Simulação 03 – Ecologia
Modelo Presa-Predador

Prof. Marcos Quiles

O que veremos

1. Modelo de Malthus
2. Equação Logística
3. Cadeia Trófica
4. Modelo Lotka-Volterra (Presa-Predador)
5. Projeto 3
    1. Parte I – Definição da Rede
    2. Parte II – Simulação da Rede

Modelo de Malthus

Uma população, se não contida, cresce de forma exponencial

Modelo de Malthus (Malthusiano)

- Thomas Robert Malthus (1766-1834)
- Se a população não possui qualquer forma de restrição relacionada ao seu crescimento, esta crescerá de forma exponencial
- Por exemplo:
  - Alimentos abundantes
  - Ausência de doenças
  - Ausência de competição
  - Território ilimitado

Modelo de Malthus (Malthusiano)

- Seja $N(t)$ o número de indivíduos de uma população no tempo t
- Se a população cresce segundo uma razão geométrica (Malthusiano), logo, após um intervalo de tempo Δt teremos:

$$N(t+\Delta t) = kN(t)$$

- No qual *k* é a razão da série e é dependente de Δt

Modelo de Malthus (Malthusiano)

- A partir de $N(t+\Delta t) = kN(t)$ podemos obter:

$$N(t+\Delta t) - N(t) = (k-1)N(t)$$

- dividindo os dois lados por : Δt

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{(k-1)}{\Delta t}N(t)$$

- O que acontece se assumirmos um valor muito pequeno para Δt ?

Modelo de Malthus (Malthusiano)

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=\frac{(k-1)}{\Delta t}N(t)$$

- O lado esquerdo da equação acima é a derivada de $N(t)$
- Vamos assumir o seguinte para o lado direito da equação:

$$\frac{(k-1)}{\Delta t}=\alpha$$

- Ou seja:
- $\dfrac{dN(t)}{dt}=\alpha N(t)$ temos uma equação diferencial!

Modelo de Malthus (Malthusiano)

- Qual a implicação da lei de Malthus?
- O que aconteceria se essa teoria fosse 100% verdade?

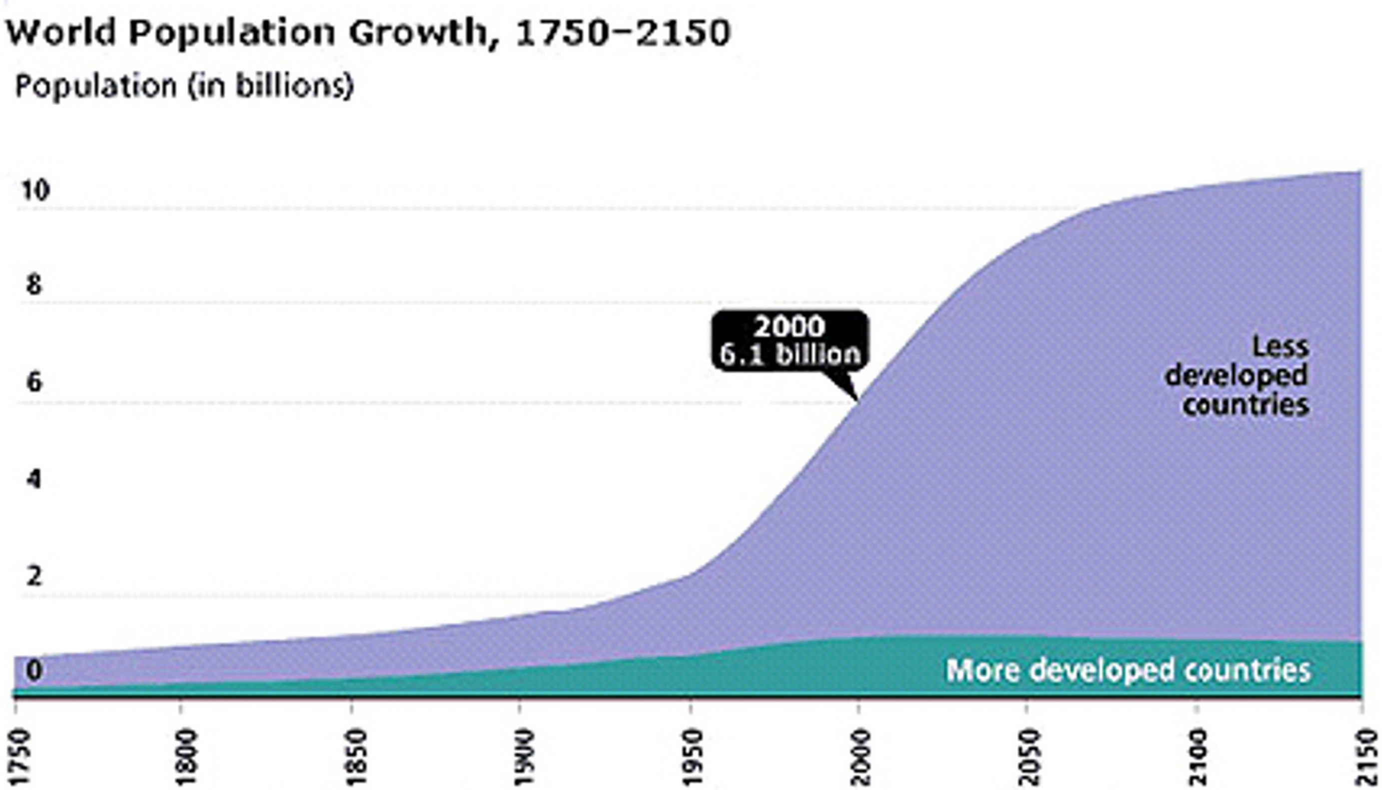
Modelo de Malthus (Malthusiano)

- Qual a implicação da lei de Malthus?
- O que aconteceria se essa teoria fosse 100% verdade?
  - Crescimento exponencial da população

- Vejamos o exemplo:
  - Seja uma população inicial de 100 bactérias Escherichia coli (E. coli)
  - Sabemos que essa bactéria se duplicada a cada (aprox.) 20 minutos
- ***Resultado: em algumas horas ela ocuparia toda a superfície da terra.***

Modelo de Malthus (Malthusiano)

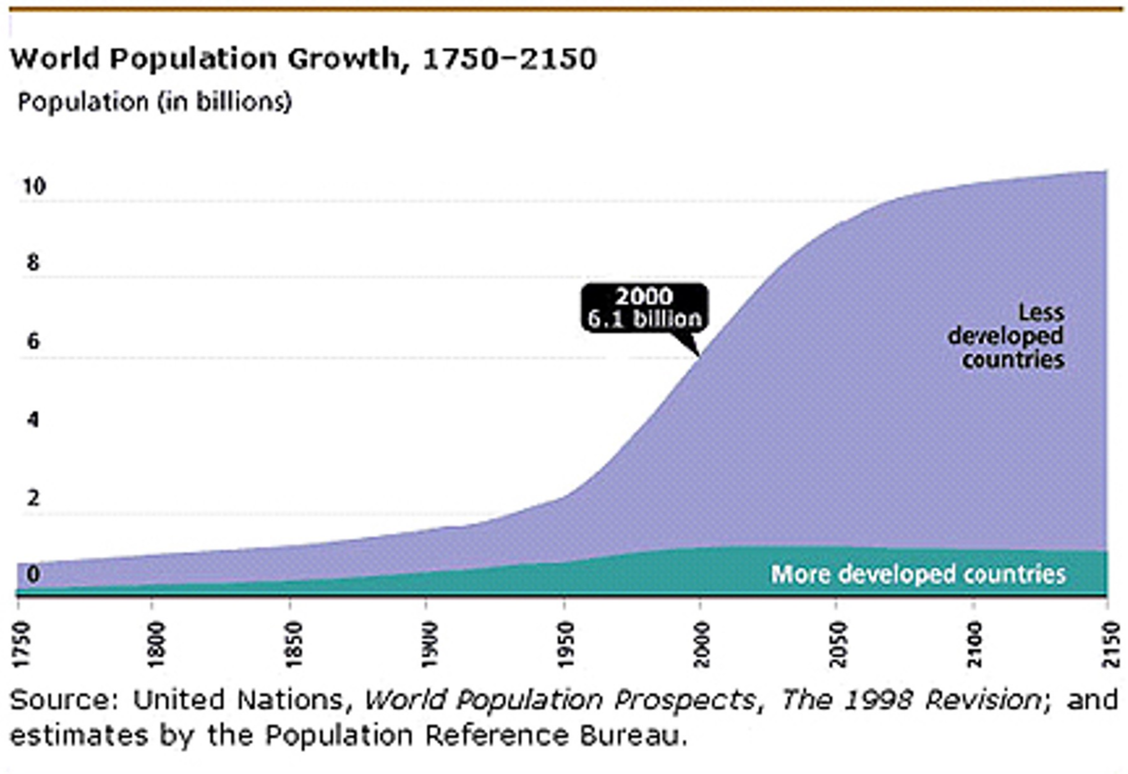
- O crescimento exponencial pode ser observado em apenas algumas situações



Source: United Nations, *World Population Prospects, The 1998 Revision*; and estimates by the Population Reference Bureau.

Modelo de Malthus (Malthusiano)

- Observe o início do gráfico:
- Crescimento Exponencial
- Contudo, após um certo intervalo de tempo, o crescimento se estabiliza (**saturação**)



Modelo de Malthus (Malthusiano)

- Logo, o modelo Malthusiano:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t)$$

- Considera que a população cresce a uma razão α na ausência de fatores limitantes
- Bom, quais seriam esses fatores limitantes?

Fatores Limitantes para o Crescimento

- Espaço e recursos limitados
- Competição por recursos vitais entre indivíduos da mesma população
- Doenças, predação
- Muitos outros

- Logo, nossa equação poderia ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) - \text{Fatores Limitantes}$$

Equação Logística

- Podemos modificar o Modelo de Malthus para incluir um termo de saturação da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$$

- A equação acima é denominada equação logística e foi proposta por Pierre François Verhulst (1804-1849)

Equação Logística

- Podemos representar o modelo logístico da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2 = \alpha N\left(1 - \frac{N}{k}\right)$$

- Onde α representa a taxa de crescimento da população e k representa a capacidade de suporte do ambiente (saturação)

Equação Logística

- Quais os pontos de equilíbrio da equação abaixo?

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N\left(1 - \frac{N}{k}\right)$$

Equação Logística

- Quais os pontos de equilíbrio da equação abaixo?

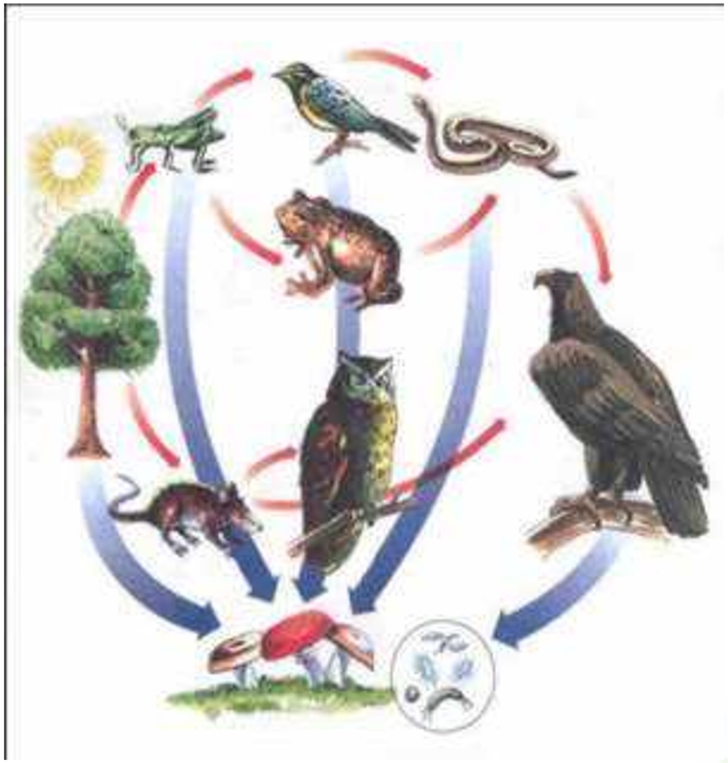
$$\frac{dN}{dt} = \alpha N\left(1 - \frac{N}{k}\right)$$

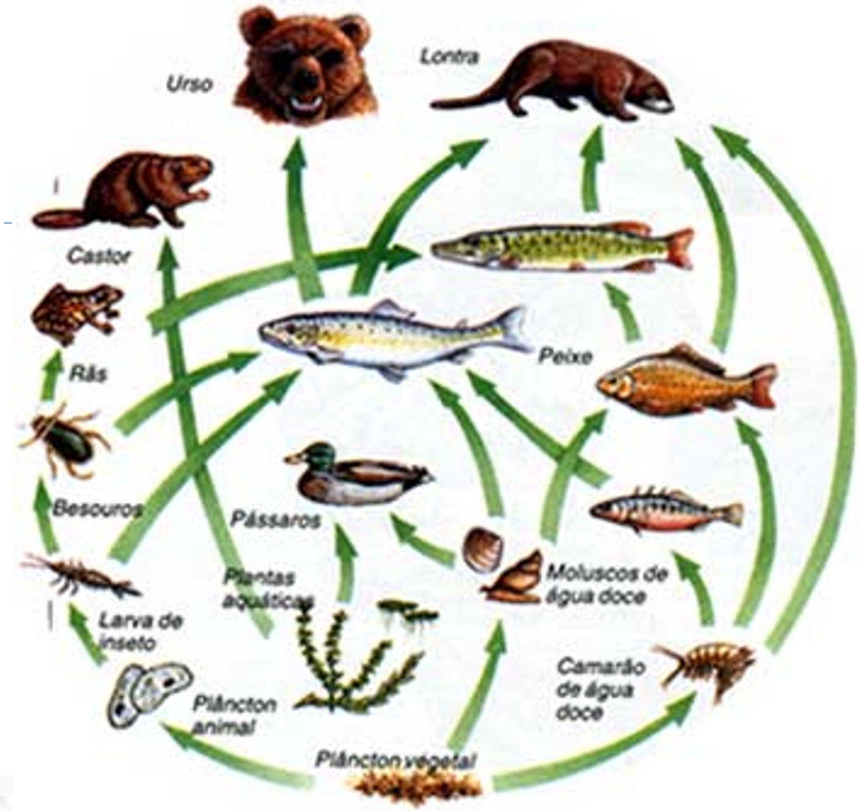
- *N=0* e
- *N=k*
- Sendo o primeiro **instável** e o segundo **estável** (atrator)

Equação Logística + Interações

- O modelo apresentado até o momento, considera apenas a população de uma única espécie
- Contudo, muitas espécies podem conviver num mesmo ambiente formando uma rede de interações
- Por exemplo:
  - Animais competindo por alimentos
  - Espécies que se alimentam de outras
  - Doenças (parasitas)
  - Etc…
- Essas redes podem se tornar bastante complexas

Rede Trófica





Tipos de Interação entre Espécies

- **Predação**: uma espécie **A** prejudica (consome) uma espécie **B**. Por outro lado a espécie **B** é benéfica à espécie **A**. Definimos **A** como o predador e **B** como a presa
- **Competição**: um prejudica o outro
- **Mutualismo / Simbiose** : um ajuda o outro
- **As interações entre espécies estão entre os principais fatores envolvidos na modulação das populações**

Interação entre Espécies

Modelo Lotka-Volterra

Equação Presa-Predador

Modelo Lotka-Volterra

- Seja
  - *P(t)* a população de predadores e
  - *V(t)* a população de presas (vítimas)

- O modelo Lotka-Volterra é descrito pelas equações:

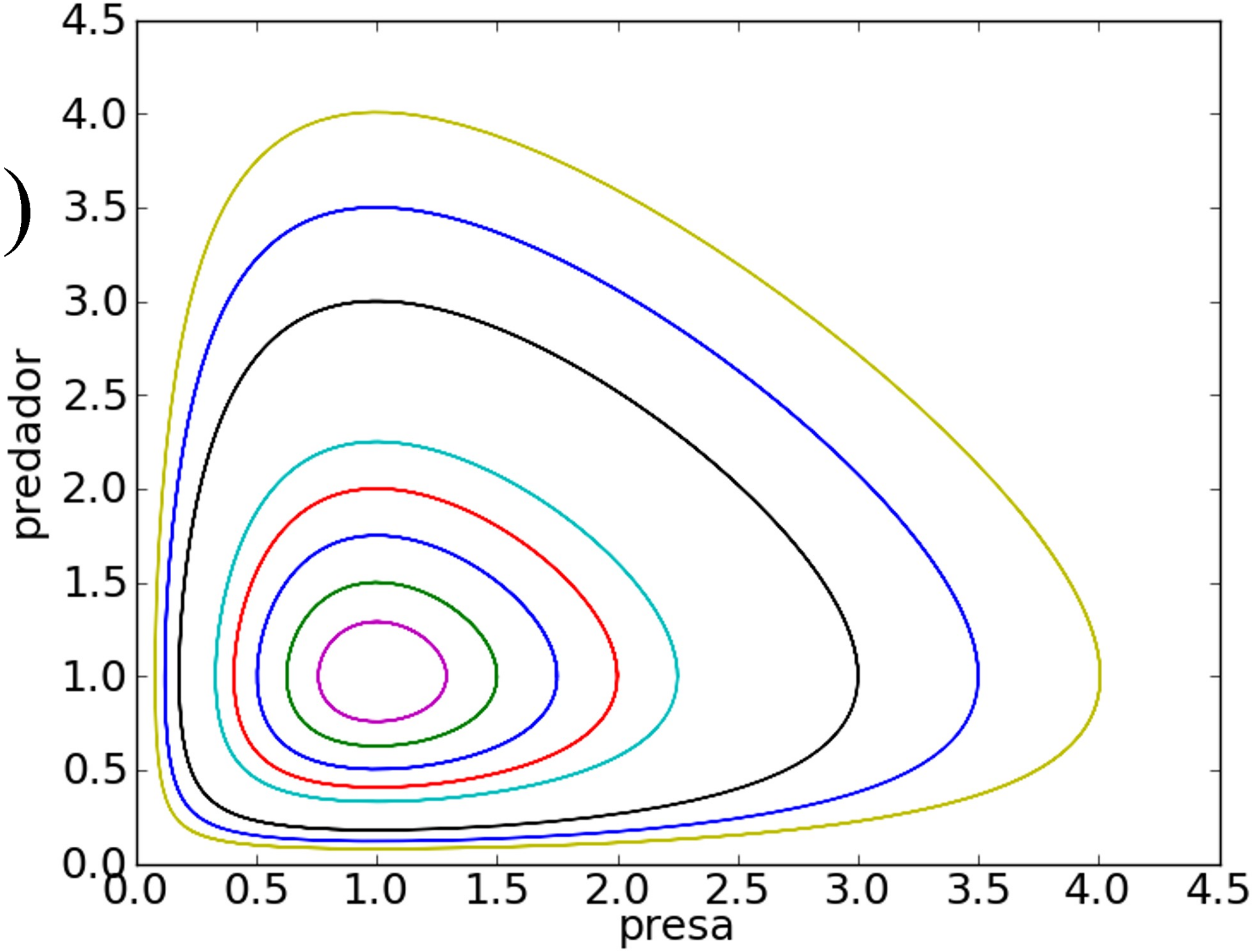
$$\frac{dP}{dt} = P(\alpha V - \beta)$$

$$\frac{dV}{dt} = V(\lambda - \varphi P)$$

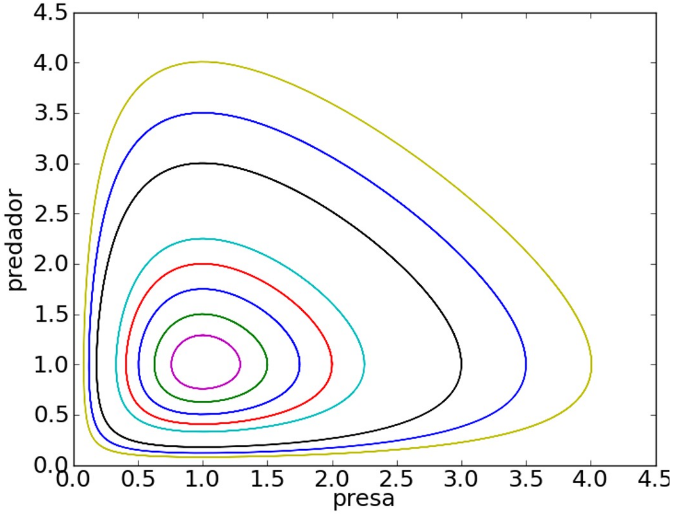
Modelo Lotka-Volterra

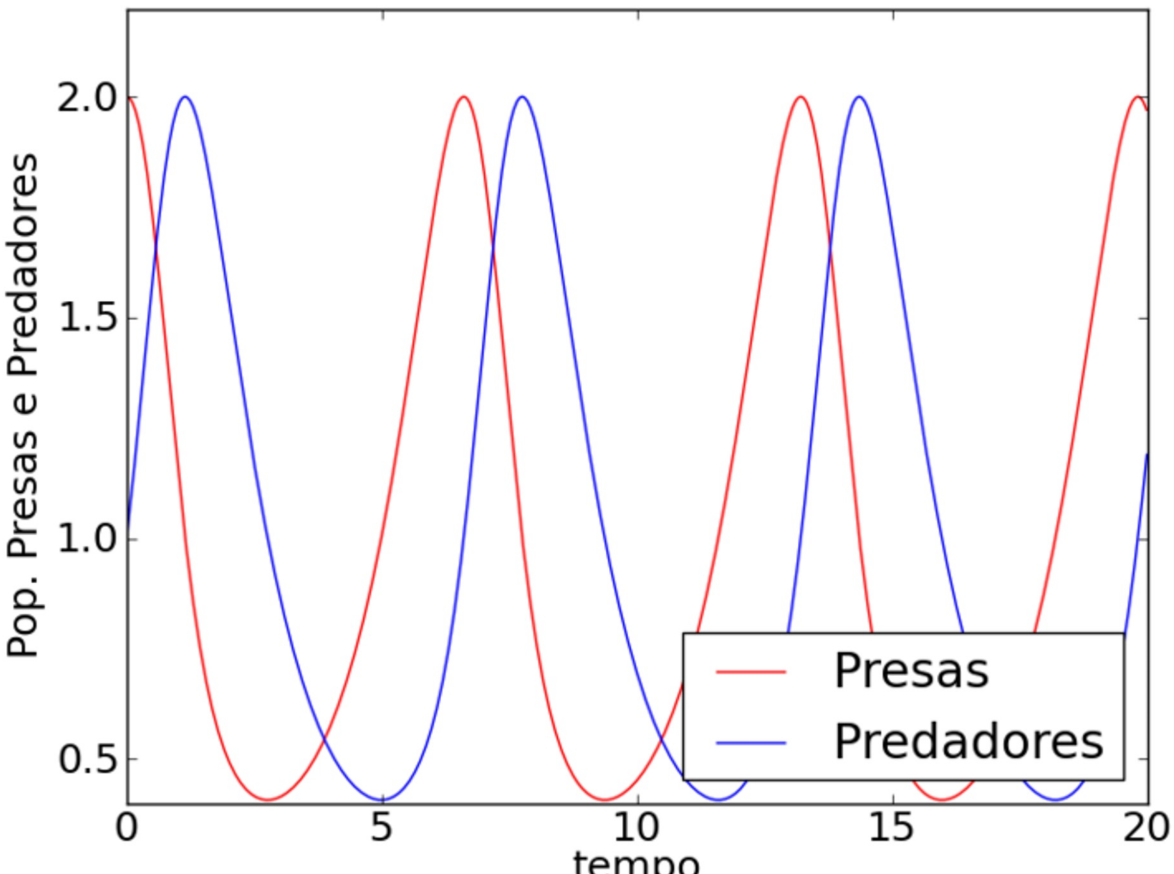
$$\frac{dP}{dt} = P(\alpha V - \beta)$$

$$\frac{dV}{dt} = V(\lambda - \varphi P)$$



Modelo Lotka-Volterra





Modelo Lotka-Volterra

- Bom, o que acontece com as presas na ausência de predadores?

$$\frac{dP}{dt} = P(\alpha V - \beta)$$

$$\frac{dV}{dt} = V(\lambda - \varphi P)$$

- Como podemos resolver tal problema?

Simulação a ser realizada

Modelagem de uma Rede Trófica

O Que Devemos Considerar

- Recursos (por exemplo a vegetação)
- Herbívoros (consumidores da vegetação e presas dos carnívoros)
- Carnívoros (predadores)

Projeto 03

1) Definir uma rede trófica considerando (Parte I):
   - A rede deve contar 5 ou mais espécies
   - Pelo menos um recurso natural (cuidado, a vegetação não cresce indefinidamente...)
   - Rede em três ou mais níveis (produtor + herbívoro + carnívoro)
   - Modelar cada interação, assumindo que um dado predador pode, por exemplo, consumir uma presa e não outra ou mesmo as duas com ponderações distintas. Pode haver canibalismo, etc.
2) Modelagem Computacional (Parte II)
   - Após definição da rede, definir as equações e os parâmetros (serão muitos)
   - Resolver as equações numericamente utilizando o método de Euler

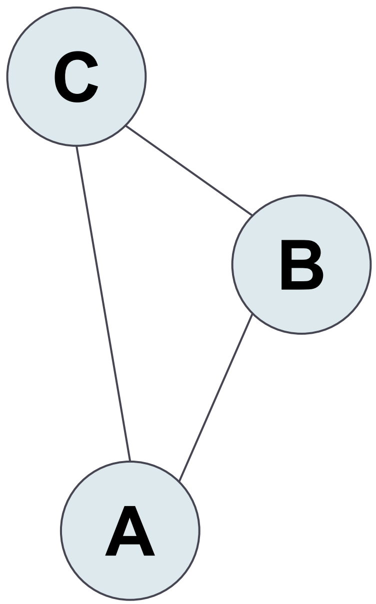
Projeto 03

3) Simulação (Parte II)
   - Estudar o comportamento assintótico do modelo a partir de uma condição inicial adotada (várias simulações)
     - A configuração dos parâmetros não é algo simples, anote todos os valores simulados e os respectivos resultados obtidos
   - **Considerar Perturbações**
     - fenômenos naturais, como por exemplo: redução/crescimento repentino da vegetação (fenômeno da seca e/ou excesso de chuvas); doença em uma dada espécie (redução/extinção de uma dada espécie), sazonalidade, etc...

Projeto 03

4) Confecção do relatório
   - Relatar todas as simulações realizadas bem como os respectivos gráficos gerados
5) Apresentação dos resultados
   - Cada grupo fará uma apresentação de 10 minutos descrevendo os principais resultados obtidos

Exemplo Modelagem (Rede + EDOs)



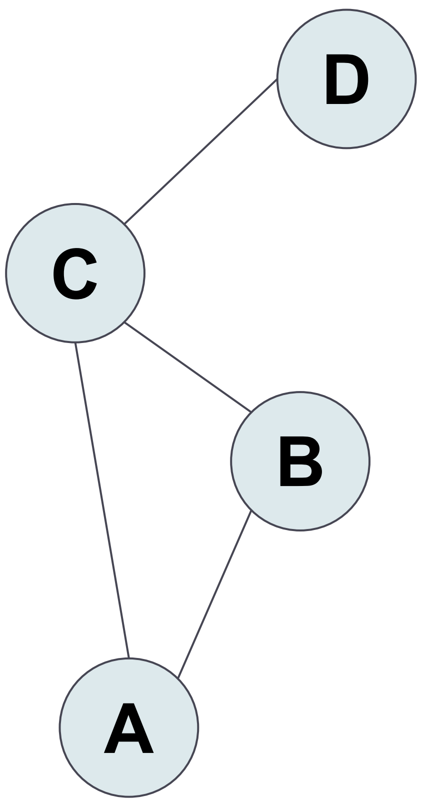
$$\frac{dA}{dt} = A(p_1 - p_2 B - p_3 C)$$

$$\frac{dB}{dt} = B(-p_4 + p_5 A - p_6 C)$$

$$\frac{dC}{dt} = C(-p_7 + p_8 A + p_9 B)$$

$$\frac{dA}{dt} = A(p1 - \frac{p1A}{K} - p2B - p3C$$

Exemplo Modelagem (Rede + Matriz Adjacência)



	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				