{a_2 \sin q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2} \right)$$



Cinemática Inversa do Robô RR

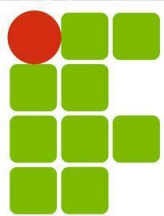
- Solução existe se: $\sqrt{x^2 + y^2} \in [a_1 - a_2, a_1 + a_2]$



Se $q_2 \geq 0^\circ$

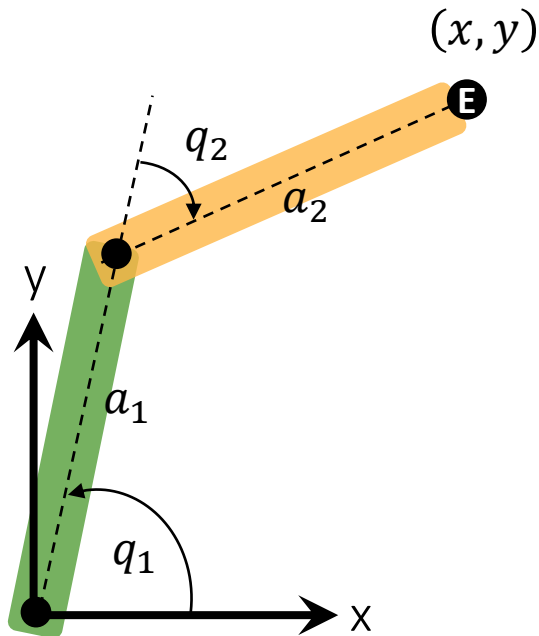
$$q_2 = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}\right)$$

$$q_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{a_2 \sin q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}\right)$$



Cinemática Inversa do Robô RR

- Solução existe se: $\sqrt{x^2 + y^2} \in [a_1 - a_2, a_1 + a_2]$



Se $q_2 < 0^\circ$

$$q_2 = -\arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}\right)$$

$$q_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{a_2 \sin q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}\right)$$



Exercício de Programação

- Visualizando a cinemática inversa de um robô planar de duas juntas;
- Acessar o *Jupyter Notebook* disponível em:

<https://colab.research.google.com/drive/1LJphDRc--4bV-BUcKDrGbjF08mZAL8aU>

- Visualizar as instruções nos exemplos;
- Resolver o exercício de fixação proposto.



Exercício de Simulação (CoppeliaSim)

- Apresentação do simulador CoppeliaSim;
- API Remota para linguagem Python;
- Visualizar o modelo de simulação do manipulador planar 2R;
- Incorporar a cinemática inversa no modelo de simulação;
- Realizar uma simulação e verificar o funcionamento;