

Algoritmos para o Problema do Caixeiro Viajante

Mateus Vitor Mota Vasconcelos¹

¹Universidade Federal de Minas Gerais

mateusvmv@ufmg.br

Resumo. *Esse documento descreve duas implementações de algoritmos aproximativos para o problema do Caixeiro Viajante, os algoritmos Twice Around the Tree e o algoritmo de Christofides, bem como uma implementação de Branch and Bound, um algoritmo exaustivo e exato. As implementações foram comparadas em questão de qualidade da solução e tempo de execução, tanto com casos aleatórios de tamanho baixo quanto com problemas do conjunto TSPLIB.*

1

1. Problema do Caixeiro Viajante

Caixeiro Viajante é o nome de um problema NP-Difícil [Cormen et al. 2009] que consiste em retornar o caminho mais curto que passe por todos os pontos de um conjunto e retorne para o ponto de início, como um caixeiro que deve vender suas mercadorias em diversas cidades e retornar ao fim. É um problema difícil, e apenas em 1954 foi descoberta uma solução para 49 cidades, à mão, por [Dantzig et al. 1954].

Por ser um problema NP-Difícil, não há solução polinomial para a melhor solução, e o uso de algoritmos aproximativos é o único meio de se obter soluções de forma eficiente. Como o problema tem usos práticos bastante comuns, há bastante interesse em formas eficazes e eficientes de resolvê-lo.

2. Algoritmo Twice Around the Tree

O algoritmo Twice Around the Tree baseia-se em uma Árvore Geradora Mínima para obter uma solução 2-aproximada para o problema do Caixeiro Viajante. O problema da Árvore Geradora Mínima é similar ao Caixeiro Viajante, aqui queremos obter uma árvore que atinja todos os vértices de um grafo com o menor peso nas arestas. Enquanto o Caixeiro Viajante busca reduzir o custo da viagem pelas arestas na ida e na volta, a Árvore Geradora reduz o custo das arestas sem o custo de retorno [Rosenkrantz et al. 1977].

Para transformar a Árvore Geradora Mínima em uma solução para o Caixeiro Viajante, o TATT percorre essa árvore com um Tour de Euler, e pula os vértices repetidos para obter um Circuito Hamiltoniano. Por fim, o algoritmo apenas retorna ao começo.

O nome se dá pelo fato de que a árvore é percorrida duas vezes em cada aresta, uma para prosseguir e a outra para retornar. A Árvore Geradora Mínima é sempre estritamente menor que a solução ótima para o Caixeiro Viajante, isso é porque toda solução do Caixeiro Viajante, menos uma aresta qualquer, é uma Árvore Geradora. Por isso, quando obtemos a árvore e percorremos cada aresta duas vezes, temos um fator de aproximação de $O(2)$.

¹Disponível em https://github.com/mateusvmv/alg2_tsp

3. Algoritmo de Christofides

O algoritmo de Christofides [Christofides 1976] baseia-se em uma ideia similar ao TATT, porém realiza um passo a mais. Ao obter a Árvore Geradora Mínima, ela contém arestas de grau ímpar, por isso não contém nenhum Tour como subgrafo. Para mudar isso, esse algoritmo cria um Emparelhamento Mínimo dos nós de grau ímpar da Árvore Geradora, e coloca as arestas do emparelhamento em um novo grafo. Esse grafo tem custo total nas arestas igual ao custo das arestas da árvore, somado ao custo das arestas do emparelhamento, e todos os vértices tem grau par.

Assim, é possível entrar e sair de qualquer vértice, e utilizando de um Tour de Euler sem visitas repetidas, geramos um Circuito Hamiltoniano tal como no TATT, e fechamos o circuito, obtendo uma solução para o Caixeiro Viajante. Essa solução tem um custo limitado ao custo das arestas, e diferente do TATT, no CF é possível retornar usando outras arestas do grafo, por isso não dobramos o custo das arestas.

O fator de aproximação, então, é o valor da Árvore Geradora Mínima acrescido do valor do Emparelhamento Mínimo. Como o valor da árvore é um limite inferior para o valor da solução do Caixeiro Viajante, e como as arestas do emparelhamento são limitadas pela metade do custo da árvore, a solução que o algoritmo produz é uma aproximação com fator $O(3/2)$.

4. Algoritmo Branch and Bound

Diferente dos dois algoritmos anteriores, o algoritmo Branch and Bound não produz soluções aproximadas, mas exatas. Ele baseia-se no fato de que é possível obter um limite inferior e superior para uma solução do Caixeiro Viajante antes mesmo de tê-la por completo, ao olhar para as arestas dos nós que ainda não tem $grau = 2$.

Para isso, definimos o limite inferior de uma solução como a soma da menor aresta adjacente a cada vértice de $grau < 2$ com a segunda menor aresta adjacente a cada vértice de $grau < 1$, dividido pela metade, e somado ao peso das arestas que já estão incluídas na solução. Já o limite superior é semelhante, mas usa as maiores arestas no lugar das menores.

O algoritmo prossegue como se fosse uma solução de força bruta, porém sempre que adiciona uma aresta na recursão, observa os limites inferiores e superiores. Se o limite inferior de uma solução é pelo menos o valor de algum outro limite superior conhecido, não é preciso continuar o caminho atual. Assim, o algoritmo corta grande parte dos caminhos ineficientes e é capaz de terminar mais rápido.

Para facilitar no corte de soluções ruins, o algoritmo já começa com uma solução aproximativa, gerada pelo TATT ou pelo CF, como um limite superior, e também usa a heurística de Depth First Search, que procura por soluções completas antes de soluções que possam ter um limite inferior melhor, para que o limite superior se ajuste o mais rápido possível e caminhos ineficientes sejam cortados mais agressivamente.

5. Experimentos

5.1. Casos Aleatórios

Nós rodamos os algoritmos mencionados em casos aleatórios pequenos para comparar as soluções, porque o Branch and Bound implementado não é capaz de solucionar os

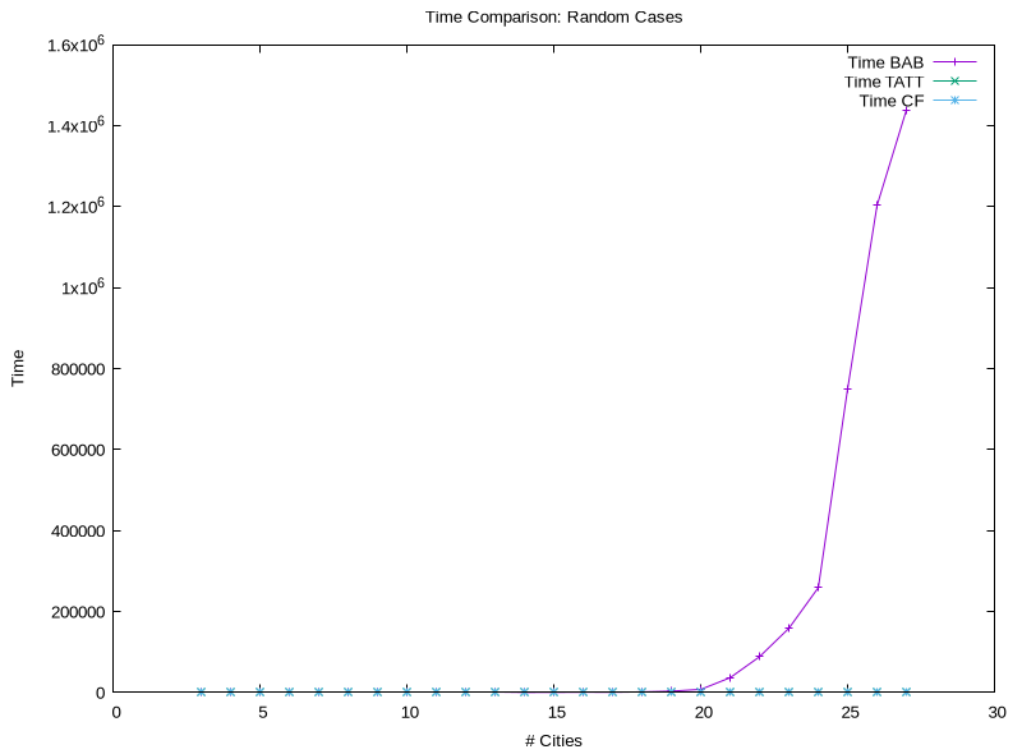


Figura 1. Tempo de execução dos três algoritmos por tamanho do problema

problemas da TSPLIB a tempo.

Podemos ver (Figura 1) que o tempo de execução dos algoritmos aproximativos é de poucos milisegundos para esses casos pequenos, porém o Branch and Bound já revela sua complexidade por ser um algoritmo exaustivo, e seu tempo de execução cresce de forma exponencial.

Já no gráfico de custos das soluções (Figura 2), podemos ver que o CF geralmente produz soluções melhores que o TATT, e que ambos failham em encontrar a solução ótima, porém mantém um fator de aproximação constante, não superando esse ponto.

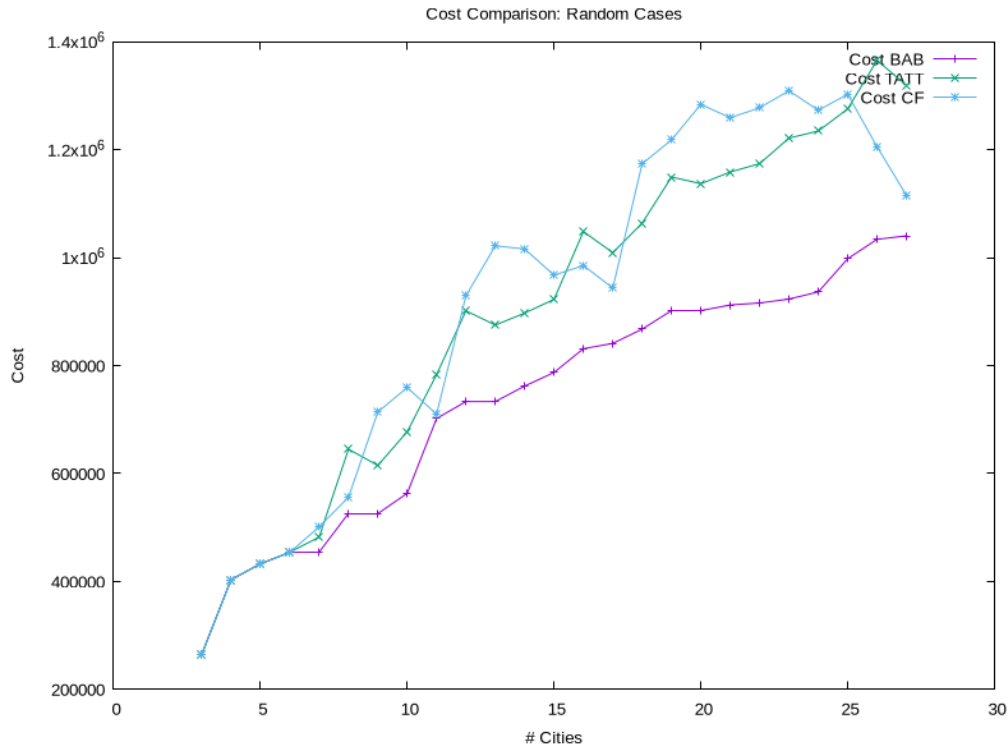


Figura 2. Custo das soluções dos três algoritmos por tamanho do problema

5.2. Problemas da TSPLIB

Os algoritmos também foram executados com os problemas de tipo euclidiano 2D da TSPLIB [Johnson and McGeoch 1997]. Para os problemas da TSPLIB há mais cidades, por isso não foi possível executar o algoritmo Branch and Bound nesses casos. Porém, os algoritmos aproximativos foram executados bem rapidamente para esses casos, o que abriria a possibilidade para refinar as soluções com buscas aleatórias e outras heurísticas de melhorias, o que não foi feito nesse trabalho.

Com relação aos tempos de execução (Figura 3), podemos ver os tempos de execução dos algoritmos aproximativos e verificar que o Christofides possui um custo maior que o TATT. Isso é facilmente explicado ao notar que o CF executa todos os passos do TATT: criar a árvore geradora, fazer o Tour de Euler e obter o Circuito Hamiltoniano, então fechá-lo, mas o CF também faz o uso de emparelhamentos mínimos. Em nossa implementação, foi usado o algoritmo de Blossom, que é $O(|E||V|^2)$, e facilmente supera a complexidade $O(|V|^2)$ do TATT.

Já com relação aos custos das soluções geradas, vemos que o CF é capaz de gerar soluções melhores consistentemente, porém não chegam a ser $2/3$ do custo das soluções do TATT como o pior caso sugere. O caso médio é diferente.

Por fim, ao observar os fatores de aproximação, usando os dados fornecidos pela TSPLIB e comparando com nossa implementação (Figura 7), nós observamos que o CF realmente respeita um fator de $O(3/2)$, e o TATT respeita o fator de $O(2)$, com um caso médio semelhante entre os dois.

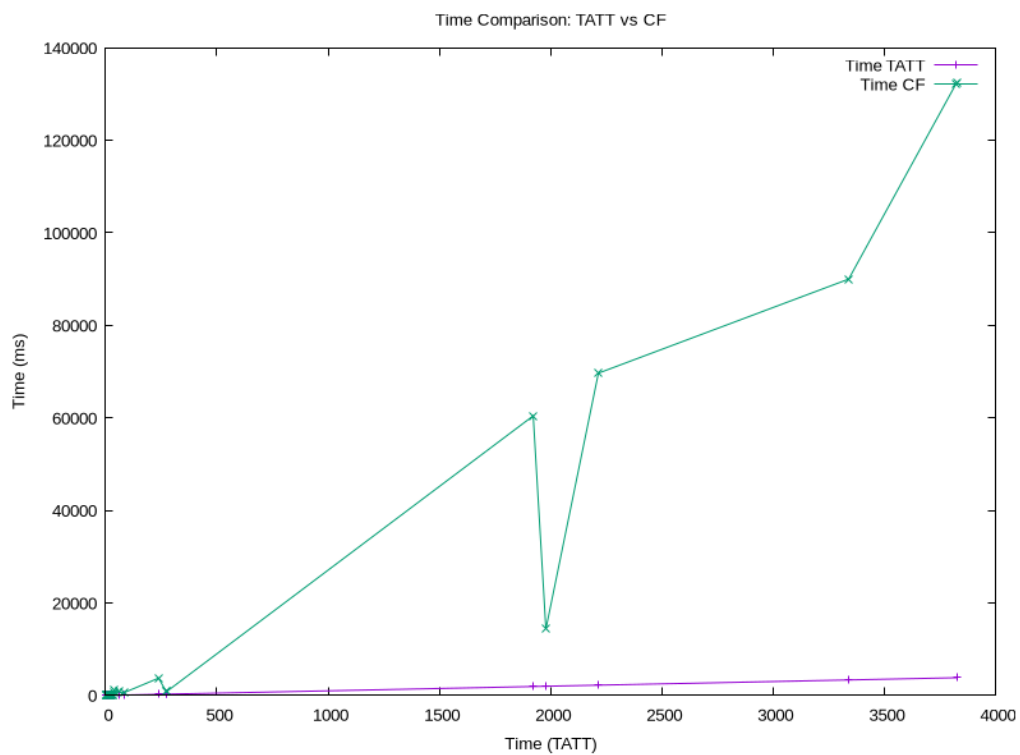


Figura 3. Tempo de execução dos algoritmos aproximativos por tempo

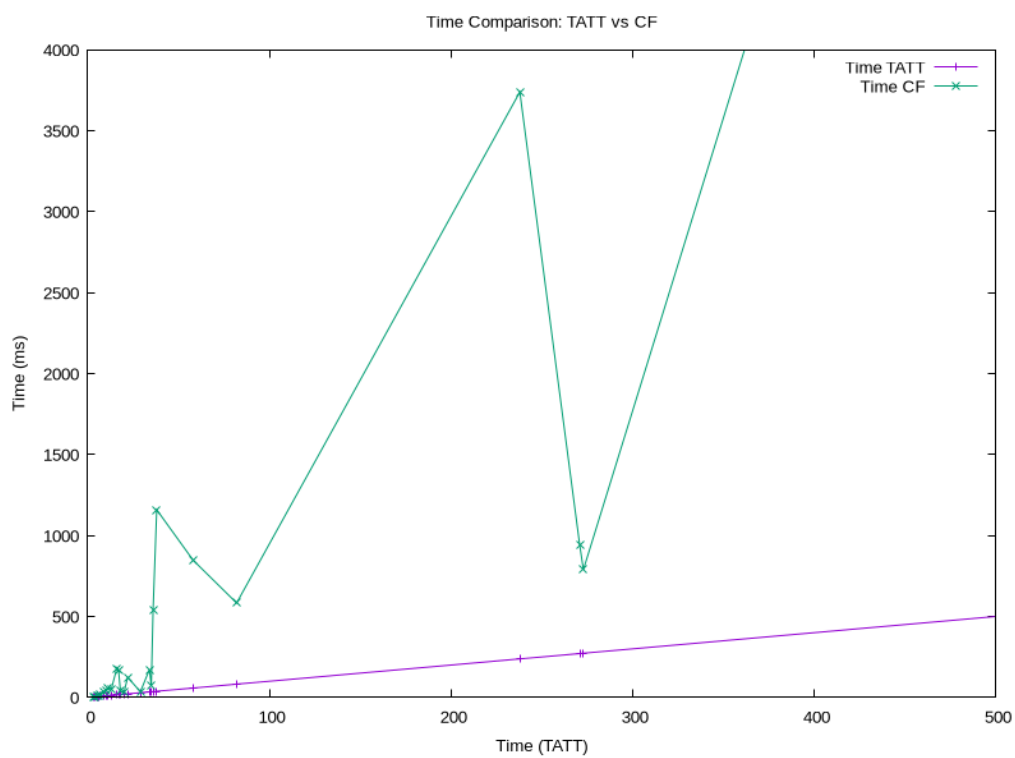


Figura 4. Tempo de execução dos algoritmos aproximativos por tempo (Zoom)

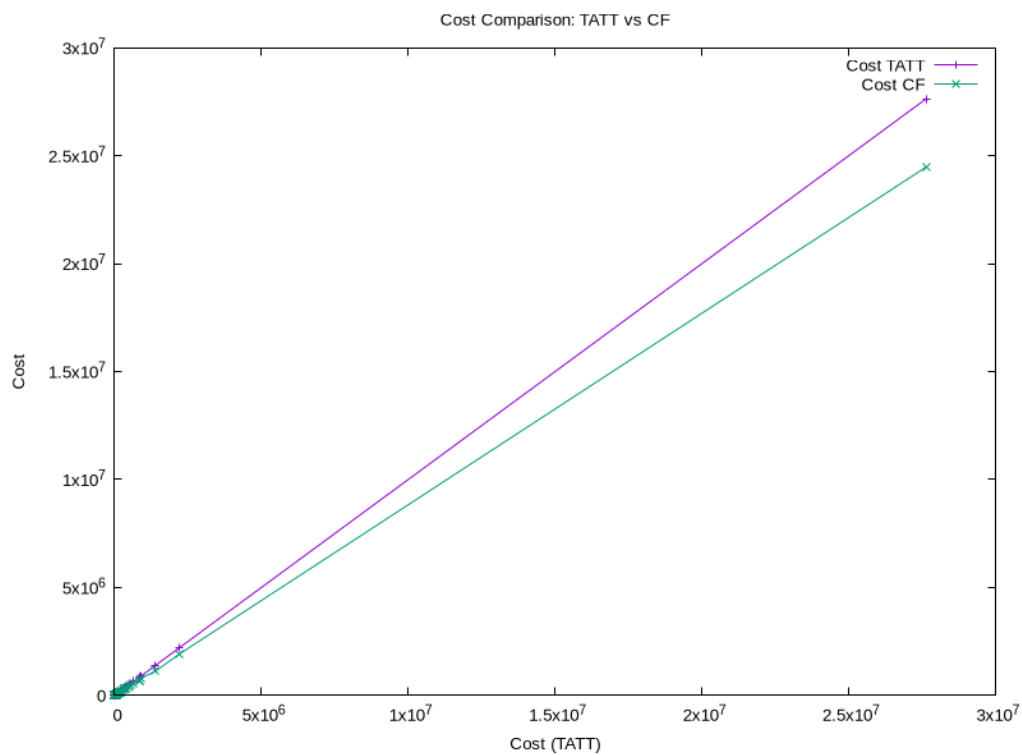


Figura 5. Custo das soluções dos algoritmos aproximativos por tempo

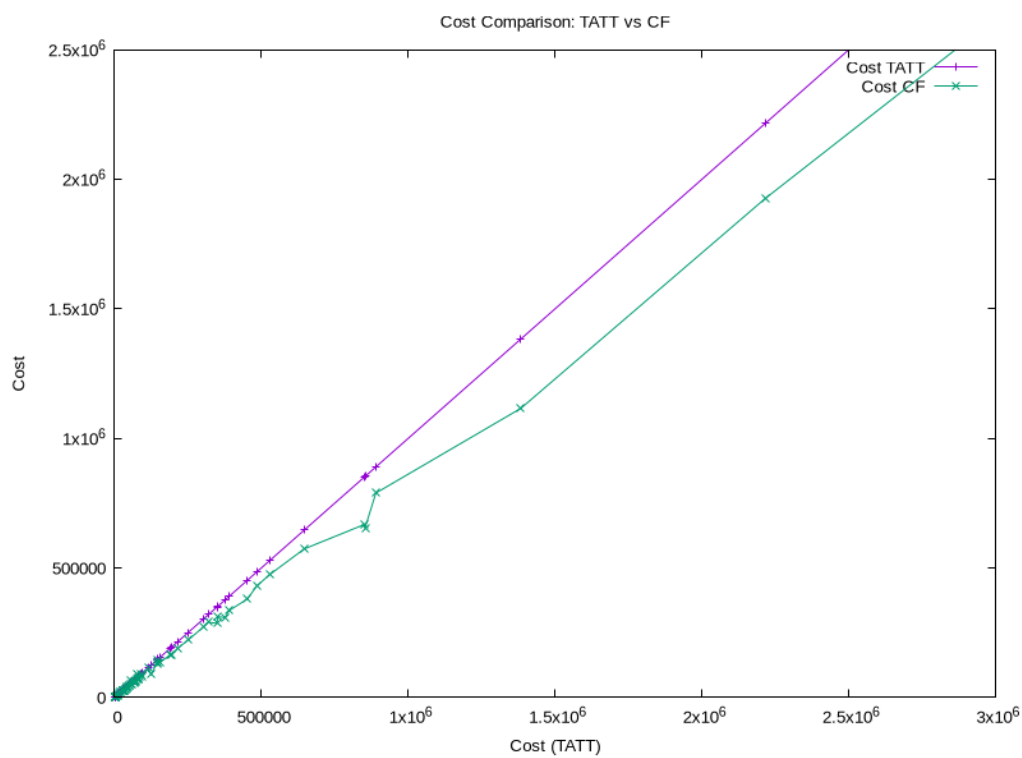


Figura 6. Custo das soluções dos algoritmos aproximativos por tempo (Zoom)

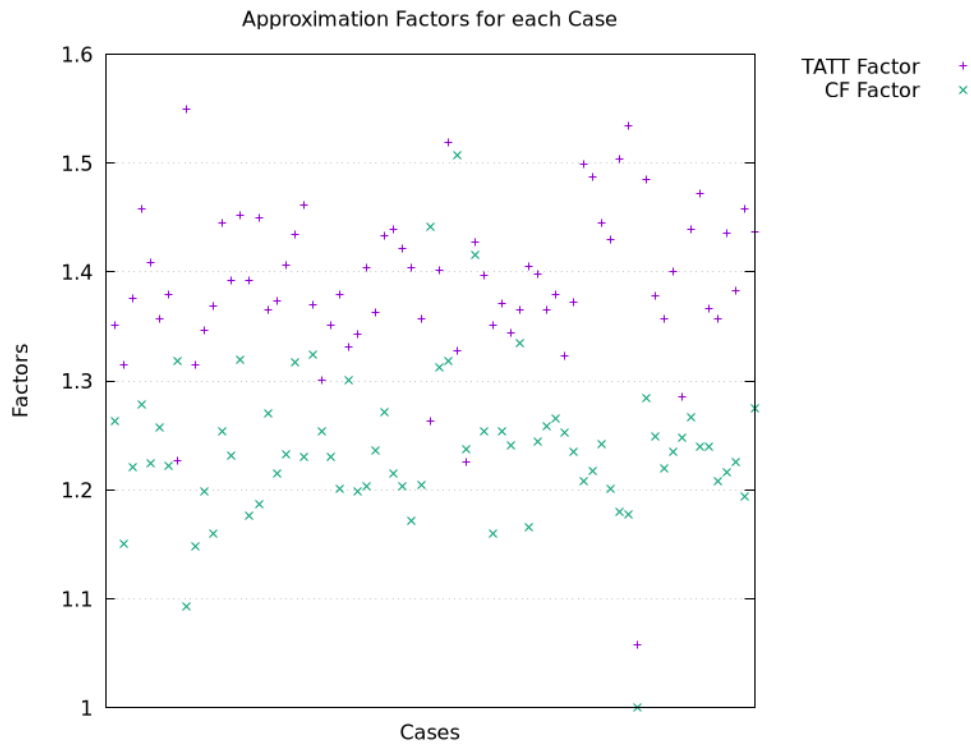


Figura 7. Fatores de Aproximação dos algoritmos aproximativos

6. Conclusões

Como os algoritmos diferem em tempo de execução e qualidade das soluções, eles são úteis para casos diferentes [Lawler et al. 1985]. Pelo tempo de execução dos algoritmos, o TATT pode ser a melhor opção para tarefas que precisem de resultados rápidos, como unidades em jogos que precisem de calcular sua rota frequentemente, enquanto o CF pode ser a melhor opção para tarefas comuns e diárias, e o Branch and Bound a melhor opção para tarefas de alto risco que tenham um tempo de planejamento maior, onde é possível esperar dias por uma solução.

Referências

- Christofides, N. (1976). Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. *Technical report, Carnegie-Mellon University*.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., and Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms*. MIT press.
- Dantzig, G. B., Fulkerson, D. R., and Johnson, S. M. (1954). Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(4):393–410.
- Johnson, D. S. and McGeoch, L. A. (1997). The traveling salesman problem: A case study. *Local search in combinatorial optimization*, pages 215–310.
- Lawler, E. L., Lenstra, J. K., Rinnooy Kan, A., and Shmoys, D. B. (1985). *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. Wiley.
- Rosenkrantz, D. J., Stearns, R. E., and Lewis II, P. M. (1977). An analysis of several heuristics for the traveling salesman problem. *SIAM Journal on Computing*, 6(3):563–581.