Robótica Industrial

Engenharia de Controle e Automação – 9º Período

PROF. LUCAS VAGO SANTANA

lucas@ifes.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO

Aula 03 – Geometria Bidimensional (2D)

- Representação de objetos em 2D:
  - Pontos em coordenadas bidimensionais;
  - Vetores em coordenadas bidimensionais;
  - Pontos *versus* Vetores;
  - Pose;
- Rotações em 2D:
  - Matrizes de rotação;
  - Propriedades das matrizes de rotação;
  - Exemplo de simulação numérica;
- Translações em 2D:
  - Transformações homogêneas
  - Propriedades das transformações homogêneas
  - Exemplo de aplicação da pose
  - Exemplo de simulação numérica;

Referências Bibliográficas

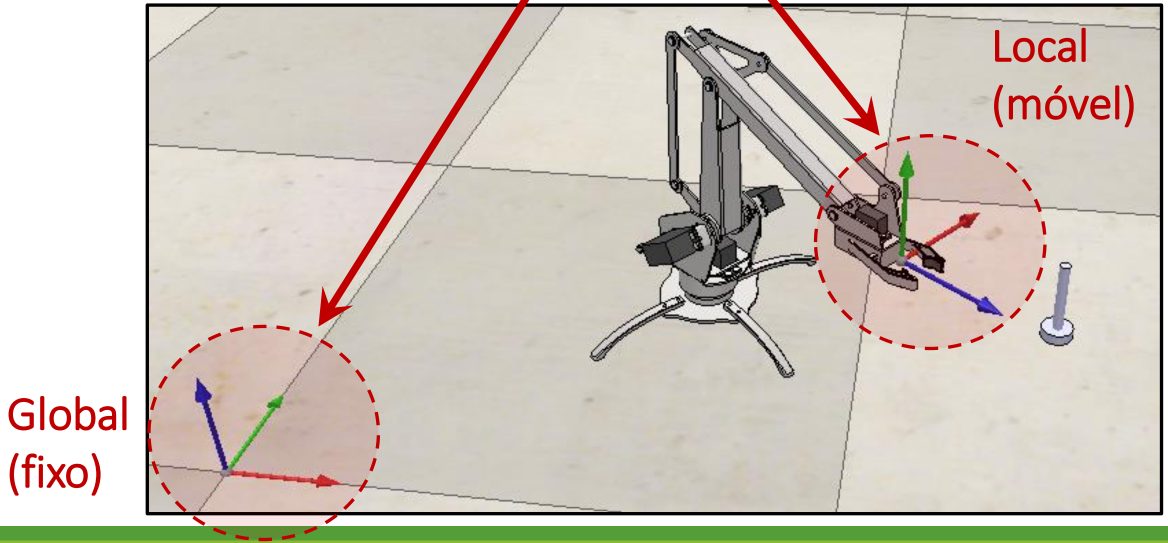
- CORKE, Peter. **Robotics, Vision and Control: Fundamentals Algorithms in MATLAB**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017.
- CORKE, Peter. **QUT Robot Academy: The open online robotics education resource**. Disponível em: <https://robotacademy.net.au/>. Acesso em 27 fev. 2020.
- NIKU, Saeed B. **Introduction to Robotics: Analysis, Control, Applications**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- SPONG, Mark W.; HUTCHINSON, Seth; VIDYASAGAR, M. **Robots Modeling and Control**. 1. ed. John Wiley & Sons, 2005.
- LYNCH, Kevin M.; PARK, Frank C. **Modern Robotics: Mechanics, Planning and Control**. 1. ed. Cambridge University Press, 2017.
- SICILIANO, Bruno; KHATIB, Oussama. **Springer Handbook of Robotics**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.

Representação de objetos: Uma visão geral

Representação de objetos: Uma visão geral

- Na engenharia, **conceitos abstratos da matemática** são **frequentemente** utilizados para **representação de objetos**;
- O conceito básico:
  - **Sistema de coordenadas cartesianas**;

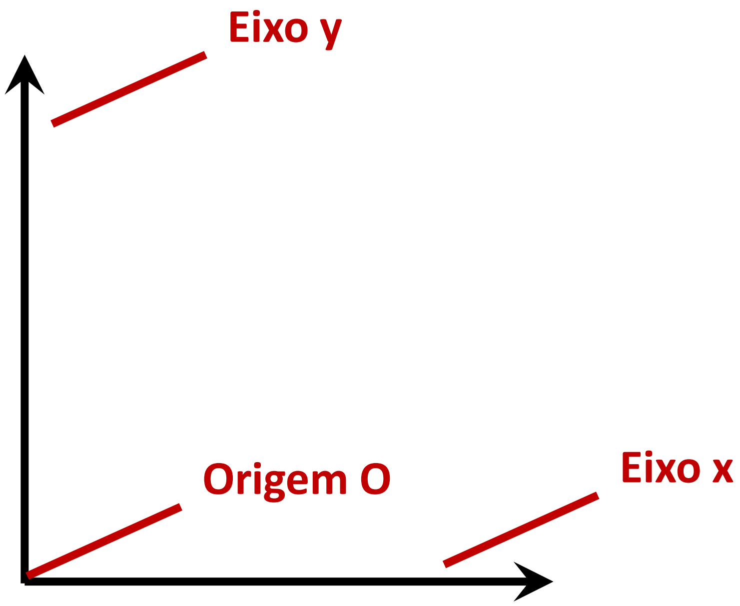
Sistemas de Coordenadas Cartesianas



Representação de objetos em 2D

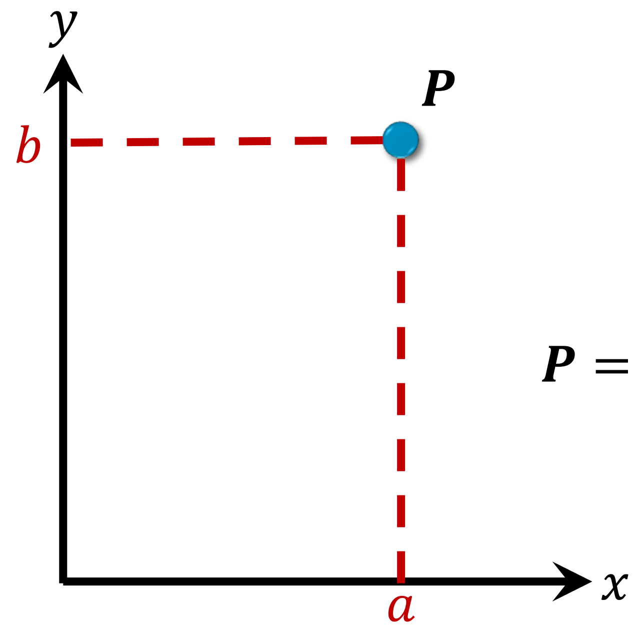
O sistema de coordenadas bidimensional

- Formação do sistema de coordenadas 2D:



Pontos em coordenadas bidimensionais

- Um ponto é uma **localização** dada por **duas coordenadas** reais;
- Na matemática:
  - $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^2$;
- Simbologia adotada:
  - Letra **maiúscula** em negrito;



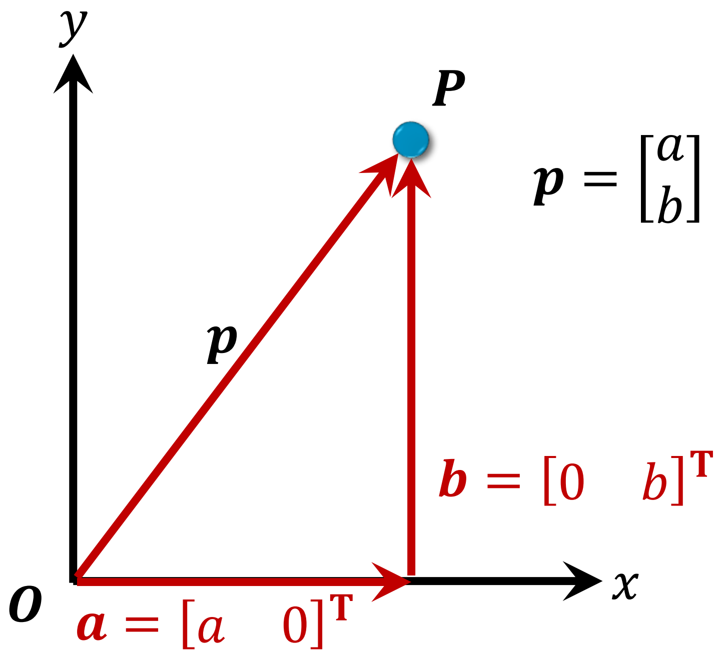
$\boldsymbol{P} = (a, b)$

Vetores em coordenadas bidimensionais

- Vetor é **uma rota** desde um ponto até outro;
- No exemplo, **o vetor** $\boldsymbol{p}$:
  - É o deslocamento relativo entre os pontos $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{P}$;
  - É o resultado da soma vetorial dos vetores:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix};$$

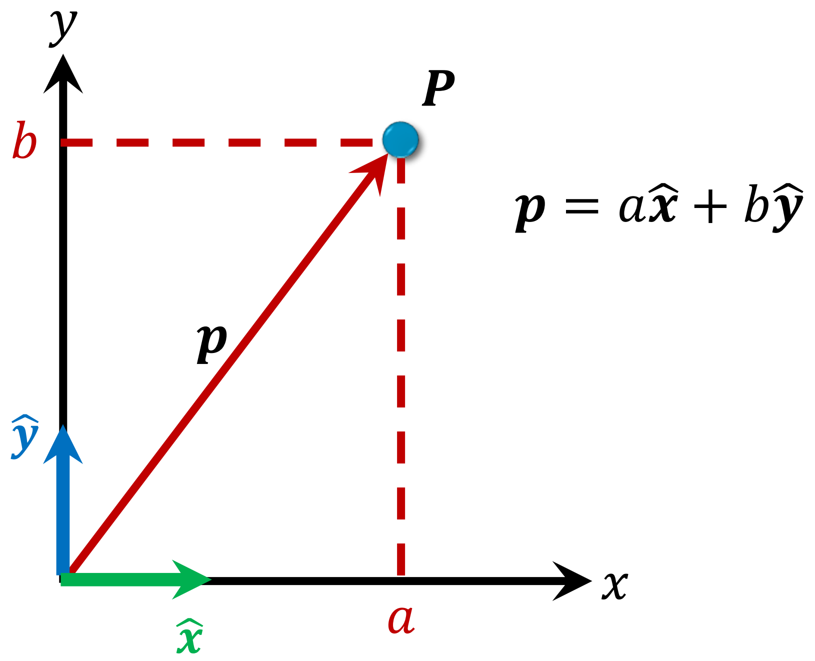
- Simbologia adotada:
  - Letra **minúscula** em negrito;



Vetores em coordenadas bidimensionais

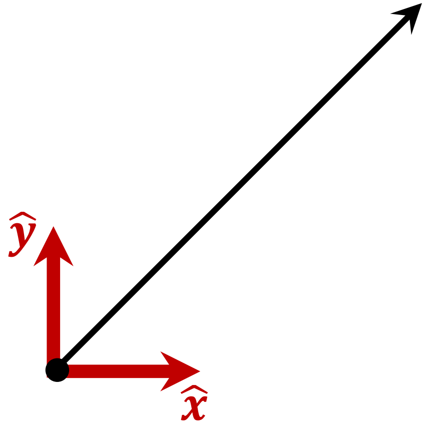
- **Outra forma** de **representar vetores** é usando **bases unitárias**;
- Neste exemplo, considere:
  - Vetor unitário $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;
  - Vetor unitário $\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;
- O **vetor** $\boldsymbol{p}$ pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{p} = a\hat{\boldsymbol{x}} + b\hat{\boldsymbol{y}}$$



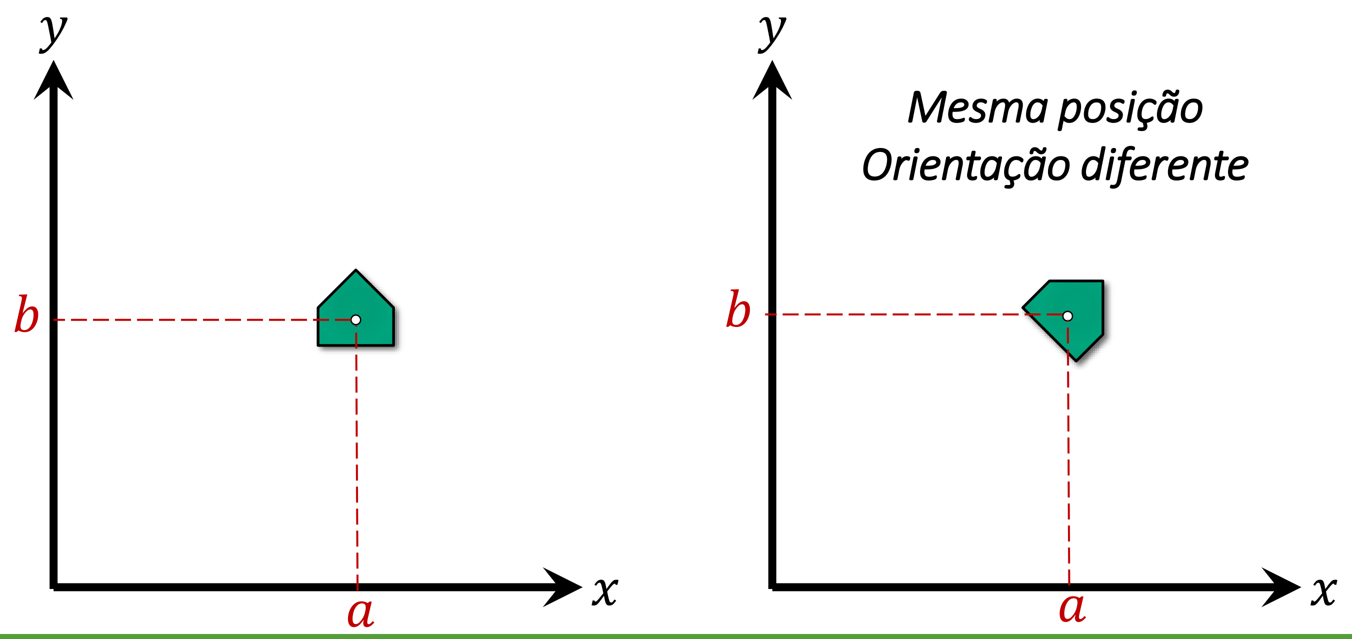
Pontos *versus* Vetores

- Pontos:
  - Definem apenas localização;
  - Não admitem operações (soma, subtração, outras);
- Vetores:
  - Definem a rota entre duas localizações;
  - Admitem operações vetoriais (soma, subtração, outras);



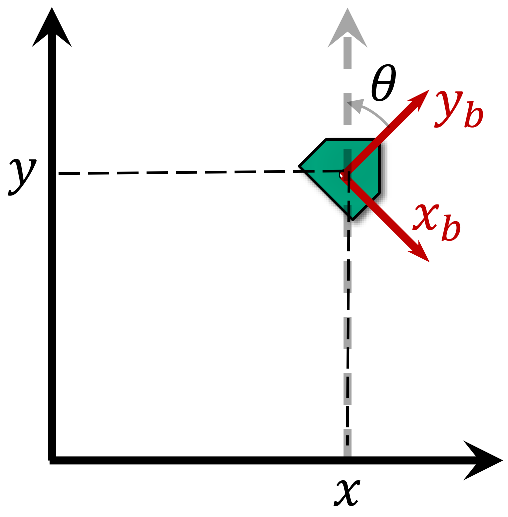
Pose

- A posição 2D depende **apenas** das coordenadas a e b;
- Porém, muitas aplicações exigem conhecimento do **ângulo de orientação** do dispositivo;



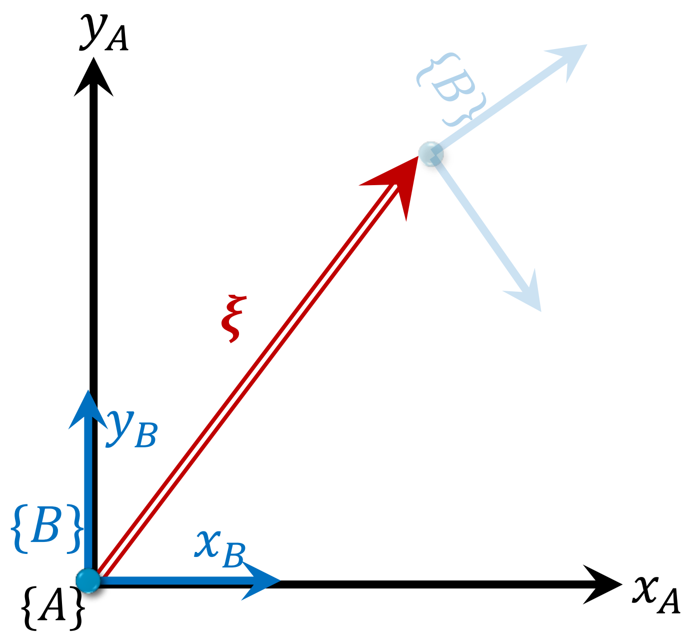
Pose

- Em **coordenadas bidimensionais** a pose é definida como uma função: $\xi(x, y, \theta)$;
- **Por convenção**, θ é determinado:
  - Anexando-se ao dispositivo um sistema de coordenadas local (eixos x_b e y_b);
  - Projetando-se o eixo global y sobre o dispositivo;
  - Lendo-se θ como o ângulo entre y_b e y;
- Geralmente, o sentido **anti-horário** de rotação é **positivo**, para obedecer à regra da mão direita;



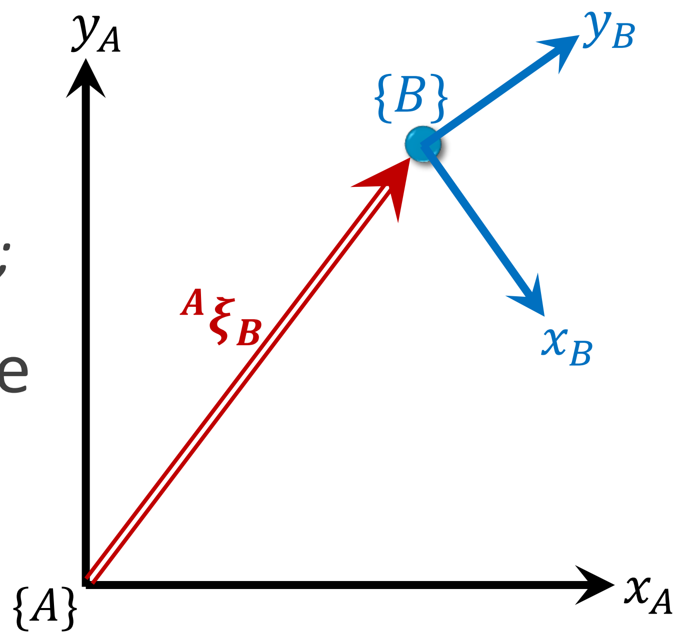
Pose

- A pose $\xi(x, y, \theta)$ é obtida como uma **matriz de transformação homogênea** (não é um vetor);
- Cuja finalidade é mapear um **movimento** que leva do sistema de coordenadas {A} até {B} ou vice-versa;
- Tal movimento é composto de:
  - translação;
  - e rotação;



Pose: Uma notação mais adequada

- **Definição:**
  - *A pose ξ é a transformação homogênea usada para converter as coordenadas de vetores ou pontos entre diferentes sistemas de coordenadas;*
- Uma notação mais adequada para uma pose de {B} para {A} é:



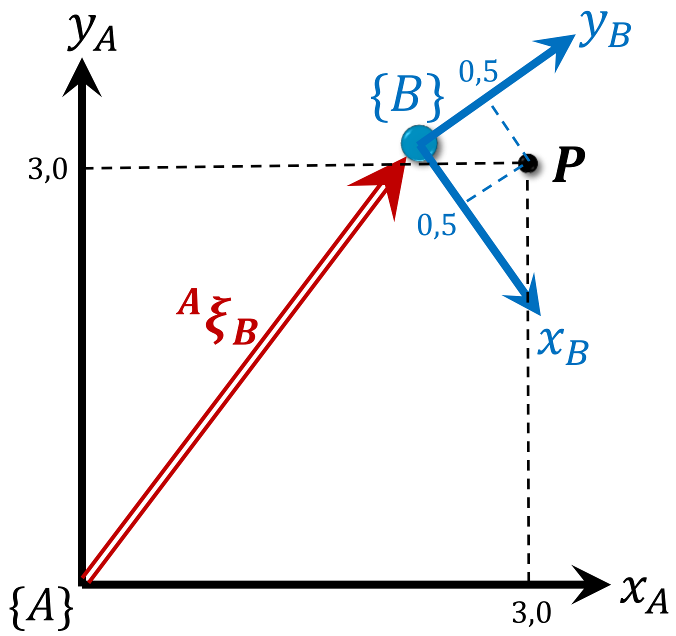
$${}^{A}\xi_{B}$$

Pose que leva de {B} para {A}

Pose: Significado

- **Exemplo:**

$$\begin{bmatrix} 3{,}0 \\ 3{,}0 \end{bmatrix} = {}^{A}\xi_{B} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

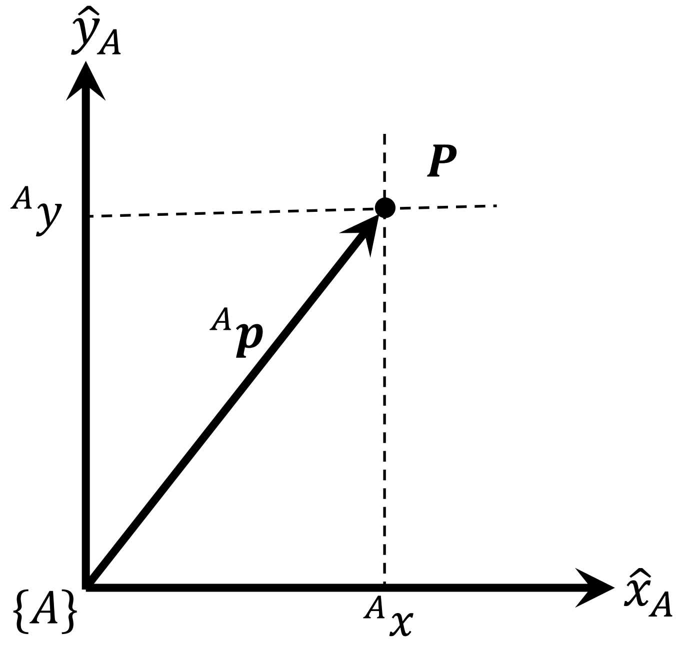


Rotações em 2D

Entendendo as rotações

- Dado o ponto $\boldsymbol{P} = ({}^{A}x,\ {}^{A}y)$;
- O vetor ${}^{A}\boldsymbol{p}$, pode ser escrito em função dos **vetores da base unitária** como:

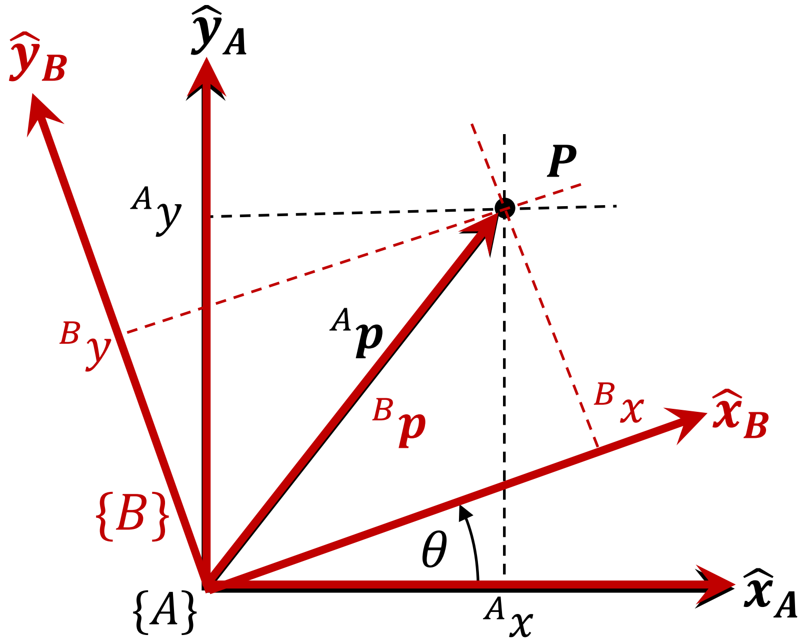
$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}x\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{A}} + {}^{A}y\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{A}} \quad (Eq.1) $$



Entendendo as rotações

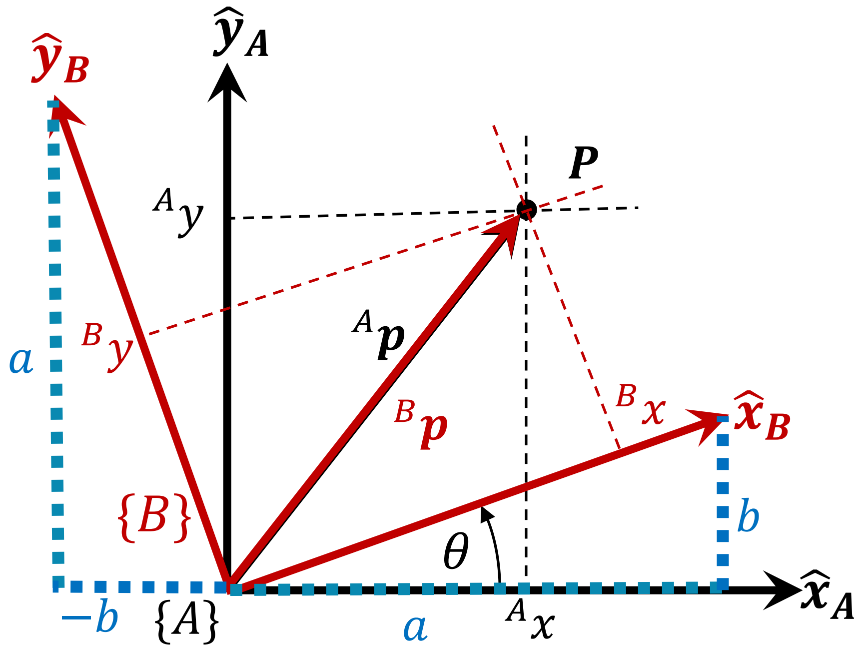
- Considerando o sistema {B}, de rotação θ em relação a {A};
- É possível escrever o ponto $\boldsymbol{P}$ em função dos **vetores unitários** de {B} como:

$$^{B}\boldsymbol{p} = {}^{B}x\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} + {}^{B}y\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{B}} \quad (Eq.2)$$



Entendendo as rotações

- Tendo em vista que $\hat{\boldsymbol{x}}_A, \hat{\boldsymbol{y}}_A, \hat{\boldsymbol{x}}_B$ e $\hat{\boldsymbol{y}}_B$ representam **vetores unitários;**
- Uma interpretação baseada no **círculo trigonométrico** conclui que:
  - $a = \cos\theta$
  - $b = \sin\theta$



Entendendo as rotações

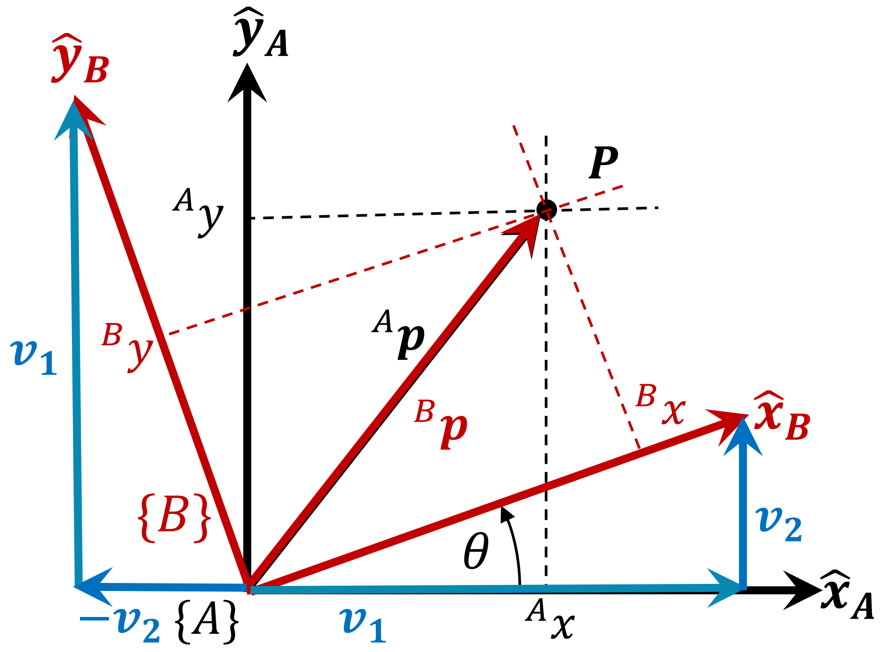
- Usando uma interpretação vetorial, os vetores dos eixos $\hat{\boldsymbol{x}}_B$ e $\hat{\boldsymbol{y}}_B$ são dados como:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_B = -\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_B = cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_A \quad + sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}_A \quad (Eq. 3)$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_B = -sen\theta\hat{\boldsymbol{x}}_A + cos\theta\hat{\boldsymbol{y}}_A \quad (Eq. 4)$$



Entendendo as rotações

- Retomando de Eq. (1) a Eq. (4):

$$^{A}\boldsymbol{p} = {^{A}x}\hat{\boldsymbol{x}}_A + {^{A}y}\hat{\boldsymbol{y}}_A \qquad Eq.(1)$$

$$^{B}\boldsymbol{p} = {^{B}x}\hat{\boldsymbol{x}}_B + {^{B}y}\hat{\boldsymbol{y}}_B \qquad Eq.(2)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_B = cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_A + sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}_A \qquad Eq.(3)$$

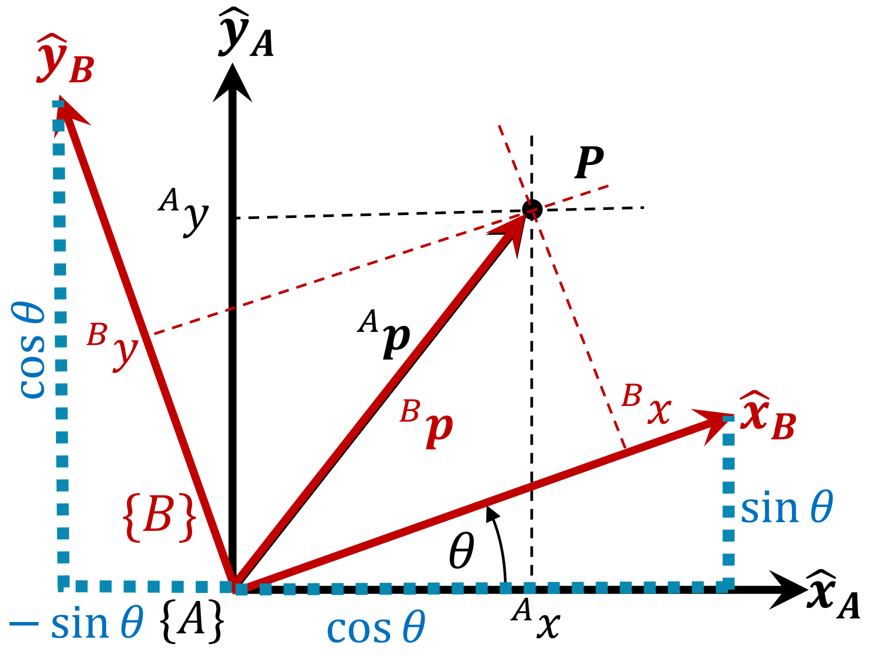
$$\hat{\boldsymbol{y}}_B = -sen\theta\hat{\boldsymbol{x}}_A + cos\theta\hat{\boldsymbol{y}}_A \qquad Eq.(4)$$

- Substituindo (3) e (4) em (2) e reorganizando:

$$^{B}\boldsymbol{p} = {^{B}x}(cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_A + sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}_A) + {^{B}y}(-sen\theta\hat{\boldsymbol{x}}_A + cos\theta\hat{\boldsymbol{y}}_A)$$

$$^{B}\boldsymbol{p} = ({^{B}x}\, cos\theta - {^{B}y}\, sin\theta)\hat{\boldsymbol{x}}_A + ({^{B}x}\, sen\theta + {^{B}y}\, cos\theta)\hat{\boldsymbol{y}}_A$$

- Como {A} e {B} compartilham a mesma origem $^{A}\boldsymbol{p} = {^{B}\boldsymbol{p}}$, o que gera uma equivalência entre os coeficientes em destaque;



Entendendo as rotações

- Escrevendo esta equivalência:

$$^{A}x = \,^{B}x\,cos\theta - \,^{B}y\,sin\theta$$
$$^{A}y = \,^{B}x\,sen\theta + \,^{B}y\,cos\theta$$

- Em representação matricial fica:

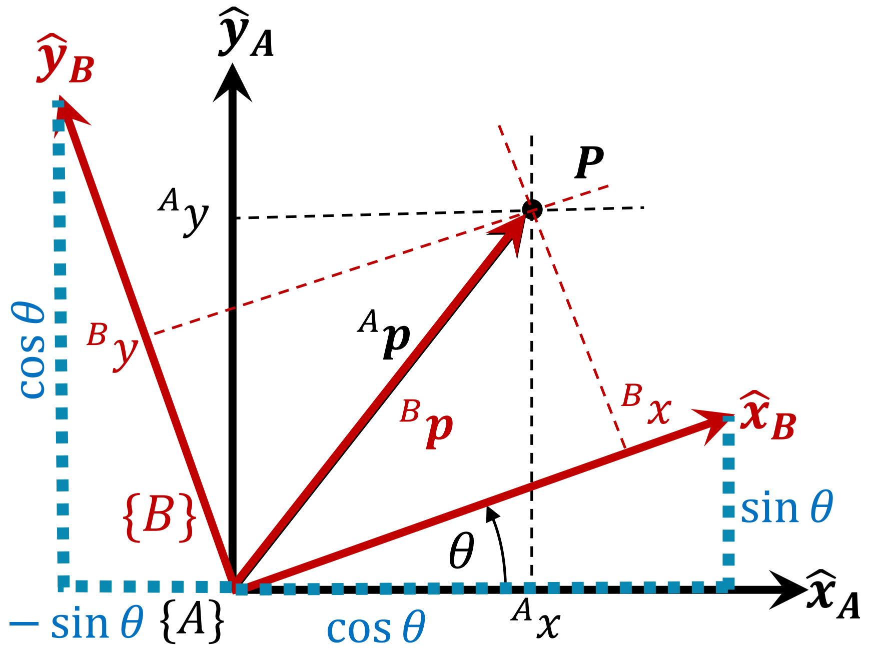
$$\begin{bmatrix} ^{A}x \\ ^{A}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -\,sin\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{B}x \\ ^{B}y \end{bmatrix}$$

- Substituindo as coordenadas pela denominação dos **vetores**:

$$^{A}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} cos\theta & -\,sin\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \,^{B}\boldsymbol{p}$$

- Contraindo a representação:

$$^{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{R}\,^{B}\boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} cos\theta & -\,sin\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$



A matriz de rotação

- $\boldsymbol{R}$ é conhecida como matriz de rotação:

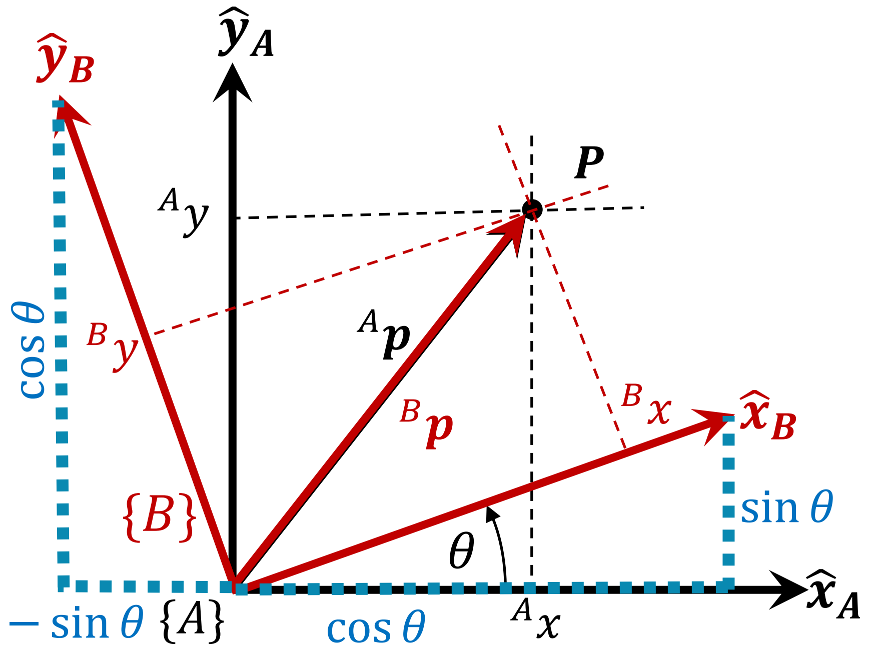
$$^{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{R}\,^{B}\boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} cos\theta & -\,sin\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

- Em **notação mais coerente**:

$$^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}\,^{B}\boldsymbol{p} \qquad ^{A}\boldsymbol{R}_{B} = \begin{bmatrix} cos\theta & -\,sin\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$^{A}\boldsymbol{R}_{B}$ é a matriz de rotação que:

- Rotaciona do sistema {B} para o sistema {A}
- Em função do ângulo θ entre {B} e {A}



Propriedades da matriz de rotação

- É ortogonal (ou ortonormal):
  - Cada coluna representa um vetor de tamanho unitário;
  - Cada coluna é ortogonal às demais;
  - Produto escalar (*dot product)* entre as colunas é 0;
- Sua inversa é igual à sua transposta ${}^{A}\boldsymbol{R}_{B}^{-1} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}^{T}$;
- Seu determinante $\det {}^{A}\boldsymbol{R}_{B} = 1$:
  - Significa que ao aplicar a rotação não se altera o módulo do vetor;
- Formalmente, na matemática essa matriz de rotação pertence ao conjunto especial ortogonal de dimensão 2: ${}^{A}\boldsymbol{R}_{B} \in \mathbb{SO}(2)$;

$$
{}^{A}\boldsymbol{R}_{B} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}
$$

$\mathbb{SO}(2)$: Conjunto de matrizes com características de rotação 2D

Propriedades da matriz de rotação

- O vetor dado no referencial {B} (${}^{B}\boldsymbol{p}$), pode ser **rotacionado** para seu equivalente no referencial {A} (${}^{A}\boldsymbol{p}$) pela expressão:

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$

- Aplicando a inversa da matriz ${}^{A}\boldsymbol{R}_{B}$, obtém-se:

$$ {}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}^{-1}\,{}^{A}\boldsymbol{p} $$

- Que representa uma rotação contrária, de {A} para {B};
- Pelas propriedades da matriz de rotação, pode-se escrever:

$$ {}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}^{T}\,{}^{A}\boldsymbol{p} \qquad {}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{B}\boldsymbol{R}_{A}\,{}^{A}\boldsymbol{p} $$

$$ {}^{B}\boldsymbol{R}_{A} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}^{T} $$

Rotaciona de {A} para {B}

Exercício de Programação

- Compreendendo as rotações em 2D com Python;
- Acessar o *Jupyter Notebook* disponível em:

  https://colab.research.google.com/drive/1-uEUwPyTfefC84SCBZSzTPsbnxSzLbO2

- Visualizar as instruções nos exemplos;
- Resolver o exercício de fixação proposto.

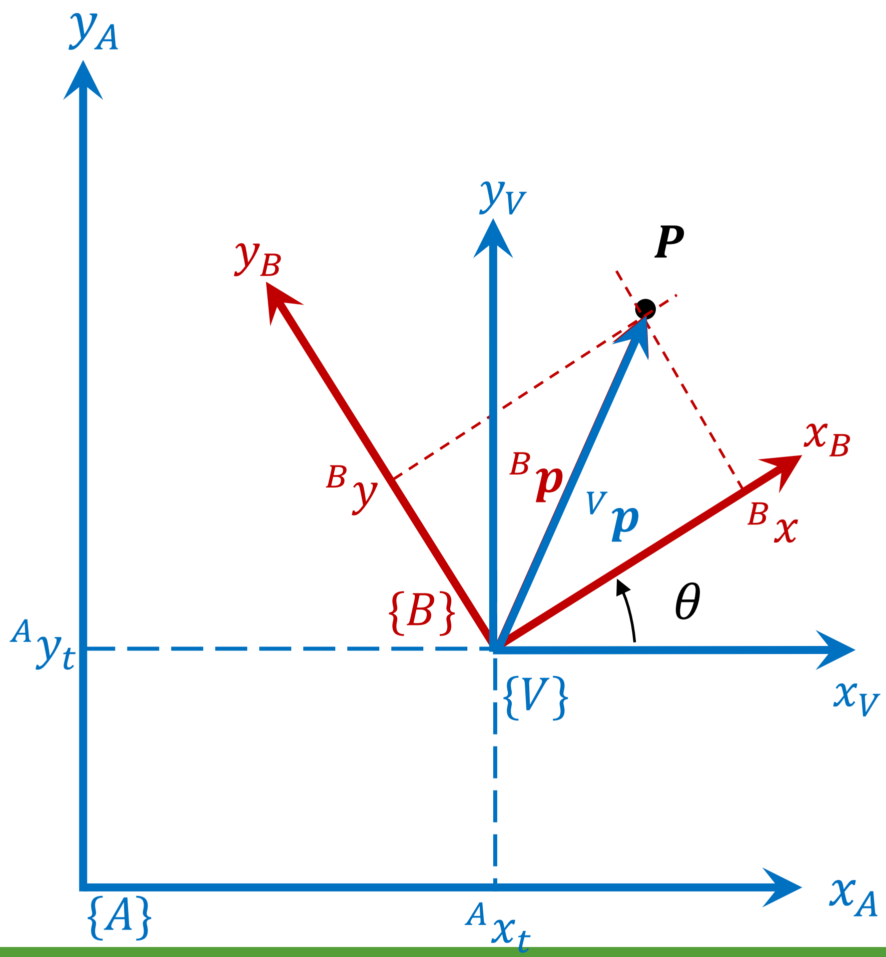
Translações em 2D

INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

Entendendo as translações

- Dados:
  - O sistema de coordenadas {A};
  - O sistema de coordenadas {B};
  - Transladados e rotacionados entre si;
- Sendo o vetor ${}^{B}\boldsymbol{p}$, aquele que liga a origem do sistema {B} ao ponto $\boldsymbol{P}$;
- Sendo {V} um sistema de coordenadas paralelo a {A};
- O vetor ${}^{V}\boldsymbol{p}$ pode ser obtido aplicando:

$$ {}^{V}\boldsymbol{p} = {}^{V}\boldsymbol{R}_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$



INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

Entendendo as translações

- Considere ${}^{A}\boldsymbol{t}$ o vetor de translação entre as origens de {A} e {V};
- Considere ${}^{A}\boldsymbol{p}$ o vetor desde a origem de {A} até o ponto $\boldsymbol{P}$;
- Uma soma vetorial permite escrever:

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{t} + \boxed{{}^{V}\boldsymbol{p}} $$

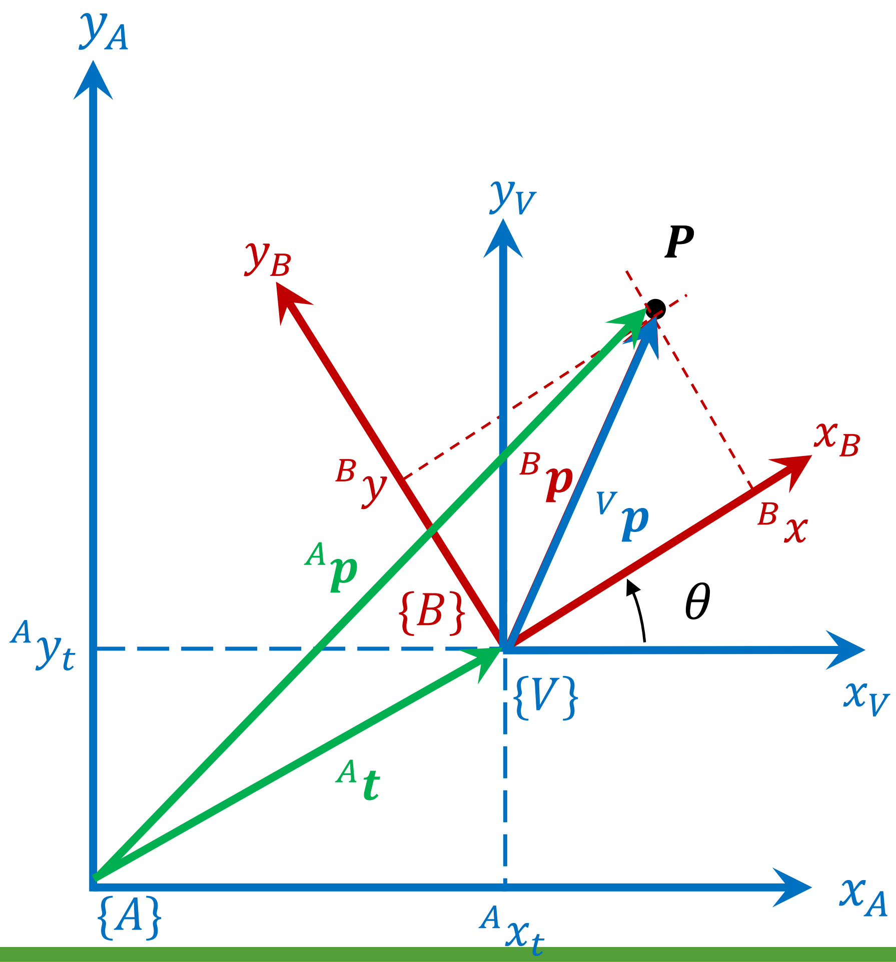
- Sabendo que:

$$ \boxed{{}^{V}\boldsymbol{p}} = {}^{V}\boldsymbol{R}_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$

- Como {A} é paralelo a {V}, pode-se escrever:

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{t} + {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$

Pois se {A} é paralelo a {V} $\rightarrow {}^{V}\boldsymbol{R}_{B} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}$



Entendendo as translações

- Expandindo ${}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{t} + {}^{A}\boldsymbol{R}_B\,{}^{B}\boldsymbol{p}$ em função de suas coordenadas, obtém-se:

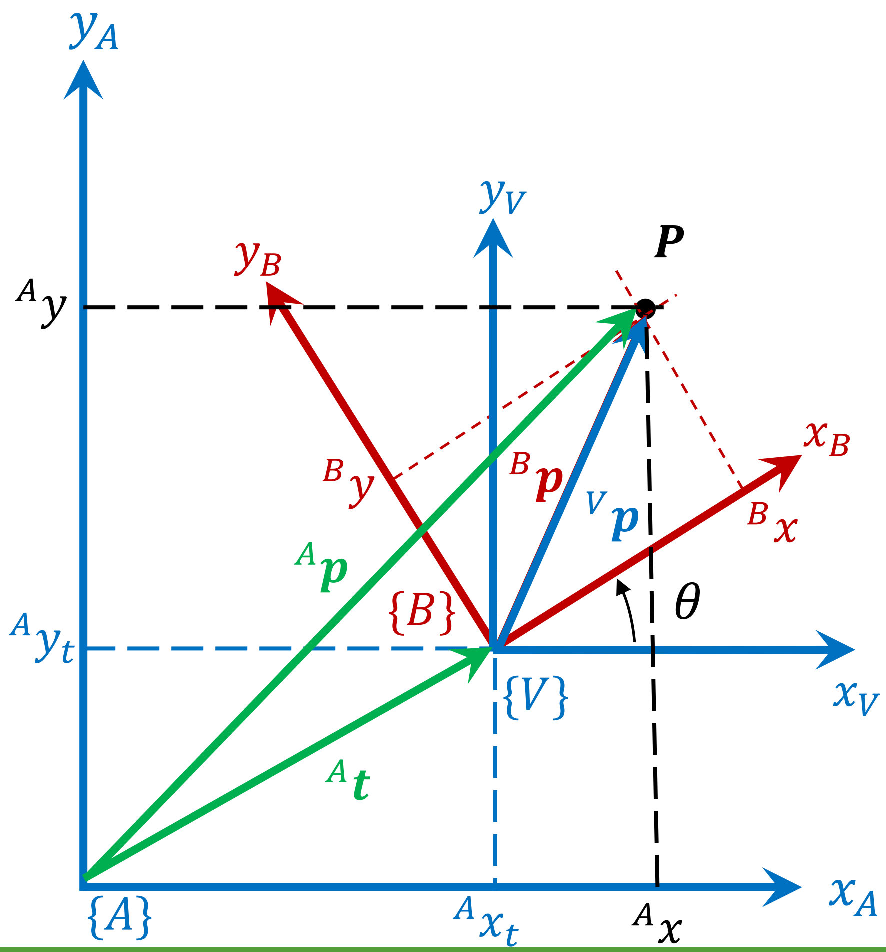
$$\begin{bmatrix} {}^{A}x \\ {}^{A}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}x_t \\ {}^{A}y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}x \\ {}^{B}y \end{bmatrix}$$

- Multiplicando no segundo termo:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}x \\ {}^{A}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}x_t + cos\theta\,{}^{B}x - sin\theta\,{}^{B}y \\ {}^{A}y_t + sin\theta\,{}^{B}x + cos\theta\,{}^{B}y \end{bmatrix}$$

- Rearranjando:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}x \\ {}^{A}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & {}^{A}x_t \\ sin\theta & cos\theta & {}^{A}y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}x \\ {}^{B}y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Entendendo as translações

- Para tornar **as dimensões simétricas**, adiciona-se uma linha, colocando a matriz anterior na sua **forma homogênea**:

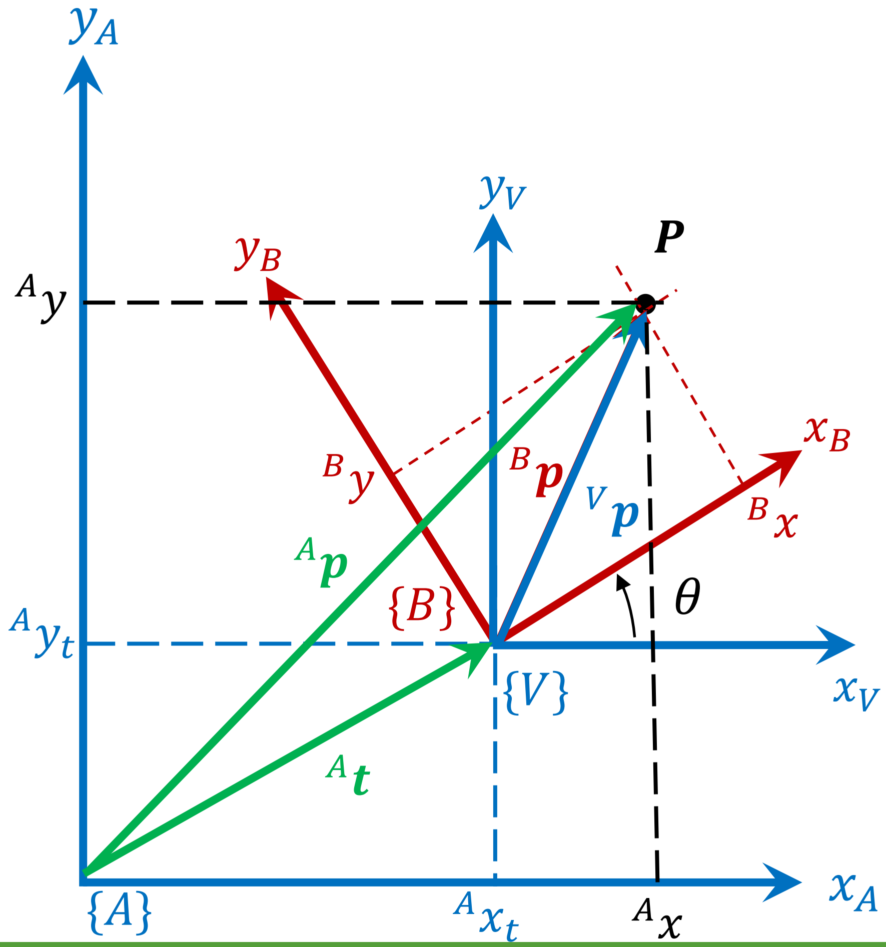
$$\begin{bmatrix} {}^{A}x \\ {}^{A}y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & {}^{A}x_t \\ sin\theta & cos\theta & {}^{A}y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}x \\ {}^{B}y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Em uma representação contraída:

$$\boxed{{}^{A}\tilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{R}_B & {}^{A}\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} {}^{B}\tilde{\boldsymbol{p}}}$$

Onde:

$${}^{n}\tilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} {}^{n}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{n}x \\ {}^{n}y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Transformação homogênea

- É uma matriz 3x3 que descreve a **pose** relativa entre os sistemas de coordenadas {A} e {B};
- Isto é:

$$ {}^{A}\boldsymbol{T}_{B} = {}^{A}\boldsymbol{\xi}_{B} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & {}^{A}x_t \\ sin\theta & cos\theta & {}^{A}y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- Formalmente, na matemática essa matriz de transformação homogênea pertence ao conjunto especial euclidiano de dimensão 2: ${}^{A}\boldsymbol{T}_{B} \in \mathbb{SE}\,(2)$;

$\mathbb{SE}(2)$: Conjunto de matrizes com características de rotação e translação 2D

Propriedades da transformação homogênea

- **Conversão:** Converte vetores descritos em {B} para seu equivalente em {A}:

$$ {}^{A}\tilde{\boldsymbol{p}} = {}^{A}\boldsymbol{T}_{B}\, {}^{B}\tilde{\boldsymbol{p}} $$

- **Inversão:** Inversa da matriz inverte o sentido da transformação:

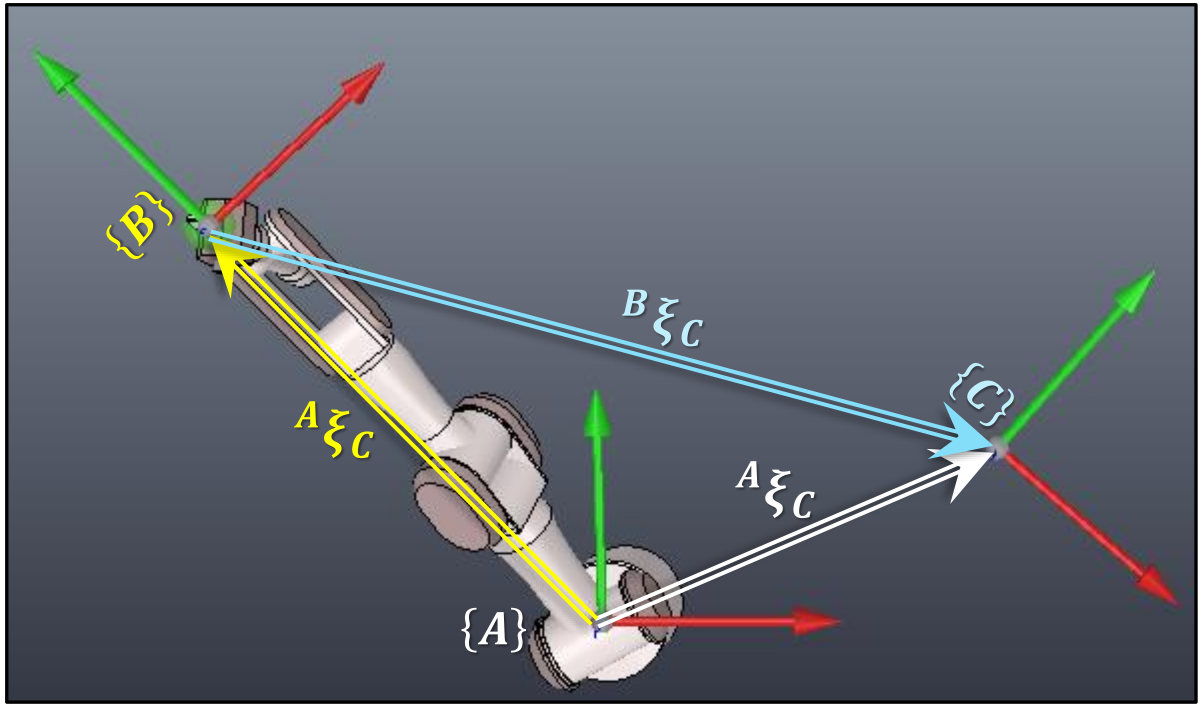
$$ {}^{A}\boldsymbol{T}_{B}^{-1} = {}^{B}\boldsymbol{T}_{A} $$

- **Composição:** Sucessivas transformações entre sistemas de coordenadas podem ser realizadas em cascata:

$$ {}^{A}\boldsymbol{T}_{D} = {}^{A}\boldsymbol{T}_{B}\, {}^{B}\boldsymbol{T}_{C}\, {}^{C}\boldsymbol{T}_{D} $$

Exemplo de aplicação da pose

- Suponha a seguinte condição:
  - {A} Sistema global (base do robô);
  - {B} Sistema da garra;
  - {C} Sistema de destino;
- Essas poses são usada para dimensionar os movimentos das juntas;



Exercício de Programação

- Compreendendo a pose em 2D com Python;
- Acessar o *Jupyter Notebook* disponível em:

https://colab.research.google.com/drive/1b5hfFkrFA1Qmzrsl7_lmMXzw7rQqZRc3

- Visualizar as instruções nos exemplos;
- Resolver o exercício de fixação proposto.