Robótica Industrial

Engenharia de Controle e Automação – 9º Período

PROF. LUCAS VAGO SANTANA
lucas@ifes.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO

Aula 04 – Geometria Tridimensional (3D)

- Representação de objetos em três dimensões;
  - Eixos de coordenadas tridimensionais;
  - Pontos e Vetores em coordenadas bidimensionais;
  - Pose tridimensional;
- Entendendo as rotações tridimensionais;
  - Rotação em torno de x;
  - Matrizes de rotação elementares;
  - Sequências de rotação tridimensionais;
  - Exemplo de simulação numérica;
- Entendendo a translação;
  - Transformações homogêneas tridimensionais
  - Propriedades das transformações homogêneas
  - Exemplo de simulação numérica;

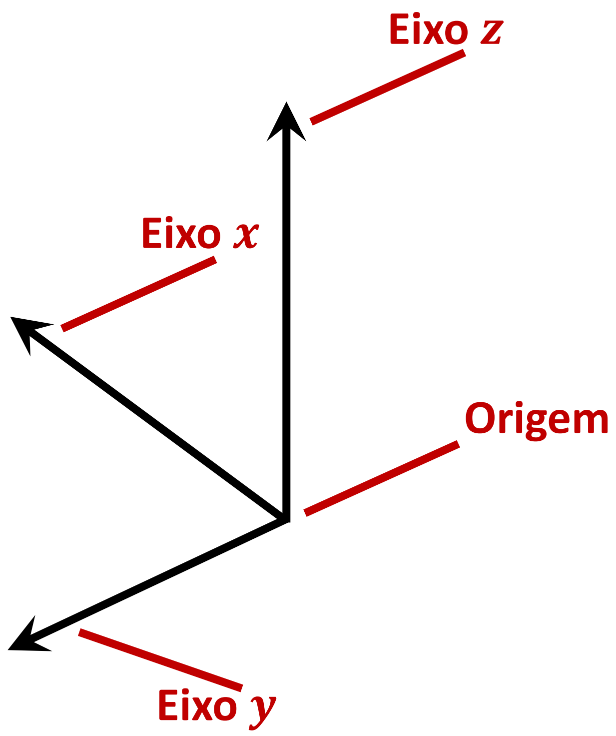
Referências Bibliográficas

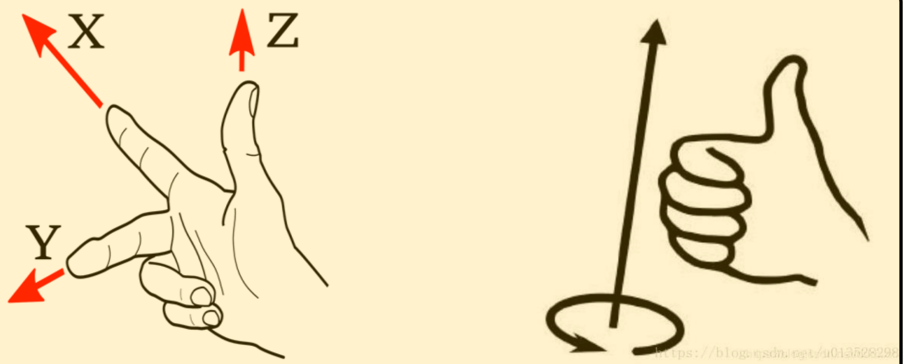
- CORKE, Peter. **Robotics, Vision and Control: Fundamentals Algorithms in MATLAB**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017.
- CORKE, Peter. **QUT Robot Academy: The open online robotics education resource**. Disponível em: <https://robotacademy.net.au/>. Acesso em 27 fev. 2020.
- NIKU, Saeed B. **Introduction to Robotics: Analysis, Control, Applications**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- SPONG, Mark W.; HUTCHINSON, Seth; VIDYASAGAR, M. **Robots Modeling and Control**. 1. ed. John Wiley & Sons, 2005.
- LYNCH, Kevin M.; PARK, Frank C. **Modern Robotics: Mechanics, Planning and Control**. 1. ed. Cambridge University Press, 2017.
- SICILIANO, Bruno; KHATIB, Oussama. **Springer Handbook of Robotics**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.

Representação de objetos em três dimensões

Eixo de coordenadas tridimensional

- Formação do eixo de coordenadas:

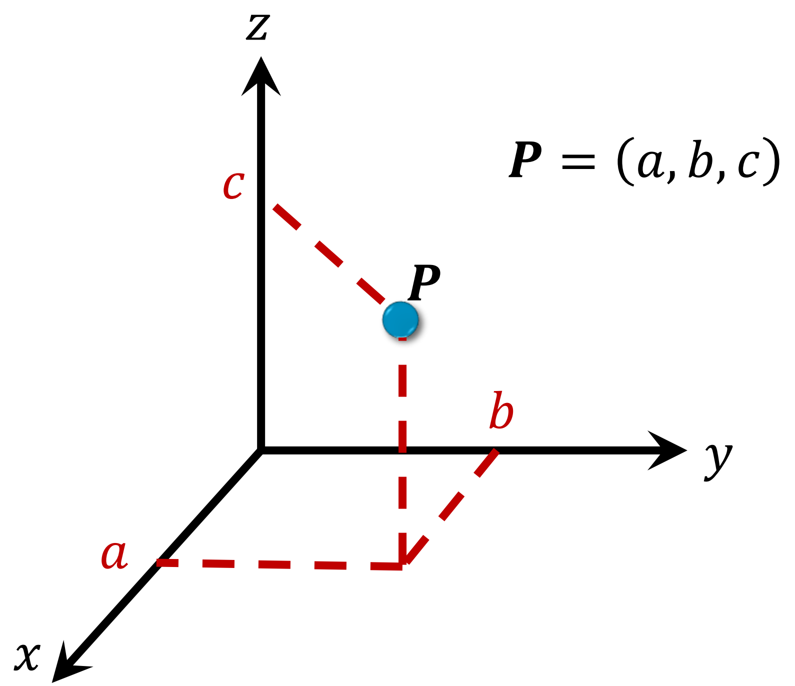




Regra da mão direita mostra o sentido POSITIVO das coordenadas lineares e dos ângulos de orientação

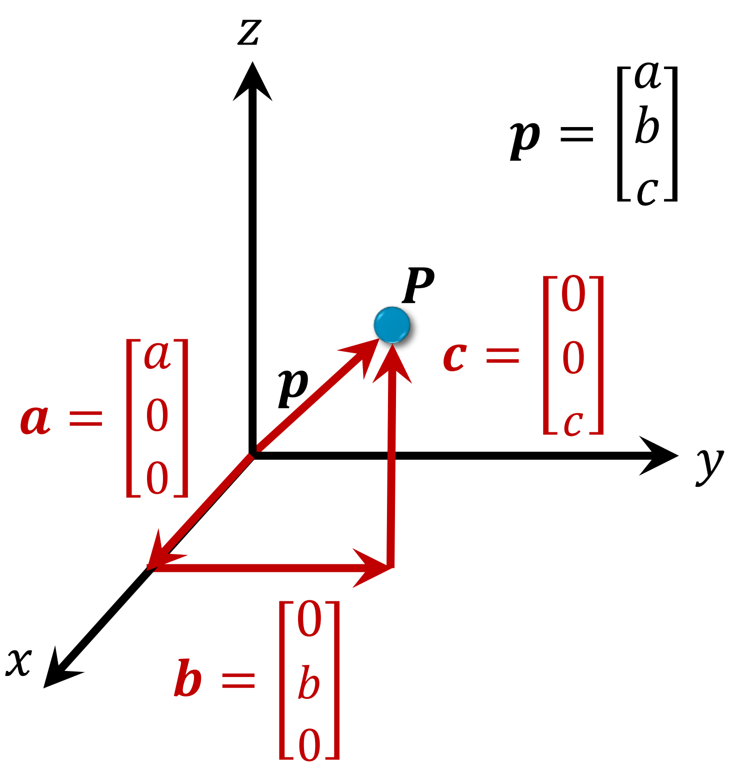
Pontos em coordenadas tridimensionais

- Um ponto é uma **localização** dada por **três** coordenadas espaciais;
- Na matemática $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^3$;
- Simbologia adotada será **negrito** com letra **maiúscula**;



Vetores em coordenadas tridimensionais

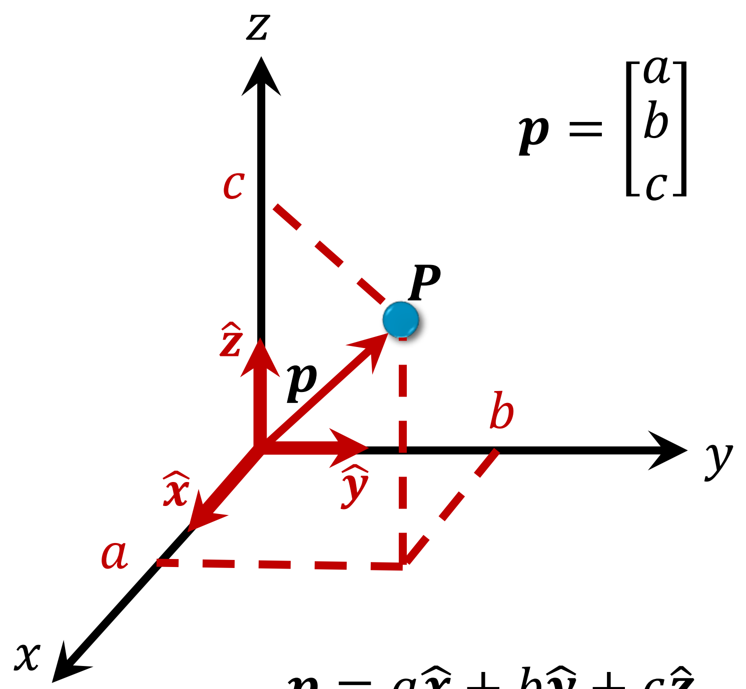
- Vetor é uma **rota** desde um ponto até outro;
- No exemplo, o **vetor** $\boldsymbol{p}$ representa um deslocamento relativo da origem até o ponto $\boldsymbol{P}$;
- Também representa a composição (soma vetorial) dos vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$;
- Na matemática $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$;
- Simbologia adotada é **negrito** com letra **minúscula**;



Vetores em coordenadas tridimensionais

- Outra forma de representação de um vetor é a partir de **vetores unitários**;

- Neste exemplo:
  - Vetor unitário $\hat{\boldsymbol{x}} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$;
  - Vetor unitário $\hat{\boldsymbol{y}} = [0 \quad 1 \quad 0]^T$;
  - Vetor unitário $\hat{\boldsymbol{z}} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$;

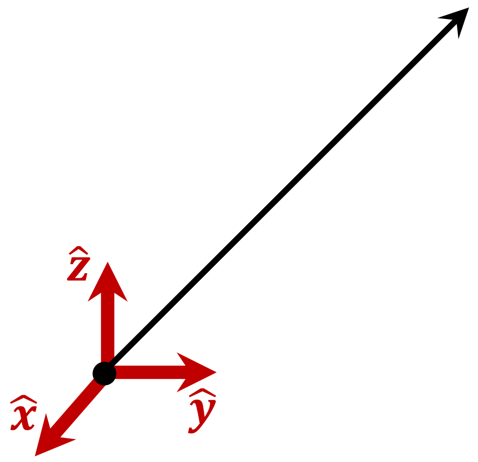


$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = a\hat{\boldsymbol{x}} + b\hat{\boldsymbol{y}} + c\hat{\boldsymbol{z}}$$

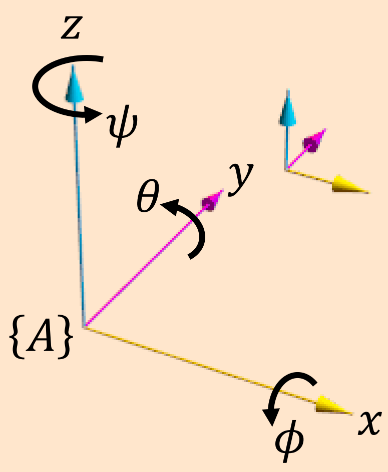
Pontos *versus* Vetores

- Pontos:
  - Definem uma localização;
  - Não se soma, subtrai ou multiplica pontos;
- Vetores:
  - Não especificam uma localização, mas sim como sair de uma localização para chegar em outra;
  - Vetores podem ser somados, subtraídos e multiplicados;



Pose

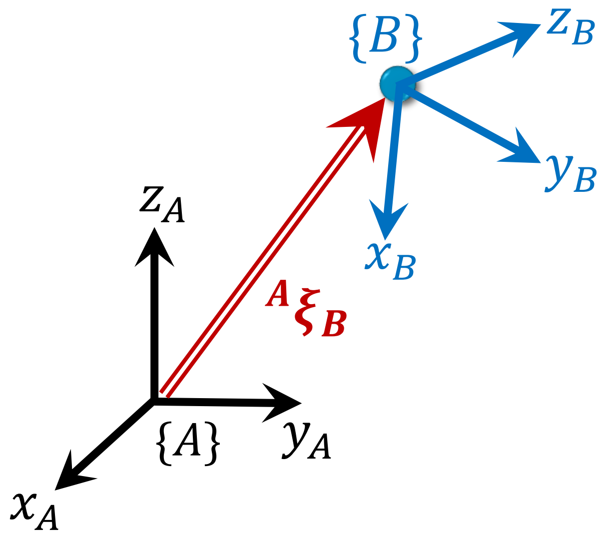
- Dado um sistema de coordenadas tridimensional, é possível determinar a pose de um objeto por suas coordenadas lineares x, y e z e angulares ϕ, θ e ψ;
- $^{A}\xi = (x, y, z, \phi, \theta, \psi)$



https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/how-to-interpret-IMU-sensor-data-dead-reckoning-rotation-matrix-creation/

Pose: Uma notação mais adequada

- A pose relativa entre dois sistemas de coordenadas {A} e {B} descreve uma **transformação matemática** que leva as **projeções de vetores ou pontos** descritos no sistema {B} até o sistema {A};



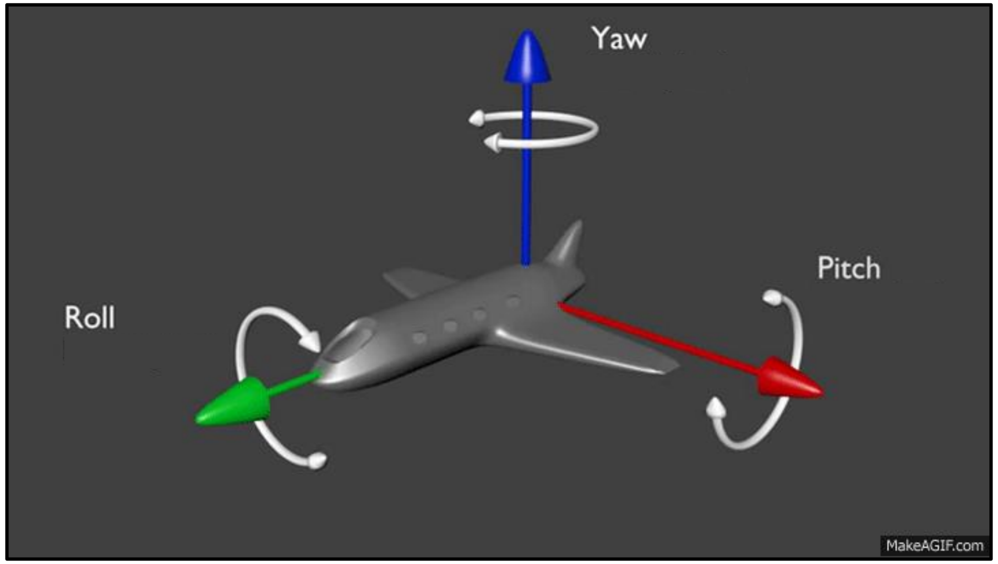
$${}^{A}\xi_{B}$$

Pose que leva de {B} para {A}

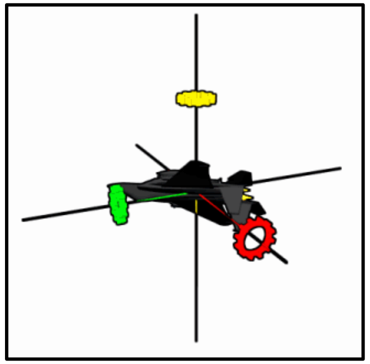
Entendendo as rotações tridimensionais

Entendendo as rotações tridimensionais

- Rotações tridimensionais não são triviais;
- Podem ocorrer individualmente ou simultaneamente em torno dos três eixos:
  - x: ϕ – Ângulo de Rolagem (Roll)
  - y: θ – Ângulo de Arfagem (Pitch)
  - z: ψ – Ângulo de Guinada (Yaw)



https://makeagif.com/gif/airplane-control-roll-pitch-yaw-MybXwU

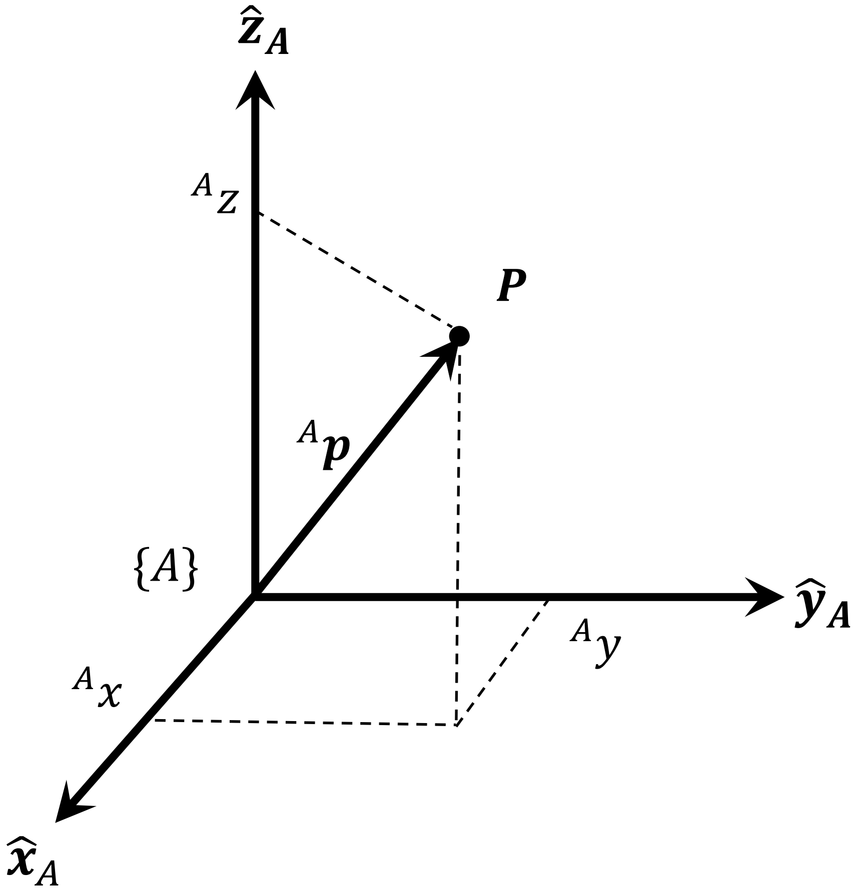


https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Roll,_Pitch_and_Yaw

Rotação em torno de x

- Dado o ponto $\boldsymbol{P}$ descrito em relação à origem de {A} pelo vetor ${}^{A}\boldsymbol{p}$;
- É possível escrevê-lo em função dos **vetores unitários** e escalares como:

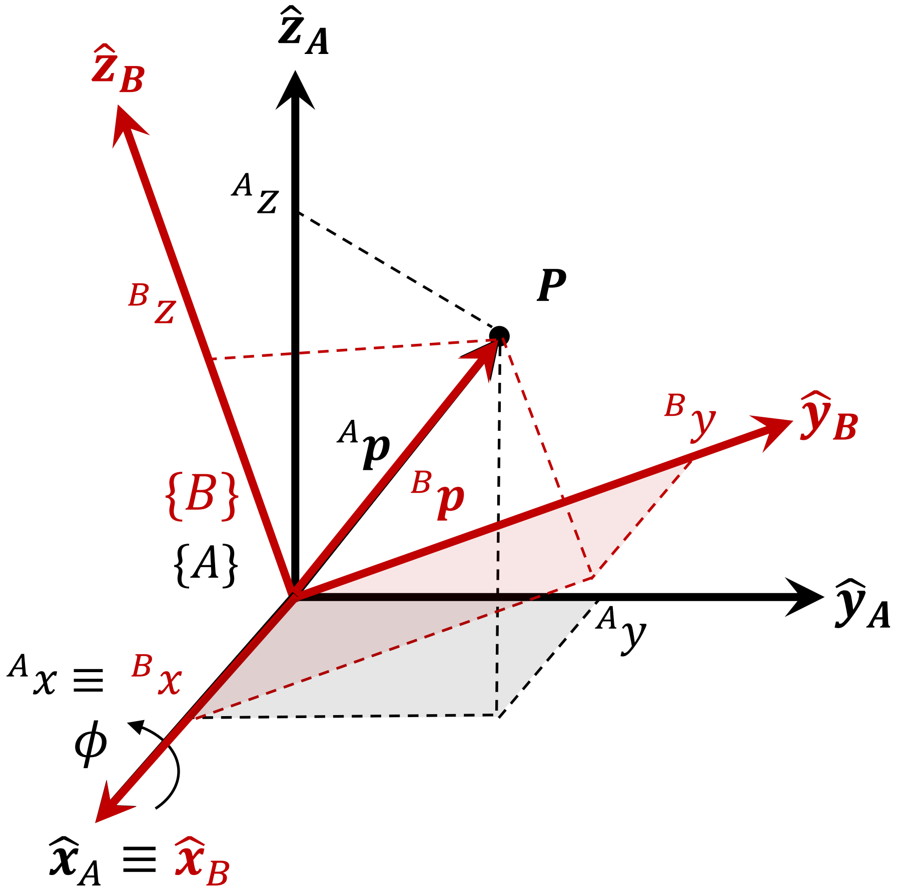
$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}x\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{A}} + {}^{A}y\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{A}} + {}^{A}z\hat{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{A}} \quad (Eq.1) $$



Rotação em torno de x

- Considerando o sistema {B}, de rotação ϕ em relação a {A};
- É possível escrever o ponto $\boldsymbol{P}$ em função dos **vetores unitários** de {B} como:

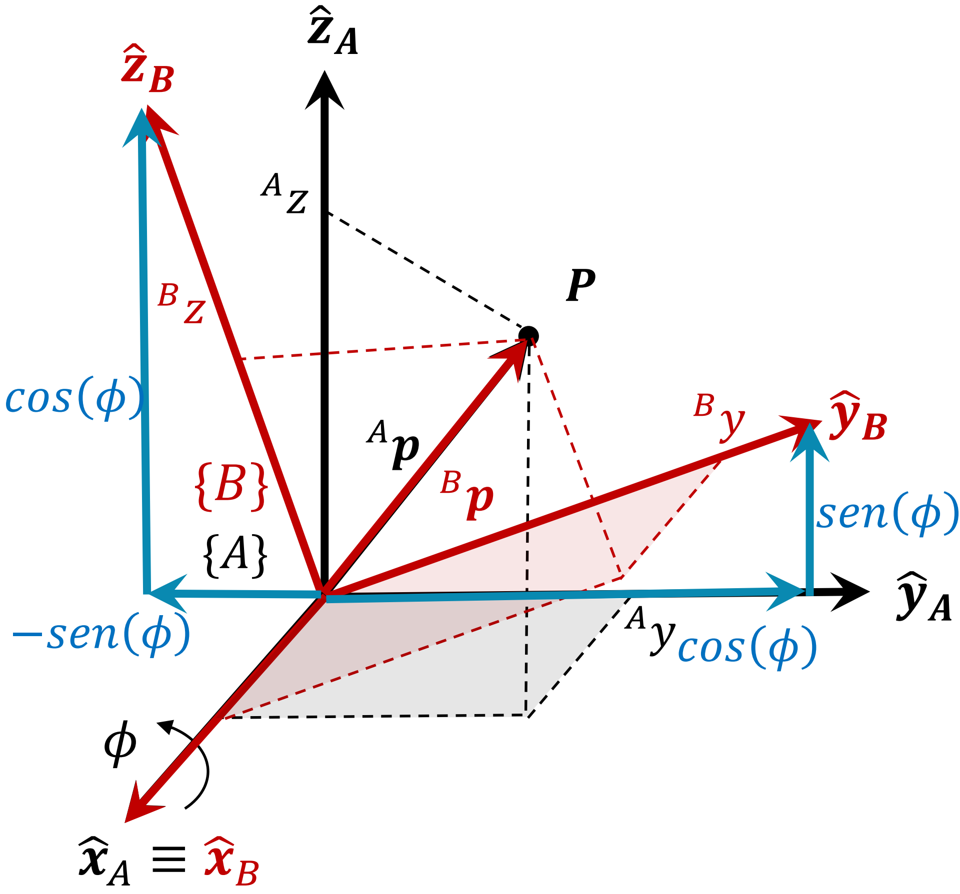
$$ {}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{B}x\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} + {}^{B}y\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{B}} + {}^{B}z\hat{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{B}} \quad (Eq. 2) $$



Rotação em torno de x

- Tendo em vista que que os eixos representam **vetores unitários;**
- **As cotas** dos eixos de {B} em relação aos eixos de {A} **podem ser escritas** como:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_B = \hat{\boldsymbol{x}}_A \quad (Eq.3)$$
$$\hat{\boldsymbol{y}}_B = cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}_A + sen\phi\hat{\boldsymbol{z}}_A \quad (Eq.4)$$
$$\hat{\boldsymbol{z}}_B = -sen\phi\hat{\boldsymbol{y}}_A + cos\phi\hat{\boldsymbol{z}}_A \quad (Eq.5)$$



Rotação em torno de x

- Retomando de $Eq.(1)\ a\ Eq.(5)$:

$$^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}x\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{A}} + {}^{A}y\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{A}} + {}^{A}z\hat{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{A}} \quad Eq.(1)$$

$$^{B}\boldsymbol{p} = {}^{B}x\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} + {}^{B}y\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{B}} + {}^{B}z\hat{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{B}} \quad Eq.(2)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{B} = \hat{\boldsymbol{x}}_{A} \quad Eq.(3)$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{B} = cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}_{A} + sen\phi\hat{\boldsymbol{z}}_{A} \quad Eq.(4)$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{B} = -sen\phi\hat{\boldsymbol{y}}_{A} + cos\phi\hat{\boldsymbol{z}}_{A} \quad Eq.(5)$$

- Substituindo $Eq.(3)\ a\ Eq.(5)$ em $Eq.(2)$, multiplicando e rearranjando:

$$^{B}\boldsymbol{p} = {}^{B}x(\hat{\boldsymbol{x}}_{A}) + {}^{B}y(cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}_{A} + sen\phi\hat{\boldsymbol{z}}_{A}) + {}^{B}z(-sen\phi\hat{\boldsymbol{y}}_{A} + cos\phi\hat{\boldsymbol{z}}_{A})$$

$$^{B}\boldsymbol{p} = ({}^{B}x)\hat{\boldsymbol{x}}_{A} + ({}^{B}y\ cos\phi - {}^{B}z\ sen\phi)\hat{\boldsymbol{y}}_{A} + ({}^{B}y\ sin\phi + {}^{B}z\ cos\phi)\hat{\boldsymbol{z}}_{A} \quad Eq.(6)$$

- Como {A} e {B} compartilham a mesma origem ${}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{B}\boldsymbol{p}$. Logo, há uma equivalência entre os coeficientes da $Eq.(6)$ e da $Eq.(1)$;

Rotação em torno de x

- Retomando a equivalência:

$$^{A}x = {}^{B}x$$

$$^{A}y = {}^{B}y\,cos\phi - {}^{B}z\,sen\phi$$

$$^{A}z = {}^{B}y\,sen\phi + {}^{B}z\,cos\phi$$

- Em representação matricial fica:

$$\begin{bmatrix} ^{A}x \\ ^{A}y \\ ^{A}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & -sen\phi \\ 0 & sen\phi & cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{B}x \\ ^{B}y \\ ^{B}z \end{bmatrix}$$

- Substituindo as coordenadas pela denominação dos vetores:

$$^{A}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & -sen\phi \\ 0 & sen\phi & cos\phi \end{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{p}$$

Rotação em torno de x

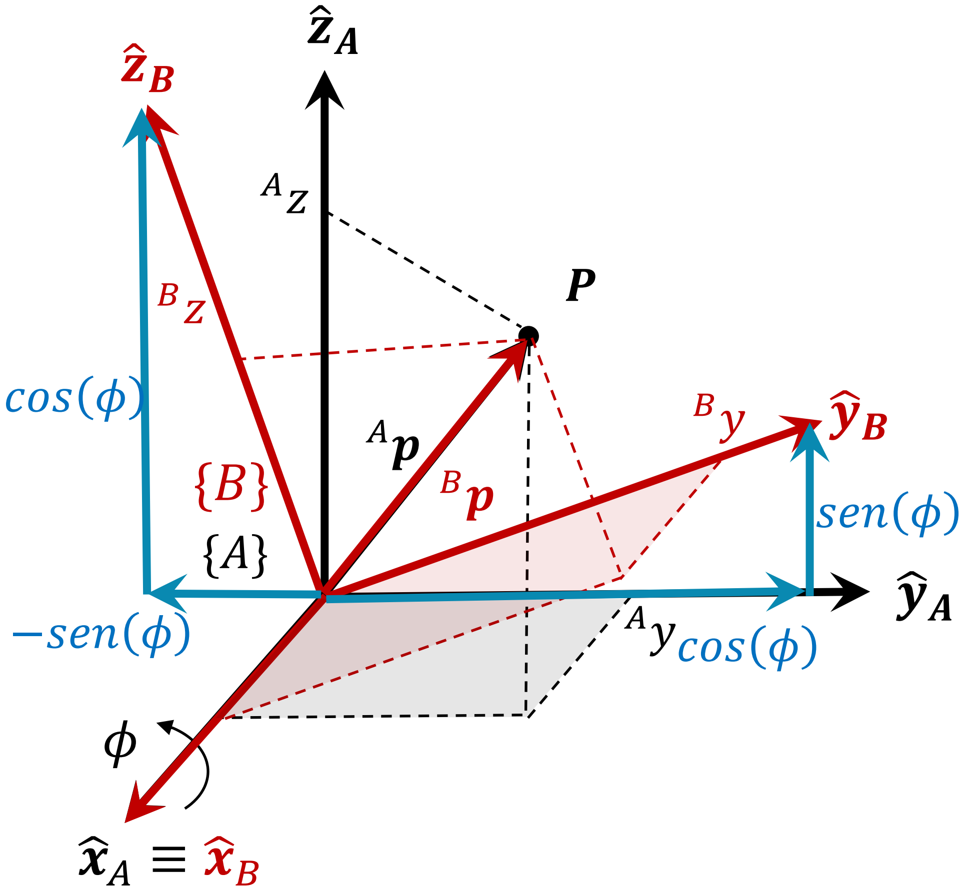
- Contraindo a notação:

$$^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}\, {}^{B}\boldsymbol{p}, \text{ onde}$$

$$^{A}\boldsymbol{R}_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & -sen\phi \\ 0 & sen\phi & cos\phi \end{bmatrix}$$

$^{A}\boldsymbol{R}_{B} = \boldsymbol{R}_{x}(\phi)$ é a matriz de rotação que:

- Rotaciona do sistema {B} para o sistema {A}
- Em função do ângulo ϕ em torno do eixo x



Matrizes de rotação elementares

- Em processo análogo, poder-se-ia concluir as demais matrizes elementares de rotação como:

$$\boldsymbol{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & -sen\phi \\ 0 & sen\phi & cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} cos\psi & -sen\psi & 0 \\ sen\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades das matrizes de rotação 3D

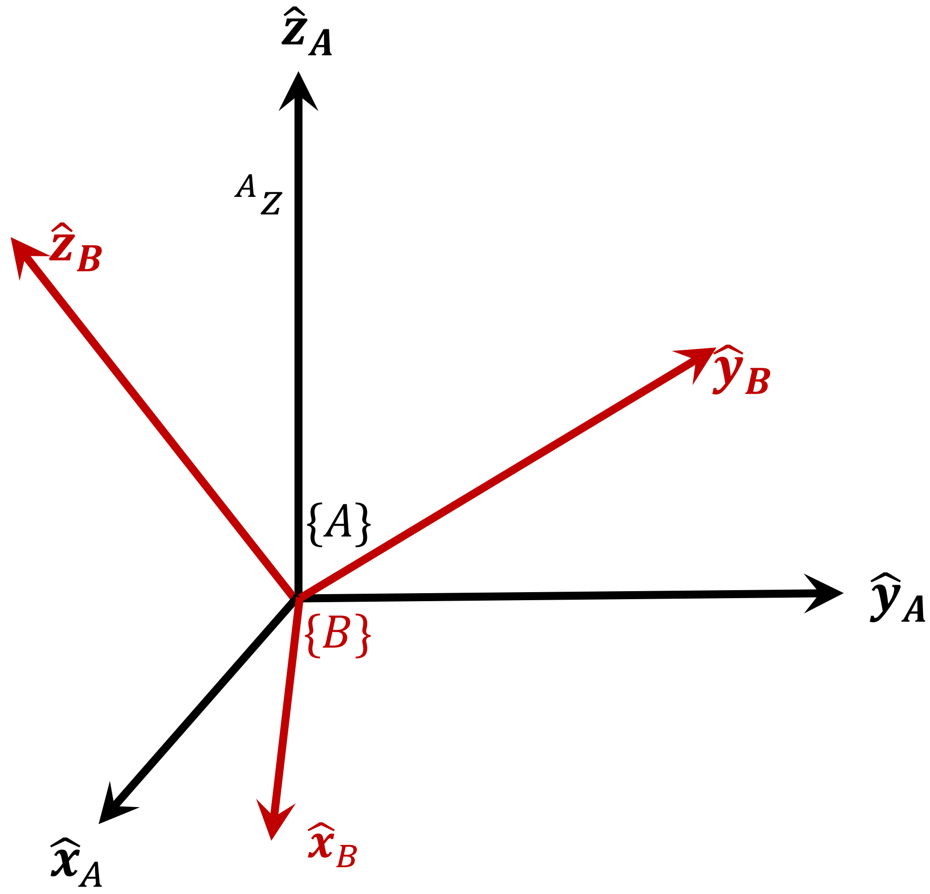
- São ortogonais (ou ortonormais):
  - Cada coluna representa um vetor de tamanho unitário;
  - Cada coluna é ortogonal às demais;
- Sua inversa é igual à sua transposta ${}^{A}\boldsymbol{R}_{B}^{-1} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}^{T}$;
- Seu determinante $\det {}^{A}\boldsymbol{R}_{B} = 1$:
  - Significa que ao aplicar a rotação não se altera o módulo do vetor;
- Rotações **não são comutativas**:
  - $\boldsymbol{R}_x(\phi)\boldsymbol{R}_z(\psi) \neq \boldsymbol{R}_z(\psi)\boldsymbol{R}_x(\phi)$
- Formalmente, na matemática essa matriz de rotação pertence ao grupo especial ortogonal de dimensão 3: ${}^{A}\boldsymbol{R}_{B} \in \mathbb{SO}(3)$;

Sequências de rotação tridimensionais

Sequências de rotação

- Enunciado em 1775, o Teorema da Rotação de Leonhard Euler:

Leonhard Euler
(1707-1783)



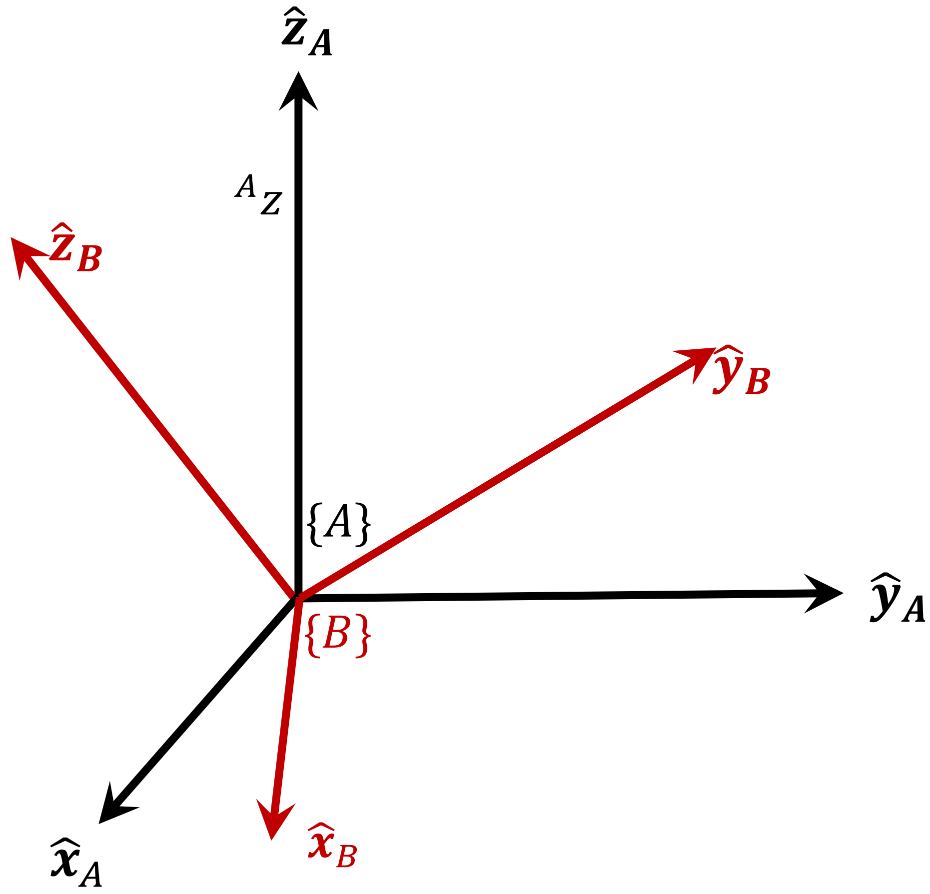
Qualquer par de sistemas de coordenadas ortonormais e independentes, pode ser relacionado por uma sequência de rotações (não mais que 3) ao redor de seus eixos, desde que nenhuma rotação sucessiva ocorra em torno do mesmo eixo

Sequências de rotação de Euler

- Desse teorema, as possíveis combinações são:

XYX	XYZ	XZY	XZX
YXY	YXZ	YZX	YZY
ZXY	ZXZ	ZYX	ZYZ

- Das quais, aquelas compostas por eixos repetidos originam a denominação de **ângulos de Euler**;
- Na robótica, **ângulos de Euler** geralmente se referem à sequência ZYZ que **não é a única!**

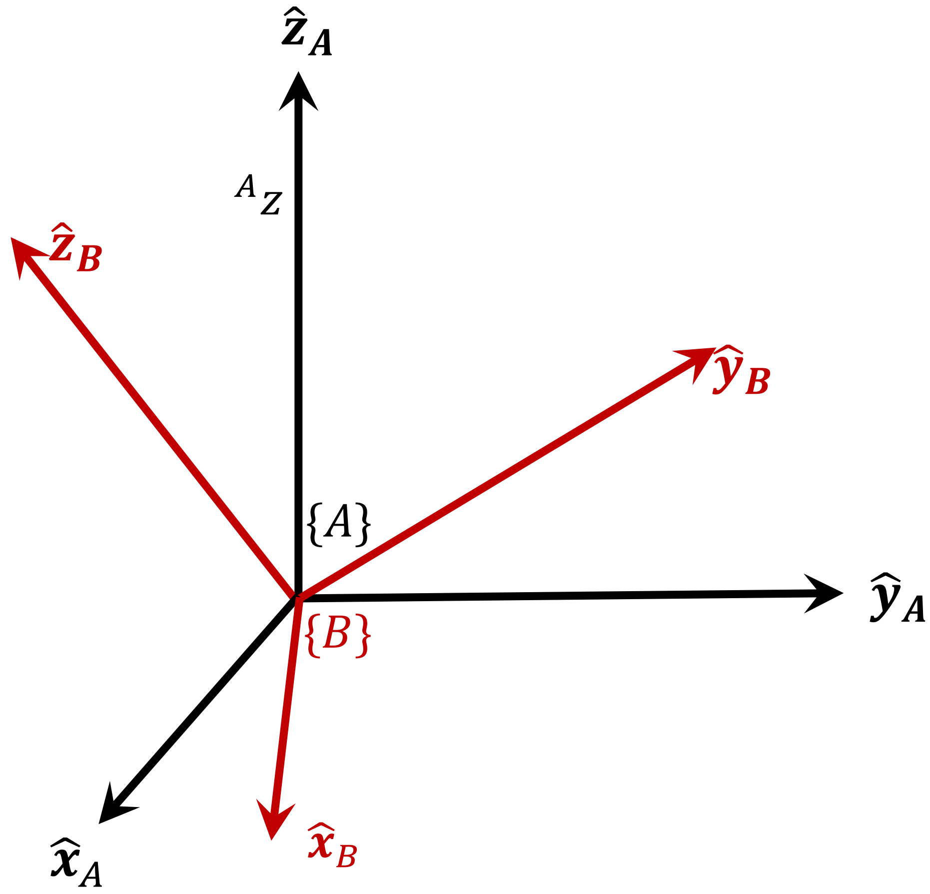


Sequências de rotação de Tait-Bryan (Cardan)

- As demais sequências originam os **ângulos de Tait–Bryan ou Cardan**:

XYX	XYZ	XZY	XZX
YXY	YXZ	YZX	YZY
ZXY	ZXZ	$\boxed{\text{ZYX}}$	ZYZ

- Na robótica, **ângulos de Cardan** geralmente se referem à sequência ZYX que **não é a única!**
  - *Guinada-Arfagem-Rolagem (Yaw-Pitch-Roll)*



Ângulos a partir de uma matriz de rotação

- Aplicando as matrizes de rotação elementares:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_z(\psi)\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} c\psi\, c\theta & c\psi\, s\theta\, s\phi - s\psi\, c\phi & c\psi\, s\theta\, c\phi + s\psi\, s\phi \\ s\psi\, c\theta & s\psi\, s\theta\, s\phi + c\psi\, c\phi & s\psi\, s\theta\, c\phi - c\psi\, s\phi \\ -s\theta & c\theta\, s\phi & c\theta\, c\phi \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi\, c\theta & c\psi\, s\theta\, s\phi - s\psi\, c\phi & c\psi\, s\theta\, c\phi + s\psi\, s\phi \\ s\psi\, c\theta & s\psi\, s\theta\, s\phi + c\psi\, c\phi & s\psi\, s\theta\, c\phi - c\psi\, s\phi \\ -s\theta & c\theta\, s\phi & c\theta\, c\phi \end{bmatrix}$$

$$\theta = atan2\left(-r_{20}, \pm\sqrt{r_{21}^2 + r_{22}^2}\right) = atan2\left(s\theta, \pm\sqrt{(c\theta\, s\phi)^2 + (c\theta\, c\phi)^2}\right) = atan2(s\theta, \pm c\theta)$$

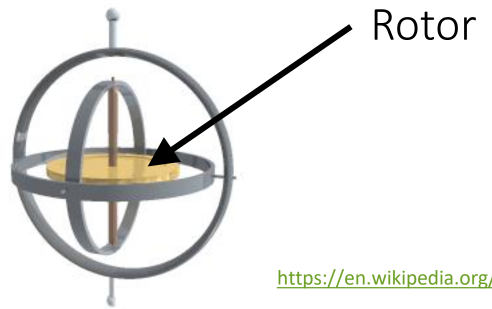
$$\psi = atan2(r_{10}, r_{00}) = atan2(s\psi, c\psi)$$

$$\phi = atan2(r_{21}, r_{22}) = atan2(s\phi, c\phi)$$

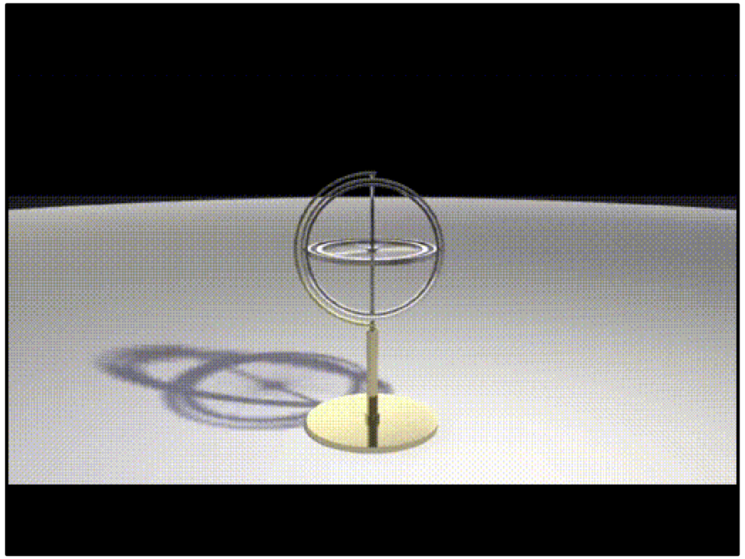
https://www.youtube.com/watch?v=sFi6i8YzQVA

A singularidade *Gimbal Lock*

- *Gimbal* é um nome dado **ao suporte mecânico**, classicamente utilizado em giroscópios;
- Ele suporta um elemento rotativo (rotor) que, por conservação de movimento, se mantém girando sobre o mesmo plano;
- Ao prender o *Gimbal* a uma estrutura (pedestal, avião, navio, nave espacial) ele fornecerá dados sobre a orientação tridimensional da estrutura em relação ao plano que o giroscópio foi iniciado.



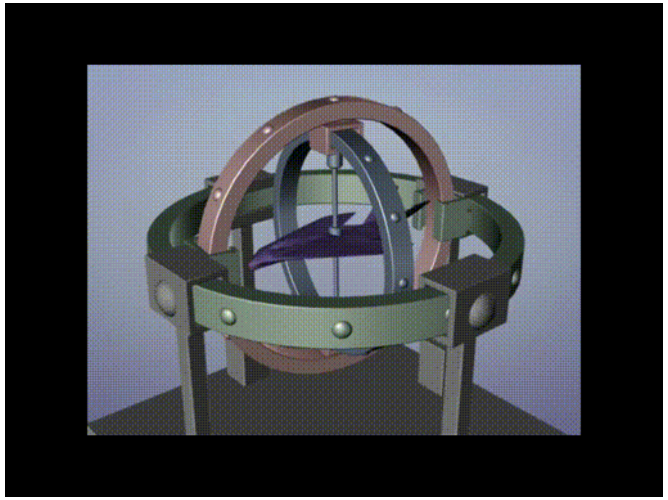
https://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal



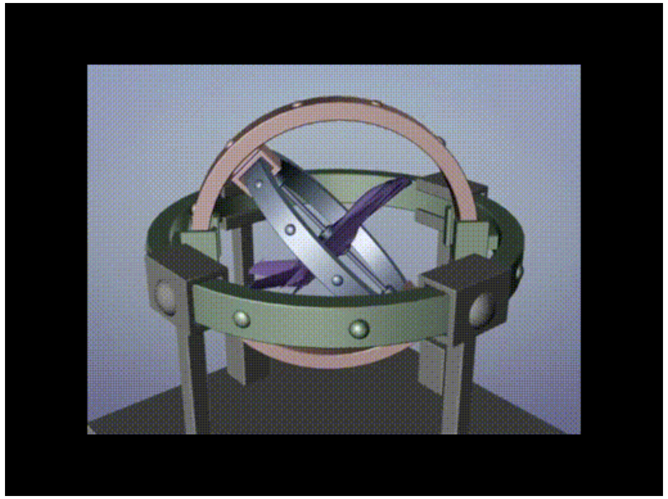
Adaptado de: https://www.youtube.com/watch?v=hVsx4XWafXg

A singularidade *Gimbal Lock*

- O *Gimbal Lock* representa a condição na qual dois eixos se orientam um sobre o outro $\left(\theta = \pm\frac{\pi}{2}\right)$;
- Dessa forma é impossível determinar a orientação tridimensional a partir desta condição;



Normal



Gimbal Lock

Adaptado de:
https://www.youtube.com/watch?v=zc8b2Jo7mno

Singularidades na Robótica

https://www.youtube.com/watch?v=lD2HQcxeNoA

Exercício de Programação

- Compreendendo as Rotações 3D com Python;
- Acessar o *Jupyter Notebook* disponível em:

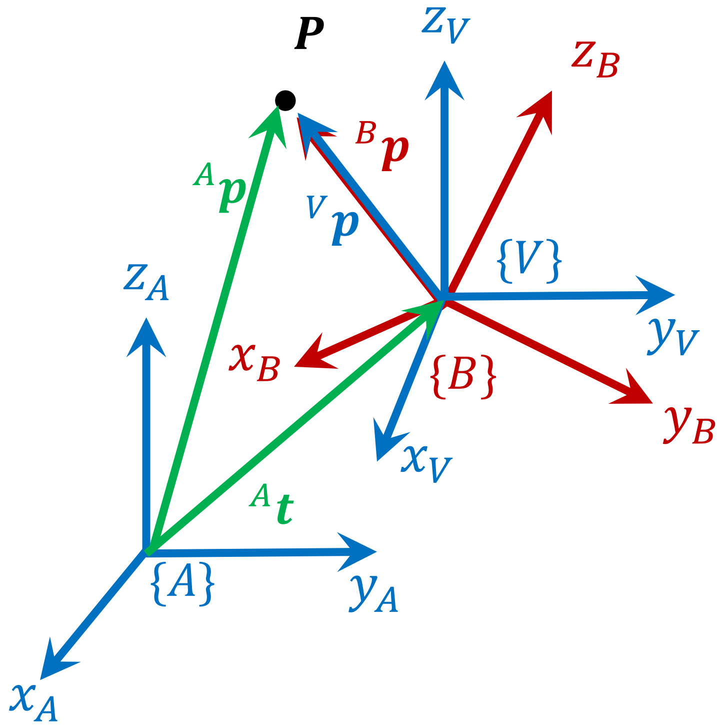
  https://colab.research.google.com/drive/1UQLMcE23x-2cfr_4Tm1EaSAAINE_qXto

- Visualizar as instruções nos exemplos;
- Resolver o exercício de fixação proposto.

Entendendo as translações

Entendendo as translações tridimensionais

- O processo é análogo àquele utilizado no entendimento da translação 2D:
  - Dado os sistemas {A} e {B} e o ponto $\boldsymbol{P}$;
  - Rotacionando-se {B}, obtém-se {V} paralelo a {A};
  - O vetor ${}^{V}\boldsymbol{p} = {}^{V}\boldsymbol{R}_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{p}$
  - Sendo a translação representada por ${}^{A}\boldsymbol{t}$;
  - A soma vetorial ${}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{t} + {}^{V}\boldsymbol{p}$ é válida;



Entendendo as translações tridimensionais

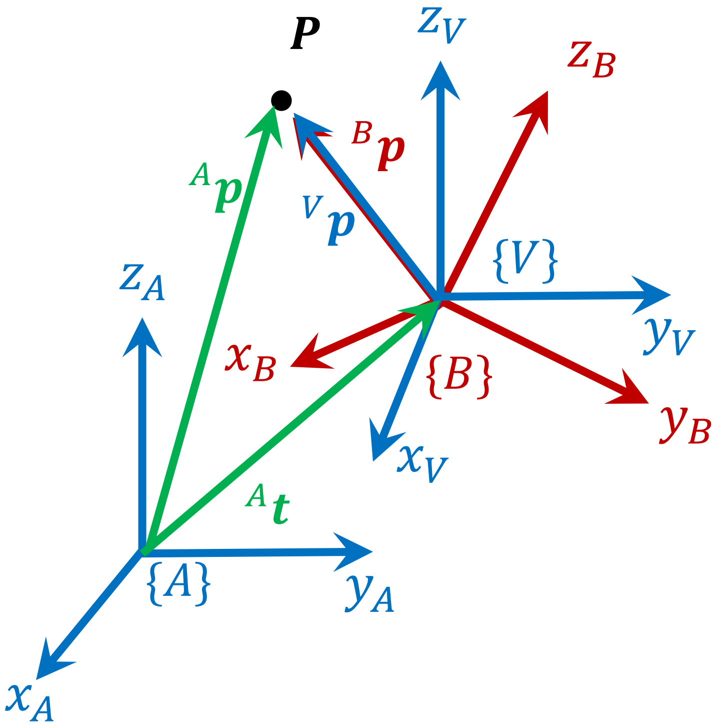
- Fazendo a reorganização para coordenadas homogêneas:

$$^{A}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} ^{A}\boldsymbol{R}_{B} & ^{A}\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} {}^{B}\widetilde{\boldsymbol{p}}$$

Onde:

$$^{A}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} ^{A}x_1 \\ ^{A}y_1 \\ ^{A}z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ^{B}\widetilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} ^{B}x \\ ^{B}y \\ ^{B}z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ^{A}\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} ^{A}x_2 \\ ^{A}y_2 \\ ^{A}z_2 \end{bmatrix}$$

$$^{A}\boldsymbol{R}_{B} = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{0} = [0 \quad 0 \quad 0]$$



Transformação homogênea

- A matriz de transformação homogênea de **sistemas** de coordenadas de **três dimensões** é 4x4 e descreve a **pose** relativa entre os sistemas de coordenadas {A} e {B};
- Isto é:

$$ {}^{A}\boldsymbol{T}_{B} = {}^{A}\boldsymbol{\xi}_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{R}_{B} & {}^{A}\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} $$

- Formalmente, na matemática essa matriz de transformação homogênea pertence ao grupo especial euclidiano de dimensão 3: ${}^{A}\boldsymbol{T}_{B} \in \mathbb{SE}\,(3)$;

Propriedades da transformação homogênea

- **Conversão:** Converte vetores descritos em {B} para seu equivalente em {A}.

$$ {}^{A}\tilde{\boldsymbol{p}} = {}^{A}\boldsymbol{T}_{B}\, {}^{B}\tilde{\boldsymbol{p}} $$

- **Inversão:** Inversa da matriz inverte o sentido da transformação.

$$ {}^{A}\boldsymbol{T}_{B}^{-1} = {}^{B}\boldsymbol{T}_{A} $$

- **Composição:** Sucessivas transformações entre sistemas de coordenadas podem ser realizadas em cascata

$$ {}^{A}\boldsymbol{T}_{Z} = {}^{A}\boldsymbol{T}_{n} \dots {}^{n}\boldsymbol{T}_{Z} $$

Exercício de Programação

- Entendendo a pose em 3D com Python;
- Acessar o *Jupyter Notebook* disponível em:

https://colab.research.google.com/drive/1vYEvlGbFSMajBNngQplAsKU5PEBctHX9

- Visualizar as instruções nos exemplos;
- Resolver o exercício de fixação proposto.