Robótica Industrial

Engenharia de Controle e Automação – 9º Período

PROF. LUCAS VAGO SANTANA
lucas@ifes.edu.br

Aula 08 – Planejamento de Caminhos e Trajetórias

- Definições sobre Caminhos e Trajetórias
- Interpolação de Posição 3D
- Interpolação de Orientação em 3D

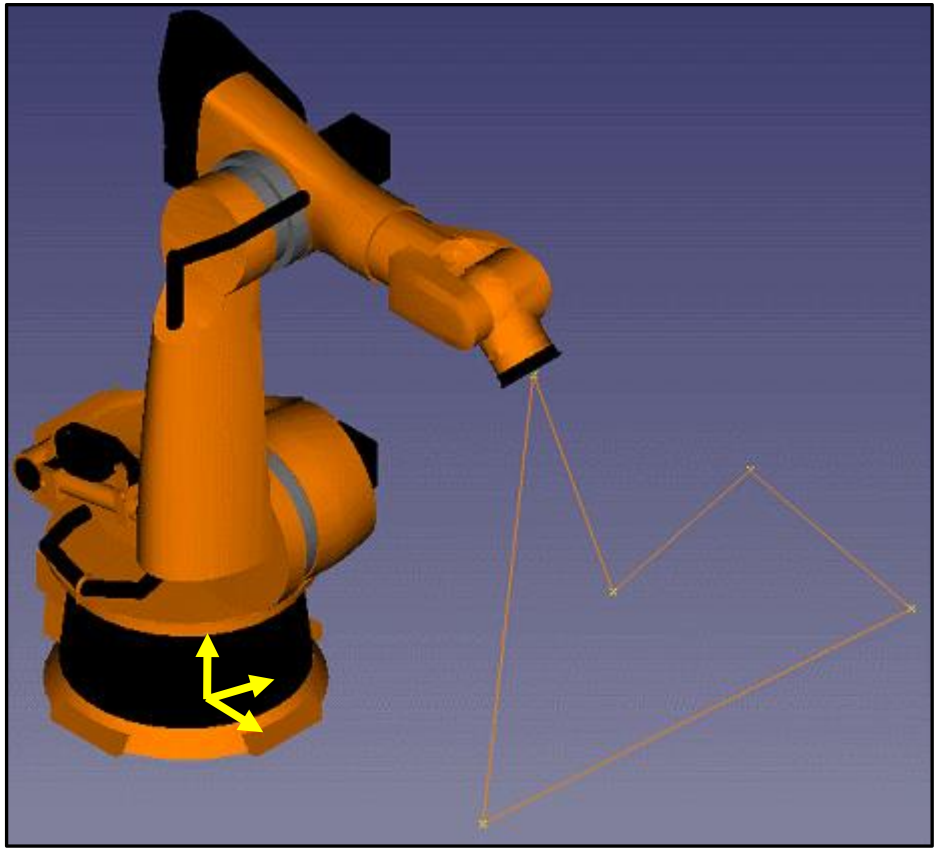
Referências Bibliográficas

- CORKE, Peter. **QUT Robot Academy: The open online robotics education resource**. Disponível em: <https://robotacademy.net.au/>. Acesso em 27 fev. 2020.
- SCIAVICCO, Lorenzo; SICILIANO, Bruno. **Modelling and Control of Robot Manipulators**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- SPONG, Mark W.; HUTCHINSON, Seth; VIDYASAGAR, M. **Robots Modeling and Control**. 1. ed. John Wiley & Sons, 2005.
- CORKE, Peter. **Robotics, Vision and Control: Fundamentals Algorithms in MATLAB**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017.
- NIKU, Saeed B. **Introduction to Robotics: Analysis, Control, Applications**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- LYNCH, Kevin M.; PARK, Frank C. **Modern Robotics: Mechanics, Planning and Control**. 1. ed. Cambridge University Press, 2017.
- SICILIANO, Bruno; KHATIB, Oussama. **Springer Handbook of Robotics**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.

Caminhos e Trajetórias

Caminhos e Trajetórias

- Caminho:
  - Determina a forma espacial que o movimento do manipulador terá;
  - Em outras palavras, especifica as poses que o efetuador final deverá executar;
- Trajetória:
  - Preocupa-se também com o tempo em que as poses desejadas serão executadas;
  - Em outras palavras, determina velocidades e acelerações para execução de um caminho;



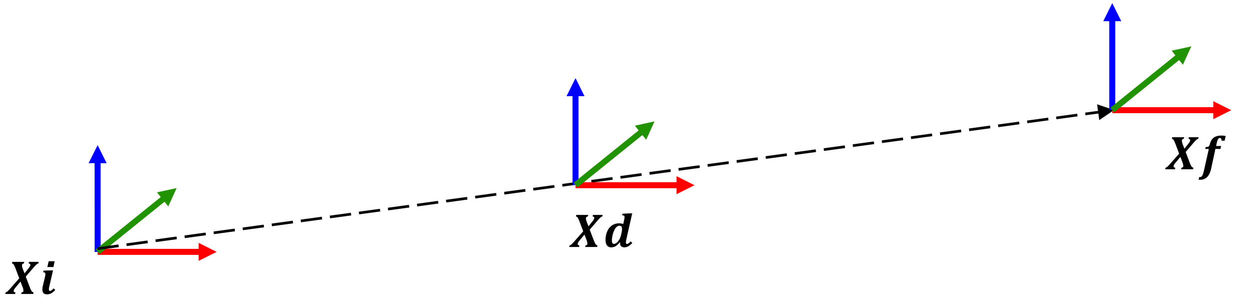
https://wiki.freecadweb.org/Robot_tutorial

Interpolação de Posição 3D

Interpolação de Posição 3D

- Dados:
  - Posição inicial $\boldsymbol{X_i} = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T$;
  - Posição final $\boldsymbol{X_f} = [x_f \quad y_f \quad z_f]^T$;

- Pode-se utilizar uma **interpolação linear** para determinar um caminho para a posição desejada $\boldsymbol{X_d}$ como a reta que conecta ambos os pontos:

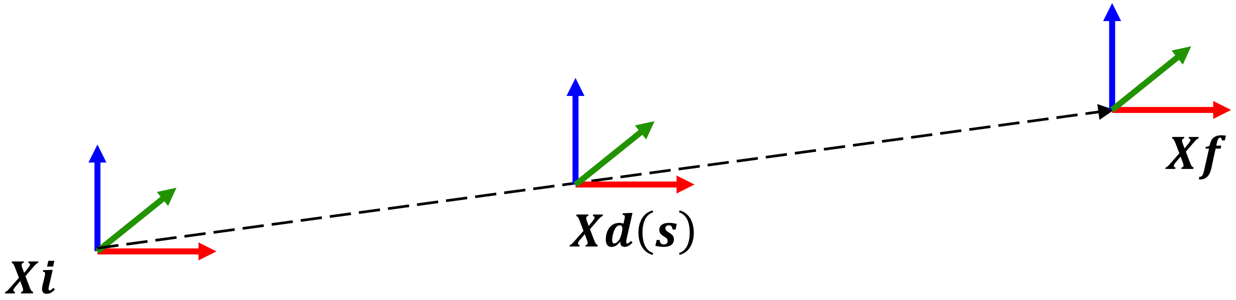


Interpolação de Posição 3D

- A **interpolação linear** pode ser operada como:

$$\boldsymbol{X_d}(s) = (1 - s)\boldsymbol{X_i} + s\boldsymbol{X_f} \qquad \text{(Eq. 1)}$$

- Onde $s \in [0, 1]$ é um fator de parametrização;



Parametrizando o Caminho pelo Tempo

- Em robótica, é particularmente útil parametrizar $s(t)$ como uma função diferenciável no tempo t, através de polinômios;
- Isto implica dizer que é possível estabelecer uma trajetória espacial $\boldsymbol{X_d}(\boldsymbol{t})$ através da determinação de um $s(t)$;

Parametrizando o Caminho pelo Tempo

- Dentre os métodos existentes Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2005) destacam:
  - Trapezoidal;
  - Cúbico;
  - Quíntico;
- O **polinômio quíntico** é particularmente interessante, pois resulta em perfis **contínuos e suaves** para suas derivadas:

Parametrizando o Caminho pelo Tempo

- O **polinômio quíntico** tem a forma:

$$s(t) = A\,t^5 + B\,t^4 + C\,t^3 + D\,t^2 + E\,t + F$$

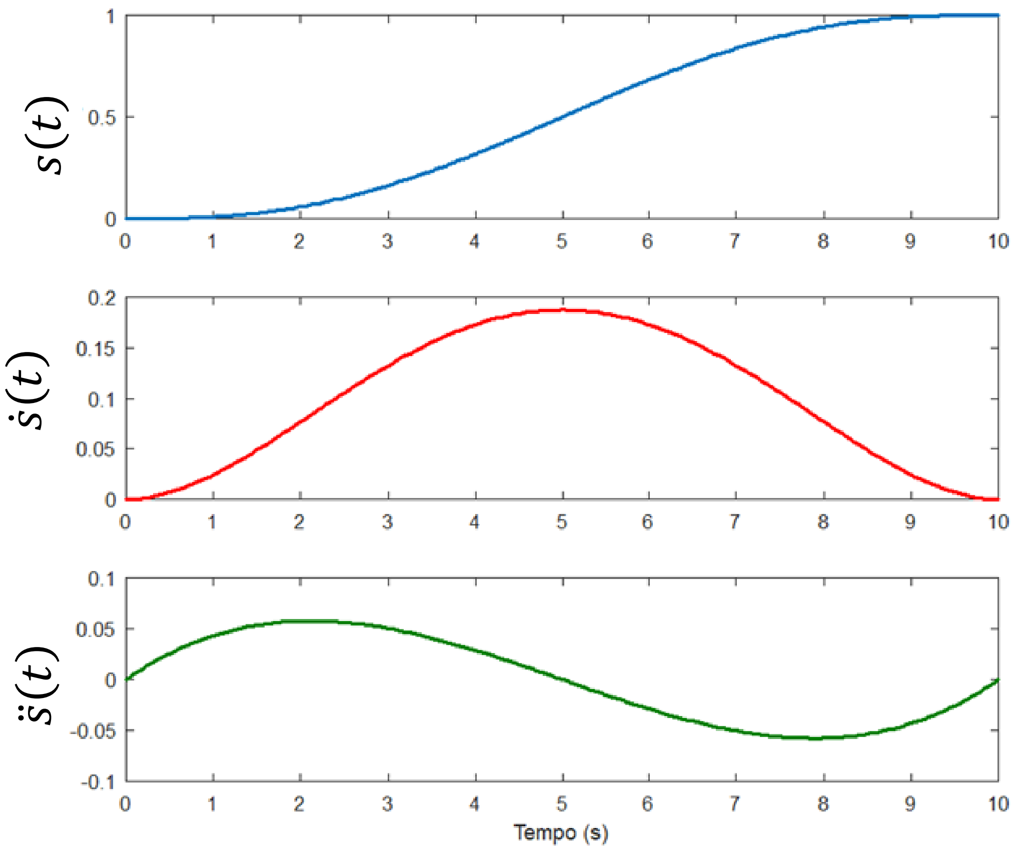
- Sua primeira derivada temporal:

$$\dot{s}(t) = 5\,A\,t^4 + 4\,B\,t^3 + 3\,C\,t^2 + 2\,D\,t + E$$

- Sua segunda derivada temporal:

$$\ddot{s}(t) = 20\,A\,t^3 + 12\,B\,t^2 + 6\,C\,t + 2\,D$$

- Ao lado está uma simulação no intervalo $t \in [0, 10]$ segundos.



Parametrizando o Caminho pelo Tempo

- A estratégia de parametrização do caminho pelo tempo, consiste em escolher **valores iniciais e finais** para a variável de parametrização $s(t)$, e suas derivadas $\dot{s}(t)$ e $\ddot{s}(t)$, dentro de um intervalo definido t $\in [0, \mathrm{T}]$
- Ao determinar:
  - $s(0) = 0$ e $s(T) = 1$ → $\boxed{s(t) \in [0, 1]}$
  - $\dot{s}(0) = 0$ e $\dot{s}(T) = 0$ →
  - $\ddot{s}(0) = 0$ e $\ddot{s}(T) = 0$ →

Velocidade/Aceleração Iniciais e Finais Nulas

Implica iniciar e finalizar o movimento parado.

Parametrizando o Caminho pelo Tempo

- No intervalo $t \in [0,\ T]$, os limites do polinômio quíntico e suas derivadas são:

$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= A\,t^5 + B\,t^4 + C\,t^3 + D\,t^2 + E\,t + F \\ \dot{s}(t) &= 5\,A\,t^4 + 4\,B\,t^3 + 3\,C\,t^2 + 2\,D\,t + E \\ \ddot{s}(t) &= 20\,A\,t^3 + 12\,B\,t^2 + 6\,C\,t + 2\,D \end{aligned}}$$

- Para $t = 0$:

$t = 0$

$$\begin{aligned} s(0) &= F \\ \dot{s}(0) &= E \\ \ddot{s}(0) &= 2D \end{aligned}$$

- Para $t = T$

$t = T$

$$\begin{aligned} s(T) &= A\,T^5 + B\,T^4 + C\,T^3 + D\,T^2 + E\,T + F \\ \dot{s}(T) &= 5\,A\,T^4 + 4\,B\,T^3 + 3\,C\,T^2 + 2\,D\,T + E \\ \ddot{s}(T) &= 20\,A\,T^3 + 12\,B\,T^2 + 6\,C\,T + 2\,D \end{aligned}$$

Parametrizando o Caminho pelo Tempo

- Arranjando essas informações matricialmente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} s(0) \\ s(T) \\ \dot{s}(0) \\ \dot{s}(T) \\ \ddot{s}(0) \\ \ddot{s}(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ T^5 & T^4 & T^3 & T^2 & T & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5T^4 & 4T^3 & 3T^2 & 2T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 20T^3 & 12T^2 & 6T & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix}$$

Parametrizando o Caminho pelo Tempo

- De onde se retira uma relação para os coeficientes como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s(0) \\ s(T) \\ \dot{s}(0) \\ \dot{s}(T) \\ \ddot{s}(0) \\ \ddot{s}(T) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ T^5 & T^4 & T^3 & T^2 & T & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5T^4 & 4T^3 & 3T^2 & 2T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 20T^3 & 12T^2 & 6T & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{S}}$$

Parametrizando o Caminho pelo Tempo

- O vetor $\boldsymbol{S}$ é conhecido e pode ser estabelecido como:

Valor inicial de $s(0) = 0$
Valor final de $s(T) = 1$

Valor inicial de $\dot{s}(0) = 0$
Valor final de $\dot{s}(T) = 0$

Valor inicial de $\ddot{s}(0) = 0$
Valor final de $\ddot{s}(T) = 0$

$$\begin{bmatrix} s(0) \\ s(T) \\ \dot{s}(0) \\ \dot{s}(T) \\ \ddot{s}(0) \\ \ddot{s}(T) \end{bmatrix}$$

Determinando a Trajetória Cartesiana

- Conhecendo e usando $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{S}$ para determinar os coeficientes $\boldsymbol{C}$;
- Será possível calcular $s(t)$ e $\dot{s}(t)$ para qualquer $t \in [0, T]$
- Tal informação poderá ser usada para calcular $\boldsymbol{X_d}(t)$ e sua derivada $\dot{\boldsymbol{X}}_d(t)$ como:

$$\boldsymbol{X_d}(t) = \boldsymbol{X_d}\big(s(t)\big) = \big(1 - s(t)\big)\boldsymbol{X_i} + s(t)\boldsymbol{X_f}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{d}}(t) = \frac{d\left(\boldsymbol{X_d}\big(s(t)\big)\right)}{ds}\dot{s} = \big(\boldsymbol{X_f} - \boldsymbol{X_i}\big)\dot{s}$$

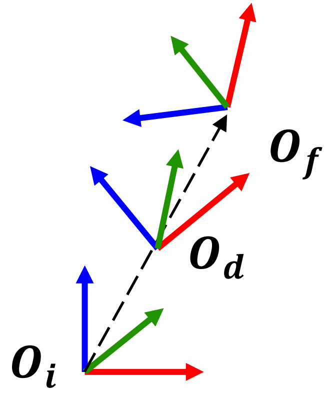
(Regra da cadeia)

Interpolação de Orientação 3D

Interpolação de Orientação 3D

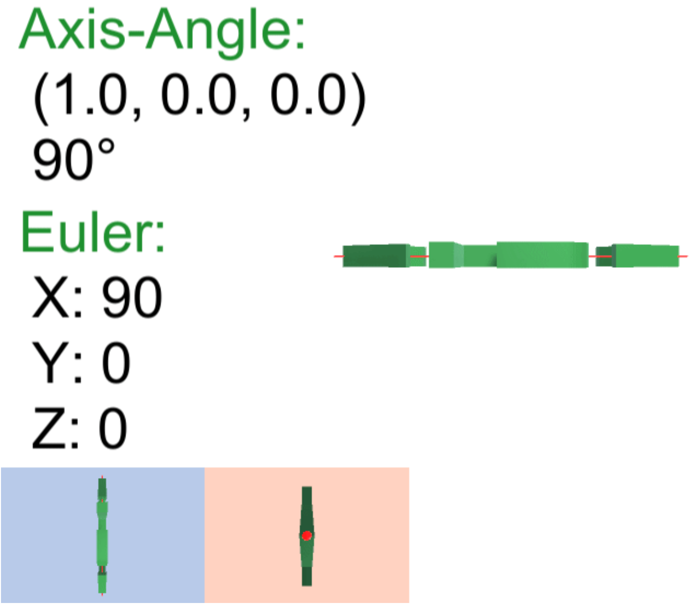
- Interpolação de orientação é mais complexa;
- Funções trigonométricas de rotação **não são lineares**;
- É possível interpolar linearmente ângulos de Euler;
- **Porém**, há limitações (Gimbal Lock) no uso destes ângulos para representar grandes variações de orientação em 3D;

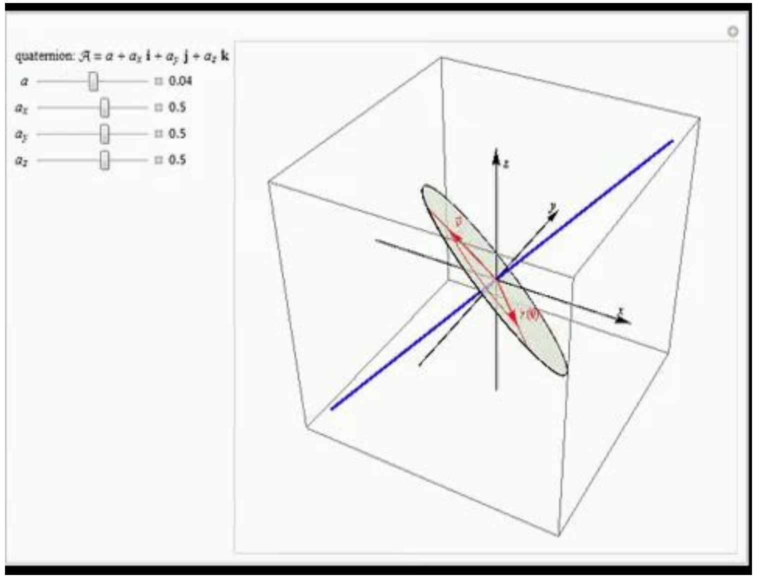
Fonte:
https://github.com/NickCuso/Tutorials/blob/master/Quaternions.md



Interpolação de Orientação 3D

- Representações mais adequadas para interpolação:
  - Notação eixo-ângulo
  - Quatérnios.





Fonte: https://github.com/NickCuso/Tutorials/blob/master/Quaternions.md

Fonte: https://gfycat.com/gifs/search/quaternion+rotation+visualization

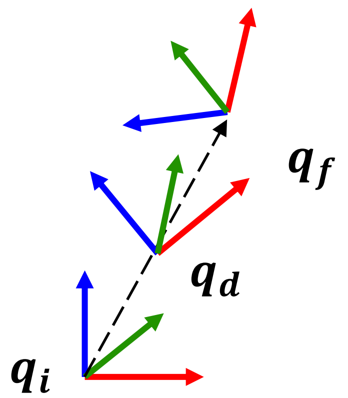
Interpolação de Orientação 3D

- SLERP (*Spherical Linear Interpolation*)
  - Corresponde a um algoritmo de interpolação de quatérnios unitários;
- Formulação:

$$\boldsymbol{q}(t) = \frac{\sin\left(\left(1 - s(t)\right)\alpha\right)\boldsymbol{q_i} + \sin\left(s(t)\alpha\right)\boldsymbol{q_f}}{\sin(\alpha)}$$

$$\alpha = \operatorname{acos}\left(q_{i_0}q_{f_0} + q_{i_1}q_{f_1} + q_{i_2}q_{f_2} + q_{i_3}q_{f_3}\right)$$

$\boldsymbol{q}(t)$: quatérnio interpolado
$\boldsymbol{q_i} = [q_{i_0} \quad q_{i_1} \quad q_{i_2} \quad q_{i_3}]^T$: quatérnio inicial
$\boldsymbol{q_f} = [q_{f_0} \quad q_{f_1} \quad q_{f_2} \quad q_{f_3}]^T$: quatérnio final
$s(t)$: ponderação da interpolação [0 a 1]



Simulação Guiada

1. Demonstrar simulação da interpolação de caminho/trajetória para obtenção de posição e orientação 3D desejadas;
2. Demonstrar simulação da interpolação de caminho/trajetória aplicada ao controle do manipulador 6R;

Tarefa

- Modificar o exemplo para que o manipulador execute uma trajetória sobre os vértices de uma forma espacial 3D com, **no mínimo**, 3 pontos (A, B e C);
- O manipulador deverá iniciar e parar sua execução no ponto A;
- As coordenadas dos pontos podem ser arbitradas;
- O manipulador deve demorar um intervalo de 10 segundos na execução do trecho AB, 3 segundos na execução do trecho BC e 5 segundos na execução do trecho CA;
- Faças as adaptações necessárias no modelo de simulação para permitir a execução desta tarefa.