
Simulação 01

Lançamento de um corpo

Prof. Marcos Quiles

Corpo em Queda Livre (sem atrito do ar)

- Modelo nada complexo
- From wikipedia: “*Em Física, queda livre é o movimento resultante unicamente da aceleração provocada pela gravidade*”
- Como podemos descrever o modelo matemático que rege esse fenômeno?



Corpo em Queda Livre (sem atrito do ar)

- Segunda lei de Newton

$$F = ma$$

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

- F é a força que atua sobre o corpo, v é a sua velocidade e m a sua massa
- Qual é essa força? Com pode ser calculada?



Corpo em Queda Livre (sem atrito do ar)

- Qual é essa força? Com pode ser calculada?

$$p = mg$$

- p é a força peso, m a massa do corpo e g a aceleração da gravidade
- Como Podemos calcular a evolução da velocidade do corpo?
- E seu deslocamento?

$$mg = m \frac{dv}{dt} \quad \text{simplificando} \quad dv = gdt$$



Corpo em Queda Livre (sem atrito do ar)

- Como realizar a simulação desse sistema?
 - Solução Analítica vs. Simulação Numérica

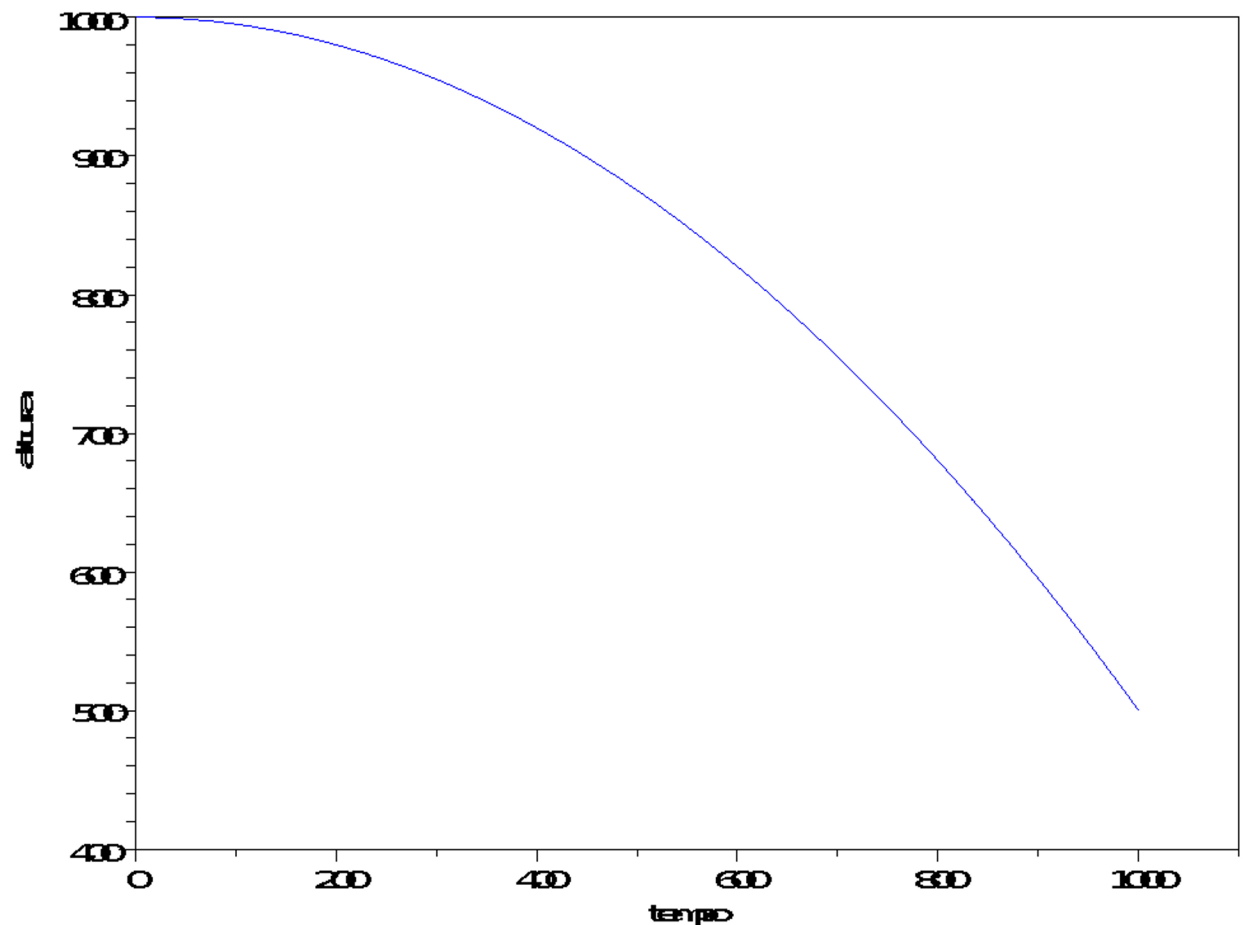
$$dv = gdt$$

- Quais parâmetros fornecer ao modelo?
- Simulação Computacional



Exemplo de Simulação (sem atrito)

- Deslocamento
- Parâmetros
 - Alt inicial: 1000
 - Vel. Inicial: 0
 - $g=10$
 - Tempo Sim: 10s

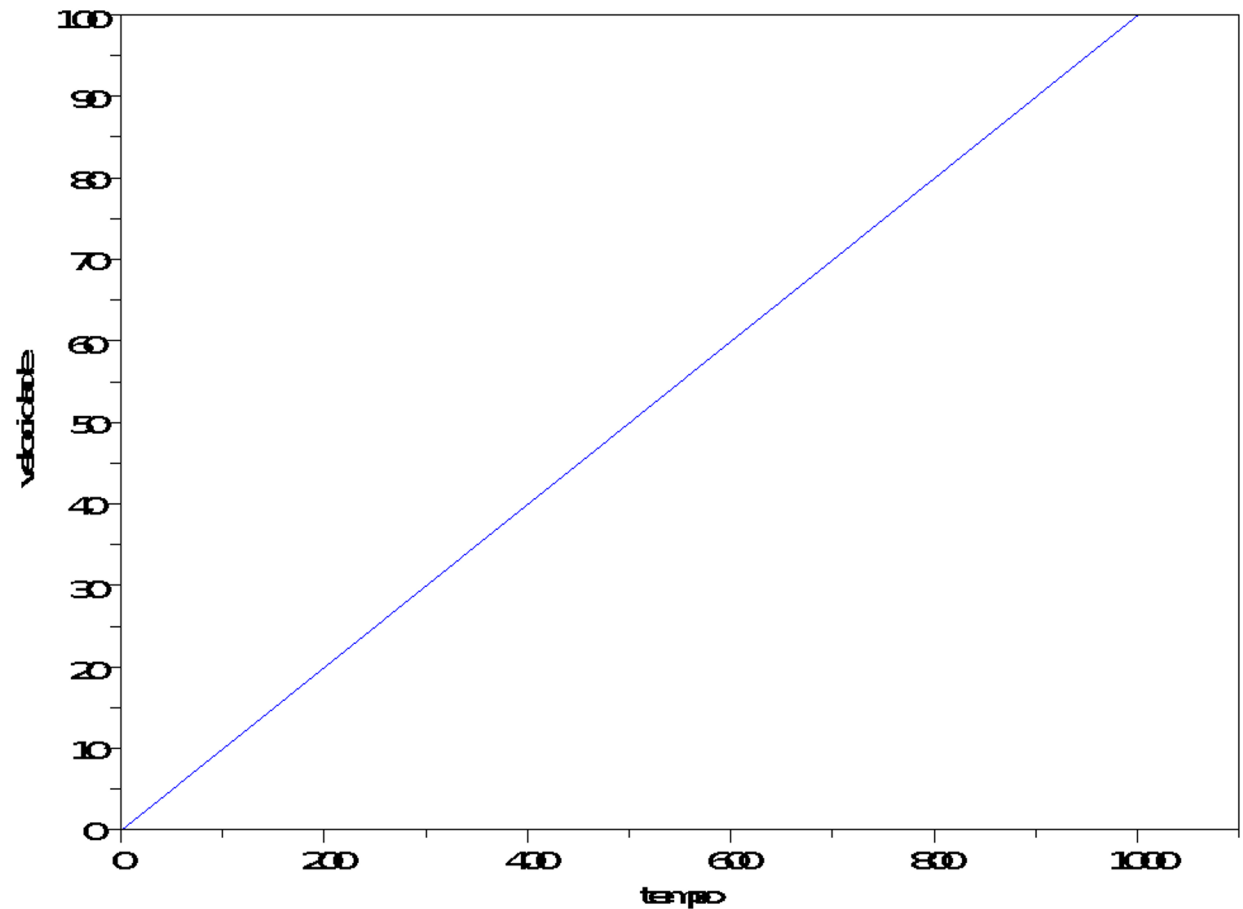


Exemplo de Simulação (sem atrito)

- Velocidade

- Parametros

- Alt inicial.: 1000
- Vel. Inicial: 0
- $g=10$
- Tempo Sim: 10s



E a força de atrito?

Como modificar o modelo para considerar a força de atrito?

Queda com atrito do ar

- O que muda nesse modelo?
- Qual o modelo matemático resultante?
- Força de atrito:

$$F_{\text{atrito}} = -kv$$

- Onde k é uma constante de proporcionalidade. O sinal negativo indica que essa força é contrária ao movimento



Queda com atrito do ar

- Força resultante do modelo:

$$F = mg - kv$$

- Utilizando a segunda lei de Newton temos:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$



Queda com atrito do ar

- E agora? Como integrar esse modelo?

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

- Essa equação é não separável. Precisamos de outras técnicas para resolver essa equação diferencial. Contudo, ainda é possível....



Queda com atrito do ar

- Vamos integrar a equação numericamente

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

- Dividindo todos os termos por m obtemos:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v$$



Queda com atrito do ar

- Aplicando o método de Euler obtemos: $dt \approx \Delta t$

$$\Delta v = \left(g - \frac{k}{m} v \right) \Delta t$$

- Basta definir o passo de integração e calcular a evolução de v :

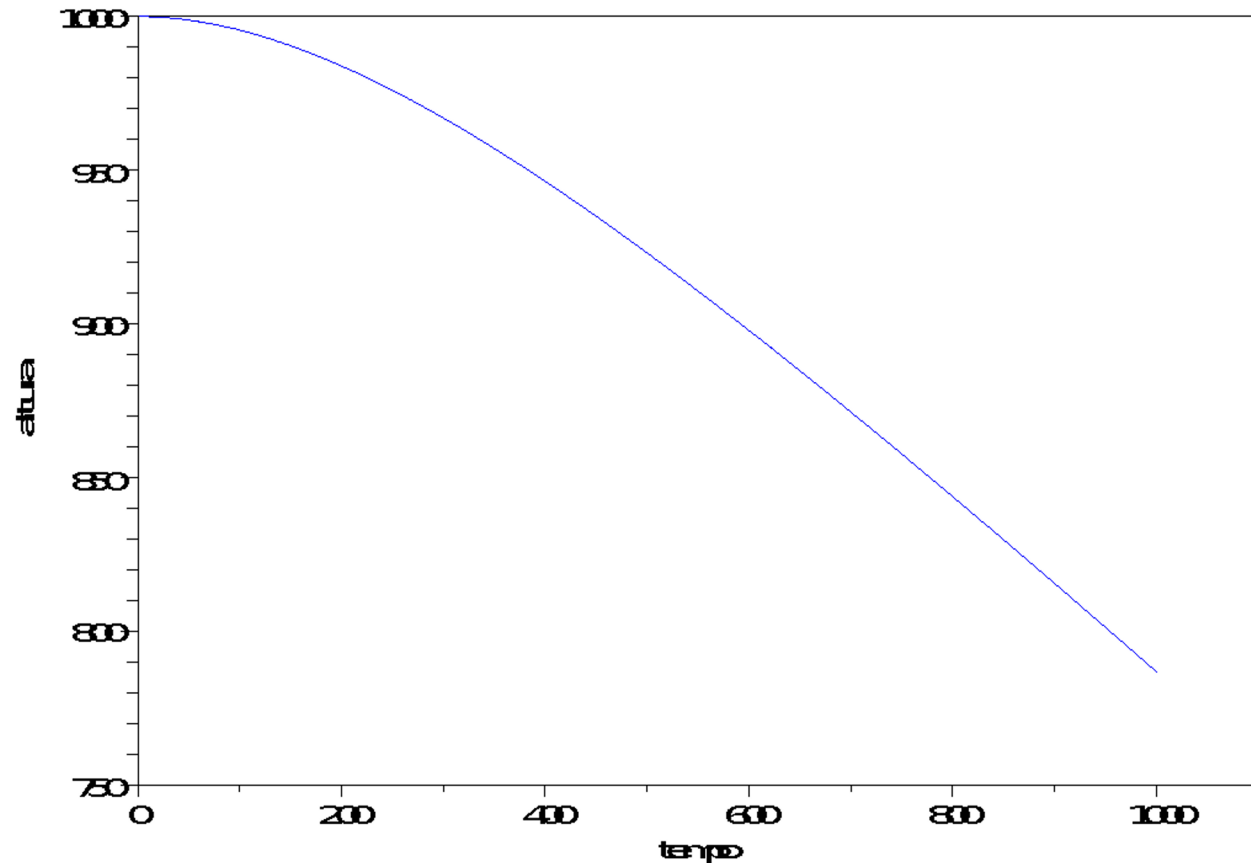
$$v(t + \Delta t) = v(t) + \left(g - \frac{k}{m} v \right) \Delta t$$

- O mesmo pode ser feito para calcular a posição do corpo



Exemplo de Simulação (com atrito)

- Deslocamento
- Parametros
 - Alt inicial.: 1000
 - Vel. Inicial: 0
 - Delta T = $10e-2$
 - $g=10$
 - $k=1$
 - $m=3$
 - Tempo Sim: 10s

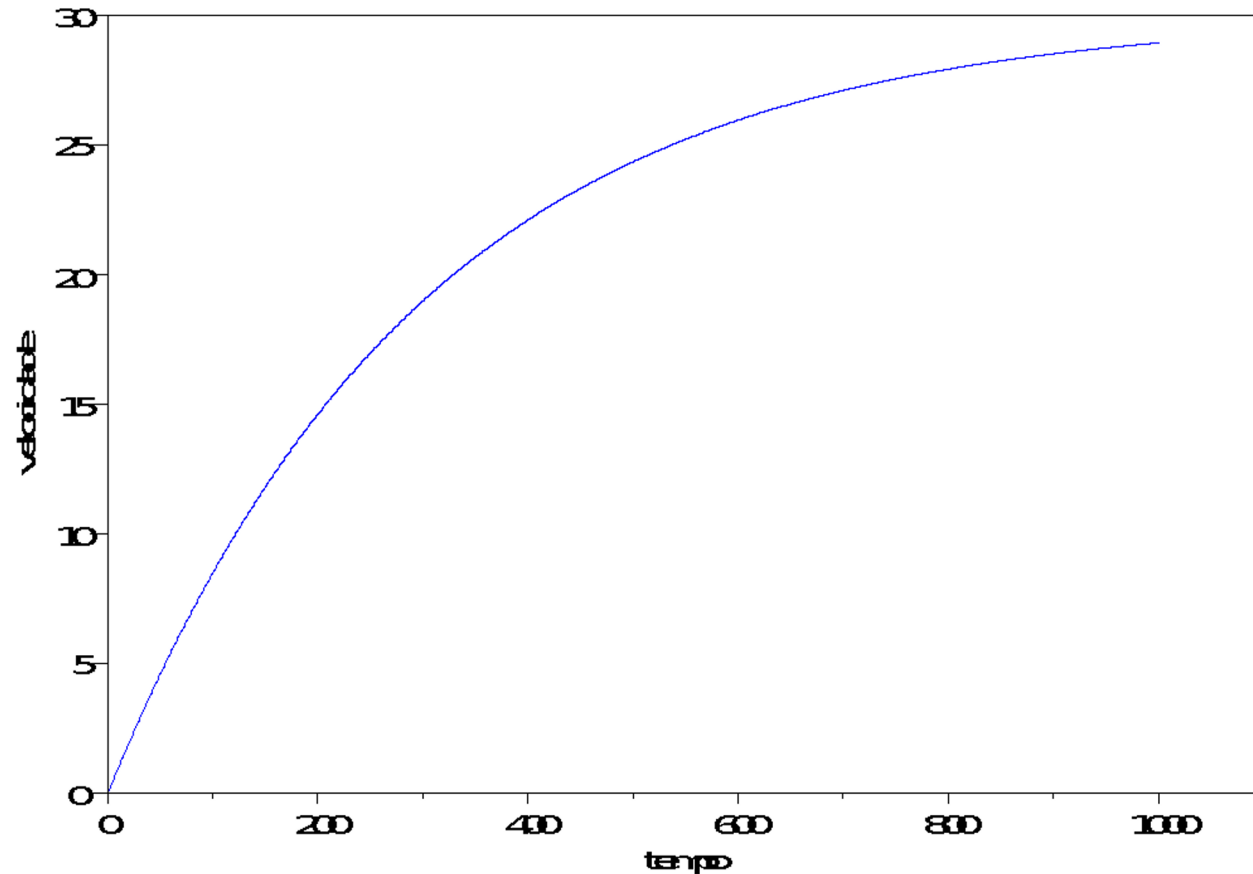


Exemplo de Simulação (com atrito)

- Velocidade

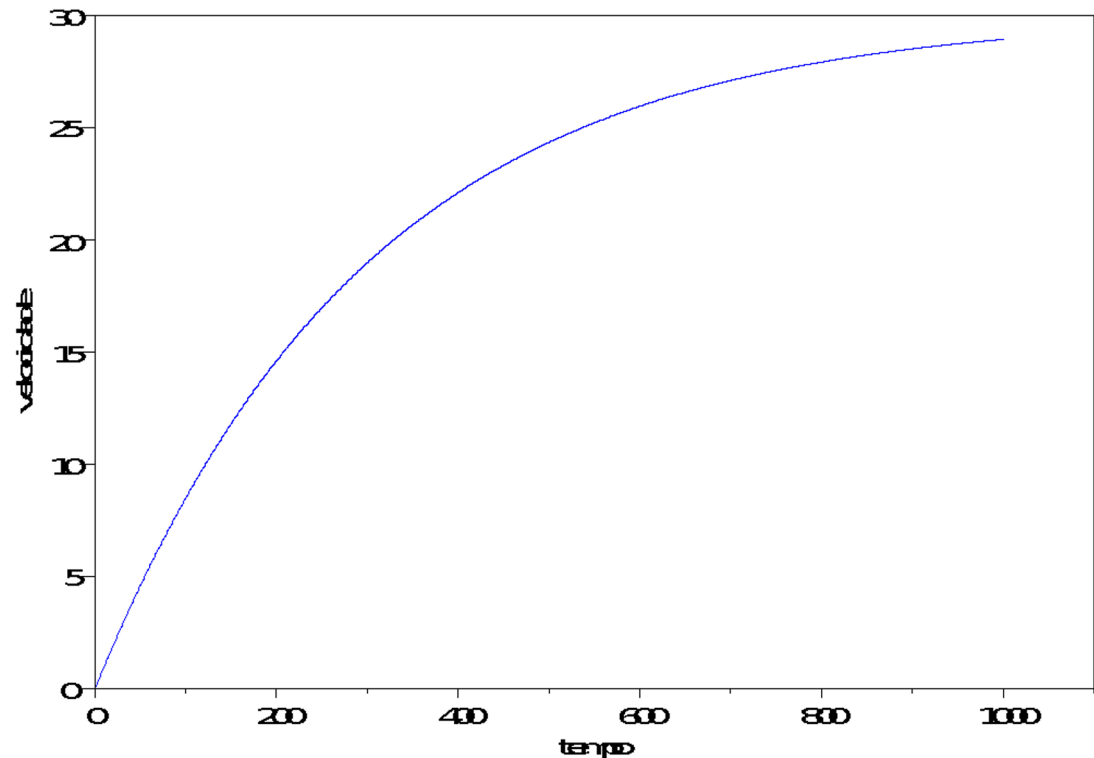
- Parametros

- Alt inicial.: 1000
- Vel. Inicial: 0
- Delta T = $10e-2$
- $g=10$
- $k=1$
- $m=3$
- Tempo Sim: 10s



Exemplo de Simulação (com atrito)

- Velocidade
- Parametros
 - Alt inicial.: 1000
 - Vel. Inicial: 0
 - Delta T = 10e-2
 - $g=10$
 - $k=1$
 - $m=3$
 - Tempo Sim: 10s



Qual a velocidade máxima que o corpo irá atingir?



Lançamento Oblíquo

É possível generalizar o modelo anterior?

Projeto 01 (Projétil)

- Realizar a simulação computacional para o lançamento oblíquo de um projétil considerando o atrito do ar
 - Parâmetros
 - Velocidade inicial ($v(0)$)
 - Aceleração gravidade (g)
 - Altura inicial do corpo ($s(0)$) \rightarrow 2D (x,y)
 - Angulo de lançamento (θ)
 - Massa do corpo (m)
 - Parâmetro de atrito (k)
 - Outros pontos a considerar:
 - O que acontece quando o corpo atinge a altura zero?
 - Qual a energia cinética, potencial e total do corpo ao longo do movimento?



Projeto 01

- Analisar o problema e escrever o modelo (generalizar o modelo apresentado)
- Implementar o modelo **numericamente** utilizando o método de Euler $dt \approx \Delta t$
- Realizar várias simulações $\rightarrow \Delta T = 10e-2$
- Plotar os gráficos do deslocamento, velocidade e energias.



Projeto 01

- Questões que podem ser respondidas com a simulação:
 1. Qual será a energia do corpo ao tocar o solo (considere o solo na altura (y) igual a zero)
 2. Durante a evolução do projétil, qual é o total de energia dissipada pelo atrito?
 3. O que acontece se o choque com o solo for completamente elástico?
 4. Outras a considerar ...
- Relatório descrevendo a modelagem, implementação e os gráficos

