



# Pilha

Profa. Regina Célia Coelho com alterações  
da Profa. Daniela Leal Musa

# Definição de Pilha



# Definição de Pilha



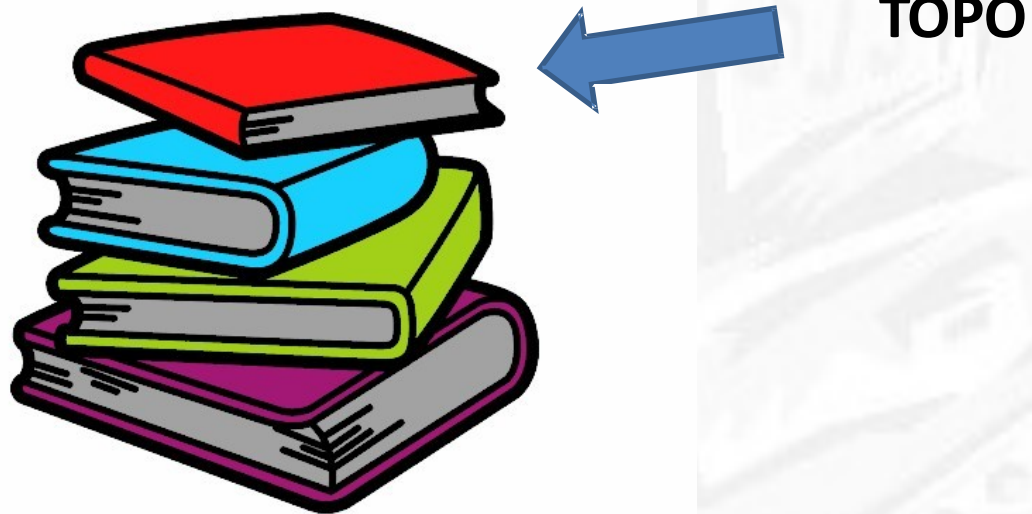
**EMPILHAR (PUSH)**

# Definição de Pilha



**DESEMPILHAR (POP)**

# Definição de Pilha



# Definição de Pilha



**BASE**



# Definição de Pilha



**Está Vazia?**  
**Está Cheia?**

# Definição de Pilha

- Conjunto de dados em que:
  - ✓ O novo elemento sempre é inserido no topo da pilha (ordem de chegada);
  - ✓ O elemento removido é sempre o que chegou a menos tempo na pilha (o último inserido);
  - ✓ A consulta normalmente retorna o elemento no topo da pilha.



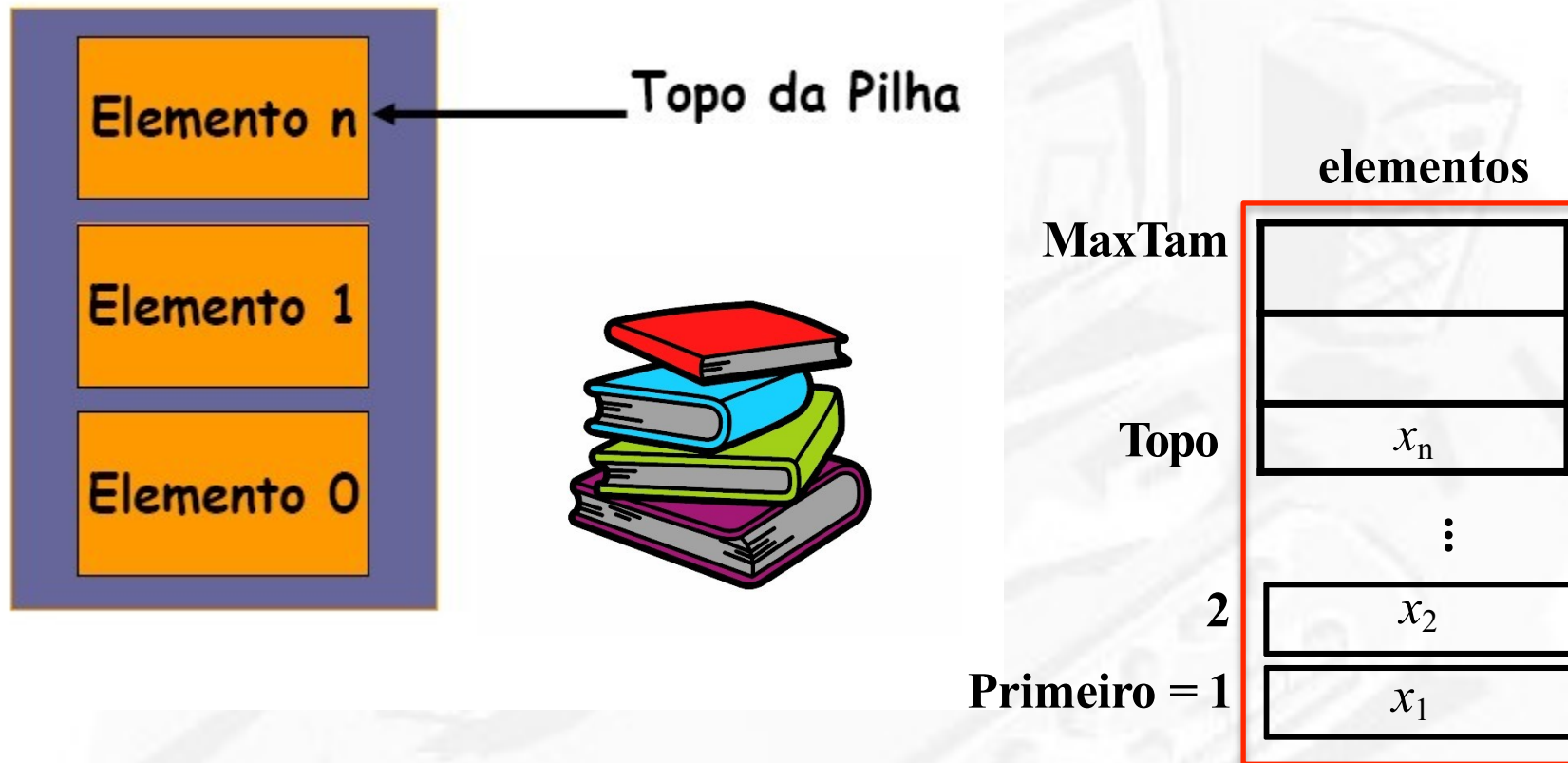
# Definição de Pilha

- Estrutura de dados comumente chamada de LIFO = *Last In, First Out*.
- O último elemento a entrar na pilha será o primeiro elemento a sair da pilha

# Aplicações de Pilha

- Verificar se um código fonte está bem estruturado;
- *Parser* de expressões aritméticas;
- Controle da sequência de chamadas de funções;
- Recursividade;
- Processamento de quaisquer estruturas aninhadas de profundidade imprevisível:
  - ✓ Sintaxe de expressões aritméticas;
  - ✓ Controle da sequência de chamadas de expressões aritméticas.

# Representação Gráfica de Pilhas



# Operações Básicas sobre Pilhas

- Criar a Pilha
- Empilhar elemento (*Push*)
- Desempilhar elemento (*Pop*)
- Consultar elemento no topo da pilha (*Peek*)
- Listar os elementos

# Implementando uma Pilha

➤ Pode ser implementada usando:

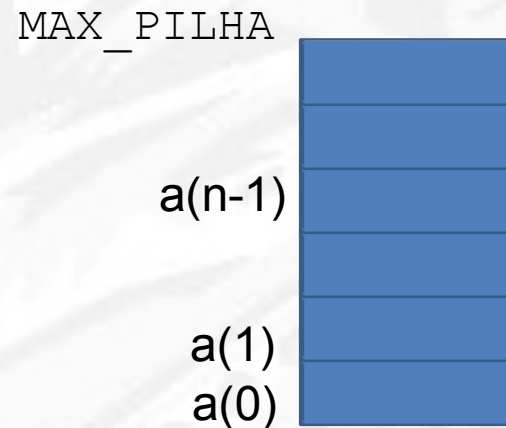
✓ **Contiguidade Física**

✓ **Encadeada (alocação dinâmica)**

# Criando uma pilha

- Dada um pilha  $P = (a(0), a(1), \dots, a(n-1))$ , dizemos que  $a(0)$  é o elemento da base da pilha;  $a(n-1)$  é o elemento topo da pilha; e  $a(i+1)$  está acima de  $a(i)$ .

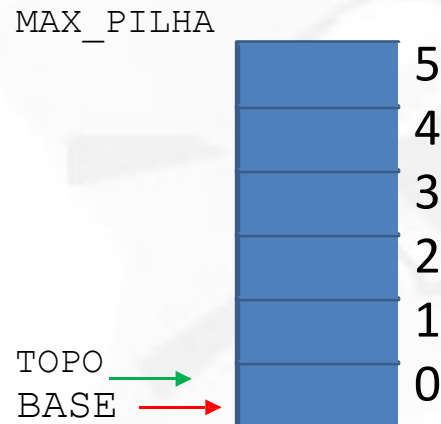
```
typedef struct{  
    int vet[MAX_PILHA];  
    int topo;  
  
}TPilha;
```



**Contiguidade física**

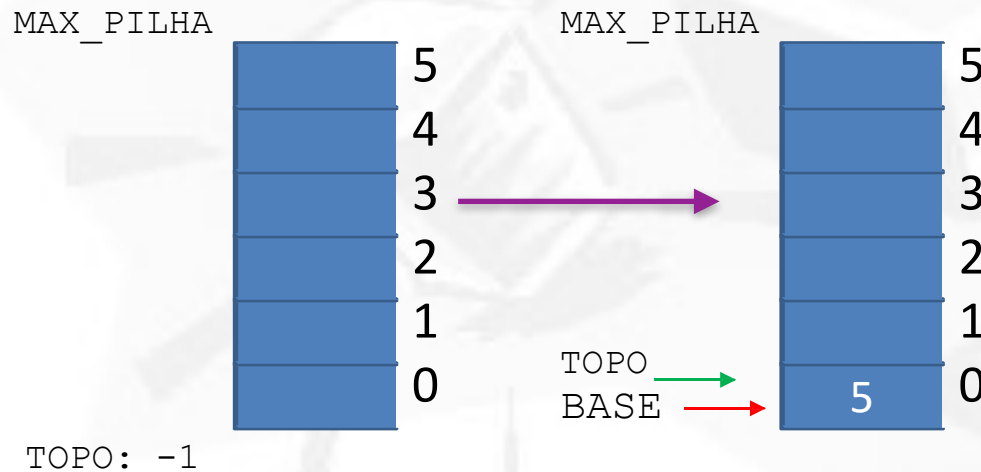
# Exemplo de Manipulação

1. Inicializar pilha com 6 posições, de números inteiros.
2. Inserir elemento com valor 5
3. Inserir elemento com valor 11
4. Inserir elemento com valor 8
5. Remover um elemento
6. Remover um elemento



# Exemplo de Manipulação

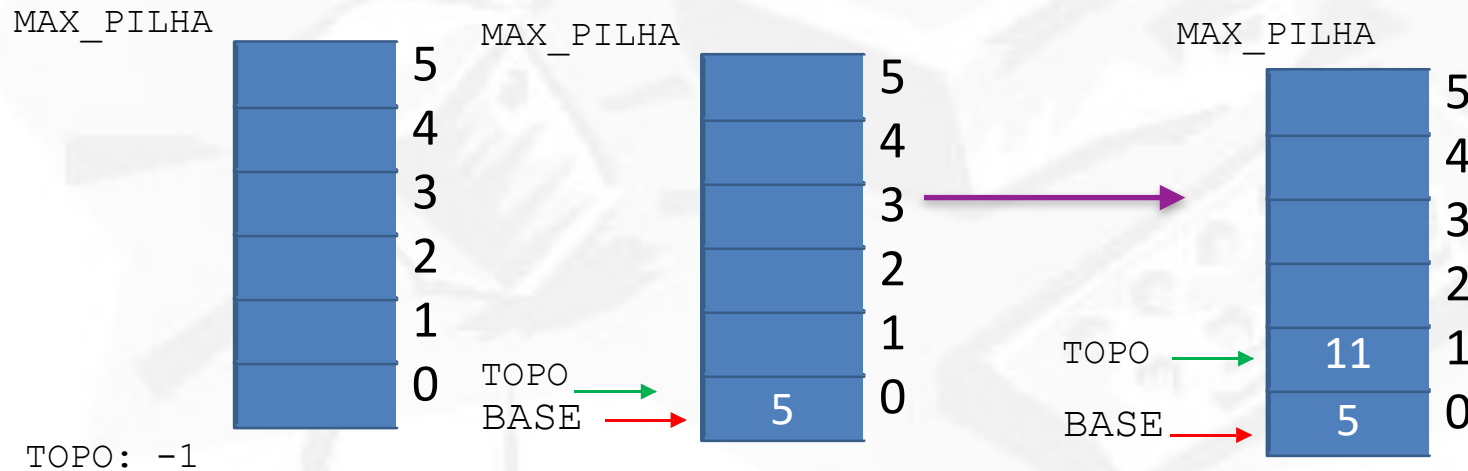
1. Inicializar pilha com 6 posições, de números inteiros.
2. Inserir elemento com valor 5
3. Inserir elemento com valor 11
4. Inserir elemento com valor 8
5. Remover um elemento
6. Remover um elemento





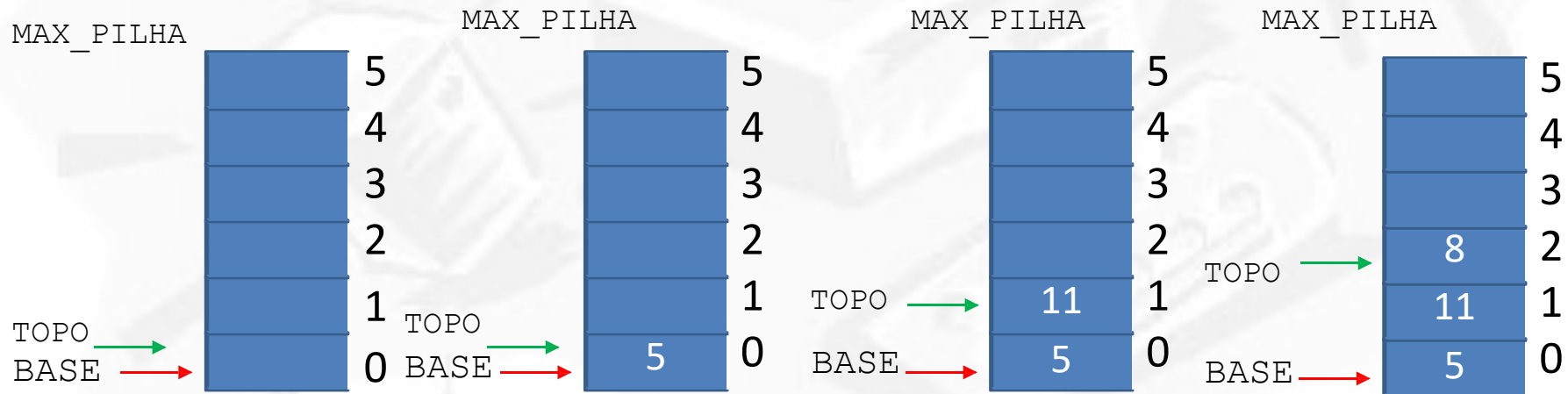
# Exemplo de Manipulação

1. Inicializar pilha com 6 posições, de números inteiros.
2. Inserir elemento com valor 5
3. Inserir elemento com valor 11
4. Inserir elemento com valor 8
5. Remover um elemento
6. Remover um elemento



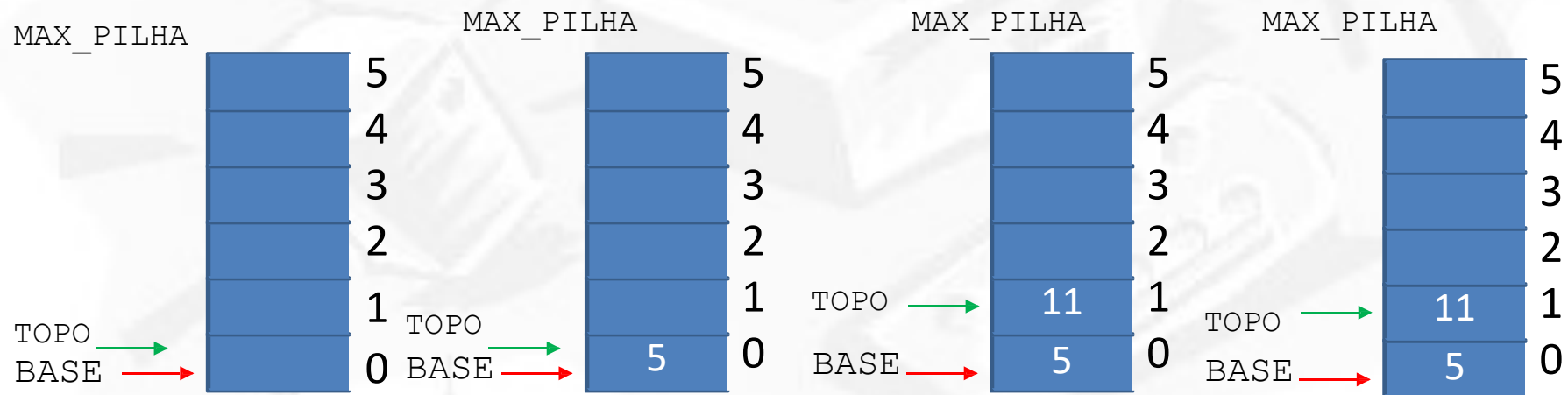
# Exemplo de Manipulação

1. Inicializar pilha com 6 posições, de números inteiros.
2. Inserir elemento com valor 5
3. Inserir elemento com valor 11
4. Inserir elemento com valor 8
5. Remover um elemento
6. Remover um elemento



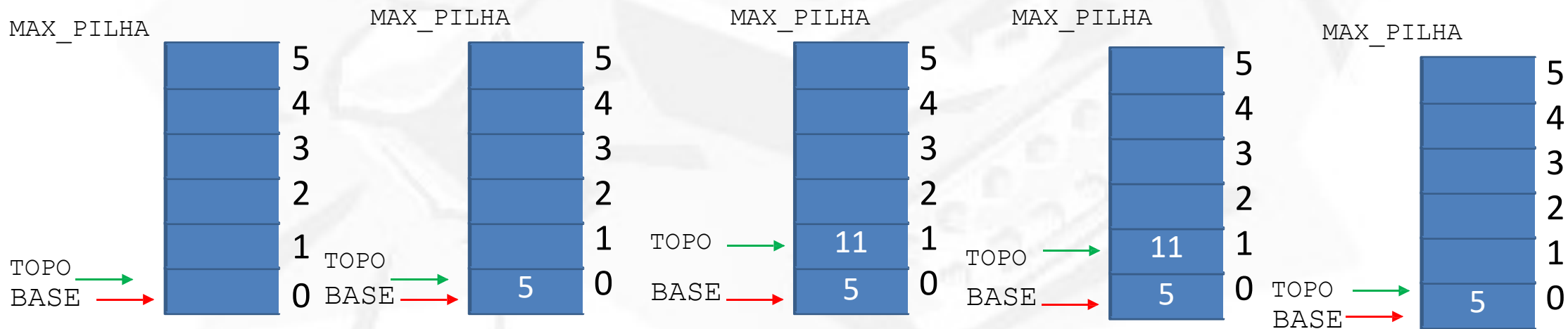
# Exemplo de Manipulação

1. Inicializar pilha com 6 posições, de números inteiros.
2. Inserir elemento com valor 5
3. Inserir elemento com valor 11
4. Inserir elemento com valor 8
5. Remover elemento
6. Remover um elemento



# Exemplo de Manipulação

1. Inicializar pilha com 6 posições, de números inteiros.
2. Inserir elemento com valor 5
3. Inserir elemento com valor 11
4. Inserir elemento com valor 8
5. Remover elemento
6. Remover elemento



# Criando uma pilha

- Primeiro inicializamos uma pilha fazendo o campo topo = -1:

# Criando uma pilha

- Primeiro inicializamos uma pilha fazendo o campo topo = -1:

```
TPilha* nova() {  
    TPilha* np = (TPilha *) malloc (sizeof (TPilha));  
    np->topo = -1;  
    return np;  
}
```

# Empilhando dados na pilha

- Para empilhar é necessário considerar se a pilha já foi criada e a possibilidade de estouro de pilha, uma vez que estamos trabalhando com vetor de tamanho fixo.

```
int push (TPilha* p, int val){  
    if (p->topo >= MAX_PILHA-1) //Pilha cheia  
        return -1;  
    (p->topo)++;  
    p->vet[p->topo] = val;  
    return 0;  
}
```

# Desempilhando dados na Pilha

- Para desempilhar é necessário considerar se a pilha foi criada e a possibilidade de *underflow*.

```
int pop (TPilha* p, int* val){  
    if (p->topo < 0) // Pilha vazia  
        return -1;  
    *val = p->vet[p->topo];  
    p->topo--;  
    return 0;  
}
```



# Liberando espaços alocados

- Para liberar os espaços alocados basta apenas liberar o espaço alocado para a estrutura criada. Faça a função libera.

```
TPilha *remover (TPilha* p) {  
    free (p);  
    return (NULL);  
}
```

# Exercícios

- Faça uma função para listar todos os elementos da pilha.

# Exercícios

- Faça uma função para listar todos os elementos da pilha.

```
void ConsultaPilha (TPilha *p){  
  
    int i;  
  
    for (i=0;i<=p->topo;i++)  
        printf ("\n Elemento: %d", p->vet[p->topo-i]);  
}
```

## Exercícios

- Faça uma programa que use uma pilha para inverter a ordem das letras da frase. Por exemplo, dado o texto “ESTE EXERCICIO E MUITO FACIL” a saida deve ser “LICAF OTIUM E OICICREXE ETSE”. Use as funções push e pop.

## Solução com PUSH e POP

```
int main() {
    TPilha *minhapilha;
    int i;
    char string[40];
    printf ("\n Insira frase para empilhar: ");
    scanf("%[^\\n]s", string);
    minhapilha = nova();
    if (minhapilha != NULL) {
        for (int i=0; i<(strlen(string)); i++) {
            if (push(minhapilha, string[i])!=0)
                printf ("\n Empilhado");
        }
    }
    for (i=0;i<=p->topo;i++)
        printf ("\nValor: %d", minhapilha->vet[minhapilha->topo-i]);
    return 0;
}
```

```
int main() {
    TPilha *minhapilha;
    char string[40];
    printf ("\n Insira frase para empilhar: ");
    scanf("%[^\\n]s", string);
    minhapilha = nova();
    if (minhapilha != NULL)    {
        for (int i=0; i<(strlen(string)); i++) {
            if (push(minhapilha, string[i])==0)
                printf ("\n Empilhado");
        }
    }
    ConsultaPilha(minhapilha);
    return 0;
}
```

## Exercícios

- Refaça o programa anterior de forma que agora seja invertido a ordem das letras de cada palavra de uma cadeia de caracteres, preservando a ordem das palavras. Por exemplo, dado o texto “ESTE EXERCICIO E MUITO FACIL” a saída deve ser “ETSE OICICREXE E OTIUM LICAF”.  
Use as funções push e pop.

# Exercícios

- Digamos que nosso alfabeto seja formado pelas letras a, b e c. Considere o seguinte conjunto de cadeias de caracteres sobre nosso alfabeto: c, aca, bcb, abcba, bacab, aacaa, bbcbb, . . . Qualquer cadeia deste conjunto tem a forma  $WcM$ , sendo que  $W$  é uma sequência de letras que só contém a e b e  $M$  é o inverso de  $W$ , ou seja,  $M$  é  $W$  lido de trás para frente. Escreva um programa que determina se uma cadeia  $X$  pertence ou não ao nosso conjunto, ou seja, determina se  $X$  é da forma  $WcM$ .



# Aplicação de Pilha

- Uma das aplicações clássicas de pilhas é a avaliação de expressões aritméticas
- Representações na forma tradicional são ambíguas e por isso obriga o pré-estabelecimento de “regras de prioridade”. Estas representações não são convenientes para o computador
- A ordem de execução das operações na expressão “ $A + B * C - 4 / 2$ ” só torna-se clara se as regras de prioridade são conhecidas:
  - ✓ A mesma expressão na forma “ $A + (B * C) - (4 / 2)$ ” seria mais facilmente interpretada numa rápida leitura.

# Outras Notações

- Seja a expressão na notação tradicional  $A * B - C / D$
- **Notação completamente Parentizada:** acrescenta-se sempre um parênteses a cada par de operandos e seu operador.

$$((A * B) - (C / D))$$

- **Notação Polonesa (ou prefix):** os operadores aparecem imediatamente antes dos operandos. Esta notação especifica quais operadores, e em que ordem, devem ser calculados. Por isso dispensa o uso de parênteses, sem ambigüidades.

$$- * A B / C D$$

- **Notação Polonesa Reversa (ou posfix):** é como a polonesa na qual os operadores aparecem após os operandos.

$$A B * C D / -$$

# Exercícios

Infix	PréFix	PósFix
$A+B*C$		
$A+B-C$		
$A+(B-C)$		
$(A+B)/(C-D)$		

## Exercícios

Infix	PréFix	PósFix
$A+B*C$	$+A*BC$	$ABC*+$
$A+B-C$	$-+ABC$	$AB+C-$
$A+(B-C)$	$+A-BC$	$ABC-+$
$(A+B)/(C-D)$	$/+AB-CD$	$AB+CD-/$

# Exemplo 1 - algoritmo para avaliação de uma expressão Pós-Fixada

- Os operandos são números reais (positivos e negativos).
- Os operadores são:  $\{+, -, \times, /, ^\}$ .
- Os delimitadores são:  $\{ (, ) \}$ .
- Cada operando é empilhado numa pilha de valores.
- Quando se encontra um operador :
  - ✓ desempilhar o número apropriado de operandos (dois para operadores binários e um para operadores unários);
  - ✓ realizar a operação devida;
  - ✓ empilhar o resultado.

# EXEMPLO 1

**Resolver expressão em notação posfixa**

**1 2 – 4 5 + \***

1) Varrer expressão da esquerda para direita

# EXEMPLO 1

Avaliação da expressão  $1\ 2\ -\ 4\ 5\ +\ *$

1) Empilhar dois operandos

2
1

# EXEMPLO 1

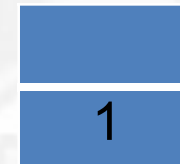
Avaliação da expressão  $1\ 2\ -\ 4\ 5\ +\ *$

1) Empilhar dois primeiros operandos

2) Quando aparecer operador:

- desempilhar operandos
- realizar operação
- empilhar resultado

2





# EXEMPLO 1

Avaliação da expressão  $1\ 2\ -\ 4\ 5\ +\ *$

1) Empilhar dois primeiros operandos

2) Quando aparecer operador:

- desempilhar operandos
- realizar operação
- empilhar resultado

1    2



# EXEMPLO 1

Avaliação da expressão  $1\ 2\ -\ 4\ 5\ +\ *$

1) Empilhar dois primeiros operandos

2) Quando aparecer operador:

- desempilhar operandos
- **realizar operação**
- empilhar resultado

1- 2



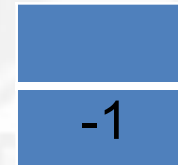
# EXEMPLO 1

**Avaliação da expressão  $1\ 2 - 4\ 5 + *$**

1) Empilhar dois primeiros operandos

2) Quando aparecer operador:

- desempilhar operandos
- realizar operação  $1-2 = -1$
- empilhar resultado



# EXEMPLO 1

Avaliação da expressão  $1\ 2\ -\ 4\ 5\ +\ *$

**Repetir passos 1 e 2**

1) Empilhar dois operandos



2) Quando aparecer operador:

- desempilhar operandos
- realizar operação
- empilhar resultado

# EXEMPLO 1

Avaliação da expressão  $1\ 2\ -\ 4\ 5\ +\ *$

Repetir passos 1 e 2

**1) Empilhar dois operandos**

**2) Quando aparecer operador:**

- desempilhar operandos
- realizar operação
- empilhar resultado

5
4
-1

# EXEMPLO 1

**Avaliação da expressão  $1\ 2\ -\ 4\ 5\ +\ *$**

Repetir passos 1 e 2

1) Empilhar dois operandos

2) Quando aparecer operador:

- desempilhar operandos
- realizar operação
- empilhar resultado



# EXEMPLO 1

Avaliação da expressão  $1\ 2\ -\ 4\ 5\ +\ *$

Quando aparecer operador:

- desempilhar operandos
- realizar operação  $-1 * 9 = -9$
- empilhar resultado



## EXEMPLO 2 – Converter expressão de InFix para PosFix

- Vetor com a expressão de entrada Infixa
- Vetor com a expressão de saída PosFix
- Pilha

O processamento consiste em uma repetição que analisa cada item de entrada e gerencia a pilha e a transferência para a saída

A repetição continua enquanto não ocorrer erro e não terminar a expressão infixa

Quando todos os valores de entrada tiverem sido processados, repetidamente desempilhar um elemento da pilha e adicioná-lo ao vetorPosFix até esvaziar Pilha



## EXEMPLO 2

Caso o item de entrada (elemento) seja:

- ♦ **um operando**

Incluí-lo no final do vetor PosFix

- ♦ **um “(“**

Empilhar elemento na Pilha

- ♦ **um “)”**

- ✓ Repetidamente desempilhar um elemento da Pilha e adicioná-lo ao vetor PosFix até encontrar “(“ ou a pilha ficar vazia

- ✓ Desempilhar “(“ de Pilha

- ✓ Se Pilha esvaziar antes de encontrar um “)“, a expressão de entrada não é válida.

- ♦ **um operador**

- ✓ Se Pilha estiver vazia ou o elemento de entrada tiver prioridade maior do que a operador do topo de pilha

- Empilhar o elemento de entrada.

- ✓ Caso contrário

- Desempilhar o elemento da Pilha e adiciona-lo ao vetor PosFix

- Repetir a comparação do elemento de entrada com o novo topo de pilha

## EXEMPLO 2

Operando -> vetor

infix

$a + b * d$

posfix

$a$

Pilha

## EXEMPLO 2

Operador -> pilha vazia  
empilha

infix

$a + b * d$

posfix

$a$

+

Pilha

## EXEMPLO 2

infix

Operando ->vetor

$a + b * d$

posfix

$ab$

+

Pilha

## EXEMPLO 2

infix

Operador com prioridade maior  
empilhar

$a + b * d$

posfix

$ab$

\*

+

Pilha

## EXEMPLO 2

infix

Operando empilhar

$a + b * d$

posfix

abd

\*

+

Pilha

## EXEMPLO 2

Avaliou toda expressão  
desempilhar tudo

infix

$a + b * d$

posfix

$abd^*$

+

Pilha

## EXEMPLO 2

Avaliou toda expressão  
desempilhar tudo

infix

$a + b * d$

posfix

$abd^*+$

Pilha





**FIM**