

Rys. 5.9. Parametry modelu obiektu astatycznego: a) z opóźnieniem, b) z inercją

Przedstawione sposoby identyfikacji parametrów modelu zastępczego na podstawie charakterystyk czasowych to tylko przykłady. Inne typowe metody identyfikacji często polegają na porównaniu parametrów wyznaczonych eksperymentalnie z parametrami znormalizowanych modeli zastępczych, które są dostępne w postaci tablic lub nomogramów.

Duże znaczenie praktyczne ma także **metoda momentów** oparta na zależności (I.182) między transmitancją $G(s)$ a momentami m_i odpowiedzi impulsowej $g(t)$ ^{*}:

$$G(s) = m_0 - \frac{1}{1!}m_1 s + \frac{1}{2!}m_2 s^2 - \dots \quad (\text{I.199})$$

Im więcej momentów uwzględnionych w rozwinięciu, tym dokładniejszy model (szersze pasmo częstotliwości). Uwzględnienie początkowych momentów zapewnia dokładność modelu w zakresie małych częstotliwości. Metoda momentów pozwala konstruować modele o zadanej postaci transmitancji. Jeśli założony model ma postać funkcji wymiernej:

$$G_{m,n}(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1} \quad (\text{I.200})$$

to z przyrównania (I.199) i (I.200) otrzymuje się:

$$\left(m_0 - \frac{1}{1!}m_1 s + \frac{1}{2!}m_2 s^2 - \dots \right) (1 + a_1 s + \dots + a_n s^n) = b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m \quad (\text{I.201})$$

Po wykonaniu mnożenia i porównaniu wyrazów przy tych samych potęgach s otrzyma się układ równań do rozwiązania względem nieznanych współczynników a i b transmitancji $G(s)$. Na przykład dla $G_{2,3}(s)$:

$$\left(m_0 - \frac{1}{1!}m_1 s + \frac{1}{2!}m_2 s^2 - \frac{1}{3!}m_3 s^3 \dots \right) (1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 \quad (\text{I.202})$$

a stąd układ równań:

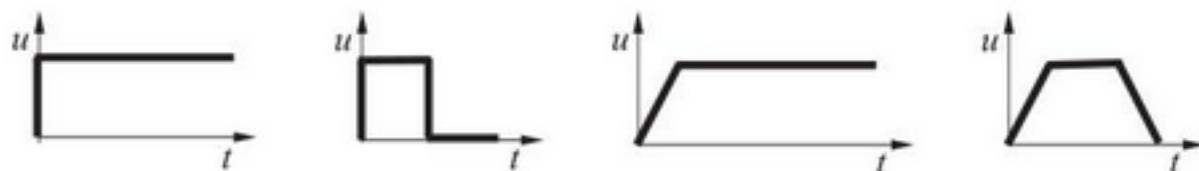
* W p. 4.3.3: definicja i interpretacja momentów funkcji.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ m_1 & -m_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}m_3 & -m_1 & m_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6}m_3 & -\frac{1}{2}m_2 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24}m_4 & -\frac{1}{6}m_3 & \frac{1}{2}m_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \frac{1}{2}m_2 \\ \frac{1}{6}m_3 \\ \frac{1}{24}m_4 \\ \frac{1}{120}m_5 \end{bmatrix} \quad (\text{I.203})$$

Wartości momentów m_i można zmierzyć podczas eksperymentu. Jeśli znana jest analityczna postać odpowiedzi układu, to momenty można obliczyć z definicji.

Konstrukcja modelu dynamiki obiektu na podstawie charakterystyk czasowych jest dość prosta, ale mało dokładna. Postać modelu wybiera się arbitralnie, a obliczenia wartości parametrów wykonuje się na podstawie konstrukcji graficznych, które z natury są niedokładne (np. wyznaczenie punktu przegięcia krzywej, rysowanie stycznej). Często nie uwidaczniają się małe, ale istotne magazyny energii. Modele wyznaczone w ten sposób nie nadają się do dokładnych badań obiektu. Podstawowym obszarem ich zastosowania jest projektowanie układów regulacji. Jeśli zamiast modelu wysokiego rzędu zostanie zastosowany prosty model zastępczy z opóźnieniem, to na ogół wyznaczone w projekcie warunki stabilności będą zaostrzone. Ponieważ niedokładność tych modeli jest największa na początku reakcji na regulację, więc największe błędy powstają, jeśli projektowany regulator ma silne działanie różniczkujące.

W trakcie wyznaczania charakterystyki skokowej układu mogą się pojawić pewne trudności techniczne z realizacją wymuszenia skokowego. Wykorzystuje się więc także inne sygnały wymuszające: impuls prostokątny, sygnał trapezoidalno-skokowy, impuls trapezoidalny (rys. 5.10), a następnie – na podstawie zarejestrowanej odpowiedzi i stosując odpowiednie algorytmy – wyznacza się odpowiedź skokową¹.



Rys. 5.10. Wymuszenia stosowane do wyznaczania charakterystyki czasowej

Wymuszenia trapezoidalne zastępują zmianę skokową, jeśli jest ona trudna do uzyskania, zwykle ze względu na skończoną szybkość działania urządzeń, np. przedstawienie zaworu. Wymuszenia impulsowe są wykorzystywane w sytuacji, kiedy do procesu nie można wprowadzać długotrwałego zakłócenia, na przykład w przypadku obiektów astatycznych. Dobór sygnału powinien uwzględnić także zakłócenia, które występują w trakcie pomiaru, oraz stopień nieliniowości obiektu. Na ogólnie

¹ Opis algorytmów wyznaczania charakterystyki skokowej z pomiarów pośrednich można znaleźć np. w [7].

zaleca się, aby zmiana wartości na wejściu wynosiła około 5–15% zakresu w przypadku wymuszenia skokowego i ok. 15–25% przy wymuszeniu impulsowym.

5.3.3. Metoda charakterystyk częstotliwościowych [6, 7, 14]

Charakterystyki częstotliwościowe opisują zachowanie obiektu w stanach ustalonych przy wymuszeniach sinusoidalnych. Doświadczalne wyznaczenie charakterystyki polega na wymuszeniu na wejściu sygnału sinusoidalnego o stałej amplitudzie i częstotliwości, a następnie pomiarze parametrów sygnału wyjściowego – jego amplitudy i przesunięcia fazowego względem sygnału wejściowego. Eksperyment należy powtórzyć dla różnych częstotliwości w odpowiednio dużym zakresie (teoretycznie dla ω od 0 do ∞).

Metoda identyfikacji modelu na podstawie charakterystyk częstotliwościowych polega na realizacji następujących kroków:

1. Zarejestrowanie stanów ustalonych odpowiedzi układu na wymuszenia harmoniczne w odpowiednim zakresie częstotliwości i amplitud.
2. Przedstawienie wyników w postaci logarytmicznych wykresów modułu $A(\omega)$ i fazy $\varphi(\omega)$.
3. Odtworzenie, na podstawie wykresu modułu, przebiegu charakterystyki asymptotycznej, tzn. krzywej łamanej o nachyleniach, które są wielokrotnościami $\pm 20 \text{ dB/dek}$.
4. Odtworzenie, na podstawie charakterystyki asymptotycznej, charakterystyki fazowej części minimalnofazowej – $\varphi^*(\omega)$.
5. Porównanie charakterystyki $\varphi^*(\omega)$ z wykresem doświadczalnym $\varphi(\omega)$ i zidentyfikowanie członów nieminimalnofazowych (opóźnienie, przesuwnik fazowy) lub stwierdzenie ich braku.
6. Porównanie wykresów $\varphi^*(\omega)$ i $\varphi(\omega)$, co pozwala też na korektę asymptotycznego wykresu modułu, szczególnie w przypadku występowania członów oscylacyjnych.
7. Zidentyfikowanie, na podstawie charakterystyki asymptotycznej, członów minimalnofazowych.

Wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych wymaga znacznie więcej czasu niż wyznaczenie charakterystyk czasowych, ponieważ trzeba wykonać wiele pomiarów w dużym zakresie częstotliwości, a ponadto po każdej zmianie częstotliwości należy odczekać, aż drgania się ustabilizują (wystąpi stan pseudoustalony). Technika ta pozwala jednak uchwycić wszystkie istotne magazyny energii, ponieważ każdemu magazynowi odpowiada wyraźna zmiana nachylenia odpowiedniego fragmentu asymptotycznej charakterystyki modułu. Można zidentyfikować nawet małe stałe czasowe, na przykład sto razy mniejsze od pozostałych, co jest zupełnie niewidoczne w odpowiedzi czasowej, ale może mieć wpływ na stabilność układu. Nie można jednak zidentyfikować skompensowanych członów inercyjnych¹, ale występowanie takich członów nie jest istotne.

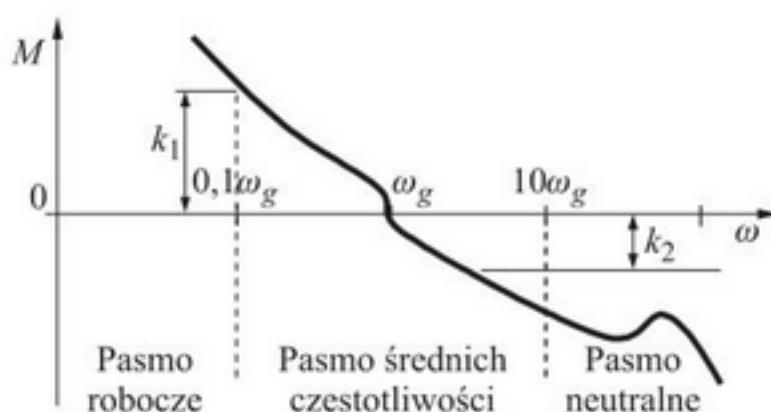
¹ To znaczy, jeśli występują człon inercyjny i forsujący o tych samych parametrach.

Odpowiedź układu liniowego na wymuszenie sinusoidalne również ma przebieg sinusoidalny o tej samej częstotliwości. Zniekształcenie przebiegu jest spowodowane zakłóceniami. Ich wpływ można znacznie ograniczyć, na przykład przez zastosowanie filtru, który wydzieli z przebiegu wyjściowego tylko składową o częstotliwości takiej jak sygnał wejściowy. Tę samą metodę (wydzielenia pierwszej harmonicznej z odpowiedzi) można zastosować w odniesieniu do układów nielinowych. Otrzymana charakterystyka częstotliwościowa będzie funkcją opisującą, czyli zlinearyzowanym modelem układu.

Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe mają jeszcze tę zaletę, że nawet bez odtwarzania opisu matematycznego można wnioskować o parametrach układu regulacji dla badanego obiektu. Można wyróżnić bowiem trzy charakterystyczne pasma częstotliwości (rys. 5.11), określone względem częstotliwości odcięcia ω_g , dla której moduł $M(\omega_g) = 0$:

- 1) pasmo robocze, które decyduje o dokładności (w układach regulacji zapewnia się k_1 rzędu kilkunastu-, kilkudziesięciu dB);
- 2) pasmo średnich częstotliwości, związane ze stabilnością układu regulacji;
- 3) pasmo neutralne, w którym przebieg charakterystyk nie ma praktycznie wpływu na układ regulacji (jeśli tylko $M(\omega)$ jest mniejsze niż -8 dB (k_2)).

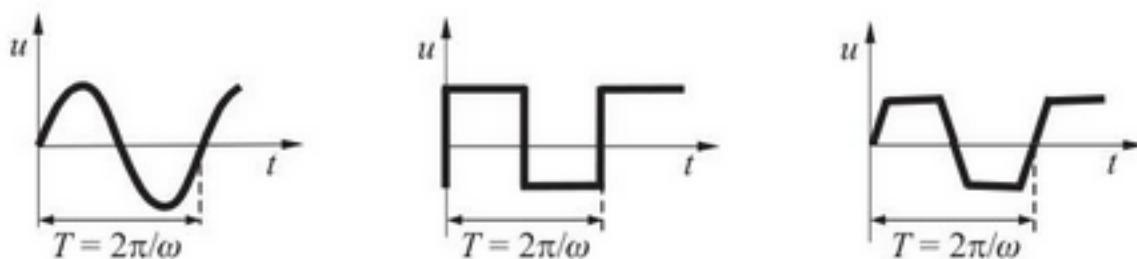
W zakresie częstotliwości średnich bardzo ważna jest relacja między częstotliwością odcięcia ω_g i częstotliwością ω_r , dla której $\varphi(\omega_r) = -180^\circ$. Decyduje ona o stabilności i zapasie stabilności układu¹.



Rys. 5.11. Charakterystyczne pasma częstotliwości

Wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych może być technicznie trudne. Najłatwiej jest zrealizować odpowiedni eksperyment w układach elektrycznych, to znaczy zapewnić generator przebiegów harmonicznych w wystarczającym zakresie częstotliwości oraz zmierzyć amplitudę i fazę przebiegów wyjściowych za pomocą oscyloskopu. W układach niewielkie pojawią się trudności techniczne zarówno z generowaniem harmonicznych, jak i ich rejestracją. W przypadku obiektów inercyjnych stosuje się więc sygnały pomiarowe o charakterze fali prostokątnej lub trapezoidalnej (rys. 5.12).

¹ Układ zamknięty jest stabilny, gdy $\omega_r < \omega_g$.



Rys. 5.12. Wymuszenia stosowane do wyznaczenia charakterystyki częstotliwościowej

Przebiegi takie mogą być generowane nawet „ręcznie” (np. przedstawianie zaworów). Ponieważ sygnały niesinusoidalne zawierają wiele harmonicznych, więc do wyznaczenia charakterystyki częstotliwościowej należy w odpowiedzi wydzielić pierwszą harmoniczną. Trzeba również znać amplitudę pierwszej harmonicznej przebiegu wejściowego.

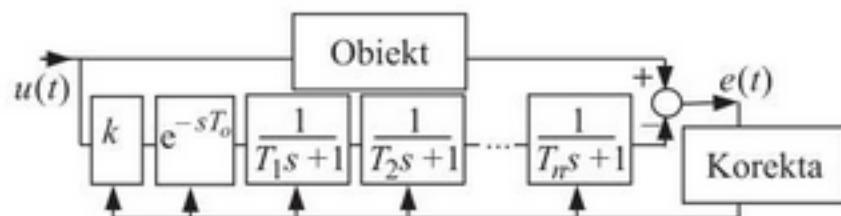
Amplituda sygnału wymuszającego ma wartość 5–15% zakresu wielkości wejściowej (podobnie jak w przypadku charakterystyk czasowych). Problemem może być określenie pasma częstotliwości, w jakim należy wyznaczyć charakterystkę. W praktyce bywa ono dość wąskie, od ok. 0,01 Hz (nawet od 0,001 Hz) do kilkudziesięciu herców. Wartość dla $\omega = 0$ wynika ze stanu ustalonego. Wyznaczanie charakterystyki można rozpocząć od ustalenia częstotliwości (ω), dla której przesunięcie fazowe osiąga wartość -180° . Kilka kolejnych pomiarów wykonuje się w zakresie od $0,5\omega$ do $2,0\omega$, zakres powinien być taki, aby można było wyznaczyć częstotliwość odcięcia ω_g .

5.3.4. Inne metody identyfikacji dynamiki [7]

Podstawowe metody identyfikacji modelu dynamiki wymagają doprowadzenia na wejście obiektu zdeterminowanego sygnału. Znane są jednak metody odtworzenia opisu obiektu na podstawie sygnału stochastycznego, jaki można zarejestrować w trakcie normalnej pracy obiektu. Metody oparte na sygnałach stochastycznych wymagają żmudnych obliczeń i są mniej dokładne, zwłaszcza w porównaniu z metodami częstotliwościowymi. Są więc stosowane na ogół wówczas, gdy nie można wprowadzać dodatkowych sygnałów zakłócających, które umożliwiłyby wyznaczenie charakterystyki czasowej lub częstotliwościowej.

Model obiektu można wyznaczyć także metodą symulacyjną. Podstawą metody jest dobór parametrów modelu na podstawie doświadczeń. Zmiana parametrów może być wykonywana automatycznie, przez porównanie reakcji modelu i obiektu na to samo pobudzenie (rys. 5.13). Dobierana może być również struktura modelu.

Powodzenie symulacji zależy od wyboru sygnału wejściowego i od algorytmu zmiany parametrów. Sygnał wejściowy musi dawać możliwość określania własności obiektu w całym wymaganym zakresie częstotliwości. Stosuje się więc sygnały impulsowe (wnioskowanie na podstawie stanów przejściowych), sygnały okresowe zawierające wiele harmonicznych (porównywanie przebiegów pseudoustalonych) lub sygnały stochastyczne.



Rys. 5.13. Symulacyjna metoda identyfikacji

Pytania i zadania

Proponuję powrócić do omówionych metod identyfikacji eksperymentalnej po zapoznaniu się z całą treścią książki i przetestować je w następujący sposób:



1. Dla wybranego obiektu metodą analityczną skonstruuj model MA i aplikuj go w programie symulacyjnym – aplikacja ta będzie pełniła funkcję badanego obiektu BO.
2. Wykorzystując poznane metody identyfikacji, zrealizuj (w programie symulacyjnym) odpowiedni eksperiment na obiekcie BO i stwórz model eksperymentalny ME.
3. Porównaj charakterystyki czasowe i częstotliwościowe obiektu BO i modelu ME.
4. Wyjaśnij ograniczenia modelu ME, korzystając ze znajomości dokładnego modelu MA.

5.4. Podstawowe reguły upraszczania modeli dynamiki

5.4.1. Wprowadzenie

Podstawowe sposoby upraszczania modeli dynamiki obiektu polegają na linearyzacji[→] i obniżaniu rzędu układu. Na podstawie interpretacji parametrów poszczególnych form modelu oraz wzajemnych relacji między nimi[→] można sformułować reguły upraszczania, dzięki którym będą pomijane tylko najmniej istotne elementy opisu. Warunkiem obniżenia rzędu układu jest to, by po operacji stopień licznika był nadal niższy od stopnia mianownika.

2.3.1

4.3

5.4.2. Pomijanie bieguna transmitancji [24]

Jedną z podstawowych metod upraszczania modeli dynamiki jest pomijanie mało znaczącego bieguna transmitancji:

[→] W p. 2.3.1: o linearizacji dynamicznej.

[→] W p. 4.3: o relacjach między różnymi formami modelu.

$$G(s) = \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} \rightarrow G_q(s) = k_q \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^{n-1} (s - s_i)} \quad (I.204)$$

Wiadomo, że istnieje bezpośredni związek między biegunami s_i i składowymi odpowiedzi impulsowej:

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow g(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t}$$

Na tej podstawie można ustalić regułę upraszczania. Jeśli ujemny biegum najbliższy osi urojonej oznacza się $|\operatorname{Re}(s_i)|_{\min}$, to w transmitancji $G(s)$ można pominąć te człony $(s - s_k)$, dla których:

$$|\operatorname{Re}(s_k)| \geq r |\operatorname{Re}(s_i)|_{\min}$$

gdzie liczba r jest dostatecznie duża (np. $r = 10$). Do licznika uproszczonej transmitancji $G_q(s)$ trzeba jednak wprowadzić współczynnik korekcyjny k_q , tak aby nie zmieniać wartości w stanie ustalonym (wzmocnienie statyczne):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_q(s)$$

Podstawową wadą metody jest konieczność wyznaczenia wszystkich biegunów transmitancji. Może to być trudne, a nawet niemożliwe, jeśli współczynniki wielomianu $M(s)$ nie są podane w postaci liczbowej, która pozwala na rozwiązywanie numeryczne. Metoda daje największe błędy w zakresie niskich częstotliwości. Na podstawie charakterystyk częstotliwościowych można wyznaczyć pasmo ω (klasę sygnałów), dla których błędy wynikające z uproszczenia są niewielkie.

5.4.3. Obniżanie rzędu równania różniczkowego [24]

Kolejna metoda upraszczania modelu polega na pomijaniu w mianowniku wyrazu o najwyższym stopniu:

$$G(s) = \frac{L(s)}{a_{n+1}s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \rightarrow G_q(s) = \frac{L(s)}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (I.205)$$

Można wykazać, że w pewnych warunkach działanie takie odpowiada w przybliżeniu pomijaniu mało znaczących biegunów. Jeśli bowiem transmitancja ma n jednakowych biegunów oraz jeden biegum znacznie oddalony od nich:

$$M(s) = (1 + sT)^n (1 + sTq), \quad q \ll 1$$

to jej mianownik można rozwiniąć do postaci:

$$\begin{aligned}
 M(s) = & qs^{n+1}T^{n+1} + \\
 & + \left(1+q\frac{n}{1}\right)s^nT^n + n\left(1+q\frac{n-1}{2}\right)s^{n-1}T^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\left(1+q\frac{n-2}{3}\right)s^{n-2}T^{n-2} + \\
 & + \dots + (n+q)sT + 1
 \end{aligned}$$

i następnie, podstawiając $s = S/T$:

$$\begin{aligned}
 M(S) = & qS^{n+1} + \\
 & + \left(1+q\frac{n}{1}\right)S^n + n\left(1+q\frac{n-1}{2}\right)S^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\left(1+q\frac{n-2}{3}\right)S^{n-2} + \\
 & + \dots + (n+q)S + 1
 \end{aligned}$$

W przypadku transmitancji, która pomija mało znaczący biegum:

$$M_q(s) = (1+sT)^n$$

mianownik można przedstawić w postaci:

$$M_q(s) = s^nT^n + ns^{n-1}T^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}s^{n-2}T^{n-2} + \dots + nsT + 1$$

a po podstawieniu $s = S/T$:

$$M_q(S) = S^n + nS^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}S^{n-2} + \frac{n(n-1)}{6}(n-2)S^{n-3} + \dots + nS + 1$$

Z porównania mianownika dokładnego $M(S)$ i uproszczonego $M_q(S)$ wynika, że jeśli istnieje jeden mało znaczący biegum, to współczynnik $a_{n+1} = q \ll 1$, natomiast pozostałe współczynniki a_n, \dots, a_0 obu wielomianów różnią się w niewielkim stopniu. Jeśli więc odrzuci się człon qs^{n+1} (czyli $qs^{n+1}T^{n+1}$), to wartości biegumów zmienią się nieznacznie, a stan ustalony pozostanie ten sam. Na tej podstawie można zdefiniować warunki dopuszczające uproszczenie mianownika $M(s)$ o stopniu $n+1$. Należy:

- na podstawie współczynnika a_1 wyznaczyć T , ponieważ $a_1s = nsT$, więc $T = a_1/n$;
- zastosować w $M(s)$ podstawienie $s = S/T$;
- jeśli współczynnik przy S^{n+1} jest $\ll 1$, to można pominąć wyraz $a_{n+1}s^{n+1}$.

Procedurę można powtarzać dalej (dla nowej wartości n), jeśli następny wyraz znów odbiega od właściwych proporcji.

5.4.4. Metoda średniej stałej czasowej

Uproszczenie modelu może dotyczyć samej jego formy. Przykładem takiego postępowania jest zastosowanie średniej stałej czasowej T_z :

$$G(s) = \frac{L(s)}{(1+sT_1)(1+sT_2)\dots(1+sT_n)} \rightarrow G_q(s) = k_q \frac{L(s)}{(1+sT_z)^n} \quad (\text{I.206})$$

Oznacza to, że mianownik:

$$M(s) = (1+sT_1)(1+sT_2)\dots(1+sT_n) = 1 + s(T_1 + T_2 + \dots + T_n) + \dots + s^n T_1 T_2 \dots T_n$$

zastępuje się mianownikiem:

$$M_q(s) = (1+sT_z)^n = 1 + snT_z + \dots + s^n T_z^n$$

Stosowane są przy tym różne sposoby wyznaczania wartości T_z :

1. Zastosowanie średniej arytmetycznej

$$T_z = \frac{1}{n}(T_1 + T_2 + \dots + T_n)$$

nie wymaga korekty, aby zachować wartości w stanie ustalonym ($k_q = 1$), i jest dokładniejsze w zakresie niewielkich częstotliwości.

2. Wprowadzenie średniej geometrycznej

$$T_z = (T_1 T_2 \dots T_n)^{1/n}$$

również nie zmienia stanu ustalonego ($k_q = 1$), ale jest dokładniejsze w zakresie dużych częstotliwości.

3. Użycie średniej harmonicznej

$$T_z = \frac{n}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \dots + \frac{1}{T_n}}, \quad k_q = \frac{T_z^n}{T_1 T_2 \dots T_n}$$

zwiększa jeszcze dokładność uproszczonej transmitancji dla dużych częstotliwości, ale wymaga korekty, aby zachować niezmienione wartości w stanie ustalonym.

Pytania i zadania



1. Wybierz dowolną transmitancję (najlepiej o znanych biegunkach) i zastosuj omówione metody upraszczania. Porównaj symulacyjnie charakterystyki czasowe i częstotliwościowe transmitancji pierwotnej i uproszczonej.
2. Dlaczego stopień wielomianu licznika musi być niższy niż rzad modelu po uproszczeniu?
3. Do upraszczania modelu można wykorzystać również metody identyfikacji eksperymentalnej. Jak?

Część II

Elementy modeli dynamiki obiektów

Jakie zjawiska fizyczne wpływają na dynamiczne właściwości obiektów? Jaki jest analityczny opis podstawowych zjawisk? – czyli krótka powtórka z fizyki.

Podstawą analitycznych metod konstrukcji modeli dynamiki jest znajomość zjawisk zachodzących w obiekcie. Rzeczywiste obiekty mają złożoną naturę; zachodzi w nich wiele procesów w różnym stopniu wpływających na siebie nawzajem. Podczas modelowania każdy taki obiekt można traktować jako pewien układ prostych procesów i konstruować jego opis, odpowiednio łącząc modele elementarne. W każdej dziedzinie stosuje się typowe zestawy modeli opisujących proste, wyidealizowane procesy. W kolejnych rozdziałach zostaną przedstawione takie właśnie zestawy elementarnych zależności wykorzystywanych do konstrukcji modeli dynamiki obiektów automatyki – procesów technologicznych, przetworników pomiarowych i urządzeń wykonawczych. Zawierają one opis idealnego elementu, czyli model elementarny, który jest w miarę możliwości liniowy (prynajmniej w pewnym zakresie pracy), oraz opis dodatkowych, najbardziej znaczących zjawisk, jakie zachodzą podczas jego fizycznej realizacji. W trakcie konstrukcji modelu obiektu analizuje się znaczenie poszczególnych zjawisk i wybiera tylko te, które są istotne dla dalszych badań. Zależnie od przeznaczenia modelu można albo zwiększyć jego dokładność, uwzględniając nieliniowy zakres pracy i wpływ dodatkowych zjawisk, albo przyjąć założenia określające warunki zastosowania prostszego modelu. Model jest zawsze wynikiem kompromisu między dokładnością i prostotą.

W przedstawianych opisach zjawisk fizycznych podano typowe jednostki fizyczne wielkości i wyróżniono zmienne, które w praktyce zwykle zależą od czasu, np. $i(t)$, $p(t)$, $T(t)$ itp. Wielkości, dla których nie wskazano zależności od czasu, są interpretowane (np. przy okazji ewentualnych przekształceń) jako parametry o stałych wartościach. Jeśli jednak w rzeczywistych warunkach wartość parametru zmieniałaby się w sposób istotny (np. rezystancja obwodu elektrycznego czy gęstość substancji przy dużych różnicach temperatury), to konieczne jest wprowadzenie takiej zależności do opisu procesu i zweryfikowanie poszczególnych przekształceń (np. linearyzacji czy operacji różniczkowania po zmiennej t).

Ta krótka powtórka z fizyki ma pomóc w doskonaleniu umiejętności dostrzegania podstawowych zjawisk fizycznych w skomplikowanych procesach, jakie zachodzą w rzeczywistych obiektach. Z tego powodu przedstawiono nie tylko wzory matematyczne opisujące poszczególne zjawiska, ale także ich interpretację – fizyka jest przecież nauką eksperymentalną. A przy okazji może Czytelnik zechce wrócić do podręcznika fizyki klasycznej i zachwycić się tą jednością matematycznego opisu w różnorodności zjawisk. ☺

6

Elementy obwodów elektrycznych

6.1. Charakterystyka

Modele elektryczne opisują procesy zachodzące podczas przemieszczania się ładunków elektrycznych między punktami obwodu elektrycznego o różnych potencjałach¹. Podstawowymi wielkościami używanymi do opisu tych procesów w praktyce jest natężenie prądu i napięcie. **Natężenie prądu** $i(t)$, wyrażane w amperach [A], jest definiowane jako szybkość przepływu ładunku elektrycznego $q(t)$ [w kulombach – C] przez dany przekrój przewodnika:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (\text{II.1})$$

Napięcie $u(t)$, wyrażane w voltach [V], jest różnicą potencjałów między dwoma punktami obwodu i stanowi z jednej strony przyczynę przepływu prądu, a z drugiej strony jego skutek. Źródła napięcia zapewniają różnicę potencjałów i wymuszają przepływ prądu w obwodzie, który powoduje spadek napięcia na każdym z elementów.

Przepływ prądu, czyli przemieszczenie dodatniego ładunku q od punktu o wyższym potencjale V_2 do punktu o niższym potencjale V_1 , wymaga wykonania pracy przez siły elektryczne. W przypadku przemieszczenia bardzo małego ładunku dq , przy napięciu $u = V_2 - V_1$, wartość elementarnej pracy wynosi:

$$dW = u dq \quad (\text{II.2})$$

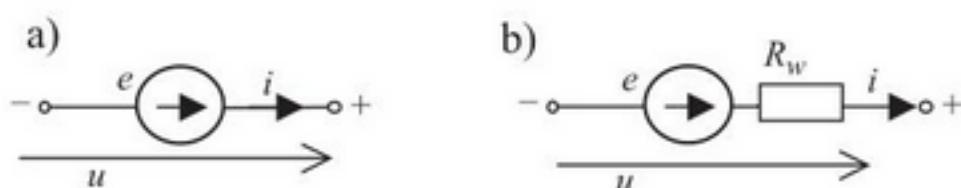
Energia dostarczona do układu wskutek wykonania pracy ($dW > 0$) może być magazynowana w polu elektrycznym lub magnetycznym związanym z układem, a następnie oddawana przez układ ($dW < 0$), co umożliwia przemieszczanie ładunku od

¹ Ścisłe, jest to rozchodzenie się zjawiska polegającego na pobudzeniu ładunków do ruchu, a nie przemieszczanie się samych ładunków (prędkość przepływu elektronów w obwodzie prądu stałego wynosi ok. 1 mm/s, a prędkość rozchodzenia się pobudzenia jest prawie równa prędkości światła – ok. 300000 km/s).

punktu o niższym potencjale do punktu o wyższym potencjale. Jednostkę pracy (energii) – dżul [J] – w układach elektrycznych można wyrazić jako $V \cdot A \cdot s$.

6.2. Idealne źródła energii elektrycznej

Źródła energii elektrycznej są elementami wymuszającymi przepływ prądu w układzie wskutek wytworzenia różnicy potencjałów. Najczęściej stosowane są prądnice, przetwarzające energię mechaniczną w elektryczną, oraz akumulatory i ogniwa galwaniczne, przetwarzające energię chemiczną w elektryczną. W analizie obwodów elektrycznych korzysta się z pojęcia idealnego źródła napięcia i źródła prądu.



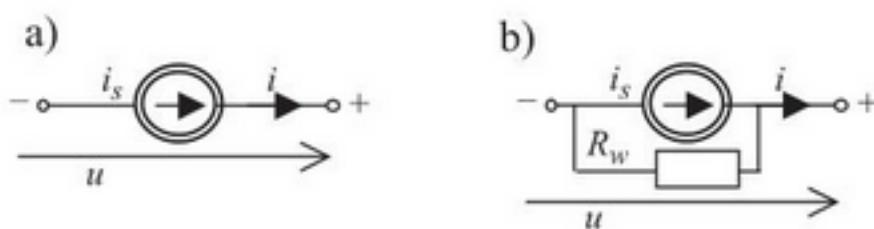
Rys. 6.1. Schemat źródła napięciowego: a) idealnego, b) rzeczywistego

Idealne źródło napięcia (rys. 6.1a) zapewnia takie samo napięcie niezależnie od obciążenia (tj. od natężenia prądu, jakie wymusza w obwodzie):

$$u(t) = e(t) \quad (\text{II.3})$$

Rzeczywiste źródło napięcia (rys. 6.1b) zawsze zawiera pewną rezystancję wewnętrzną, która powoduje stratę napięcia zależną od natężenia prądu:

$$u(t) = e(t) - R_w i(t) \quad (\text{II.4})$$



Rys. 6.2. Schemat źródła prądowego: a) idealnego, b) rzeczywistego

Idealne źródło prądu z kolei (rys. 6.2a) wymusza stałe natężenie prądu niezależnie od napięcia:

$$i(t) = i_s(t) \quad (\text{II.5})$$

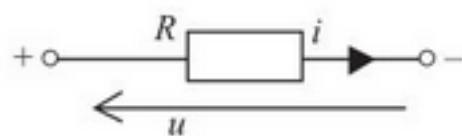
W rzeczywistym źródle (rys. 6.2b) występuje jednak rezystancja wewnętrzna i natężenie prądu zależy od napięcia:

$$i(t) = i_s(t) - u(t)/R_w \quad (\text{II.6})$$

Niezależność idealnych źródeł od obciążenia oznacza, że mają one zdolność oddawania nieograniczonej mocy. Stałe napięcie czy natężenie idealnego źródła w przypadku badania obwodów prądu przemiennego oznacza stałą amplitudę i częstotliwość przebiegu sinusoidalnego.

6.3. Rezystancja (opór czynny)

Opór elektryczny czynny charakteryzuje przepływ prądu przez przewody łączące obwód elektryczny i elementy oporowe wprowadzane celowo. Opór fragmentu obwodu elektrycznego jest reprezentowany przez skupiony element – rezistor (rys. 6.3).



Rys. 6.3. Fragment obwodu z rezystorem o rezystancji R

W przypadku idealnego rezystora związek między prądem i napięciem wyraża **prawo Ohma**:

$$u(t) = R i(t) \quad \text{lub} \quad i(t) = G u(t) \quad (\text{II.7})$$

Współczynnikiem proporcjonalności jest **rezystancja** R , wyrażana w omach [Ω], lub jej odwrotność – **konduktancja** G (przewodność) z miarą w simensach [S]. Wymuszenie ruchu ładunku w rezystorze wymaga dostarczenia energii, która zamienia się w ciepło. Przeniesienie każdej porcji ładunku dq przy napięciu u wymaga dostarczenia energii $dW_R = u dq$. Energia niezbędna do przeniesienia pewnego ładunku q_1 odpowiada sumie prac elementarnych. Jeśli przenoszenie ładunku następuje z prędkością dq/dt , czyli przy przepływie prądu o natężeniu $i(t)$, to można wyznaczyć czas t_1 , w jakim ten ładunek zostanie przeniesiony. Stąd można wyprowadzić zależność na ilość ciepła wydzielanego przy przepływie prądu o natężeniu i w czasie t_1 :

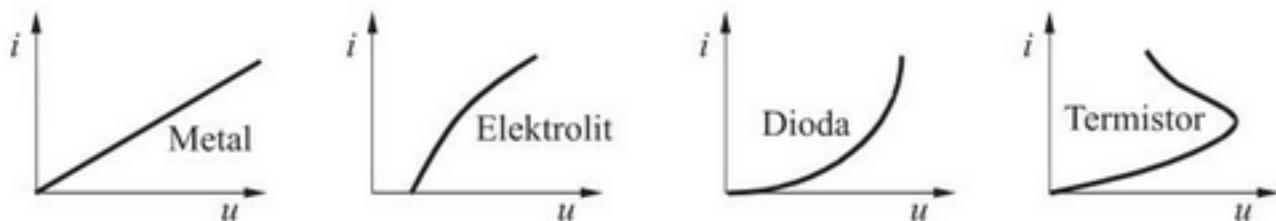
$$W_R = \int_0^{q_1} u dq = \int_0^{q_1} u \frac{dq}{dt} dt = \int_0^{t_1} u i dt = \int_0^{t_1} R i^2 dt \quad (\text{II.8})$$

Rezystor reprezentuje nieodwracalny proces przekształcania energii elektrycznej w energię cieplną.

Rezystancja idealnych elementów jest wielkością stałą, która zależy od kształtu i materiału przewodnika (oporu właściwego ρ [$\Omega \cdot \text{m}$]). Takie właściwości mają elementy wykonane z przewodników I klasy (metale, stopy metali, węgiel elektrotechniczny). Rezystancję typowego elementu w postaci metalowego przewodu o stałym przekroju A [m^2] i długości l [m] wyznacza się ze wzoru:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (\text{II.9})$$

Rezystancja przewodników niemetalicznych (elektrolity, półprzewodniki) zwykle zależy od ich punktu pracy – elementy są nieliniowe (rys. 6.4).



Rys. 6.4. Zależność natężenia prądu i napięcia dla przewodników metalowych i niemetalowych [16]

F2.1

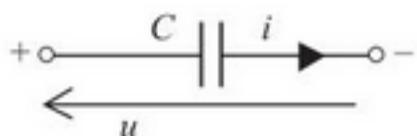
W praktyce opór właściwy ρ większości materiałów zależy również od temperatury[•]. Przy niewielkich odchyleniach temperatury ΔT przyjmuje się, że jest to zależność liniowa:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T) \quad (\text{II.10})$$

Współczynnik temperaturowy α [1/K] przewodników metalicznych ma wartość dodatnią, a węgla, elektrolitów i elementów półprzewodnikowych – ujemną. Na rezystancję elementu mogą wpływać również zmiany wymiarów geometrycznych pod wpływem temperatury czy sił działających na element.

6.4. Pojemność elektryczna

Pojemność elektryczna jest własnością, która umożliwia gromadzenie ładunków elektrycznych w przewodnikach rozdzielonych warstwą dielektryka. W modelach obwodów elektrycznych reprezentuje ją idealny **kondensator** (rys. 6.5).



Rys. 6.5. Fragment obwodu z kondensatorem o pojemności C

Ladunek $q(t)$ zgromadzony na okładce takiego kondensatora jest proporcjonalny do napięcia $u(t)$ między jego okładkami:

$$q(t) = C u(t) \quad (\text{II.11})$$

Współczynnik proporcjonalności C nazywa się **pojemnością** i jest wyrażany w faradach [F]. Jeśli kondensator jestłączony w obwód elektryczny, to następuje zmiana ładunku zgromadzonego między okładkami, czyli przepływ prądu. Uwzględniając definicję natężenia prądu (II.1), można przedstawić związek między napięciem i natężeniem prądu w kondensatorze:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad \text{lub} \quad u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (\text{II.12})$$

[•] Dodatek F2.1: o oporze właściwym i współczynniku temperaturowym wybranych przewodników.

Naładowany kondensator jest magazynem energii. Energia zgromadzona w idealnym kondensatorze jest równa pracy W_C , jaką należy wykonać, aby doprowadzić ładunek na okładki. Doprowadzenie bardzo małego ładunku dq przy napięciu u wymaga pracy $dW_C = u dq$. Całkowita energia kondensatora o pojemności C , naładowanego do napięcia u_1 , czyli przechowującego ładunek $q_1 = Cu_1$, odpowiada sumie elementarnych prac:

$$W_C = \int_0^{q_1} u dq = \int_0^{q_1} \frac{q}{C} dq = \frac{q_1^2}{2C} = \frac{Cu_1^2}{2} \quad (\text{II.13})$$

Kondensator reprezentuje zdolność rzeczywistego obiektu do gromadzenia energii w polu elektrycznym.

Pojemność C idealnego kondensatora jest wielkością stałą i zależy od kształtu oraz wymiarów okładek oraz przenikalności dielektrycznej ε materiału pomiędzy okładkami. W tablicach jest podawana względna przenikalność elektryczna materiałów ε_r , którą określa się względem przenikalności próżni ε_0 ; jest więc $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. F2.2 Wszystkie materiały mają przenikalność większą niż próżnia. Przenikalność powietrza jest prawie taka sama jak przenikalność próżni. W tabeli 6.1 przedstawiono wzory na pojemność typowych kondensatorów.

Tabela 6.1. Pojemności typowych kondensatorów

Kształt kondensatora	Pojemność C
	Kondensator płaski: A – powierzchnia okładek d – odległość między okładkami $C = \frac{\varepsilon A}{d}$
	Kondensator cylindryczny: l – długość r_1 – promień wewnętrzny r_2 – promień zewnętrzny $C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(r_2/r_1)}$
	Linia dwuprzewodowa: r – promień przewodów d – odległość między przewodami l – długość linii ($l \gg d$) $C \approx \frac{\pi\varepsilon l}{\ln(d/r)}$

W rzeczywistych układach związek między ładunkiem i napięciem może być nieliniowy (pojemność kondensatora zależy od punktu pracy). Mogą się też ujawnić dodatkowe pojemności, ponieważ w zasadzie każde dwa przewodniki przedzielone dielektrykiem stanowią kondensator (np. dwużyłowy kabel, pojedynczy przewód poprowadzony równolegle do powierzchni ziemi).

* Dodatek F2.2: o przenikalności elektrycznej wybranych dielektryków.

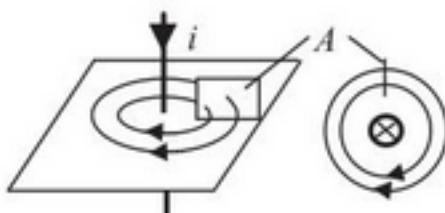
6.5. Indukcja magnetyczna i elektromagnetyczna

6.5.1. Wprowadzenie

Z właściwościami obwodu elektrycznego są ściśle związane zjawiska magnetyczne. Z jednej strony każdy ruch ładunków elektrycznych (więc również przepływ prądu) powoduje powstanie pola magnetycznego – zjawiska indukcji magnetycznej; z drugiej strony każde pole magnetyczne działa na poruszające się ładunki. Jeśli ten ruch ładunków jest związany z przepływem prądu w przewodniku, to pole magnetyczne działa z pewną siłą na przewodnik. Jeśli zaś ten ruch ładunków wynika z poruszania się przewodnika, to pole magnetyczne indukuje siłę elektromotoryczną, a więc przepływ prądu w zamkniętym obwodzie.

6.5.2. Indukcja magnetyczna [16]

Prąd o natężeniu $i(t)$ płynący w przewodzie tworzy pole magnetyczne (rys. 6.6). Do opisu wartości i kierunku tego pola stosuje się wielkość wektorową nazywaną **indukcją magnetyczną** $B(t)$.



Rys. 6.6. Linie indukcji B wokół przewodu z prądem

Wartość indukcji charakteryzuje gęstość strumienia magnetycznego na powierzchni, stąd wzór na **strumień** $\Phi(t)$ przechodzący przez powierzchnię A prostopadłą do linii pola magnetycznego jest następujący:

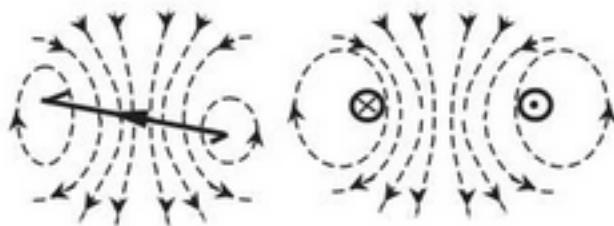
$$\Phi(t) = \int B(t) \, dA \quad (\text{II.14})$$

Jednostką indukcji $B(t)$ jest tesla [T], a strumienia $\Phi(t)$ – weber [Wb]. Indukcja $B(t)$ zależy od natężenia prądu $i(t)$, kształtu przewodu i odległości od niego oraz od przewikalności magnetycznej μ ośrodka. Dla prostoliniowego odcinka przewodu wartość indukcji w odległości a wynosi:

$$B(t) = \frac{\mu}{2\pi a} i(t) \quad (\text{II.15})$$

Obliczanie pola magnetycznego przewodnika o dowolnym kształcie jest skomplikowane¹; znane są jednak rozwiązania mające znaczenie praktyczne. I tak, pole magnetyczne wokół przewodnika kołowego o promieniu r (rys. 6.7), wyznaczone w jego środku, określa wzór (II.16), a dla z przewodów kołowych ułożonych obok siebie – wzór (II.17).

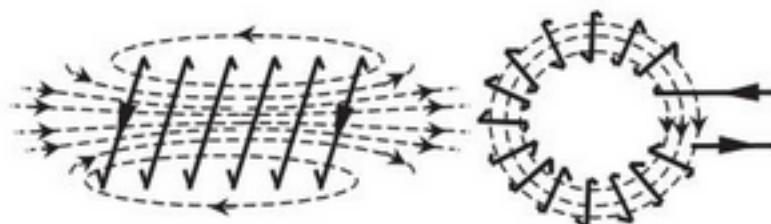
¹ Pole oblicza się z prawa Biota-Savarta, jako sumę pól pochodzących od poszczególnych elementów przewodnika; obliczenia wymagają rozwiązywania całek krzywoliniowych.

Rys. 6.7. Linie indukcji B wokół przewodu kołowego

$$B(t) = \frac{\mu}{2r} i(t) \quad (\text{II.16})$$

$$B(t) = \frac{\mu z}{2r} i(t) \quad (\text{II.17})$$

W przypadku cewki w formie bardzo długiego solenoidu lub toroidu (rys. 6.8), o z zwojach i długości l , indukcję pola magnetycznego $B(t)$ w środku, na osi, przy przepływie prądu $i(t)$, wyraża wzór (II.18).

Rys. 6.8. Pole magnetyczne soleno-
idu i toroidu

$$B(t) = \frac{\mu z}{l} i(t) \quad (\text{II.18})$$

Pole magnetyczne opisuje się też wielkością, która nie zależy od własności magnetycznych ośrodka – **natężeniem pola H** , które wynika ze wzoru:

$$B(t) = \mu H(t) \quad (\text{II.19})$$

Zakładając, że pole magnetyczne cewki (II.18) jest jednorodne, strumień pola magnetycznego $\Phi(t)$ powstający w cewce można wyrazić wzorem:

$$\Phi(t) = AB(t) = A\mu H(t) = \frac{\mu zA}{l} i(t) \quad (\text{II.20})$$

gdzie: z – liczba zwojów, A – powierzchnia przekroju cewki, l – długość cewki, μ – przenikalność magnetyczną ośrodka, w którym znajduje się cewka.

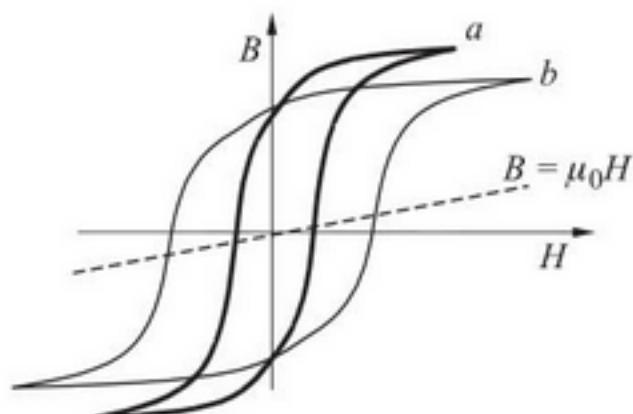
Przenikalność magnetyczną μ [$T \cdot m/A$] ośrodków określa się względem przenikalności próżni μ_0 . W tablicach są zamieszczone wartości względne μ_r , stąd $\mu = \mu_0 \mu_r$. Ciała dzielą się na: diamagnetyki ($\mu_r < 1$), paramagnetyki ($\mu_r > 1$) i ferromagnetyki ($\mu_r \gg 1$). Przenikalność dia- i paramagnetyków różni się niewiele od przenikalności próżni μ_0 (np. powietrze), natomiast przenikalność ferromagnetyków jest bardzo duża i zależy od natężenia pola magnetycznego H , czyle F2.3

* Dodatek F2.3: o wybranych dia-, para- i ferromagnetykach.

$\mu(H)$. Tym samym indukcja pola magnetycznego (II.19) w ferromagnetykach jest nieliniową funkcją natężenia H :

$$B(t) = \mu(H) H(t) \quad (\text{II.21})$$

Do opisu nieliniowości indukcji nie używa się funkcji typu $\mu(H)$, lecz zależności indukcji magnetycznej B od natężenia pola H . Charakterystyka $B(H)$ nazywa się krzywą magnesowania i jest wyznaczana doświadczalnie. Jeśli prąd wytwarzający pole zmienia wartość i kierunek, to charakterystyka $B(H)$ wykazuje histerezę (rys. 6.9). Pętla histerezy wynika z magnetyzmu szcątkowego, który zależy od własności magnetycznych materiału. Wąska pętla oznacza materiał magnetycznie miękki (stosowany w celu ograniczenia strat przemagnesowywania, np. w blachach prądnicowych), szeroka pętla to materiał magnetycznie twarde (np. w magnesach trwałych).



Rys. 6.9. Pętla histerezy magnetycznej materiału miękkiego (a) i twardego (b)

Dla porównania na rysunku zaznaczono zależność $B = \mu_0 H$, odpowiadającą takim samym zmianom w cewce powietrznej (bez rdzenia).

6.5.3. Siła pola magnetycznego [16]

Na ładunek poruszający się w polu magnetycznym działa siła¹, która zmienia kierunek jego ruchu. Jest ona proporcjonalna do wartości ładunku q , jego prędkości v i indukcji pola magnetycznego B , a ze względu na kierunek działania jest definiowana jako iloczyn wektorowy²:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{II.22})$$

Siła działa również na przewody, w których płynie prąd. Przewód o długości l znajdujący się w polu magnetycznym o indukcji $B(t)$, w którym płynie prąd o natężeniu $i(t)$, podlega działaniu siły elektrodynamicznej:

$$\mathbf{F}(t) = i(t)(\mathbf{l} \times \mathbf{B}(t)) \quad (\text{II.23})$$

¹ Elektrodynamiczna siła Lorentza.

² Dodatek A1: o algebrze wektorowej.

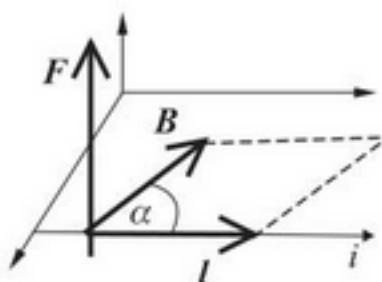
Wzór ten określa zarówno kierunek (rys. 6.10), jak i wartość tej siły:

$$F(t) = B(t) i(t) l \sin \alpha(t) \quad (\text{II.24})$$

gdzie α jest kątem między kierunkiem wyznaczonym przez przepływ prądu (położenie przewodnika) i kierunkiem indukcji magnetycznej. Przy stałym polu B i natężeniu prądu i , siła F ma największą wartość, jeśli przewód jest prostopadły do linii pola magnetycznego:

$$F = BiL$$

i wartość zerową, gdy przewód jest równoległy do pola.



Rys. 6.10. Siła elektrodynamiczna działająca na przewód elektryczny umieszczony w polu magnetycznym

Wszystkie powyższe zależności obowiązują przy założeniu, że własne pole magnetyczne, jakie wytworza płynący prąd $i(t)$, jest znikomo małe i nie zakłaca pola magnetycznego $B(t)$, w którym znajduje się przewodnik¹.

Pole magnetyczne, w którym znajduje się rozpatrywany przewodnik, może być wytwarzane przez prąd płynący w innym przewodniku, np. w przypadku prostoliniowego odcinka przewodu indukcję pola określa wzór (II.15). Jeśli w dwóch równoległych przewodach płyną prądy o natężeniu $i_1(t)$ i $i_2(t)$, to powstają między nimi siły wzajemnego oddziaływania:

$$F(t) = \frac{\mu l}{2\pi d} i_1(t) i_2(t) \quad (\text{II.25})$$

gdzie: l – długość przewodów, d – odległość między nimi. Jeśli prądy mają taki sam zwrot, to przewody się przyciągają, a jeśli przeciwny, to się odpinają (6.11).



Rys. 6.11. Siły działające między przewodami z prądem

Oprócz pola magnetycznego, powstającego wokół poruszających się ładunków (np. przewodników, w których płynie prąd), występuje pole elektryczne, które otacza ładunki niezależnie od ich ruchu. O istnieniu pola elektrycznego świadczy

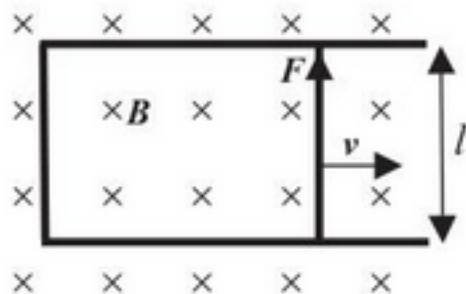
¹ W takich warunkach pomiar siły działającej na ładunek (przewód z prądem) wykorzystuje się do wyznaczenia indukcji pola magnetycznego w danym punkcie (tak też definiowana jest jednostka indukcji – indukcja pola wynosi 1 T, gdy 1 C ładunku poruszającego się prostopadle do pola z prędkością 1 m/s doznaje działania siły 1 N).

siła działająca na ładunki w przewodniku. Pole elektryczne wywołane przez prąd płynący w przewodniku jest w porównaniu z polem magnetycznym tak słabe, że siła oddziaływania tego pola może zostać pominięta.

6.5.4. Indukcja elektromagnetyczna [16]

Każda zmiana strumienia magnetycznego $\Phi(t)$ przechodzącego przez powierzchnię objętą przewodnikiem powoduje powstanie w przewodniku siły elektromotorycznej $e(t)$ i to niezależnie od tego, czy obwód jest zamknięty, czy otwarty¹. Zmiana strumienia $\Phi(t)$ może wynikać zarówno ze zmiany indukcji pola $B(t)$, jak i z ruchu przewodnika $v(t)$.

Dla uproszczenia rozważymy jednorodne pole magnetyczne o indukcji B i obwód w postaci prostokątnej ramki o ruchomym boku, położony na płaszczyźnie prostopadłej do pola (rys. 6.12).



Rys. 6.12. Schemat powstawania indukcji elektromagnetycznej

Strumień magnetyczny obejmowany przez obwód wynosi:

$$\Phi = BA \quad (\text{II.26})$$

Przesunięcie ruchomego boku ramki o odcinek dx powoduje, że powierzchnia obwodu zmienia się o $dA = ldx$, a tym samym zmienia się obejmowany strumień:

$$d\Phi = B dA = Bl dx \quad (\text{II.27})$$

Po obustronnym podzieleniu wyrażenia przez dt otrzymamy:

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv \quad (\text{II.28})$$

gdzie v jest prędkością przesunięcia. Ruch boku oznacza jednocześnie ruch elektronów q znajdujących się w przewodniku, więc na bok ramki działa siła F o zwrocie i wartości określonych wzorem (II.22):

$$F = q(v \times B)$$

¹ Jeśli obwód jest zamknięty, to popłynie prąd, a jeśli obwód jest otwarty, to na jego końcach pojawi się napięcie $u(t) = e(t)$.

Sila ta przemieszcza ładunki q wzdłuż ruchomego boku o długości l , czyli wykonuje pracę o wartości^{7.1}:

$$W = Fl = (qvB)l \quad (\text{II.29})$$

Wykonana praca odpowiada energii, jaką uzyskuje ładunek po przebyciu odcinka l . Dzięki niej ładunek przepływa przez nieruchome części obwodu. Energia (II.29) przeliczona na jednostkę ładunku ma wymiar napięcia i nazywa się siłą elektromotoryczną (sem):

$$e = lvB \quad (\text{II.30})$$

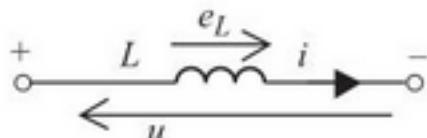
Po porównaniu wzorów (II.28) i (II.30) i uwzględnieniu kierunku wielkości otrzymamy wzór na **indukcję elektromagnetyczną**¹:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{II.31})$$

Przyczyną powstawania siły elektromotorycznej może być zarówno ruch przewodnika w stałym polu magnetycznym, jak i zmiana strumienia przenikającego przez nieruchomy obwód.

6.5.5. Indukcyjność własna

Szczególnym przypadkiem zjawiska indukcji elektromagnetycznej jest **samoindukcja**. W obwodach elektrycznych zjawisko jest reprezentowane przez idealną cewkę.



Rys. 6.13. Schemat cewki o indukcyjności L

Przepływ prądu przez cewkę powoduje powstanie pola magnetycznego. Strumień pola $\Phi(t)$, przenikający przez powierzchnię przekroju A cewki o z zwojach i długości l , w idealnych warunkach ($\mu = \text{const}$) jest proporcjonalny do natężenia prądu $i(t)$ zgodnie ze wzorem (II.20):

$$\Phi(t) = AB(t) = A\mu H(t) = \frac{\mu zA}{l} i(t)$$

Jeśli zmienia się prąd, to zmienia się też strumień magnetyczny. Zmienny strumień $\Phi(t)$ powoduje, że w każdym zwoju cewki, przez który przenika, zachodzi zjawisko samoindukcji (II.31). W cewce zachodzi zjawisko samoindukcji, tzn. indukuje się siła elektromotoryczna $e_L(t)$ o kierunku przeciwnym do zmiany prądu $i(t)$ przepływającego przez cewkę:

$$e_L(t) = -z \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{\mu z^2 A}{l} \cdot \frac{di(t)}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (\text{II.32})$$

^{7.1} W p. 7.1: o pracy w układach mechanicznych.

¹ Wartość siły elektromotorycznej opisuje prawo Faradaya, a kierunek określa reguła Lenza.

W przypadku cewki idealnej siła e_L jest proporcjonalna do szybkości zmiany prądu di/dt ; współczynnik proporcjonalności L nazywa się **indukcyjnością własną (współczynnikiem samoindukcji)** i jest wyrażany w henrach [H]. Zjawisko samoindukcji przeciwstawia się każdej zmianie prądu. Jeśli natężenie prądu rośnie, to samoindukcja powoduje gromadzenie się dostarczanej energii w polu magnetycznym cewki. Wzrost natężenia prądu do wartości i_1 powoduje zmagazynowanie energii do wartości:

$$W_L = \int_0^{i_1} e_L i dt = \int_0^{i_1} Li \frac{di}{dt} dt = \int_0^{i_1} Lidi = \frac{Li_1^2}{2} \quad (\text{II.33})$$

Pole magnetyczne zanika w chwili rozłączenia obwodu i oddaje zgromadzoną energię, wywołując indukowanie się siły elektromotorycznej¹. Cewka odzwierciedla zdolność rzeczywistego obiektu do gromadzenia energii w polu magnetycznym.

Indukcyjność własna L jest jedynym parametrem idealnej cewki i zgodnie ze wzorem (II.32) zależy od jej parametrów konstrukcyjnych (z, l, A) oraz przenikalności magnetycznej ośrodka μ .

$$L = \frac{\mu z^2 A}{l} = \frac{\mu_0 \mu_r z^2 A}{l} \quad (\text{II.34})$$

Jeśli jednak ośrodek jest materiałem ferromagnetycznym, to przenikalność μ zależy od natężenia pola magnetycznego H i tym samym współczynnik L zależy od natężenia prądu $i(t)$:

$$L(i) = \frac{\mu(H) z^2 A}{l}, \quad \text{gdzie} \quad H = \frac{zi(t)}{l} \quad (\text{II.35})$$

Inaczej mówiąc, we wzorze na siłę samoindukcji e_L cewki z rdzeniem ferromagnetycznym występuje charakterystyka magnesowania $B(H)$:

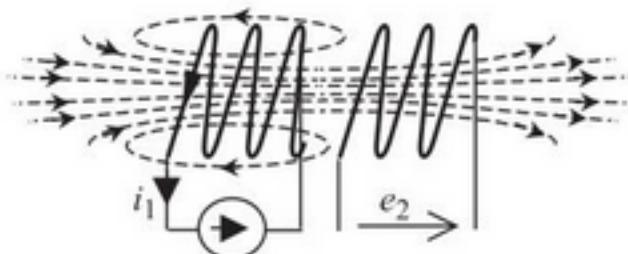
$$e_L(t) = -z \frac{d\Phi(t)}{dt} = -z \frac{\mu(H(t)) AH(t)}{dt} = -zA \frac{B(H(t))}{dt} \approx -L \frac{di(t)}{dt} \quad (\text{II.36})$$

Zastosowanie stałego współczynnika L we wzorze (II.36) oznacza linearyzację krzywej magnesowania. W rzeczywistych obwodach cewkę charakteryzuje nie tylko inducyjność, ale także rezystancja zwojów.

6.5.6. Indukcyjność wzajemna

Rozważmy parę cewek sprzężonych magnetycznie. Sprzężenie oznacza, że strumień magnetyczny wytwarzany przez prąd płynący w jednej cewce będzie, przynajmniej częściowo, przenikał także drugą cewkę (rys. 6.14).

¹ Energia ta może na przykład spowodować powstanie łuku w wyłączniku w czasie przerywania obwodu za wierzącego cewkę.



Rys. 6.14. Schemat powstawania indukcyjności wzajemnej M

Jeśli w cewce 1 płynie prąd $i_1(t)$, powstaje strumień $\Phi_1(t)$ zgodnie ze wzorem (II.20). Część tego strumienia $\Phi'_1(t)$ przechodzi przez cewkę 2:

$$\Phi'_1(t) = \Phi_1(t) - \Phi_r(t) = M_{12}i_1(t) \quad (\text{II.37})$$

W ośrodku dia- lub paramagnetycznym, gdzie przenikalność μ nie zależy od natężenia pola magnetycznego, strumień $\Phi'_1(t)$ jest proporcjonalny do natężenia prądu $i_1(t)$. Współczynnik proporcjonalności M_{12} nazywa się **indukcyjnością wzajemną** cewki 2 względem cewki 1 i zależy od wymiarów, wzajemnego położenia cewek oraz przenikalności magnetycznej μ ośrodka. Zmiana natężenia prądu $i_1(t)$ to jednocześnie zmiana strumienia $\Phi'_1(t)$, która indukuje siłę elektromotoryczną $e_2(t)$ w cewce 2. Jeśli indukcyjność wzajemna M_{12} jest stała, to siła $e_2(t)$ jest proporcjonalna do natężenia prądu $i_1(t)$:

$$e_2(t) = -z_2 \frac{d\Phi'_1(t)}{dt} = -M_{12} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (\text{II.38})$$

Podobne zjawisko indukcji wzajemnej wystąpi w cewce 1 pod wpływem strumienia $\Phi'_2(t)$, pochodzącego od prądu $i_2(t)$ płynącego przez cewkę 2. Zmiana prądu $i_2(t)$ powoduje zmianę strumienia $\Phi'_2(t)$ i powstanie siły elektromotorycznej $e_1(t)$:

$$e_1(t) = -z_1 \frac{d\Phi'_2(t)}{dt} = -M_{21} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (\text{II.39})$$

Sprzężenie cewek jest symetryczne, więc współczynniki indukcji wzajemnej obu cewek są sobie równe: $M_{12} = M_{21} = M$.

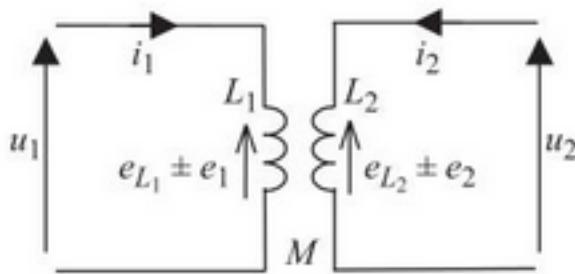
6.6. Podstawy działania maszyn elektrycznych

6.6.1. Transformator idealny [1]

Wykorzystanie zjawiska indukcji wzajemnej w transformatorze (rys. 6.15) pozwala na przekazywanie energii między obwodami elektrycznymi bez połączenia galwanicznego, z możliwością zmiany wartości napięcia.

Załóżmy, że obie cewki transformatora stanowią fragmenty zamkniętych obwodów, w których płyną prądy $i_1(t)$ i $i_2(t)$. Zmiana prądu $i_1(t)$ powoduje, że w cewce 1 powstaje sila indukcji własnej $e_{L1}(t)$:

$$e_{L1}(t) = -z_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \quad (\text{II.40})$$



Rys. 6.15. Schemat zastępczy transformatora

a w cewce 2 powstaje sem indukcji wzajemnej e₂(t):

$$e_2(t) = -z_2 \frac{d\Phi'_1(t)}{dt} = -M \frac{di_1(t)}{dt} \quad (\text{II.41})$$

Symetryczne efekty wywołuje zmiana prądu i₂(t). W sumie transformator jest charakteryzowany układem równań:

$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Sprzężenie cewek transformatora może być dodatnie (znak plus) lub ujemne (znak minus). Między indukcyjnościami własnymi cewek (L₁, L₂) i indukcyjnością wzajemną (M) zachodzi związek, który można wyrazić wzorem:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (\text{II.43})$$

gdzie k oznacza współczynnik sprzężenia cewek, o wartości z przedziału (0, 1). Współczynnik $k = 0$ oznacza brak sprzężenia, np. dwa zwoje położone w płaszczyznach prostopadłych. Większy współczynnik k oznacza lepsze sprzężenie magnetyczne cewek (mniejsze rozproszenie strumieni indukcji wzajemnej). Współczynnik można znacznie poprawić, nawijając cewki na wspólny rdzeń. Wartość $k = 1$ oznacza doskonale sprzężenie cewek i brak strumienia rozproszenia. Jeśli obie cewki transformatora mają tę samą długość l i przekrój A , a liczba ich zwojów wynosi z_1 i z_2 , to cały strumień magnetyczny wytworzony przez cewkę 1, równy:

$$\Phi_1(t) = \frac{\mu z_1 A}{l} i_1(t) \quad (\text{II.44})$$

przechodzi całkowicie przez cewkę 2, w której indukuje siłę elektromotoryczną o wartości:

$$e_2(t) = -z_2 \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = -\frac{\mu z_1 z_2 A}{l} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \quad (\text{II.45})$$

Tak więc indukcyność wzajemna idealnego transformatora:

$$M = \frac{\mu z_1 z_2 A}{l} = \sqrt{\left(\frac{\mu z_1 z_2 A}{l}\right)^2} = \sqrt{\frac{\mu z_1^2 A}{l} \frac{\mu z_2^2 A}{l}} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (\text{II.46})$$

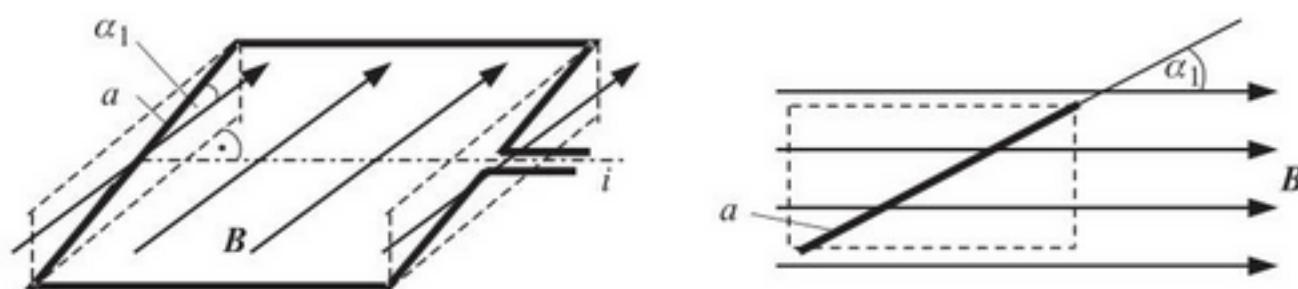
Transformator można scharakteryzować parametrem n , zwany przekładnią. Jest on obliczany jako stosunek napięć $u_1(t)$ i $u_2(t)$, co w przypadku elementu idealnego odpowiada wprost stosunkowi liczby zwojów z_1 i z_2 :

$$n = \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{z_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt} + z_1 \frac{d\Phi_2(t)}{dt}}{z_2 \frac{d\Phi_2(t)}{dt} + z_2 \frac{d\Phi_1(t)}{dt}} = \frac{z_1}{z_2} \quad (\text{II.47})$$

W rzeczywistych transformatorach stosuje się zwykle rdzenie feromagnetyczne. Daje to lepsze sprzężenie cewek (ograniczenie strumieni rozproszenia). Przenikalność magnetyczna ferromagnetyków (μ) zależy jednak od natężenia pola magnetycznego i tym samym model rzeczywistego transformatora jest nieliniowy. Współczynniki indukcyjności własnej i wzajemnej zależą od prądów płynących przez cewki transformatora – charakterystyka jest nieliniowa i zawiera histerezę. Układ równań (II.42) można zastosować jedynie jako zlinearyzowaną postać modelu transformatora. W modelu rzeczywistego transformatora uwzględnia się również rezystancję uzwojeń.

6.6.2. Prądnica [16]

Podstawą działania prądnicy (generatora elektrycznego) jest zjawisko indukcji elektromagnetycznej. Jeśli prostokątna ramka umieszczona w polu magnetycznym (rys. 6.16) obraca się wokół osi prostopadłej do wektora indukcji B , to zmienia się strumień Φ przechodzący przez ramkę.



Rys. 6.16. Siła elektromotoryczna indukowana w ramce o boku a

Wartość strumienia Φ zależy od kąta α między płaszczyzną ramki i wektorem indukcji magnetycznej B :

$$\Phi(t) = BA \sin \alpha_1(t)$$

lub wprowadzając kąt $\alpha = 90^\circ - \alpha_1$:

$$\Phi(t) = BA \cos \alpha(t)$$

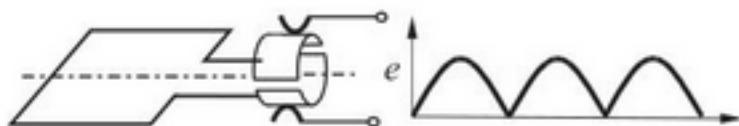
Zmiana o kąt $d\alpha$ w czasie dt odpowiada zmianie strumienia, która indukuje siłę elektromotoryczną $e(t)$:

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d(BA \cos \alpha(t))}{dt} = BS \sin \alpha(t) \frac{d\alpha(t)}{dt} = BS\omega(t) \sin \alpha(t) \quad (\text{II.48})$$

gdzie $\omega(t) = d\alpha(t)/dt$ jest prędkością obrotową ramki. Jeśli prędkość obrotowa jest stała ($\omega = 2\pi f$), to $\alpha = \omega t$ i zmiana w czasie siły elektromotorycznej ma przebieg sinusoidalny:

$$e(t) = BS\omega \sin \omega t \quad (\text{II.49})$$

Przebieg ten można zamienić w pulsujący przez zastosowanie komutatora (rys. 6.17) – pierścienia stykowego podzielonego na dwa odizolowane wycinki połączone z końcami uzwojenia. Do wycinków przylegają szczotki, które zapewniają połączenie elektryczne uzwojenia z obwodem zewnętrznym.



Rys. 6.17. Schemat komutatora

W fizycznych realizacjach prądnic stosuje się zespół wielu ramek nawiniętych na walec z miękkiego żelaza. W celu uzyskania stałego napięcia, płaszczyzny ramek są obrócone względem siebie, co powoduje przesunięcie generowanych przebiegów. Końce ramek są połączone z wielosegmentowym komutatorem i w efekcie na szczotkach komutatora uzyskuje się prawie stały przebieg wypadkowy (rys. 6.18) proporcjonalny do prędkości obrotowej:

$$e(t) \approx BS\omega \quad (\text{II.50})$$



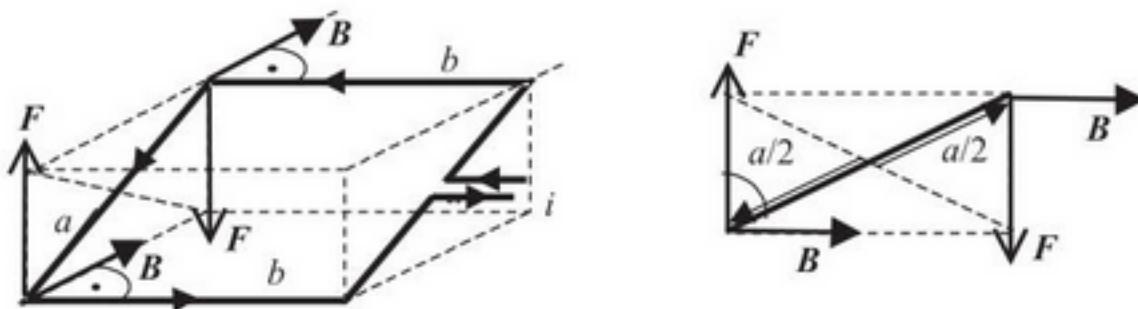
Rys. 6.18. Przebieg wyjściowy generatora prądu stałego

Generatorem sem jest także każdy silnik elektryczny – ciągły obrót cewek w polu magnetycznym indukuje siłę elektromotoryczną skierowaną przeciwnie do napięcia przyłożonego z zewnątrz.

6.6.3. Silnik elektryczny [16]

Celem działania silnika elektrycznego jest zmiana energii elektrycznej w energię mechaniczną, czyli wymuszenie ruchu. Wspólna zasada działania różnego typu silników wiąże się z oddziaływaniem pola magnetycznego na przewodnik z prądem. Jeśli w polu o indukcji B zostanie umieszczona ramka (rys. 6.19) o bokach a i b , przez którą płynie prąd $i(t)$, to na boki ramki b prostopadłe do wektora indukcji działają siły elektrodynamiczne:

$$F(t) = Bb i(t) \quad (\text{II.51})$$



Rys. 6.19. Siły działające na ramkę z prądem

Jest to para sił wytwarzających moment obrotowy[→] równy iloczynowi wektorowemu:

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{a} \times \mathbf{F}(t) \quad (\text{II.52})$$

co oznacza, że wartość momentu:

$$M(t) = Bab i(t) \sin \alpha = B A i(t) \sin \alpha \quad (\text{II.53})$$

gdzie α jest kątem między wektorem siły \mathbf{F} i bokiem ramki a . Maksymalny moment występuje wówczas, gdy powierzchnia ramki jest prostopadła do wektora indukcji magnetycznej \mathbf{B} .

Wzór (II.52) jest słuszny dla każdego obwodu płaskiego o dowolnym kształcie i powierzchni A . W przypadku obwodu o z zwojach na każdy zwój działa taki sam moment pary sił i wypadkowy moment obrotowy jest sumą:

$$M(t) = z B A i(t) \sin \alpha$$

Rozmieszczenie zwojów na różnych płaszczyznach obróconych względem siebie powoduje przesunięcie w fazie sinusoidalnych przebiegów momentów, tak że ich suma jest wielkością prawie stałą, jeśli tylko wartość prądu jest stała:

$$M(t) = k B i(t) \quad (\text{II.54})$$

6.7. Zastępcze opisy elementów liniowych

6.7.1. Impedancja operatorowa

Do analizy obwodów elektrycznych stosuje się powszechnie metody operatorowe[→], jeśli tylko elementy są liniowe lub jeśli można przyjąć, że są reprezentowane przez zlinearyzowane modele. Dlatego często opis elementów obwodu ma postać transformaty Laplace'a. Model idealnego rezystora (II.7) ma więc postać:

$$u(t) = R i(t) \Rightarrow u(s) = R i(s) \Rightarrow \frac{u(s)}{i(s)} = R \quad (\text{II.55})$$

[→] W p. 7.7.3: o parze sił i momencie pary sił.

[→] W rozdz. 3: o metodach operatorowych.

Operatorowy model idealnego kondensatora (II.12) przy zerowych warunkach początkowych to:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow i(s) = sCu(s) \Rightarrow \frac{u(s)}{i(s)} = \frac{1}{sC} \quad (\text{II.56})$$

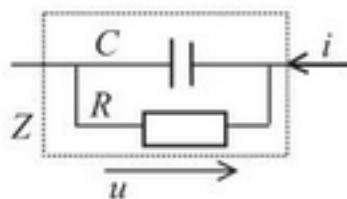
a idealnej cewki (II.32):

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow u(s) = sLi(s) \Rightarrow \frac{u(s)}{i(s)} = sL \quad (\text{II.57})$$

Zależność między transformatami napięcia $u(s)$ i prądu $i(s)$ dla każdego elementu można zapisać w postaci uogólnionego prawa Ohma:

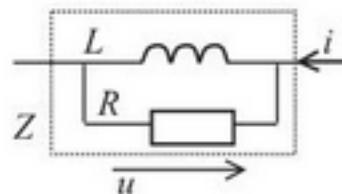
$$u(s) = Z(s)i(s) \quad \text{lub} \quad i(s) = Y(s)u(s) \quad (\text{II.58})$$

gdzie: $Z(s)$ nazywa się impedancją (operatorową), a jej odwrotność $Y(s)$ – admitancją (operatorową). Pojęcie impedancji ułatwia wykonywanie operacji matematycznych podczas konstruowania modeli liniowych obwodów elektrycznych. Rysunki 6.20–6.23 i wzory II.59–II.62 przedstawiają przykłady równoległych i szeregowych połączeń elementów R , L , C , dla których wyznaczono impedancję zastępczą¹.



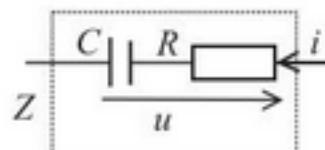
$$Z(s) = \frac{u(s)}{i(s)} = \frac{u(s)}{i_C(s) + i_R(s)} = \frac{R}{sRC + 1} \quad (\text{II.59})$$

Rys. 6.20. Równoległe połączenie elementów RC



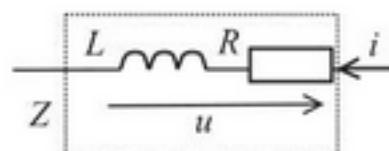
$$Z(s) = \frac{u(s)}{i(s)} = \frac{u(s)}{i_L(s) + i_R(s)} = \frac{sL + R}{sRL} \quad (\text{II.60})$$

Rys. 6.21. Równoległe połączenie elementów RL



$$Z(s) = \frac{u(s)}{i(s)} = \frac{u_R(s) + u_C(s)}{i(s)} = \frac{sRC + 1}{sC} \quad (\text{II.61})$$

Rys. 6.22. Szeregowo połączenie elementów RC

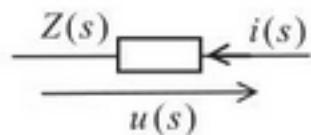


$$Z(s) = \frac{u(s)}{i(s)} = \frac{u_R(s) + u_L(s)}{i(s)} = sRL \quad (\text{II.62})$$

Rys. 6.23. Szeregowo połączenie elementów RL

¹ Wzory na impedancję są wyprowadzone przy użyciu praw Kirchhoffa (p. 13.1).

W ten sposób zamiast korzystać z przebiegów czasowych napięć i prądów (II.7), (II.11), (II.32), przy zerowych warunkach początkowych można posługiwać się schematem z elementami impedancyjnymi (rys. 6.24).



Rys. 6.24. Element impedancyjny

Mogą one reprezentować pojedyncze rezistory, cewki i kondensatory lub ich połączenia opisane przez impedancję wypadkową, co pozwala uprościć schemat.

6.7.2. Impedancja zespolona (opór pozorny) [19]

W analizie obwodów elektrycznych szczególne znaczenie mają badania stanów ustalonych przy wymuszeniach sinusoidalnych. Na podstawie własności układów liniowych wiadomo, że w stanie ustalonym wymuszenie sinusoidalne daje odpowiedź sinusoidalną o takiej samej pulsacji ω , która może być jedynie przesunięta w fazie i może mieć inną amplitudę. Dla każdego liniowego elementu obwodu elektrycznego można wyznaczyć to przesunięcie fazowe i wzmacnienie amplitudy metodą symboliczną*. 3.3.1

Dla idealnej rezystancji R włączonej w obwód prądu sinusoidalnego $i(t) = I_m \sin(\omega t)$, na podstawie (II.7) można napisać zależność:

$$u(t) = R i(t) = R I_m \sin(\omega t) \quad (\text{II.63})$$

Wynika stąd, że przepływ prądu o amplitudzie I_m powoduje spadek napięcia o amplitudzie $U_m = RI_m$, a współczynnik proporcjonalności R odpowiada rezystancji (oporowi czynnemu) w obwodach prądu stałego (jednostka Ω):

$$\frac{u(s)}{i(s)} = \frac{U_m \sin(\omega t)}{I_m \sin(\omega t)} = R \quad (\text{II.64})$$

W rzeczywistych warunkach, jeśli przepływa prąd o dużej częstotliwości, rezystancja elementów nieco wzrasta ze względu na zjawisko naskórkowości¹. Przy częstotliwości 50 Hz zjawisko nie jest jeszcze dostrzegalne.

W przypadku idealnego kondensatora (II.12) sinusoidalne napięcie $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ powoduje przepływ prądu o natężeniu:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{dU_m \sin(\omega t)}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t) = \omega C U_m \sin(\omega t + \pi/2) \quad (\text{II.65})$$

Oznacza to, że amplitudzie napięcia U_m odpowiada amplituda prądu $I_m = \omega C U_m$, a przebieg jest przesunięty o 90° . Relację między sygnałami napięcia i prądu kondensatora można zapisać w postaci:

* W p. 3.3.1: o metodzie symbolicznej.

¹ Przy powierzchni przewodu gęstość prądu jest większa niż w środku przewodu.

$$\frac{u(s)}{i(s)} = \frac{U_m \sin(\omega t)}{I_m \sin(\omega t + \pi/2)} = \frac{1}{j\omega C} = X_C \quad (\text{II.66})$$

Wartość X_C nazywa się **reaktancją pojemnościową**; jest ona określana w $[\Omega]$ i zależy od pojemności elementu C oraz częstotliwości przebiegów ($\omega = 2\pi f$). Odwrotnością reaktancji pojemnościowej jest nazywana **susceptancją pojemnościową**.

Z kolei dla idealnej cewki, zgodnie z zależnością (II.32), natężenie sinusoidalnego prądu płynącego przez cewkę $i(t) = I_m \sin(\omega t)$ powoduje spadek napięcia o przebiegu:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{dI_m \sin(\omega t)}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t) = \omega L I_m \sin(\omega t + \pi/2) \quad (\text{II.67})$$

Jeśli więc amplituda prądu ma wartość I_m , to spadek napięcia ma amplitudę $U_m = \omega L I_m$ i jest przesunięty o 90° . Zapisując relację napięcia i prądu na cewce w postaci:

$$\frac{u(s)}{i(s)} = \frac{U_m \sin(\omega t + \pi/2)}{I_m \sin(\omega t)} = j\omega L = X_L \quad (\text{II.68})$$

otrzymuje się wartość **reaktancji indukcyjnej** X_L , którą określa się w $[\Omega]$ i która zależy od indukcyjności elementu L oraz częstotliwości przebiegów ($f = \omega/2\pi$). Odwrotnością reaktancji indukcyjnej jest **susceptancja indukcyjna**.

Na podstawie wyrażeń (II.64), (II.66), (II.68) można napisać uogólnione prawo Ohma w postaci:

$$U = Z(\omega)I \quad \text{lub} \quad I = Y(\omega)U \quad (\text{II.69})$$

i wprowadzić pojęcie **impedancji zespolonej** $Z(\omega)$, zwanej także **oporem pozornym**, oraz pojęcie **admitancji zespolonej** $Y(\omega)$, będącej odwrotnością impedancji. Porównując wyrażenia określające impedancję zespoloną $Z(\omega)$ i operatorową $Z(s)$ dla poszczególnych elementów (tab. 6.2), można zauważyc, że istnieje prosty związek między tymi opisami – impedancje są sobie równe, gdy $s = j\omega$. Impedancję zespoloną można traktować jako przypadek szczególny impedancji operatorowej¹. W taki sam sposób wyznacza się impedancję wypadkową $Z(\omega)$, przy czym składowe impedancji wynikają z rezystancji, pojemności i indukcyjności elementów oraz częstotliwości prądu. Analogia ta sprawia, że w praktyce opis operatorowy i zespolony elementów i obwodów stosuje się zamiennie.

Tabela 6.2. Impedancje podstawowych elementów elektrycznych

	$Z(\omega)$	$Z(s)$
Rezystancja (opór czynny)	R	R
Reaktancja pojemnościowa (opór bierny pojemnościowy)	$X_C = \frac{1}{j\omega C}$	$X_C = \frac{1}{sC}$
Reaktancja indukcyjna (opór bierny indukcyjny)	$X_L = j\omega L$	$X_L = sL$

¹ Dzięki tej analogii można potraktować rachunek symboliczny z impedancją $Z(\omega)$ jako wariant rachunku operatorowego z impedancją $Z(s)$.

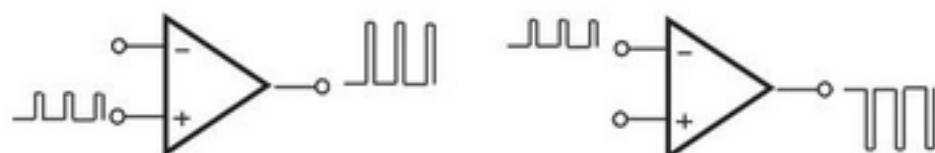
Ze względu na zastosowanie opisu zespołonego w analizie własności obwodów elektrycznych prądu przemiennego, w określeniu parametrów sinusoidalnego przebiegu napięć i prądów stosuje się wartości skuteczne, a nie wartości maksymalne amplitud, ponieważ przyrządy pomiarowe prądu przemiennego są zwykle skalowane w wartościach skutecznych. Między wartościami skutecznymi i szczytowymi przebiegów sinusoidalnych zachodzi stała zależność:

$$I = I_m / \sqrt{2} = 0,707 I_m \quad (\text{II.70})$$

Wartość skuteczna prądu przemiennego odpowiada takiej wartości prądu stałego, który – płynąc w obwodzie o takiej samej rezystancji – powoduje taki sam skutek cieplny. Stosowanie wartości skutecznych napięć i prądów nie wpływa na postać impedancji obwodu. W przypadku kondensatora napięcie o wartości skutecznej U powoduje przepływ prądu o wartości skutecznej natężenia $I = \omega C U$. W cewce natomiast przepływ prądu o wartości skutecznej I powoduje spadek napięcia o wartości skutecznej $U = \omega L I$.

6.7.3. Wzmacniacze operacyjne [5]

Wzmacniacze operacyjne to scalone układy elektroniczne oparte na tranzystorach i rezystorach, przeznaczone do wzmacniania sygnału różnicowego¹. Zazwyczaj nie ma potrzeby, żeby wnikać w wewnętrzną strukturę układu, więc na schematach przedstawia się go w postaci trójkąta o trzech wyprowadzeniach² (rys. 6.25). Sygnał doprowadzony do zacisku oznaczonego plusem jest wzmacniany bez odwracania fazy, a sygnał z wejścia oznaczonego minusem po wzmacnieniu ma odwróconą fazę.



Rys. 6.25. Symbol wzmacniacza operacyjnego

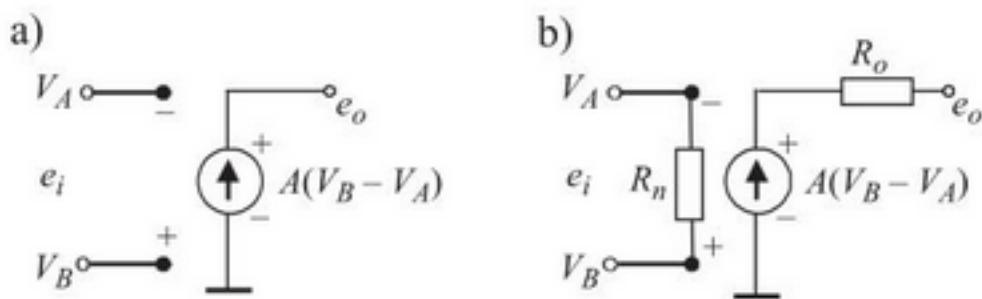
Stosowane są wzmacniacze napięciowe i wzmacniacze prądowe. Działanie wzmacniacza napięciowego można przedstawić za pomocą schematu zastępczego (rys. 6.26), który opisuje element idealny (a) lub rzeczywisty (b).

Schemat elementu rzeczywistego oddaje istnienie rezystancji wewnętrznych układu – wejściowej R_i i wyjściowej R_o . Analogiczne schematy zastępcze wzmacniaczy prądowych przedstawiono na rys. 6.27.

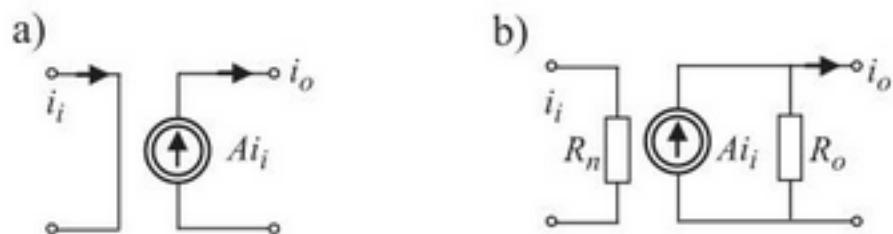
W przypadku wzmacniaczy napięciowych rezystancja R_i jest bardzo duża (rzędu $10^6 \Omega$), a rezystancja R_o bardzo mała ($< 100 \Omega$). We wzmacniaczach prądowych

¹ Dokładna nazwa: wzmacniacz różnicowy o symetrycznym wejściu i niesymetrycznym wyjściu.

² Symbol ten nie zawiera wszystkich wprowadzeń, jakie występują w fizycznych elementach, np. podłączenie napięcia zasilania czy potencjału odniesienia („uziemienia”).



Rys. 6.26. Schemat zastępczy wzmacniacza napięciowego: a) idealnego, b) rzeczywistego



Rys. 6.27. Schemat zastępczy wzmacniacza prądowego: a) idealnego, b) rzeczywistego

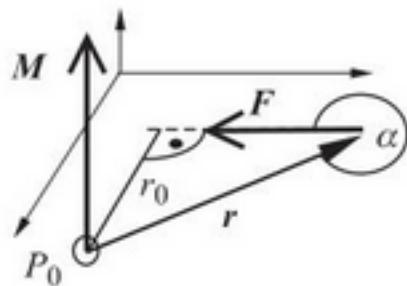
natomiast jest odwrotnie – R_n jest bardzo mała, a R_o bardzo duża. W praktyce zwyczaj wystarcza stosowanie prostego schematu zastępczego elementu idealnego. Wzmacniacz operacyjny można więc uważa za rodzaj sterowanego źródła, które na wyjściu zapewnia napięcie lub natężenie prądu proporcjonalne do sygnału podawanego na wejście.

Elementy układów mechanicznych

7.1. Charakterystyka

Modele układów mechanicznych opisują ruch ciał sztywnych¹ obserwowany względem przyjętego układu odniesienia. W najprostszych przypadkach ruch ciała jest reprezentowany przez ruch punktu materialnego², wyznaczonego przez środek ciężkości ciała. Dowolny ruch ciała sztywnego w przestrzeni ma 6 stopni swobody i można go rozłożyć na ruch postępowy i ruch obrotowy. Elementarne modele układów mechanicznych opisują zjawiska w ruchu punktu materialnego wzdłuż jednego kierunku albo w obrocie punktu materialnego wokół jednej osi.

Podstawowymi wielkościami stosowanymi do opisu układów mechanicznych w ruchu postępowym są: **przemieszczenie** $x(t)$ [m] lub **prędkość** $v(t)$ [m/s] punktu względem przyjętego układu odniesienia oraz **sily** $F(t)$ [N], które są przyczyną ruchu albo reakcją układu. Przyczyną ruchu są zewnętrzne siły akcji, to znaczy siły pochodzące spoza granic analizowanego układu. Reakcją każdego elementu jest siła, która równoważy działanie wszystkich sił zewnętrznych względem danego elementu. W ogólnym przypadku są to wielkości wektorowe, które pozwalają opisać ruch w przestrzeni. Jeśli siły działają wzdłuż jednego kierunku, stosuje się uproszczony opis skalarny. Ruch obrotowy z kolei jest opisywany przez **kąt obrotu** $\varphi(t)$ [rad lub °] albo **prędkość kątową** $\omega(t)$ [rad/s, zapisywane w sposób uproszczony jako s^{-1}] i **moment sily** $M(t)$ [N · m]³.



Rys. 7.1. Wyznaczanie momentu siły względem punktu P_0

¹ Czyli ciał, których wzajemne odległości i wszystkich punktów nie ulegają zmianie.

² Punkt materialny to punkt geometryczny, w którym jest skupiona pewna masa.

³ Jednostka momentu siły odpowiada jednostce energii: $1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J}$.

Moment siły (rys. 7.1) jest iloczynem wektorowym działającej siły F i promienia wodzącego r wyznaczonego od punktu obrotu do punktu przyłożenia siły:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Wartość momentu siły wynosi:

$$M = Fr \sin \alpha = Fr_0 \quad (\text{II.71})$$

gdzie α jest kątem między wektorem siły F i promieniem r . Odcinek r_0 nazywa się ramieniem siły. Moment siły zależy od wyboru punktu P_0 , ale nie zależy od przesunięcia siły wzdłuż kierunku działania. Jeśli obrót odbywa się jedynie wokół jednej osi, to stosuje się uproszczony opis skalarny, który umożliwia wykonywanie algebraicznych operacji na wartościach momentów sił.

Aby wymusić ruch układu, konieczne jest dostarczenie energii, czyli wykonanie pracy przez zewnętrzne siły lub momenty sił. Z definicji, praca jest równa iloczynowi siły i przesunięcia¹. Jeśli zewnętrzna siła F spowodowała bardzo małe przesunięcie elementu dx , to oznacza, że została wykonana elementarna praca o wartości:

$$dW = F dx \quad (\text{II.72})$$

Wartość dodatnia dW oznacza, że pracę wykonała siła zewnętrzna (dostarczenie energii do układu), natomiast ujemna wartość dW oznacza wykonanie pracy przez układ (oddanie energii). Jednostka pracy (energii) – dżul [J] – w układach mechanicznych odpowiada z definicji iloczynowi N·m.

7.2. Idealne źródła energii mechanicznej

7.2.1. Definicja źródła energii

Źródła energii mechanicznej to układy zdolne do wykonania pracy, wytwarzające siły lub momenty sił zewnętrzne względem analizowanego układu. Może to być inny fragment układu mechanicznego poza założonymi granicami analizowanego obiektu (np. zewnętrzna sprężyna, masa w polu grawitacyjnym Ziemi) lub silnik przetwarzający pewną postać energii na energię mechaniczną. Dzięki zastosowaniu dodatkowych elementów (siłowników, przekładni) możliwe jest dopasowanie źródła energii do układu, np. zamiana ruchu obrotowego na posuwisty.

7.2.2. Źródła siły i prędkości

W ruchu posuwistym źródła energii mechanicznej wytwarzają siły działające w określonym kierunku. Stosowane w modelach źródła idealne zapewniają określoną siłę działania lub określoną prędkość ruchu. Źródło siły działa na układ z taką samą siłą niezależnie od prędkości ruchu:

$$F(t) = F_s(t) \quad \text{dla każdego } v(t) \quad (\text{II.73})$$

¹ Ogólnie jest to iloczyn skalarny wektora siły i wektora przesunięcia: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$.

Jeśli źródło działa z taką siłą, jaka zapewnia ruch o stałej prędkości, można mówić o źródle prędkości:

$$v(t) = v_s(t) \quad \text{dla każdego } F(t) \quad (\text{II.74})$$

Niezależność idealnych źródeł od obciążenia oznacza, że mają one zdolność oddawania nieograniczonej mocy. Rzeczywiste źródła mają oczywiście ograniczoną moc, mogą mieć również ograniczony zakres ruchu (przesunięcie, kąt obrotu).

7.2.3. Źródła momentu siły i prędkości obrotowej

W ruchu obrotowym źródła energii mechanicznej wytwarzają momenty napędowe. W modelach często występują idealne źródła momentu siły M_s , który nie zależy od prędkości kątowej:

$$M(t) = M_s(t) \quad \text{dla każdego } \omega(t) \quad (\text{II.75})$$

lub idealne źródła prędkości obrotowej ω_s , którą można zapewnić niezależnie od momentu obciążenia:

$$\omega(t) = \omega_s(t) \quad \text{dlkażdego } M(t) \quad (\text{II.76})$$

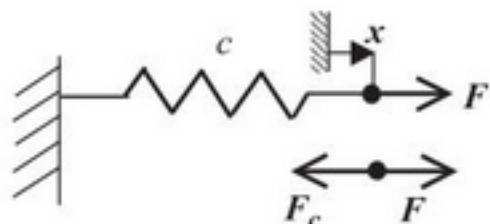
Rzeczywiste urządzenia napędowe mogą mieć w przybliżeniu takie właściwości tylko w ograniczonym zakresie obciążenia.

7.3. Sprężystość postaci

7.3.1. Sprzęyna w ruchu posuwistym

Sily sprężystości wynikają z zakłócenia rozkładu sił międzycząsteczkowych i powodują, że element powraca do stanu nieodkształconego, jeśli tylko odkształcenia nie przekroczyły zakresu właściwości sprężystych ciał.

Sprzęyna jest elementem, który przeciwdziała zmianie położenia punktu wymuszanej przez siłę zewnętrzną (rys. 7.2).



Rys. 7.2. Siły działające na sprężynę z usztywnionym końcem

Przemieszczenie punktu wyznacza się względem położenia neutralnego i może być ono dodatnie lub ujemne. Przyjęto, że na rysunku zwrot przemieszczenia x będzie taki sam jak zwrot siły zewnętrznej F . Siła reakcji $F_c(t)$ sprężyny z unieruchomionym końcem jest zwrócona przeciwnie do przemieszczenia $x(t)$ wolnego końca i w przypadku idealnej sprężyny jest proporcjonalna do tego przemieszczenia:

$$F_c(t) = c x(t) \quad (\text{II.77})$$

Działanie sprężyny można również wyrazić zależnością:

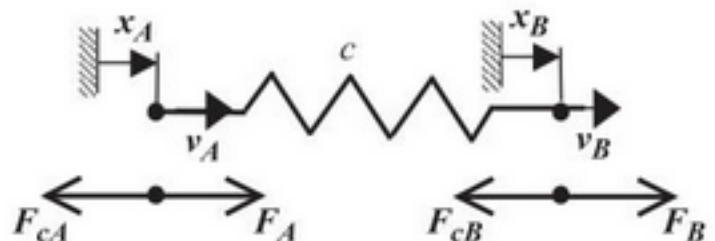
$$F_c(t) = c \int_0^t v(t) dt \quad (\text{II.78})$$

w której przemieszczenie $x(t)$ w chwili t_1 zostało wyznaczone na podstawie przebiegu prędkości $v(0-t_1)$. Współczynnik proporcjonalności c nazywa się **sztywnością sprężyny** [N/m] i jest on jedynym parametrem idealnego elementu; stosowana jest też odwrotność sztywności – **elastancja, podatność**. Aby ścisnąć (rozciągnąć) sprężynę, należy wykonać pracę, która zależy od wielkości przesunięcia i siły, z jaką należało działać w trakcie przesuwania. Jeśli zewnętrzna siła F działająca na sprężynę spowodowała przesunięcie dx , to oznacza, że została wykonana praca $dW_c = F dx$, przy czym siła F zależała od położenia x . Wykonana praca jest akumulowana w postaci energii odkształcenia sprężyny. Sprężyna ściśnięta (rozciągnięta) do położenia x_1 względem jednego nieruchomego końca gromadzi energię równą sumie elementarnych ilości pracy, jakie należało wykonać, by ścisnąć (rozciągnąć) sprężynę do tego położenia:

$$W_c = \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} cx dx = \frac{cx_1^2}{2} \quad (\text{II.79})$$

Energia sprężyny zależy od przesunięcia, więc sprężyna reprezentuje zdolność elementu do akumulowania energii w postaci energii potencjalnej.

W ogólnym przypadku oba końce sprężyny mogą się poruszać z różnymi prędkościami (rys. 7.3) i siła reakcji na jednym końcu zależy od przemieszczenia (prędkości) obu końców.



Rys. 7.3. Siły działające na sprężynę z ruchomymi końcami

Na rysunku przedstawiono sytuację, w której założono, że układ mechaniczny zawierający sprężynę działa na jeden jej koniec z siłą F_A , a na drugi z siłą F_B . Siłę reakcji $F_{cA}(t)$ w punkcie $x_A(t)$ wyznacza się z zależności (II.80) lub (II.81) – występuje w nich różnica przemieszczenia (prędkości) końca, na który działa wymuszenie F_A , i przemieszczenia (prędkości) drugiego końca:

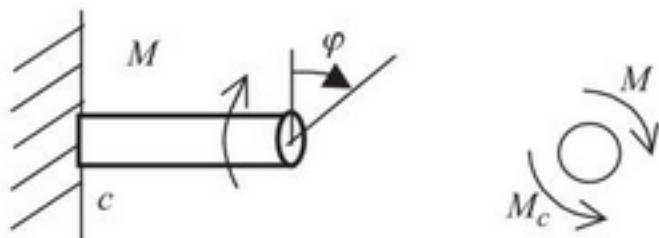
$$F_{cA}(t) = c[x_A(t) - x_B(t)] \quad (\text{II.80})$$

$$F_{cA}(t) = c \int_0^t [v_A(\tau) - v_B(\tau)] d\tau \quad (\text{II.81})$$

Siła reakcji sprężyny na drugim końcu różni się jedynie zwrotem $F_{cB} = -F_{cA}$.

7.3.2. Sprężyna w ruchu obrotowym

Sprężyna w ruchu obrotowym przeciwdziała skręcaniu, czyli zmianie położenia kątowego wymuszanego przez zewnętrzny moment obrotowy (rys. 7.4).



Rys. 7.4. Sprężyna skręczana z usztywnionym końcem

Na rysunku przedstawiono sytuację, w której zwrot przesunięcia kątowego φ jest taki sam, jak zwrot zewnętrznego momentu siły M . Moment siły reakcji $M_c(t)$ sprężyny z unieruchomionym końcem jest zwrócony przeciwnie do przesunięcia kątowego $\varphi(t)$ wolnego końca. Idealna sprężyna jest opisana proporcjonalną zależnością momentu reakcji i kąta φ (II.82) lub momentu reakcji i prędkości kątowej ω (II.83):

$$M_c(t) = c\varphi(t) \quad (\text{II.82})$$

$$M_c(t) = c \int_0^t \omega(\tau) d\tau \quad (\text{II.83})$$

7.3.3. Kształt sprężyny a odkształcenia sprężyste materiału [16]

Odkształcenia sprężyste rzeczywistych elementów mają złożony charakter, ale można je sprowadzić do odkształceń objętościowych (zmienia się objętość, a więc także gęstość ciała) i postaciowych (gęstość jest stała, a zmienia się kształt). Odkształcenia te są opisywane przez prawo Hooke'a w odpowiedniej postaci. W przypadku pręta o przekroju A i długości l , który wydłużył się o Δl pod wpływem siły F , prawo to można przedstawić w postaci:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow F = EA \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{II.84})$$

gdzie E jest współczynnikiem sprężystości materiału przy wydłużeniu (moduł Younga)⁴. Jeśli pręt ma przekrój kołowy (promień r) i na jego końcu działa moment M , który powoduje skręcenie o kąt φ , to prawo Hooke'a ma postać:

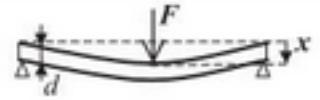
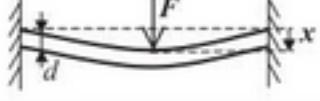
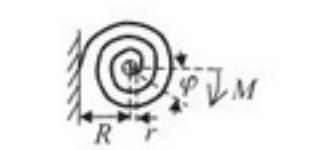
$$M = G \frac{\pi r^4}{2l} \varphi \quad (\text{II.85})$$

gdzie G jest współczynnikiem sprężystości materiału przy odkształceniach postaciowych (moduł sztywności). O typie odkształcenia decyduje kształt sprężyny i sposób

⁴ Dodatek F2.4: o współczynnikach sprężystości wybranych materiałów.

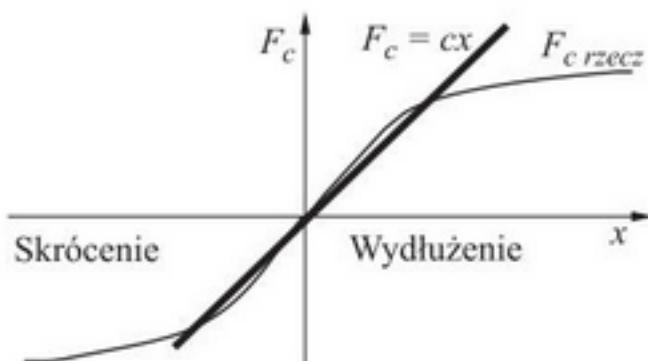
jej obciążenia. Jeśli materiał jest rozciągany (ściskany), to we wzorach na współczynnik sztywności c występuje moduł E , a jeśli materiał jest skręcany, używa się modułu G . W tabeli 7.1 przedstawiono przykłady obliczania współczynnika sztywności sprężyn o różnych kształtach.

Tabela 7.1. Współczynniki sztywności sprężyn [30]

Kształt sprężyny	Współczynnik c
	Belka z usztywnionym końcem: I – długość d – średnica; d, a – wysokość, szerokość $c = \frac{3I_x}{l^3} E$
	Belka podparta: I – długość d – średnica; d, a – wysokość, szerokość $c = \frac{48I_x}{l^3} E$
	Belka z usztywnionymi końcami: I – długość d – średnica; d, a – wysokość, szerokość $c = \frac{192I_x}{l^3} E$
	Sprzęyna: z – liczba zwojów d – średnica drutu r – promień sprężyny ($2\pi r z$ – długość) $c = \frac{d^4}{64zr^3} G$
	Belka z usztywnionym końcem: I – długość d – średnica; d, a – wysokość, szerokość $c = \frac{3I_x}{l} E$
	Sprzęyna: z – ilość zwojów d – średnica drutu R – promień sprężyny ($\pi(R+r)z$ – długość) $c = \frac{I_x}{l} E$

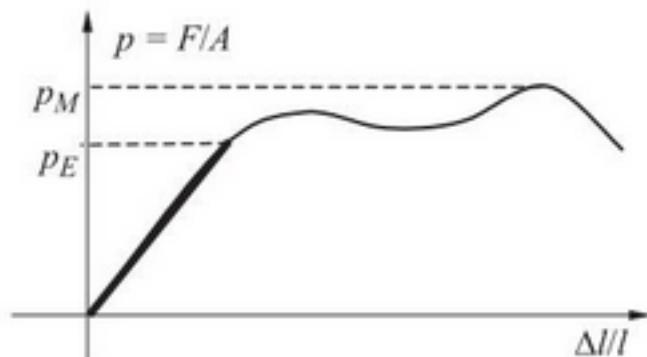
($I_x = \pi d^4/64$ dla przekroju o średnicy d ; $I = ad^3/12$ dla przekroju o wysokości d i szerokości a)

W przypadku rzeczywistej sprężyny liniową zależność siły reakcji od odkształcenia można założyć tylko w pewnym zakresie (rys. 7.5), ponieważ prawo Hooke'a stosuje się do małych odkształceń w granicach sprężystości (rys. 7.6). Przy większych naprężeniach p ($p = F/A$) odkształcenia są nie tylko nieliniowe, lecz także plastyczne¹.



Rys. 7.5. Charakterystyki sprężyny idealnej (linia gruba) i rzeczywistej (linia cienka)

¹ To oznacza, że po zaniku siły ciało nie wraca dokładnie do stanu wyjściowego.



Rys. 7.6. Odkształcenia: p_E – granica sprężystości, p_M – granica wytrzymałości

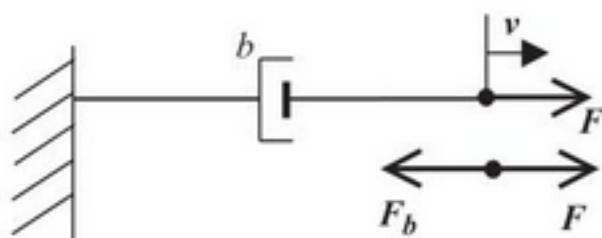
7.4. Tarcie

7.4.1. Wprowadzenie

Ciału poruszającemu się w ośrodku materialnym (w gązce, cieczy), czy też przesuwającemu się po powierzchni innego ciała zawsze towarzyszy zjawisko tarcia. Niektóre do układu celowo są wprowadzane elementy zwiększące tarcie – tłumiki. Natura zjawiska jest dość złożona, więc do jego opisu stosuje się przyblizone, doświadczalne wzory, które nie wyjaśniają mechanizmu tarcia. Jego oddziaływanie jest reprezentowane przez siłę tarcia, która przeciwdziała każdemu ruchowi.

7.4.2. Tarcie lepkie w ruchu posuwistym

Tarcie lepkie występuje podczas ruchu ciała w cieczy lub w gązce. W modelach dynamiki działanie tarcia lepkiego jest reprezentowane przez tłumik (rys. 7.7), który hamuje ruch punktu wymuszany przez siłę zewnętrzną i to tym mocniej, im większa jest prędkość punktu.



Rys. 7.7. Schemat działania tłumika z usztywnionym końcem

Na rysunku przedstawiono sytuację, w której zwrot prędkości v jest taki sam jak zwrot siły zewnętrznej F działającej na tłumik. Siła reakcji $F_b(t)$ tłumika z unieruchomionym końcem jest zwrócona przeciwnie do prędkości $v(t)$ wolnego końca i w przypadku idealnego tłumika jest proporcjonalna do tej prędkości, co wyrażają zależności:

$$F_b(t) = bv(t) \quad (\text{II.86})$$

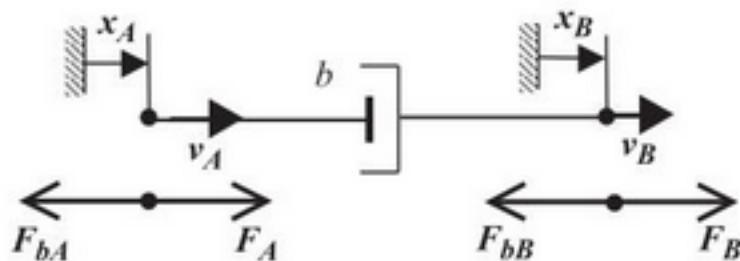
$$F_b(t) = b \frac{dx(t)}{dt} = b \dot{x}(t) \quad (\text{II.87})$$

Współczynnik proporcjonalności b nazywa się **tłumiennością** lub **współczynnikiem tarcia lepkiego** [$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$]. Zrównoważenie siły tarcia wymaga wykonania pracy mechanicznej, która zostaje zamieniona na ciepło. Każdy element ampuły przemieszczenie dx pod wpływem siły F wymaga wykonania pracy $dW_b = F dx$. Energia potrzebna do przesunięcia końca tłumika na pozycję x_1 odpowiada sumie prac elementarnych. Jeśli ruch odbywa się z prędkością $v(t) = dx(t)/dt$, to można wyznaczyć czas t_1 , w jakim nastąpi przemieszczenie. Można zatem wyprowadzić zależność na ilość ciepła wydzielanego podczas ruchu z prędkością $v(t)$ w czasie t_1 :

$$W_R = \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} bv dx = \int_0^{x_1} bv \frac{dt}{dt} dx = \int_0^{t_1} bv \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{t_1} b v^2 dt \quad (\text{II.88})$$

Tłumik reprezentuje nieodwracalny proces przekształcania energii mechanicznej w ciepło.

W ogólnym przypadku oba końce tłumika mogą się poruszać z różnymi prędkościami (rys. 7.8).



Rys. 7.8. Schemat działania tłumika z ruchomymi końcami

Na rysunku przedstawiono sytuację, w której układ mechaniczny zawierający tłumik działa na jeden jego koniec z siłą F_A , a na drugi z siłą F_B . W punkcie x_A tłumik reaguje z siłą F_{bA} proporcjonalną do różnicy prędkości końca, na który działa wymuszanie F_A , i prędkości drugiego końca, według jednego ze wzorów:

$$F_{bA}(t) = b[v_A(t) - v_B(t)] \quad (\text{II.89})$$

$$F_{bA}(t) = b[\dot{x}_A(t) - \dot{x}_B(t)] \quad (\text{II.90})$$

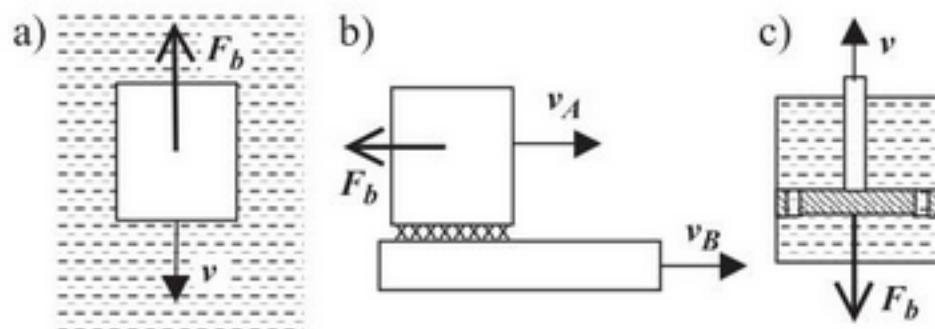
Siła reakcji tłumika na drugim końcu różni się jedynie zwrotem $F_{bB} = -F_{bA}$.



Tarcie lepkie jest związane z lepkością cieczy i gazów, jest więc formą oporu hydraulicznego lub pneumatycznego*, działającego w układach mechanicznych, gdzie jest reprezentowane przez współczynnik tarcia b . Tarcie lepkie w układzie mechanicznym może wynikać z własności samego ośrodka, w którym odbywa się ruch (rys. 7.9a), np. powietrze, woda. Występuje ono również podczas przesuwania ciał po warstwie smaru (rys. 7.9b).

Techniczną realizacją tłumika jest na przykład element hydrauliczny w postaci tłoka przesuwającego się w cylindrze wypełnionym płynem (rys. 7.9c), przy czym zależność siły i prędkości $F_b(v)$ jest liniowa, jeśli przepływy w tłumiku są laminarne (dla przepływów turbulentnych zależność jest kwadratowa $F_b = bv^2$).

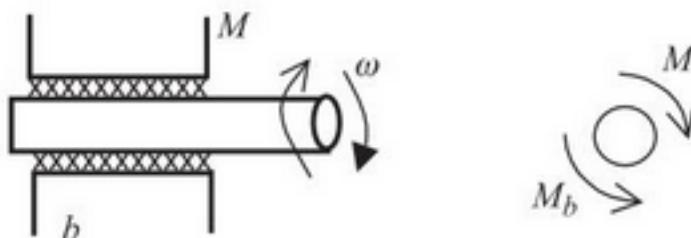
* W p. 8.3: o lepkości i oporze hydraulicznym.



Rys. 7.9. Przykłady występowania tarcia lepkiego

7.4.3. Tarcie lepkie w ruchu obrotowym

Zjawisko tarcia lepkiego w ruchu obrotowym dotyczy m.in. tłumika obrotowego, łożyska itp. (rys. 7.10).



Rys. 7.10. Schemat działania tłumika obrotowego z jednym swobodnym końcem

Na rysunku przedstawiono sytuację, w której zwrot prędkości kątowej ω jest taki sam jak zwrot zewnętrznego momentu siły M działającego na tłumik. Moment siły reakcji $M_b(t)$ tłumika z unieruchomionym końcem jest zwrócony przeciwnie do prędkości $\omega(t)$ wolnego końca. Idealny tłumik charakteryzuje proporcjonalną zależność momentu i prędkości:

$$M_b(t) = b\omega(t) \quad (\text{II.91})$$

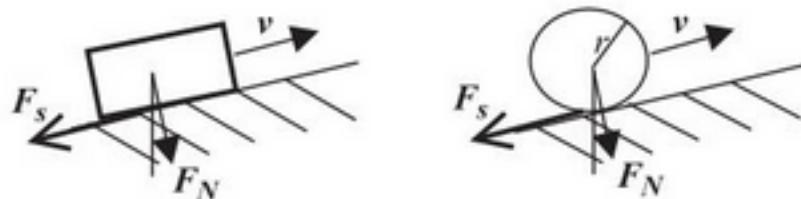
$$M_b(t) = b \frac{d\phi(t)}{dt} = b\dot{\phi}(t) \quad (\text{II.92})$$

7.4.4. Tarcie suche

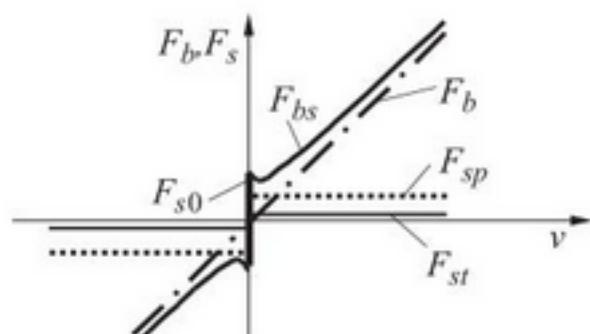
Przy zetknięciu się ciał stałych, będących w ruchu względem siebie, występują różne typy tarcia suchego w zależności od tego, czy ciała przylegają, ślizgają się, czy też toczą się jedne po drugich (rys. 7.11).

W każdym wypadku siła tarcia F_s nie zależy od prędkości ruchu, tylko od siły nacisku ciał na siebie F_N , wynikającej na przykład z ciężaru ciała:

$$F_s = b_s F_N \quad (\text{II.93})$$



Rys. 7.11. Siły w tarciu suchym: poślizgowym i tocznym



Rys. 7.12. Siły tarcia: lepkiego (F_b), spoczynkowego (F_{s0}), statycznego poślizgowego (F_{sp}), statycznego tocznego (F_{st}), wypadkowego (F_{ts})

F2.5

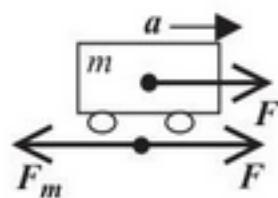
Bezwymiarowy współczynnik proporcjonalności b , zależy od rodzaju stykających się powierzchni i od typu tarcia⁴. Największą wartość współczynnik b_s ma w chwili, kiedy ciało wychodzi ze stanu spoczynku i zaczyna się przesuwać po płaskiej powierzchni (statyczny współczynnik tarcia b_{s0}). Działającą w tym momencie siłę F_{s0} nazywa się tarciem spoczynkowym. Gdy ciało jest już w ruchu, działa mniejsze tarcie statyczne (tarcie kulombowskie, siła oporu przylegania). W przypadku poślizgu wartość b_s (kinetyczny współczynnik tarcia b_{sp}) jest zwykle znacznie mniejsza od jedności, jeśli jednak stykające się powierzchnie są wypolerowane i dokładnie oczyszczone – znacznie przekracza jedność¹. Tarcie statyczne jest najmniejsze w trakcie toczenia, kiedy to wartość b_s jest proporcjonalna do współczynnika tarcia tocznego b_{st} i odwrotnie proporcjonalna do promienia r toczonego się ciała ($b_s = b_{st}/r$). Wszędzie więc, gdzie jest to możliwe, zamiast ślizganina stosuje się toczenie². Tarcie poślizgowe i tarcie toczne przybliża się prostą odpowiadającą stałej wartości; tarcie spoczynkowe można uwzględnić przez obciążenie wstępne (rys. 7.12).

Tarcie suche ma znaczenie przede wszystkim przy małych prędkościach, i wtedy jest porównywalne z tarciem lepkim. Tarcie toczne jest na tyle małe, że w prostych modelach jest zwykle pomijane³.

7.5. Bezwładność ciał w ruchu

7.5.1. Bezwładność w ruchu posuwistym

W ruchu posuwistym ciała o masie m występuje siła bezwładności, która przeciwiała zmianie prędkości ciała wymuszanej przez siłę zewnętrzną (rys. 7.13).



Rys. 7.13. Siła bezwładności działająca na poruszające się ciało

⁴ Dodatek F2.5: podano wybrane współczynniki tarcia.

¹ Podczas stykania się czystych powierzchni zaczynają działać siły międzycząsteczkowe.

² Na przykład siła tarcia w przypadku zastosowania łożysk kulkowych czy rolkowych stanowi do 2% siły tarcia, jaka wystąpiłaby przy użyciu łożysk ślizgowych [16].

³ Przykładowe wartości współczynnika b , dla różnych typów tarcia, jeśli obie stykające się powierzchnie są stalowe, wynoszą: $b_{s0} = 0,15$; $b_{sp} = 0,03 - 0,09$; $b_{st} = 0,005 - 0,008 \text{ cm}$ [16].

Na rysunku przedstawiono sytuację, w której zwrot przyspieszenia a jest taki sam jak zwrot siły zewnętrznej F działającej na ciało o danej masie. Siła reakcji $F_m(t)$ masy jest zwrócona przeciwnie do przyspieszenia $a(t)$ i jest do niego proporcjonalna:

$$F_m(t) = m a(t) \quad (\text{II.94})$$

$$F_m(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = m \ddot{x}(t) \quad (\text{II.95})$$

Współczynnik proporcjonalności m nazywa się masą ciała² i z definicji jest miarą bezwładności ciał [jednostka kg]. Zależność siły i przyspieszenia jest liniowa w dużym zakresie prędkości – dopóki prędkość ciała o danej masie jest znacznie mniejsza od prędkości światła.

F2.7

Aby nadać ciału pewną prędkość, należy dostarczyć energię, czyli wykonać pracę. Jeśli siła F działa na ciało o danej masie na odcinku dx , to przyspiesza ruch ciała w tym czasie dzięki wykonywanej pracy $dW_m = F dx$. Energia dostarczona w trakcie przemieszczenia x_1 odpowiada sumie prac elementarnych. Znając siłę $F(t)$ działającą w tym czasie, można wyznaczyć przyspieszenie, z jakim odbywa się ruch, i tym samym prędkość v_1 , jaką osiągnie ciało w czasie przemieszczenia x_1 . Praca niezbędna do nadania ciału prędkości v_1 wynosi zatem:

$$W_m = \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} m a dx = \int_0^{x_1} m \frac{dv}{dt} dx = \int_0^{v_1} m \frac{dx}{dt} dv = \int_0^{v_1} mv dv = \frac{mv_1^2}{2} \quad (\text{II.96})$$

Energia ciała o danej masie zależy od jego prędkości, więc jest to czynnik, który charakteryzuje zdolność obiektu do gromadzenia energii kinetycznej.

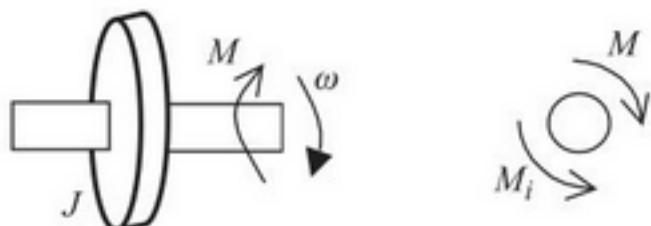
7.5.2. Moment bezwładności

Moment bezwładności reprezentuje bezwładność ciała w ruchu obrotowym. Przeciwdziała więc zmianie prędkości obrotowej wymuszanej przez zewnętrzny moment obrotowy (rys. 7.14).

Na rysunku przedstawiono sytuację, w której zwrot przyspieszenia kątowego $d\omega/dt$ jest taki sam jak zwrot zewnętrznego momentu siły M , powodującego obrót ciała. Moment siły reakcji $M_i(t)$ jest zwrócony przeciwnie do przyspieszenia kątowego i jest do niego proporcjonalny:

$$M_i(t) = J \dot{\omega}(t) \quad (\text{II.97})$$

$$M_i(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} = J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = J \ddot{\varphi}(t) \quad (\text{II.98})$$



Rys. 7.14. Schemat powstawania momentu bezwładności

² Dodatek F2.7: o gęstości wybranych materiałów.

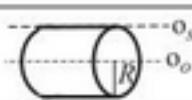
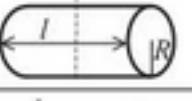
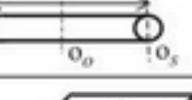
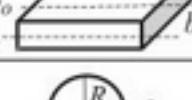
Współczynnik proporcjonalności J nazywa się **momentem bezwładności**. Dla obracającego się punktu współczynnik J zależy od masy tego punktu i kwadratu promienia obrotu [jednostką jest $\text{kg} \cdot \text{m}^2$]. Moment bezwładności obracającego się ciała jest sumą elementarnych momentów bezwładności (punktów o elementarnych masach). Całkowanie rozciąga się na cały zakres wartości masy i uwzględnia różne odległości r elementarnych mas dm od osi obrotu:

$$J = \int r^2 dm \quad (\text{II.99})$$

W tabeli 7.2 przedstawiono wzory na momenty bezwładności wybranych brył wykonanych z jednorodnego materiału. Jeśli znany jest moment bezwładności J_o względem osi przechodzącej przez środek masy ciała, to z twierdzenia Steinera można obliczyć moment bezwładności J względem osi równoległej odległej o d , według wzoru:

$$J = J_o + md^2 \quad (\text{II.100})$$

Tabela 7.2. Momenty bezwładności brył geometrycznych [16]

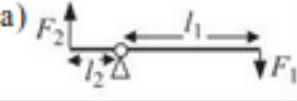
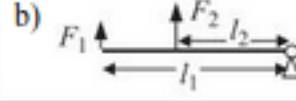
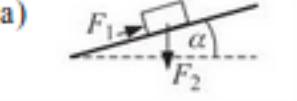
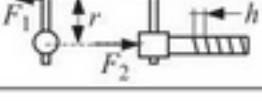
Kształt ciała i osь obrotu		Oś obrotu przechodząca przez środek masy (os o_o)	styczną (os o_s)
	Walec (tarcza) o promieniu R	$J_o = \frac{1}{2}mR^2$	$J = \frac{3}{2}mR^2$
	Walec o promieniu R i długości l	$J_o = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$	
	Pręt o długości l ($l \gg R$)	$J_o = \frac{ml^2}{12}$	$J = \frac{ml^2}{3}$
	Graniastosłup o wymiarach a, b, c	$J_o = m\left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right)$	$J_o = m\left(\frac{a^2 + 4b^2}{12}\right)$
	Kula o promieniu R	$J_o = \frac{2}{5}mR^2$	$J_o = \frac{13}{20}mR^2$
	Cienka obręcz o promieniu R	$J_o = \frac{mR^2}{2}$	$J = \frac{3mR^2}{2}$
	Pierścień o promieniach R_u i R_z	$J_o = \frac{m}{2}(R_u^2 + R_z^2)$	

7.6. Maszyny proste

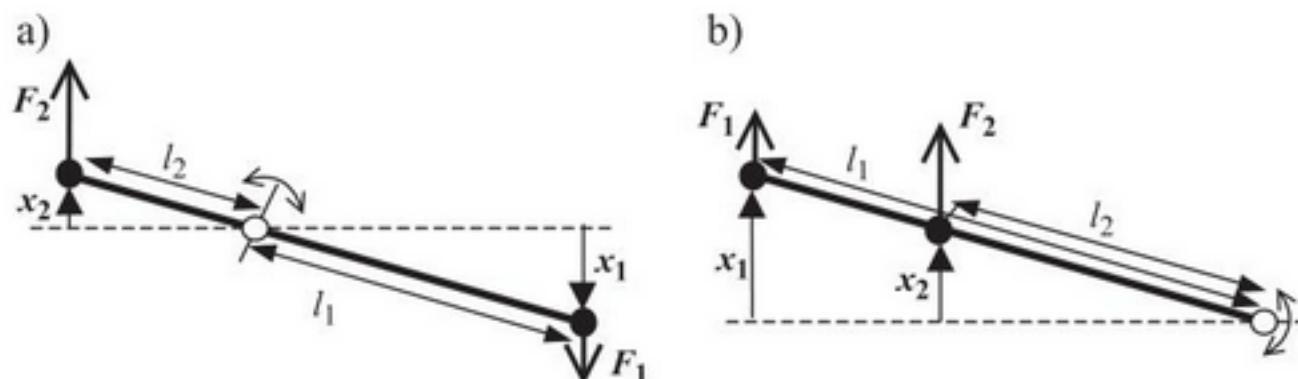
Maszyny proste umożliwiają zastąpienie pracy wykonywanej przez określoną siłę, na określonej drodze, pracą wykonywaną przez inną siłę na odpowiednio zmienionej drodze. W praktyce zazwyczaj chodzi o wykonanie pracy przy użyciu mniejszej siły,

a tym samym na dłuższej drodze. Dotyczy to również pracy w ruchu obrotowym. Urządzeniami tego typu są różnego rodzaju dźwignie i przekładnie – przykłady w tab. 7.3. Zapewniają one transformację siły lub momentu siły, zmianę punktu przyłożenia lub osi obrotu, zamianę ruchu posuwistego na obrotowy i odwrotnie. W warunkach idealnych zakłada się brak tarcia, więc prace obu sił (momentów sił) są sobie równe, a modele maszyn są prostymi członami proporcjonalnymi. Jako przykład zostaną wyprowadzone wzory dla prostej dźwigni i przekładni.

Tabela 7.3. Maszyny proste [30]

Schemat i nazwa maszyny			Wzór
a) 	b) 	Dźwignia dwu- (a) i jednostronna (b)	$F_1 l_1 = F_2 l_2$
a) 	b) 	Krążek stały (a) i luźny (b)	a) $F_1 d_1 = F_2 d_2$ b) $F_1 = F_2/2$
a) 	b) 	Równia pochylona (a) i klin jednostronny (b)	$F_1 = F_2 \sin \alpha$
		Šruba	$F_1 = F_2 \frac{h}{2\pi r}$

Dźwignia (rys. 7.15) reprezentuje możliwość przenoszenia siły z jednego punktu przyłożenia do innego i zmiany jej wartości.



Rys. 7.15. Zasada działania dźwigni: a) dwustronnej, b) jednostronnej

Model opisujący dźwignię wynika z zależności geometrycznej:

$$\frac{x_1(t)}{l_1} = \frac{x_2(t)}{l_2}, \text{ stąd } \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{II.101})$$

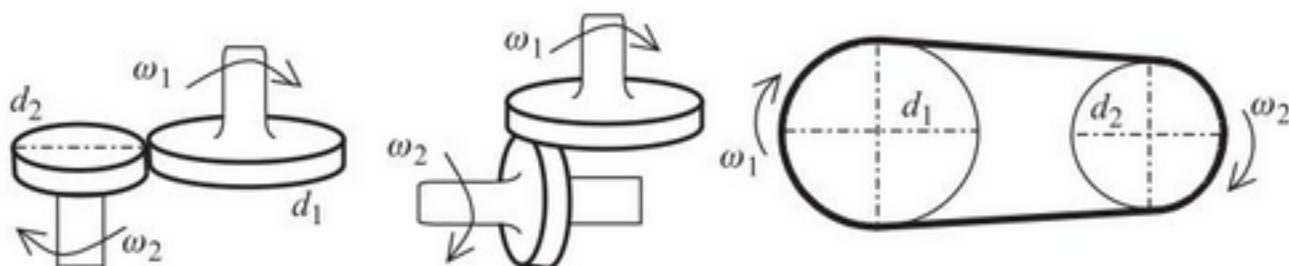
Jeśli na przegubie dźwigni nie występuje tarcie, to praca wykonana po obu stronach przegubu jest taka sama:

$$F_1(t)x_1(t) = F_2(t)x_2(t) \quad (\text{II.102})$$

Na tej podstawie podstawowy związek opisujący idealną dźwignię ma postać:

$$F_1(t)l_1 = F_2(t)l_2 \quad (\text{II.103})$$

Przekładnia (zębata, cierna) umożliwia przenoszenie momentu siły między różnymi osiami oraz zmianę wartości momentu (rys. 7.16).



Rys. 7.16. Zasada działania przekładni

Model idealnej przekładni o dwóch kołach, o średnicy (liczbie zębów) d_1 i d_2 , wynika z proporcji:

$$\frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} = \frac{d_2}{d_1} \quad (\text{II.104})$$

i równości pracy wykonywanej po obu stronach, przy założeniu braku tarcia:

$$M_1(t)\varphi_1(t) = M_2(t)\varphi_2(t) \quad (\text{II.105})$$

Model idealnej przekładni ma postać:

$$M_1(t)d_1 = M_2(t)d_2 \quad (\text{II.106})$$

7.7. Wektorowy charakter wielkości opisujących ruch

7.7.1. Wprowadzenie

Charakterystyczną cechą układów mechanicznych jest wektorowy charakter wielkości, które je opisują. Kierunki siły, momentu siły, przesunięcia, prędkości czy przyspieszenia są tak samo istotne jak ich wartości. Układy techniczne często wymuszają określone kierunki wielkości, ale w ogólnym przypadku kierunek wielkości może się zmieniać tak samo jak jej wartość.

7.7.2. Ruch po okręgu

Ruch po okręgu jest szczególnym przypadkiem ruchu krzywoliniowego. Można go opisać za pomocą prędkości liniowej v lub prędkości kątowej ω . W ruchu jednostajnym wartości prędkości są stałe i można je wyznaczyć na podstawie okresu T i długości drogi mierzonej po obwodzie koła:

$$v = 2\pi r/T \quad (\text{II.107})$$

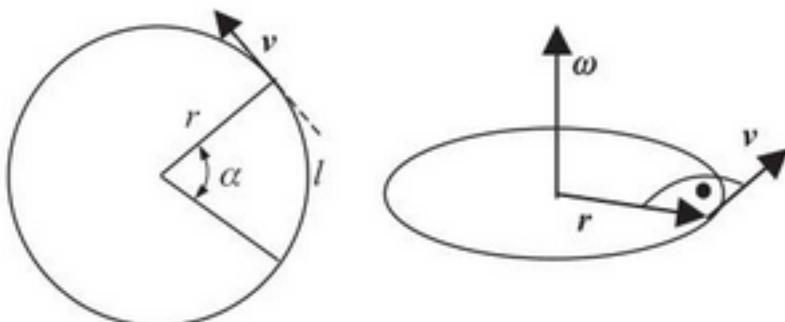
lub drogi wyznaczonej miarą kątową:

$$\omega = 2\pi/T \quad (\text{II.108})$$

Obie prędkości są jednak wielkościami wektorowymi (rys. 7.17), a związek między nimi należy zapisać w postaci iloczynu wektorowego:

$$\mathbf{v}(t) = \omega(t) \times \mathbf{r}(t) \quad (\text{II.109})$$

przy czym prędkość liniowa jest styczna do toru, a prędkość kątowa – prostopadła do płaszczyzny toru.



Rys. 7.17. Wielkości opisujące ruch po okręgu

Wielkość $\mathbf{v}(t)$ jest zawsze zmienna, nawet w ruchu jednostajnym (wartość jest stała, ale zmienia się kierunek wektora), natomiast wielkość $\omega(t)$ ma zawsze stały kierunek i ten sam kierunek ma przyspieszenie kątowe ($d\omega/dt$). Wzór na wektor przyspieszenia liniowego otrzymuje się, obliczając pochodną prędkości liniowej po czasie:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega(t) \times \mathbf{r}(t)) = \frac{d\omega(t)}{dt} \times \mathbf{r}(t) + \omega(t) \times \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (\text{II.110})$$

Wektor przyspieszenia $\mathbf{a}(t)$ można zapisać jako sumę dwóch składowych:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_t(t) + \mathbf{a}_d(t) \quad (\text{II.111})$$

Składowa $\mathbf{a}_t(t)$ równa:

$$\mathbf{a}_t(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \times \mathbf{r}(t) \quad (\text{II.112})$$

jest prostopadła do przyspieszenia kątowego i promienia – ma ten sam kierunek (niekoniecznie zwrot) co prędkość liniowa $\mathbf{v}(t)$. Składową $\mathbf{a}_d(t)$:

$$\mathbf{a}_d(t) = \omega(t) \times \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \omega(t) \times \mathbf{v}(t) = \omega(t) \times (\omega(t) \times \mathbf{r}(t)) \quad (\text{II.113})$$

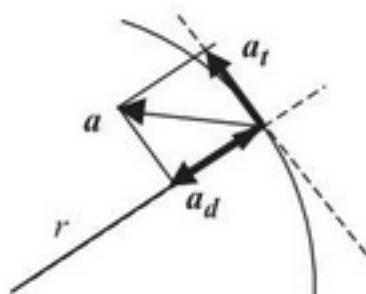
można przekształcić, podstawiając wzór na podwójny iloczyn wektorowy:

$$\mathbf{a}_d(t) = \omega(t)(\omega(t)\mathbf{r}(t)) - \mathbf{r}(t)(\omega(t)\omega(t)) \quad (\text{II.114})$$

Ponieważ wektory $\omega(t)$ i $\mathbf{r}(t)$ są prostopadłe, więc ostatecznie:

$$\mathbf{a}_d(t) = -\omega^2(t)\mathbf{r}(t) \quad (\text{II.115})$$

co oznacza, że składowa $\mathbf{a}_d(t)$ jest zawsze wektorem równoległym do promienia $\mathbf{r}(t)$ i skierowanym do środka okręgu (rys. 7.18).



Rys. 7.18. Składowe przyspieszenia liniowego w ruchu po okręgu

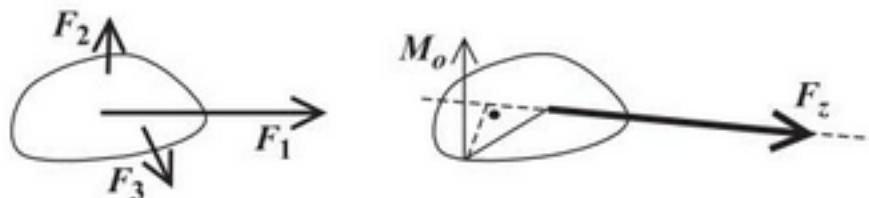
Rozkład przyspieszenia na składową styczną $a_t(t)$ i składową dośrodkową $a_d(t)$ ma istotne znaczenie ze względu na siłę bezwładności występującą w ruchu punktu materialnego po okręgu. Można ją rozłożyć na dwie składowe:

$$1) \text{ siłę styczną do toru, o wartości: } F_{st} = ma_t = m\dot{v} \quad (\text{II.116})$$

$$2) \text{ siłę dośrodkową o wartości: } F_{sd}(t) = ma_d(t) = mr\omega^2(t) \quad (\text{II.117})$$

7.7.3. Wypadkowe wielkości układu sił

Dowolny układ sił działających na ciało sztywne można zastąpić równoważnym układem jednej siły wypadkowej zaczepionej w dowolnym punkcie oraz momentu obrotowego względem punktu zaczepienia (rys. 7.19).

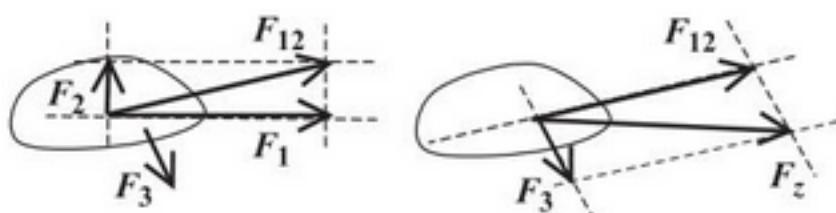


Rys. 7.19. Równoważne układy sił i momentów

Wyznaczając wielkości wypadkowe, często wykonuje się dwie typowe operacje, które nie wprowadzają żadnej zmiany w zachowaniu obiektu – przesuwanie sił i momentów wzdłuż ich linii działania oraz dodawanie do układu pary sił przeciwnych ($\mathbf{F}, -\mathbf{F}$). Siłę wypadkową można wyznaczać, dodając najpierw dwie siły, a następnie do ich wypadkowej kolejną siłę i tak dalej. Kolejność dodawania sił jest dowolna.

A1

Aby wyznaczyć siłę wypadkową, należy „zaczepić” siły składowe w jednym punkcie^{*}. W tym celu siły przesuwa się wzdłuż ich linii działania (rys. 7.20).



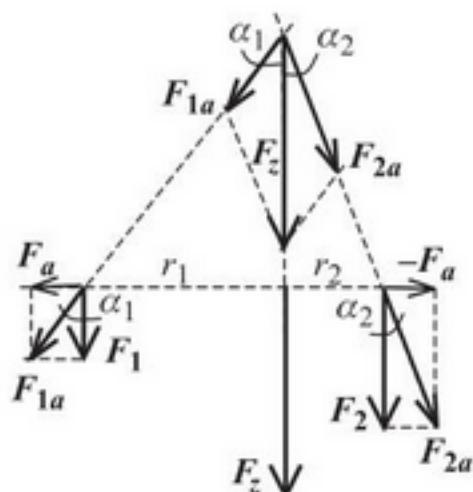
Rys. 7.20. Wyznaczenie siły wypadkowej na płaszczyźnie

* Dodatek A1: o algebrze wektorowej.

Metoda nie daje rezultatu w przypadku dodawania sił równoległych przyłożonych w różnych punktach ciała. Dwie siły równolegle, F_1 i F_2 , można jednak przesunąć do wspólnej linii prostopadłej (rys. 7.21), a następnie dodać parę dowolnych sił przeciwnych (F_a , $-F_a$) i wyznaczyć siły wypadkowe:

$$F_{1a} = F_1 + F_a \quad \text{oraz} \quad F_{2a} = F_2 - F_a$$

Siły F_{1a} i F_{2a} nie są już równolegle i można je dodać, przesuwając je do wspólnego punktu. Wypadkowa tych sił F_z jest taka sama jak wypadkowa sił F_1 i F_2 . Można ją przesuwać wzdłuż linii działania, a położenie linii działania (czyli odległości r_1 , r_2) można wyznaczyć z zależności trygonometrycznych.

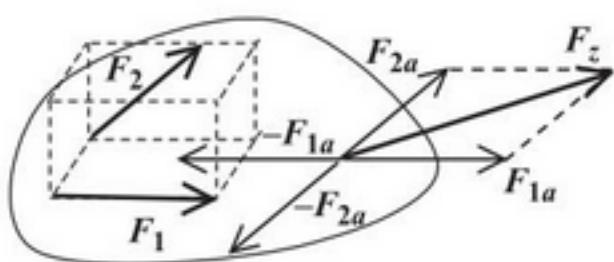


Rys. 7.21. Dodawanie sił równoległych

Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{F_a}{F_1} = \frac{l}{r_1}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{F_a}{F_2} = \frac{l}{r_2}$, stąd:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{F_2}{F_1} \quad (\text{II.118})$$

W praktyce nie ma potrzeby odtwarzania opisanej konstrukcji, wystarczy zastosować jej wyniki – wartość siły wypadkowej składowych równoległych jest równa sumie ich wartości, a położenie linii działania siły wypadkowej wyznacza stosunek wartości sił składowych (II.118).

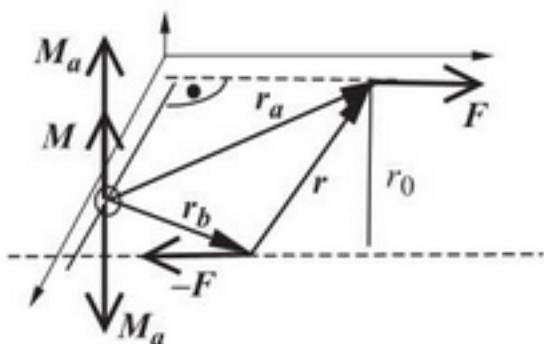


Rys. 7.22. Wyznaczenie siły wypadkowej w przestrzeni

Przedstawione metody pozwalają dodawać siły, które leżą na jednej płaszczyźnie. W układach trójwymiarowych może się jednak zdarzyć, że niezależnie od kolejności dodawania zawsze pozostają siły, których nie można dodać do pozostałych, bo

nie mają wspólnej płaszczyzny. Aby znaleźć wypadkową układu sił w różnych płaszczyznach (rys. 7.22), należy wybrać dowolny punkt ciała i przyłożyć w nim dwie pary sił – jedna para F_{1a} i $-F_{1a}$, równoległa do siły F_1 , oraz druga para F_{2a} i $-F_{2a}$, równoległa do siły F_2 , przy czym wartości $F_{1a} = F_1$ i $F_{2a} = F_2$. Wykonane operacje nie zmieniają ruchu ciała, ponieważ wypadkowe dodatkowych sił są równe zeru.

Można wykazać, że suma sił F_{1a} i F_{2a} wyznacza siłę wypadkową układu F_z , która decyduje o kierunku ruchu ciała, natomiast pozostałe dwie pary sił: F_1 i $-F_{1a}$ oraz F_2 i $-F_{2a}$ są odpowiedzialne za obrót ciała wokół osi. Moment obrotowy jest cechą charakterystyczną każdej pary sił $(F, -F)$. Można go wyznaczyć jako sumę momentów sił względem wybranego punktu odniesienia: $M = M_1 + M_2$ (rys. 7.23).



Rys. 7.23. Wyznaczanie momentu pary siły

Ponieważ $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$ i $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}) = -\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$, więc:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}) - (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Moment pary sił $(F, -F)$ można więc zapisać w postaci:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{II.119})$$

a jego wartość:

$$M = Fr \sin \alpha = Fr_0 \quad (\text{II.120})$$

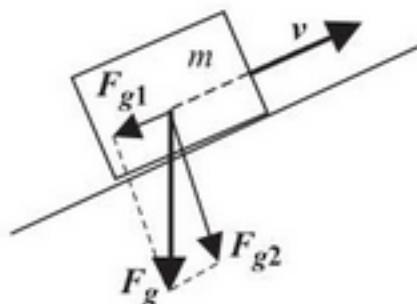
nie zależy od wyboru punktu odniesienia. Moment obrotowy reprezentuje więc działanie pary sił w układzie. Na tej podstawie dwie pary sił: F_1 i $-F_{1a}$ oraz F_2 i $-F_{2a}$ (rys. 7.22) można zastąpić jedną parą sił o momencie równym sumie momentów obrotowych tych par. Można wykazać, że moment obrotowy układu jest równy momentowi siły wypadkowej układu wyznaczonemu względem punktu zaczepienia siły wypadkowej.

7.7.4. Pole grawitacyjne [21]

Często istotnym elementem modelu układu mechanicznego jest oddziaływanie pola grawitacyjnego Ziemi (rys. 7.24), które powoduje, że – niezależnie od różnych źródeł siły funkcjonujących w układzie – na każdy element o masie m działa siła ciążenia \mathbf{F}_g skierowana w dół (ciężar ciała):

$$\mathbf{F}_g = mg \quad (\text{II.121})$$

gdzie g – przyspieszenie ziemskie¹. Siła ciążenia F_g ma udział w bilansie sił działających w kierunku ruchu (składowa F_{g1}) bezpośrednio lub poprzez siłę nacisku (składowa F_{g2}) powodującą tarcie powierzchni.



Rys. 7.24. Wpływ siły ciążenia na ruch układu mechanicznego

Jeśli ciało o masie m spadnie swobodnie z wysokości h_1 , to będzie świadczyło o tym, że siła grawitacji wykonała pracę o wartości:

$$W_p = \int_0^{h_1} F_g dh = \int_0^{h_1} mg dh = mgh_1 \quad (\text{II.122})$$

Ciało o danej masie jest więc w polu grawitacyjnym magazynem energii potencjalnej. Doświadczalnie wykazano, że masy m występujące we wzorze na ciężar ciała (II.121) i na siłę bezwładności tego samego ciała (II.94) są identyczne.

¹ W modelach obiektów technicznych przyjmuje się zazwyczaj $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Elementy układów hydraulicznych

8.1. Charakterystyka

Modele układów hydraulicznych opisują mechanikę ruchu cieczy w obwodach ukształtowanych przez zbiorniki i elementy przepływowne (rury, zawory itp.). Ciecz nie mają sprężystości postaci jak ciała stałe, więc przybierają kształt naczynia, w którym się znajdują. W przypadku elementów przepłybowych (przewód, zawór itp.) zakłada się dodatkowo, że ciecz wypełnia całą objętość elementu (przepływa całym przekrojem). Ciecz poruszają się pod wpływem sił. Może to być siła grawitacji, pod której wpływem następuje opróżnianie zbiorników i przepływ cieczy z jednego zbiornika do drugiego, lub siła wynikająca z różnicy ciśnień wytwarzanej przez pompę czy kompresor.

Podstawowymi wielkościami opisującymi ruch cieczy w układzie hydraulicznym jest natężenie przepływu i ciśnienie. **Natężenie przepływu** substancji $f(t)$ opisuje szybkość przepływu cieczy przez dany przekrój obwodu. W dalszej części rozważań zostanie przyjęte, że ciecz jest jednorodna, a natężenie przepływu będzie wyrażane w jednostce objętości na jednostkę czasu $[m^3/s]$ (objętościowy strumień przepływu V , czyli dV/dt). W praktyce natężenie przepływu wyraża się również w jednostce masy na jednostkę czasu $[kg/s]$ (masowy strumień przepływu m , czyli dm/dt), co ma swoje uzasadnienie, jeśli zmienia się gęstość przepływającego płynu (np. pod wpływem temperatury, przy zmianie składu). **Ciśnienie płynu** $p(t)$ jest z definicji ilorazem siły $F(t)$ i powierzchni A , na jaką działa ta siła:

$$p(t) = \frac{F(t)}{A} \quad (\text{II.123})$$

i jest wyrażane w paskalach [Pa]. Różnica ciśnień jest przyczyną i skutkiem ruchu płynu w układzie hydraulicznym. Pompa wytwarza różnicę ciśnień, czyli siłę, która jest przyczyną ruchu cieczy, a w wyniku przepływu cieczy na każdym elemencie układu następuje spadek ciśnienia.

Przepływ cieczy wymaga dostarczenia energii. W przypadku małego przesunięcia cieczy dx przez siłę F zostaje wykonana elementarna praca dW , którą można

wyrazić również za pomocą ciśnienia i natężenia przepływu cieczy w elementarnej jednostce czasu:

$$dW = Fdx = pAvdt = pfdt \quad (\text{II.124})$$

Praca układu może być także ujemna, co oznacza oddawanie energii.

Układy hydrauliczne mogą być obiektami o dużych lub małych wymiarach. W jednych większe znaczenie mają zjawiska wynikające z przenoszenia masy w polu grawitacyjnym, w drugich – zjawiska związane z własnościami cieczy (lepkością, ścisliwością, masą). Dlatego w modelach elementarnych przyjmuje się założenie o przepływie cieczy doskonalej (tzn. że ciecz jest nielepka i nieścisliwa) albo instalację umieszcza się na jednej wysokości.

8.2. Źródła ciśnienia i przepływu

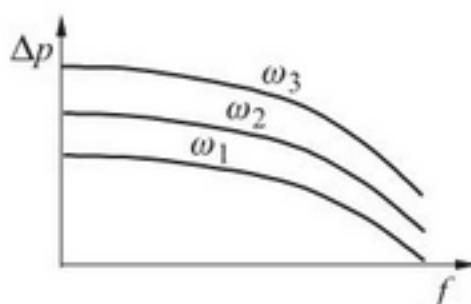
W badaniach układów hydraulicznych przyjmuje się dwa typy idealnych źródeł energii: źródło ciśnienia i źródło przepływu. Idealna pompa czy wieża ciśnień tworzy stałą różnicę ciśnień, niezależnie od natężenia przepływu w układzie:

$$\Delta p(t) = \Delta p_s(t) \quad \text{dla każdego } f(t) \quad (\text{II.125})$$

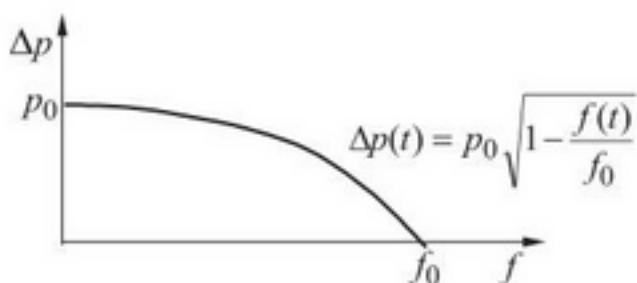
Pompa będąca idealnym źródłem przepływu wymusza stałe natężenie przepływu w gałęzi, w której jest włączona, niezależnie od różnicy ciśnień:

$$f(t) = f_s(t) \quad \text{dla każdego } \Delta p(t) \quad (\text{II.126})$$

W rzeczywistych warunkach charakterystyka typowej pompy odśrodkowej o stałej prędkości jest nieliniowa (rys. 8.1). Parametry punktu pracy w układzie hydraulicznym z pompą często wyznacza się metodą graficzną.



Rys. 8.1. Charakterystyka pompy odśrodkowej



Rys. 8.2. Przybliżenie charakterystyki pompy [5]

W obliczeniach charakterystykę pompy można przybliżyć zależnością (rys. 8.2):

$$\Delta p(t) = p_0 \sqrt{1 - \frac{f(t)}{f_0}} \quad \text{dla } \omega = \text{const} \quad (\text{II.127})$$

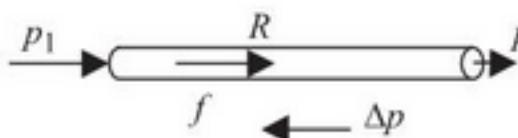
Idealne źródła hydrauliczne można zrealizować, stosując układy regulacji, które stabilizują różnicę ciśnień czy przepływ wytwarzany przez pompę za pomocą płynnego sterowania prędkością obrotową¹.

8.3. Opór hydrauliczny (opór czynny przepływu)

8.3.1. Czynniki warunkujące opór przepływu

Opór przepływu jest spowodowany lepkością cieczy, która wynika z siły przyciągania między cząsteczkami cieczy² i sprawia, że podczas ruchu cząsteczek względem siebie i względem ścian elementu występuje zjawisko podobne w skutkach do tarcia powierzchni ciał³. Opór przepływu nie dotyczy cieczy doskonalej³, występuje jednak wszędzie tam, gdzie następuje przepływ cieczy rzeczywistej, i powoduje stratę ciśnienia, którą można wyrazić ogólnym wzorem (rys. 8.3):

$$\Delta p(t) = R f(t) \quad (\text{II.128})$$



Rys. 8.3. Opór hydrauliczny

Opór hydrauliczny danego elementu R jest wielkością stałą tylko wtedy, kiedy przepływ cieczy przez ten element jest laminarny (warstwowy), tzn. że strugi cieczy płyną niezależnie od siebie i nie zakłócają wzajemnie swojego ruchu. Opór przepływu wynika wówczas z tarcia wewnętrznego, czyli oddziaływania między cząsteczkami strug, które powoduje, że największą prędkość ma ciecz w środku rury, a najmniejszą przy jej ścianach. Przy przepływie turbulentnym (burzliwym) strugi cieczy mieszają się ze sobą i tworzą wiry. Opór przepływu wiąże się nie tyle z tarciem wewnętrznym, ile ze zużywaniem energii na zawirowania (tzw. opór ciśnienia) – zależy on więc od natężenia przepływu.

Charakter przepływu zależy od kształtu i chropowatości elementu przepływowego oraz od bezwymiarowej liczby Reynolds'a (Re), która jest proporcjonalna do

¹ Na przykład zasilanie poprzez falownik.

² Większa lepkość oznacza, że poruszające się cząsteczki mocniej się przyciągają, a cząsteczki spoczywające (np. przylegające do ścianek rury) hamują cząsteczki sąsiadujące.

³ W p. 7.4.2 o tarciu lepkim w układach mechanicznych.

³ Ciecz doskonała jest nielepka, ponieważ zakłada się, że nie występują siły międzycząsteczkowe.

F2.6

gęstości ρ i prędkości v , a odwrotnie proporcjonalna do lepkości η cieczy^{*} (i pośrednio do temperatury, która zwiększa lepkość):

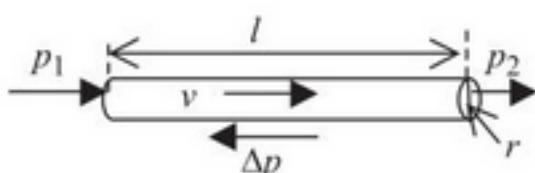
$$Re \approx \frac{\rho v}{\eta} \quad (\text{II.129})$$

Liczba Re zależy więc od relacji między oporem ciśnienia i oporem tarcia wewnętrznego, co można również zinterpretować jako iloraz energii kinetycznej płynu i pracy sił tarcia wewnętrznego. Jeśli wartość Re jest duża, to praca sił tarcia jest mała w porównaniu z energią kinetyczną płynu, i wówczas występują wiry.

Praktycznie ruch laminarny występuje jedynie w prostoliniowych odcinkach gładkich rur przy małych prędkościach przepływu. W ruchu laminarnym opory przepływu są mniejsze niż w turbulentnym. Energia mechaniczna zużyta na pokonanie oporów przepływu zamienia się w energię cieplną. Największe straty ciśnienia występują przy wypływie cieczy ze zbiornika do przewodu rurowego, na samych przewodach oraz na zaworach, przesłonach, zwężkach, zmianach średnicy itp.

8.3.2. Opór przewodu [7, 16]

Przewody łączące elementy układów hydraulicznych (rys. 8.4) stanowią znaczący opór powodujący stratę ciśnienia.

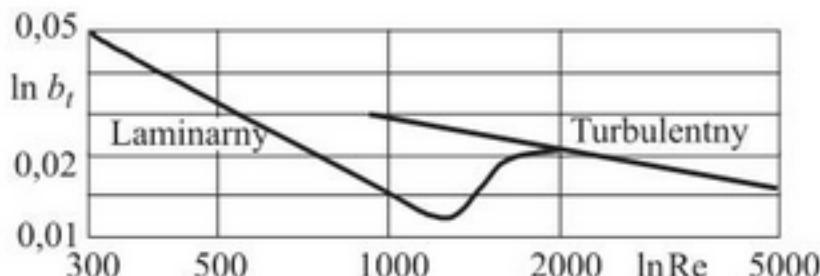


Rys. 8.4. Wielkości charakteryzujące opór przewodu rurowego

Przy przepływie cieczy o gęstości ρ przez odcinek przewodu o długości l i promieniu r stratę ciśnienia opisuje następująca zależność:

$$\Delta p(t) = b_t \frac{l}{r} \frac{\rho}{2} v^2(t) \quad (\text{II.130})$$

gdzie: $v(t)$ – prędkość przepływu, b_t – bezwymiarowy współczynnik tarcia, który zależy od charakteru przepływu (rys. 8.5).



Rys. 8.5. Zależność bezwymiarowego współczynnika tarcia b_t od charakteru [16]

* Dodatek F2.6: o lepkości wybranych cieczy i gazów.

Jeśli liczba Re jest mniejsza od 1160, ruch jest praktycznie laminarny; współczynnik tarcia wyznacza się wówczas ze wzoru¹:

$$b_t = \frac{32}{Re(v)} \quad \text{dla } Re < 1160 \quad (\text{II.131})$$

Liczba Re większa od 2300 oznacza ruch turbulentny, dla którego współczynnik tarcia określa zależność²:

$$b_t = \frac{0,133}{Re^{1/4}(v)} \quad \text{dla } Re > 2300 \quad (\text{II.132})$$

Przy przepływie turbulentnym ta sama zmiana liczby Re (np. w wyniku zmiany prędkości przepływu) wpływa na współczynnik b_t , znacznie słabiej, tak że można przyjąć, że współczynnik b_t ma wartość stałą. Właściwości współczynnika b_t pozwalałyby, by zależność (II.130) przedstawić w postaci:

– dla przepływu laminarnego: $\Delta p(t) = Rf(t)$ (II.133)

– dla przepływu turbulentnego: $\Delta p(t) = Rf^2(t)$ (II.134)

W większości przypadków w rzeczywistych układach przepływ jest turbulentny³. Straty ciśnienia na przewodach w instalacjach hydraulicznych są porównywalne ze stratami wyjściowymi w zbiornikach, jeśli długości przewodów są wielokrotnie większe niż ich średnice.

8.3.3. Oporo miedzcowe

Elementy instalacji, z wyjątkiem prostoliniowych odcinków przewodów, w tym także zawory, przesłony, zwężki i inne urządzenia ograniczające przepływ, stanowią tak zwane *opory miejscowe*. Każdy z nich powoduje spadek ciśnienia, który można wyrazić ogólnym wzorem:

$$\Delta p(t) = \zeta \frac{\rho}{2} v^2(t) \quad (\text{II.135})$$

gdzie: ρ – gęstość cieczy, $v(t)$ – prędkość przepływu, ζ – współczynnik oporu miejscowego, zależny od kształtu elementu. Ponieważ przepływ przez tego typu elementy jest turbulentny, więc można stosować wzór (II.134). Straty ciśnienia na tych elementach są na ogół większe niż straty na krótkich, prostych odcinkach przewodów rurowych. Jeśli opory miejscowe są stałe, to opór przelicza się na równoważną długość przewodu. Szczególnym przykładem oporów miejscowych są zawory prze-

¹ Wzory (II.130) i (II.131) stanowią prawo Poiseuille'a dla ruchu laminarnego.

² Wzory (II.130) i (II.132) stanowią prawo Blasiusa dla ruchu turbulentnego.

³ Na przykład w rurze o długości 0,5 m i średnicy 1,5 mm krytyczna prędkość cieczy (tj. gdy przepływ staje się turbulentny) wynosi 0,04 m/s.

8.9.3

znaczone do sterowania pracą układów hydraulicznych. Opór zaworu zależy od położenia trzpienia; zależność ta jest opisywana za pomocą charakterystyki wewnętrznej^{*}, która wynika z budowy zaworu.

8.4. Pojemność ścisliwości

8.4.1. Pojęcie ścisliwości i sprężystości

7.3.3

Ciecz rzeczywiste wykazują pewną sprężystość objętościową (nie mają sprężystości postaci jak ciała stałe[†]), tzn. ciecz, która pod ciśnieniem p zajmuje objętość V , pod ciśnieniem $p + dp$ będzie miała objętość $V - dV$. Pod wpływem działania dodatkowego ciśnienia dp objętość cieczy zmieni się o $-dV$, co opisuje prawo Hooka dotyczące sprężystości cieczy:

$$\frac{-dV}{V} = \frac{dp}{K} \quad \text{lub} \quad dp = -K \frac{dV}{V} \quad (\text{II.136})$$

F2.4

Stała K nosi nazwę **objętościowego modułu ścisliwości[‡]** (lub **modułu sprężystości objętościowej**) i jest miarą sprężystości cieczy wyrażaną w Pa. Stosuje się też odwrotność $1/K$, nazywaną **ścisliwością cieczy**. Ścisliwość cieczy jest większa niż ścisliwość ciał stałych, ale znacznie mniejsza niż ścisliwość gazów. Nawet jeśli sama ciecz nie jest ścisliwa, to może zawierać pęcherzyki gazu, co znacznie zwiększa jej ścisliwość. Ciecz doskonała jest nieścisliwa (moduł ścisliwości $K = \infty$).

Sprężystość może wykazywać nie tylko ciecz, ale także aparatura (przewody, zbiorniki). Pod wpływem wewnętrznego ciśnienia aparatura ulega rozszerzeniu:

$$dp = K_a dV \quad (\text{II.137})$$

Współczynnik K_a charakteryzuje sprężystość aparatury [jednostka Pa/m³]. Zależy on od kształtu i wielkości zbiornika oraz modułu sprężystości materiału.

Zależnie od potrzeb, tworzy się modele dla jednego z trzech wariantów: ścisliwa ciecz i sztywna aparatura, nieścisliwa ciecz i aparatura wykazująca duży stopień sprężystości oraz ścisliwa ciecz i elastyczna aparatura.

8.4.2. Pojemność ścisliwości cieczy w sztywnym zbiorniku [3, 16]

Jeśli do zamkniętego zbiornika o niezmiennej objętości V , wypełnionego całkowicie cieczą o module ścisliwości K , wprowadzi się dodatkową objętość cieczy $dV(t)$, to nastąpi wzrost ciśnienia $dp(t)$, określony wzorem:

$$dp(t) = K \frac{dV(t)}{V} \quad (\text{II.138})$$

* W p. 8.9.3: o charakterystyce wewnętrznej zaworu.

† W p. 7.3.3: o odkształcenach sprężystych ciał stałych.

‡ Dodatek F2.4: o modułach ścisliwości wybranych cieczy.

Po podstawieniu $dV(t) = f(t)dt$ zależność przyjmie postać:

$$\frac{V}{K} \frac{dp(t)}{dt} = f(t) \quad (\text{II.139})$$

gdzie współczynnik $V/K = C$ określa **pojemność ściśliwości** danego zbiornika. Analogicznie, pojemność ściśliwości przewodu rurowego o długości l i przekroju A , wypełnionego cieczą o module ściśliwości K , wynosi $C = Al/K$.

8.4.3. Pojemność elastycznej aparatury przy nieściśliwej cieczy [3, 16]

Jeśli do zamkniętego elastycznego zbiornika o objętości V i współczynniku sprężystości K_a , wypełnionego nieściśliwą cieczą, wprowadza się dodatkową objętość cieczy $dV(t)$, to powstanie dodatkowe ciśnienie $dp(t)$ i zbiornik rozszerzy się zgodnie ze wzorem:

$$dp(t) = K_a dV(t) \quad (\text{II.140})$$

Po podstawieniu $dV(t) = f(t)dt$ zależność można przedstawić w postaci:

$$\frac{1}{K_a} \frac{dp(t)}{dt} = f(t) \quad (\text{II.141})$$

gdzie współczynnik $1/K_a$ jest stałą określającą pojemnościowe własności zbiornika (przewodu).

8.4.4. Pojemność ściśliwej cieczy i elastycznej aparatury [3]

Jeśli jednocześnie następuje rozszerzanie zbiomika i sprężanie cieczy, to na podstawie zależności (II.138) i (II.140) zjawiska można opisać równaniem:

$$dp(t) = K \frac{dV(t)}{V} + K_a dV(t) \quad (\text{II.142})$$

Po kilku przekształceniach:

$$dp(t) = \left(\frac{K}{V} + K_a \right) dV(t) = \frac{K + K_a V}{V} dV(t) = \frac{K_{aw}}{V} dV(t) \quad (\text{II.143})$$

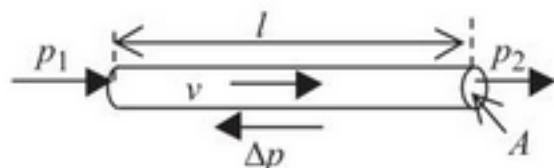
i podstawieniu $dV(t) = f(t)dt$ efekt pojemnościowy układu ściśliwa ciecz–elastyczna aparatura można opisać zależnością:

$$\frac{V}{K_{aw}} \frac{dp(t)}{dt} = f(t), \quad K_{aw} = K + K_a V \quad (\text{II.144})$$

Jest to zależność analogiczna do (II.139), z tym że w miejscu modułu ściśliwości cieczy K wprowadzono wypadkowy współczynnik K_{aw} , uwzględniający ściśliwość cieczy i odkształcenia aparatury.

8.5. Bezwładność cieczy (inertancja)

7.5 Bezwładność (inertancja) wynika z masy cieczy i ujawnia się, kiedy działająca siła wymusza przyspieszenie ruchu cieczy*. W celu określenia siły bezwładności cieczy o masie m , poruszającej się w przewodzie (rys. 8.6), zakłada się, że występuje tylko efekt bezwładnościowy (przewód poziomy, ciecz nieściśliwa).



Rys. 8.6. Wielkości opisujące bezwładność cieczy w przewodzie rurowym

Siła bezwładności jest proporcjonalna do przyspieszenia a :

$$F(t) = ma(t) \quad (\text{II.145})$$

Ponieważ siła F wynika z różnicy ciśnień Δp , a masę cieczy m można obliczyć, znając długość l , pole przekroju A i gęstość cieczy ρ , stąd:

$$\Delta p(t)A = \rho l A \frac{dv(t)}{dt} \quad (\text{II.146})$$

Po podstawieniu $Av(t) = f(t)$ zależność spadku ciśnienia od przepływu wyraża się wzorem:

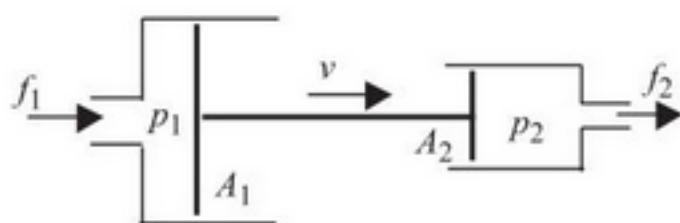
$$\Delta p(t) = \frac{\rho l}{A} \frac{df(t)}{dt} \quad (\text{II.147})$$

gdzie współczynnik $\rho l/A = M$ jest nazywany **współczynnikiem efektu bezwładnościowego**. Efekt bezwładnościowy jest szczególnie widoczny, jeśli występują zmiany przepływu substancji o dużej gęstości ρ w przewodzie o małym przekroju A .

8.6. Transformacja ciśnienia i siły

8.6.1. Przekładnia tłokowa [16]

Przekładnia tłokowa umożliwia zmianę i przeniesienie ciśnienia między obwodami hydraulicznymi sprzężonymi mechanicznie (rys. 8.7).



Rys. 8.7. Zasada działania przekładni tłokowej

* W p. 7.5: o bezwładności w układach mechanicznych.

Przepływ $f_1(t)$ oznacza, że tłok o powierzchni A_1 będzie się przesuwać z prędkością $v(t)$ zgodnie ze wzorem:

$$f_1(t) = A_1 v(t) \quad (\text{II.148})$$

Sprzężenie mechaniczne powoduje, że drugi tłok o powierzchni A_2 porusza się z taką samą prędkością; przepływ $f_2(t)$ można zatem opisać wzorem:

$$f_2(t) = A_2 v(t) \quad (\text{II.149})$$

Podstawą modelu przekładni jest zależność:

$$\frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{A_2}{A_1} \quad (\text{II.150})$$

W idealnej przekładni nie ma strat, zatem praca wykonana po obu stronach jest taka sama:

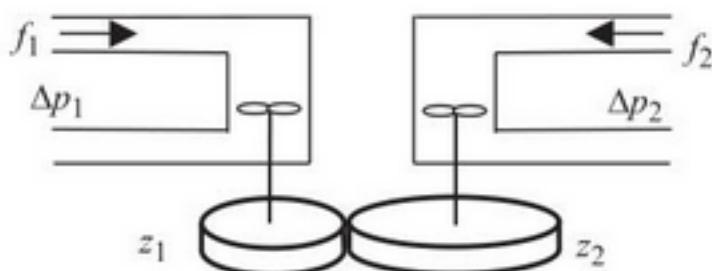
$$p_1(t)f_1(t) = p_2(t)f_2(t) \quad (\text{II.151})$$

Podstawowy związek opisujący idealną przekładnię tłokową ma więc postać:

$$\frac{p_1(t)}{p_2(t)} = \frac{A_2}{A_1} \quad (\text{II.152})$$

8.6.2. Przekładnia turbinowa [16]

Innym przykładem przekładni hydraulicznej jest podwójna turbina cieczowa (rys. 8.8). Przepływ $f_1(t)$ powoduje ruch łopatek turbiny i obrót przekładni mechanicznej z dwoma kołami o średnicy (liczbie zębów) z_1 i z_2 , która napędza łopatki drugiej turbiny i wymusza przepływ $f_2(t)$.



Rys. 8.8. Zasada działania przekładni turbinowej

Model idealnego elementu wynika z zależności:

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{z_2}{z_1} \quad (\text{II.153})$$

oraz zasady zachowania energii:

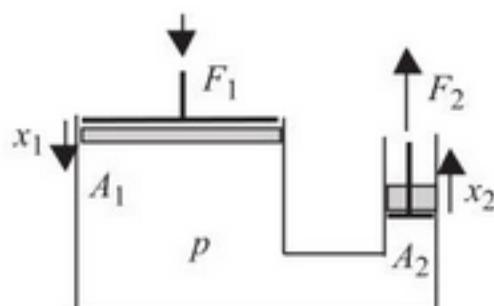
$$p_1(t)f_1(t) = p_2(t)f_2(t) \quad (\text{II.154})$$

Podstawowy związek opisujący idealną przekładnię turbinową ma więc postać:

$$\frac{p_2(t)}{p_1(t)} = \frac{z_2}{z_1} \quad (\text{II.155})$$

8.6.3. Prasa hydrauliczna

Prasa hydrauliczna jest urządzeniem, które umożliwia przeniesienie i zmianę siły za pośrednictwem układu hydraulicznego (rys. 8.9).



Rys. 8.9. Zasada działania prasy hydraulicznej

Siła $F_1(t)$ powoduje, że tłok o powierzchni A_1 przesuwa się do środka o odcinek $x_1(t)$. Po drugiej stronie tłok o powierzchni A_2 przesuwa się na zewnątrz o odcinek $x_2(t)$. Zakładając nieściśliwość cieczy, po obu stronach przesuwa się taka sama jej objętość:

$$A_1 x_1(t) = A_2 x_2(t) \quad (\text{II.156})$$

Pomijając ciężar i lepkość cieczy, praca wykonana przez siłę $F_1(t)$ jest równa pracy, jaką wykonuje siła $F_2(t)$:

$$F_1(t)x_1(t) = F_2(t)x_2(t) \quad (\text{II.157})$$

Na podstawie (II.156) i (II.157) jest więc:

$$\frac{F_2(t)}{A_2} = \frac{F_1(t)}{A_1} = p(t) \quad (\text{II.158})$$

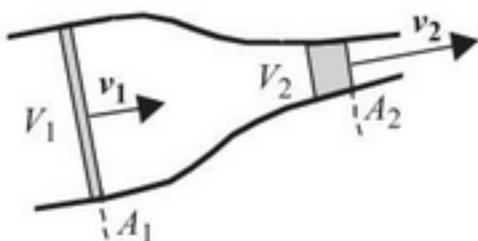
Ciśnienie $p(t)$ działające na oba tłoki jest takie samo – ma w całej objętości cieczy jednakową wartość i jest przenoszone we wszystkich kierunkach jednakowo (prawo Pascala). Zależność opisuje równowagę hydrostatyczną; można ją jednak stosować również przy niewielkich prędkościach cieczy.

8.7. Dynamika cieczy doskonałej

8.7.1. Równanie ciągłości

Dynamika cieczy doskonałej opisuje ruch cieczy nielepkiej (brak oporów przepływu) i nieściśliwej, odbywający się w obwodach hydraulicznych, przy czym uwzględnia się różne pola przekroju wzdłuż obwodu i oddziaływanie pola grawitacyjnego.

Równanie ciągłości opisuje ruch nieściśliwej cieczy w obwodzie o zmiennym przekroju (rys. 8.10).



Rys. 8.10. Ilustracja równania ciągłości

Ponieważ ciecz wypełnia całą objętość przewodu i jest nieściśliwa, więc w każdej chwili objętości $V_1(t)$ i $V_2(t)$ przepływające przez różne przekroje muszą być jednakowe, co wyrażają zależności:

$$V_1(t) = V_2(t) \quad (\text{II.159})$$

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = \frac{dV_2(t)}{dt} \quad (\text{II.160})$$

Uwzględniając odpowiednie pola przekrojów A_1 i A_2 , zależność tę można wyrazić w postaci:

$$A_1 v_1(t) = A_2 v_2(t) \quad (\text{II.161})$$

Równanie ciągłości pokazuje związek między prędkościami cieczy w różnych punktach obwodu. Z równania wynika, że w przewężeniu przewodu ciecz płynie szybciej. Zależność jednak nie wyjaśnia, skąd pochodzi siła do wytworzenia przyspieszenia.

8.7.2. Stan równowagi dynamicznej [16, 21]

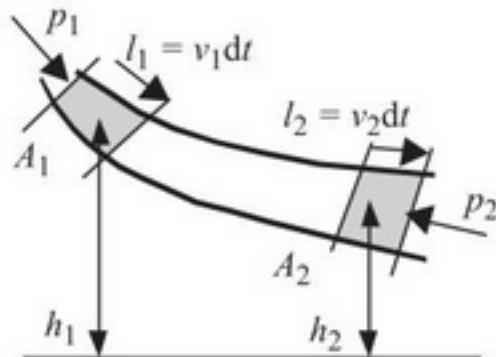
Stan równowagi dynamicznej opisuje ruch cieczy doskonałej w przewodzie o zmiennym przekroju, polożonym na różnych wysokościach (rys. 8.11).

W przewodzie każda porcja cieczy o masie m charakteryzuje się energią kinetyczną \rightarrow wynikającą z ruchu cieczy (II.96), określona wyrażeniem:

$$mv^2/2$$

i energią potencjalną \rightarrow cieczy w polu grawitacyjnym (II.122):

$$mgh$$



Rys. 8.11. Ilustracja równania Bernoulliego

\rightarrow W p. 7.5.1: o energii kinetycznej poruszającej się masy.

\rightarrow W p. 7.3.1: o energii potencjalnej w polu grawitacyjnym.

Ponieważ ciecz jest doskonała, więc można stosować zasadę zachowania energii mechanicznej: przyrost energii, jaką zyskuje porcja cieczy, przemieszczając się z miejsca o przekroju A_1 do miejsca o przekroju A_2 , jest równy pracy wykonanej przez różnicę sił działających w tych przekrojach. Przyrost energii porcji cieczy o masie $m = \rho V$ określa zależność:

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \left(\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \right) \quad (\text{II.162})$$

Pracę wykonaną przez różnicę sił w przekrojach można wyliczyć ze wzoru:

$$F_1l_1 - F_2l_2 = p_1A_1v_1dt - p_2A_2v_2dt = (p_1 - p_2)V \quad (\text{II.163})$$

Na mocy zasady zachowania energii wyrażenia (II.162) i (II.163) są równe, więc:

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \left(\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \right) = (p_1 - p_2)V \quad (\text{II.164})$$

Po uporządkowaniu:

$$p_1V + \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = p_2V + \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \quad (\text{II.165})$$

i podzieleniu stronami przez objętość V porcji cieczy otrzyma się równanie Bernoullego:

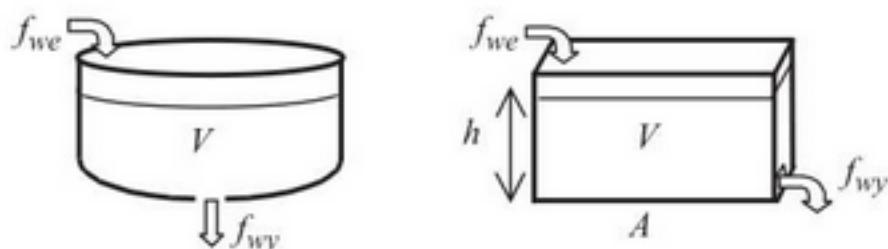
$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const} \quad (\text{II.166})$$

Jest to związek między ciśnieniem, prędkością i wysokością przepływającej cieczy, która ma pewną masę, ale jest nieściśliwa i porusza się bez oporów przepływu. Poszczególne składniki równania mają różną interpretację, ale wszystkie mają wymiar ciśnienia i stąd są nazywane: ciśnieniem statycznym (p), ciśnieniem dynamicznym ($\rho v^2/2$) i ciśnieniem podnoszenia (ρgh).

8.8. Zbiornik

8.8.1. Bilans zbiornika

Zbiorniki o różnych kształtach i sztywnej konstrukcji, przez które przepływa nieściśliwa ciecz (rys. 8.12) są typowym elementem dynamiki układów hydraulicznych.



Rys. 8.12. Przepływ cieczy przez zbiornik

Można je opisać równaniem, które przedstawia chwilowy bilans objętości cieczy wpływającej z natężeniem $f_{we}(t)$ i wypływającej z natężeniem $f_{wy}(t)$, powodujący zmianę objętości cieczy w zbiorniku $V(t)$:

$$\frac{dV(t)}{dt} = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{II.167})$$

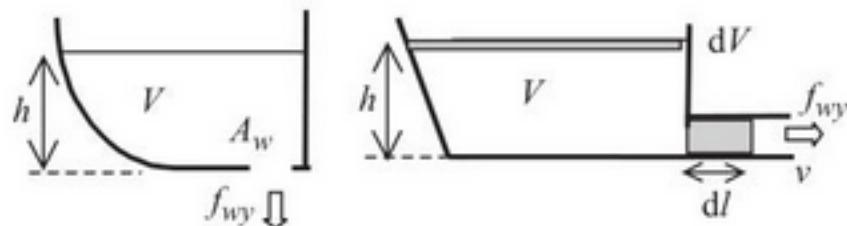
Jeśli ściany zbiornika są pionowe i prostopadłe do dna o powierzchni A , to zmiany objętości można wyrazić za pomocą zmiany wysokości napełnienia $h(t)$:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{II.168})$$

Jeśli opróżnianie zbiornika jest spowodowane działaniem pompy, to natężenie wypływu $f_{wy}(t)$ jest wymuszone i zależy od prędkości obrotowej pompy. Wówczas równania (II.167) lub (II.168) opisują w pełni dynamikę przepływu cieczy przez zbiornik z wymuszonym wypływem.

8.8.2. Swobodny wypływ

Wypływ cieczy ze zbiornika może odbywać się pod wpływem własnego ciężaru cieczy – jest to wypływ swobodny (rys. 8.13).



Rys. 8.13. Swobodny wypływ cieczy ze zbiornika

Objętość nieściśliwej cieczy wypływającej ze zbiornika przez otwór (w dnie lub przy dnie) o powierzchni A_w jest równa objętości cieczy, jaka opadnie w zbiorniku na wysokości $h(t)$:

$$dV(t) = A_w dl(t) \quad (\text{II.169})$$

Ciecz wypływająca zyskuje energię kinetyczną kosztem energii potencjalnej cieczy opadającej w zbiorniku, według wzoru Bernoullego:

$$\rho gh(t) = \frac{\rho v^2(t)}{2} \quad (\text{II.170})$$

w którym założono, że zbiornik jest otwarty i prędkość ruchu cieczy w zbiorniku jest pomijalna w stosunku do wypływającej cieczy, ponieważ pole przekroju zbiornika A jest dużo większe niż powierzchnia otworu A_w . Wzór (II.170) można przekształcić do postaci:

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)} \quad (\text{II.171})$$

i dalej, podstawiając $v(t) = dl/dt$ i w postaci $dl(t) = dV(t)/A_w$ (z zależności (II.169)), do postaci:

$$\frac{dl(t)}{dt} = \frac{dV(t)}{A_w dt} = \sqrt{2gh(t)} \quad (\text{II.172})$$

Po przekształceniu otrzyma się wzór na natężenie wypływu cieczy ze zbiornika:

$$f_{wy}(t) = \frac{dV(t)}{dt} = A_w \sqrt{2gh(t)} \quad (\text{II.173})$$

Natężenie wypływu $f_{wy}(t)$ nie zależy więc od kształtu zbiornika, a jedynie od powierzchni otworu i poziomu cieczy w zbiorniku¹. W przypadku zbiornika zamkniętego należy dodatkowo uwzględnić wpływ ciśnienia p , jakie panuje w zbiorniku nad poziomem cieczy². Do wyprowadzenia wzoru na natężenie wypływu używa się wówczas równania Bernoullego:

$$\frac{\rho v^2(t)}{2} = p + \rho gh(t) \quad (\text{II.174})$$

co prowadzi do końcowego wzoru:

$$f_{wy}(t) = \frac{dV(t)}{dt} = A_w \sqrt{2gh(t) + \frac{2p(t)}{\rho}} \quad (\text{II.175})$$

Ciśnienie statyczne w zbiorniku może przyspieszać lub opóźniać opróżnianie zbiornika.

8.9. Elementy nastawcze

8.9.1. Wprowadzenie

Jednym ze sposobów sterowania przepływem w układach hydraulicznych jest dławienie za pomocą różnego typu oporowych elementów nastawczych. Można je opisać za pomocą wyznaczonego eksperymentalnie współczynnika oporu miejscowego³.

8.3.3

Jeśli jednak założyć, że opór ten wynika jedynie ze zmiany przekroju, to odpowiednią charakterystykę elementu nastawczego można wyprowadzić na podstawie prawa Bernoullego.

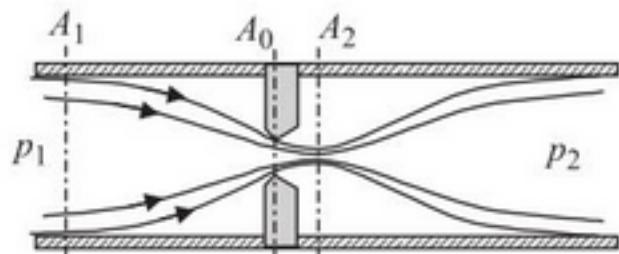
¹ Przy wypływie swobodnym przez otwór na głębokości h ciecz wypływa z taką prędkością, jaką uzyskuje ciało spadające swobodnie z wysokości h , tj. $v = \sqrt{2gh}$.

² Nad cieczą może występować poduszka gazowa, np. w wyniku wydzielania się gazu z cieczy zawartej w zbiorniku.

³ W p. 8.3.3: o oporach miejscowych.

8.9.2. Przepływ przez zwężkę

Prostym elementem nastawczym jest zwężka o określonej średnicy otworu (rys. 8.14). Charakterystycznym zjawiskiem dla przepływu przez element jest to, że ciecz ma największą prędkość za przewężeniem A_0 (w przekroju A_2).



Rys. 8.14. Przepływ cieczy przez zwężkę

Prawo Bernoullego dla poziomego rurociągu pozwala sformułować następującą równosć:

$$p_1(t) + \frac{\rho v_1^2(t)}{2} = p_2(t) + \frac{\rho v_2^2(t)}{2} \quad (\text{II.176})$$

gdzie: $p_1(t)$ i $v_1(t)$ – odpowiednio ciśnienie i prędkość cieczy przed zwężką, $p_2(t)$ i $v_2(t)$ – wartość tych wielkości za zwężką. Z kolei na podstawie równania ciągłości można opisać:

$$v_1(t) = \frac{A_2}{A_1} v_2(t) = m\mu v_2(t) \quad (\text{II.177})$$

przy czym parametry m i μ oznaczają: $m = A_0/A_1$ – stopień rozwarcia zwężki, $\mu = A_2/A_0$ – współczynnik kontrakcji. Po przekształceniu (II.176) i podstawieniu (II.177) otrzyma się:

$$v_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \mu^2}} \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}} \quad (\text{II.178})$$

gdzie $\Delta p = p_1 - p_2$ – spadek ciśnienia na zwężce. Wykorzystując ponownie równanie ciągłości:

$$v_0(t) = \frac{A_2}{A_0} v_2(t) = \mu v_2(t) \quad (\text{II.179})$$

można wyznaczyć prędkość przepływu przez przekrój A_0 :

$$v_0(t) = \frac{\mu}{\sqrt{1 - m^2 \mu^2}} \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}} \quad (\text{II.180})$$

a stąd natężenie przepływu przez zwężkę:

$$f_0(t) = A_0 v_0(t) = \frac{\mu}{\sqrt{1 - m^2 \mu^2}} A_0 \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}} = \alpha A_0 \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}} \quad (\text{II.181})$$

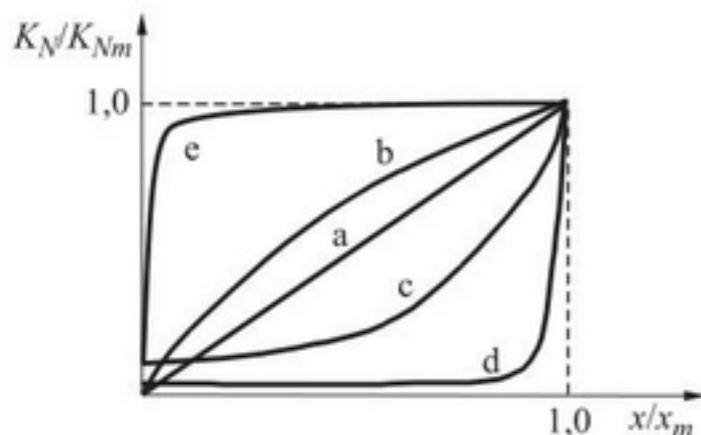
Współczynnik przepływu α – parametr wprowadzony we wzorze (II.181) – zależy od parametrów m i μ , czyli od wymiarów zwężki i warunków przepływu, które charakteryzuje również liczba Reynoldsa. Można wykazać, że przy dużej wartości Re , gdy praca sił tarcia jest mała w porównaniu z energią kinetyczną płynu, współczynnik α staje się niezależny od Re i jest to typowy przypadek występujący w praktyce.

8.9.3. Charakterystyka zaworu

Ze względu na trudności techniczne praktycznie nie stosuje się zwężek o zmiennym przekroju. Rolę elementów nastawczych pełnią zawory, klapy i zasuwy. Zależność pomiędzy natężeniem przepływu $f(t)$ i spadkiem ciśnienia $\Delta p(t)$ na zaworze (dla liczby Reynoldsa $Re > 4000$, tj. praktycznie zawsze) przedstawia się w postaci:

$$f(t) = K_N \sqrt{\frac{\Delta p(t)}{\gamma}} \quad (\text{II.182})$$

gdzie: γ – względna gęstość przepływającej cieczy (w stosunku do wody), a K_N – parametr zaworu, nazywany współczynnikiem normalnym przepływu. Wartość współczynnika K_N zależy od przesunięcia x trzpienia zaworu. Jest to tak zwana charakterystyka wewnętrzna, która wynika z konstrukcji zaworu i jest przedstawiona jako wykres (rys. 8.15) zależności wartości względnych współczynnika K_N/K_{Nm} (K_{Nm} – wartość K_N przy otwartym zaworze) od przesunięcia $x_w = x/x_m$ (x_m – maksymalne przesunięcie trzpienia przy otwartym zaworze). W tabeli 2.2 zestawiono wzory charakterystyk $K_N(x_w)$ dla typowych konstrukcji zaworów.



Rys. 8.15. Charakterystyki wewnętrzne zaworów: a) liniowego, b) pierwiastkowego, c) stałoprocentowego, d) hiperbolicznego, e) „szybko otwierającego się”

W urządzeniach automatyki najczęściej stosowane są zawory stałoprocentowe, w których dana zmiana położenia Δx powoduje jednakowy procentowy przyrost współczynnika K_N w całym zakresie przesunięć, co można wykazać na podstawie (II.185), wyznaczając czułość zaworu:

$$\frac{dK_N}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{K_{Nm}}{\alpha} \alpha^{x_w} \right) = \frac{K_{Nm}}{\alpha x_m} \ln \alpha \cdot \alpha^{x_w} = \frac{\ln \alpha}{x_m} K_N$$

Tabela 8.1. Charakterystyki $K_N(x_w)$ zaworów

Zawór	Charakterystyka $K_N(x_w)$	
Liniowy	$K_N = K_{Nm} x_w$	(II.183)
Pierwiastkowy	$K_N = K_{Nm} \sqrt{x_w}$	(II.184)
Stałoprocentowy	$K_N = K_{Nm} \alpha^{x_w - 1}$	(II.185)
Hiperboliczny	$K_N = \frac{K_{Nm}}{\alpha(1 - x_w) + x_w}$	(II.186)
Szybko otwierający się	$K_N = \frac{x_w}{x_w + \alpha} K_{Nm}$	(II.187)

a stąd:

$$\frac{1}{K_N} \Delta K_N = \frac{\ln \alpha}{x_m} \Delta x \quad (\text{II.188})$$

Elementy układów przenoszenia substancji

9.1. Charakterystyka

Modele przenoszenia substancji opisują procesy przenoszenia, gromadzenia, mieszania i rozdzielania substancji o stałej konsystencji. Mogą to być substancje jednorodne o niezmiennych właściwościach lub substancje o zmiennym składzie, gęstości itp. Ruch substancji odbywa się za pośrednictwem różnego typu transporterów (taśmociągów, przenośników itp.) albo dzięki sile grawitacji, która umożliwia opróżnianie zbiomków. Podstawowymi wielkościami stosowanymi do opisu tych układów jest natężenie przepływu substancji i stan zasobu. **Natężenie przepływu $f(t)$** określa szybkość przenoszenia substancji w danym miejscu i jest wyrażane w jednostkach objętości [m^3/s] (objętościowy strumień przepływu, oznaczany też jako \dot{V}) lub w jednostkach masy [kg/s] (masowy strumień przepływu oznaczany jako \dot{m}). W dalszej części oznaczenie $f(t)$ będzie używane w znaczeniu przepływu objętościowego. Zasób to zgromadzona substancja w określonej przestrzeni (zbiorniku, magazynie, stosie). **Stan zasobu** jest określany ilością substancji (w jednostkach objętości lub masy) i cechą tej substancji, gęstością, koncentracją wybranego składnika. Idealny zasób ma nieograniczoną wielkość.

9.2. Źródła ruchu

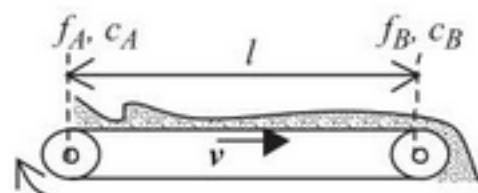
Idealne źródła wprowadzające substancje do układów można podzielić na dwa typy – źródła przepływu i źródła prędkości. Idealne źródło przepływu zapewnia dostarczanie takiej samej objętości substancji w jednostce czasu, natomiast idealne źródło prędkości gwarantuje jedynie stałą prędkość transportera niezależnie od ilości przenoszonej substancji.

9.3. Transport i opóźnienie transportowe

Transport polega na przenoszeniu substancji z jednego miejsca w inne. Przy idealnym transportowaniu porcje substancji nie podlegają żadnym zmianom (nie zachodzi przemiana substancji ani mieszanie cząsteczek).

Skończoną prędkość, z jaką substancja może być przenoszona z miejsca na miejsce, odzwierciedla opóźnienie transportowe.

Opóźnienie może dotyczyć natężenia przepływu lub zmiennej cechy substancji (rys. 9.1).



Rys. 9.1. Istota powstawania opóźnienia transportowego

W pierwszym przypadku można je opisać zależnością:

$$f_B(t) = f_A(t - T_o) \quad (\text{II.189})$$

a w drugim:

$$c_B(t) = c_A(t - T_o) \quad (\text{II.190})$$

Obie zależności zawierają parametr T_o nazywany **czasem opóźnienia transportowego**. Znając prędkość transportera v i tym samym prędkość poruszania się substancji na odcinku l między punktami AB , można wyznaczyć wartość opóźnienia T_o :

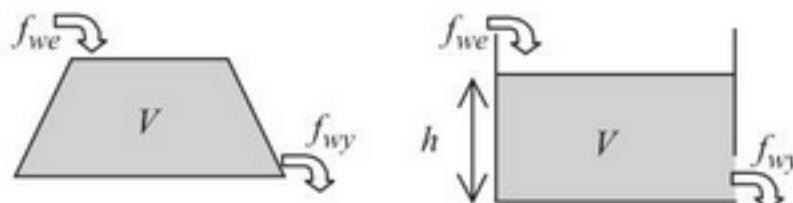
$$T_o = \frac{l}{v} \quad (\text{II.191})$$

Jeśli prędkość transportera v nie zmienia się, to opóźnienie T_o jest stałe. Jest to typowe założenie w przypadku taśmociągu.

9.4. Zasób (zbiornika, magazynu) i gromadzenie zasobu

9.4.1. Bilans wielkości zasobu [3]

Bilans wielkości zasobu pozwala opisać dynamikę przepływu substancji przez zbiornik lub magazyn (rys. 9.2).



Rys. 9.2. Bilans zasobu

W przypadku substancji jednorodnej (stały skład i gęstość) wystarczy bilansować na bieżąco objętość substancji wpływającej f_{we} i wypływającej f_{wy} ; wielkość zasobu można wtedy opisać zależnością:

$$\frac{dV(t)}{dt} = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{II.192})$$

Jeśli ściany zbiomika są pionowe i prostopadłe do powierzchni dna o polu A , to wielkość zasobu można określić na podstawie wysokości warstwy i zależność przedstawić w postaci:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{II.193})$$

Jeśli natomiast substancja wprowadzana do zbiornika ma zmienną gęstość $\rho_{we}(t)$, to średnia gęstość zasobu $\rho(t)$ też się zmienia i oprócz bilansowania objętości należy bilansować również masę substancji:

$$\frac{d(V(t)\rho(t))}{dt} = f_{we}(t)\rho_{we}(t) - f_{wy}(t)\rho_{wy}(t) \quad (\text{II.194})$$

Podobnie jest w przypadku, kiedy substancja wprowadzana do zbiornika lub magazynu ma zmienną koncentrację któregoś ze składników $C_{we}(t)$; zmienia się wówczas skład zasobu (średnia koncentracja składnika $C(t)$) i należy bilansować składniki substancji:

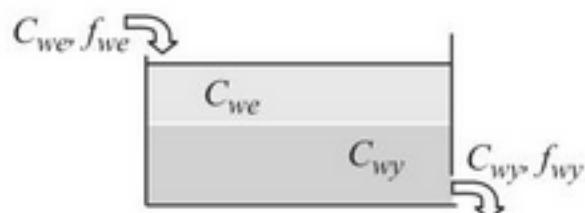
$$\frac{d(V(t)C(t))}{dt} = f_{we}(t)C_{we}(t) - f_{wy}(t)C_{wy}(t) \quad (\text{II.195})$$

Opróżnianie magazynu sypkich substancji może się odbywać grawitacyjnie – tak jak w przypadku zbiomków cieczy*. Niestety, nie ma prostej funkcji, jaka opisywałaby natężenie wypływu z substancji.

8.8.1

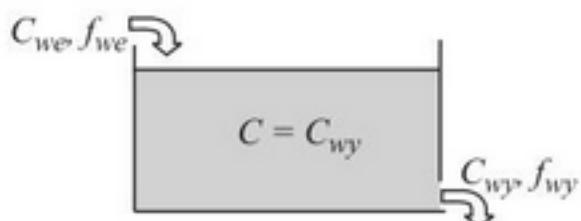
9.4.2. Cechy zasobu

Cechy zasobu wynikają ze zjawiska mieszania. Można wyróżnić dwa skrajne przypadki: 1) mieszanie nie występuje (rys. 9.3) oraz 2) mieszanie jest idealne (rys. 9.4).



Rys. 9.3. Stan zasobu bez mieszania

* W p. 8.8.1: o bilansie zbiorników cieczy.



Rys. 9.4. Stan zasobu z idealnym mieszaniem

W pierwszym przypadku zakłada się, że składnik o właściwości $C_{we}(t)$ wprowadzany do zbiornika jest rozprowadzany równomiernie na powierzchni. Wobec braku mieszania i dyfuzji tworzy się więc coraz grubsza warstwa tego składnika. Ze zbiornika wypływa składnik, który jest na dnie. Granica między składnikami stopniowo się obniża. Element ma charakter opóźnienia transportowego (II.190).

W drugim przypadku składnik wprowadzany do zbiornika $C_{we}(t)$ natychmiast jest mieszany z innymi składnikami i tworzy mieszaninę o właściwości $C(t)$. Taka też mieszanina wypływa ze zbiornika. W tej sytuacji równania (II.194) i (II.195) przyjmują odpowiednio postać:

$$\frac{d(V(t)\rho(t))}{dt} = f_{we}(t)\rho_{we}(t) - f_{wy}(t)\rho(t) \quad (\text{II.196})$$

$$\frac{d(V(t)C(t))}{dt} = f_{we}(t)C_{we}(t) - f_{wy}(t)C(t) \quad (\text{II.197})$$

Elementy układów termokinetycznych

10.1. Charakterystyka

Modele układów termokinetycznych zawierają opis zjawisk dynamicznych związanych z różnymi formami przepływu ciepła. Ciepło, podobnie jak praca, jest formą przekazywania energii, z tym że wykonanie pracy dotyczy energii ruchu uporządkowanego¹, a przepływ ciepła – wymiany energii między cząsteczkami poruszającymi się chaotycznie. W wyniku przekazania energii w postaci ciepła następuje wzrost ruchu chaotycznego cząsteczek ciała o niższej temperaturze, a tym samym wzrost jego energii wewnętrznej². Przepływ ciepła trwa dopóty, dopóki temperatura ciał układu się nie wyrówna.

Ciepło występuje podczas przemiany innych rodzajów energii, przede wszystkim mechanicznej, elektrycznej i chemicznej*. Często jest to bezużyteczne rozpraszanie energii układu, a więc zjawisko niepożądane – tarcie w ruchu mechanicznym, opór w układach elektrycznych, opór hydrauliczny. Ciepło jest jednak także pożądanym czynnikiem wykorzystywany do realizacji określonych celów technologicznych.

Podstawowymi wielkościami w układach temokinetycznych jest strumień ciepła i temperatura. **Strumień ciepła** $q(t)$ (natężenie przepływu ciepła³) to szybkość przekazywania energii w postaci ciepła $Q(t)$, wyrażany w watach [W]:

$$q(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (\text{II.198})$$

Temperatura $T(t)$ jest własnością, która charakteryzuje energię ciała i decyduje o przekazywaniu między ciałami energii w formie ciepła. Jednostką temperatury

¹ Z definicji, praca to iloczyn siły i przesunięcia.

² Potoczne określenie „energia cieplna” w zasadzie jest niepoprawne, choć można by je uznać za skrót myślowy – energia przekazana w postaci ciepła.

* W rozdz. 11: o związku między ciepłem, pracą i energią (o układach termodynamicznych).

³ Strumień ciepła jest również używany w znaczeniu mocy cieplnej przenikającej przez daną powierzchnię [W/m²].

w układzie SI jest stopień Kelwina (kelwin) [K], ale w praktyce inżynierskiej częściej używa się stopni Celsjusza [°C]. Wybór jednostki praktycznie nie ma wpływu na postać modeli, ponieważ zazwyczaj występuje w nich różnica temperatury:

$$[\Delta T] = 1 \text{ K} = 1^\circ\text{C}$$

Zastosowanie do opisu procesów termokinetycznych modeli o parametrach skupionych jest znacznym przybliżeniem, ponieważ energia jest przekazywana ze stosunkowo małą prędkością (w porównaniu na przykład z prędkością procesów elektromagnetycznych). Zazwyczaj celem modelowania takich układów jest określenie rozkładu temperatury w ciele w przestrzeni jedno-, dwu- lub trójwymiarowej. Modele przybliżone umożliwiają prosty opis obiektów za pomocą uśrednionych wartości.

10.2. Przenoszenie energii w postaci ciepła

10.2.1. Mechanizmy przenoszenia ciepła

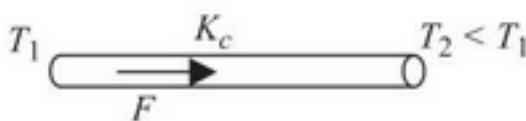
W przyrodzie znane są trzy mechanizmy przenoszenia energii w postaci ciepła: przewodzenie, konwekcja i promieniowanie, przy czym w każdym typie przepływu ciepła występuje inny rodzaj oporów cieplnych. Różne mechanizmy przepływu ciepła występują w zasadzie łącznie, ale w podstawowych elementach układów cieplnych można wyróżnić zjawiska dominujące.

10.2.2. Przewodzenie (konduktancja) [3, 6]

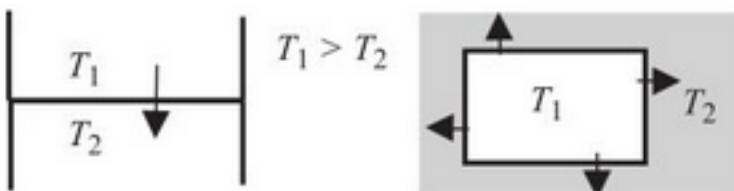
Przewodzenie jest procesem przepływu ciepła od miejsca o wyższej temperaturze do miejsca o niższej temperaturze w obrębie jednego ciała (rys. 10.1) lub między stykającymi się ze sobą ciałami o różnej temperaturze (rys. 10.2). Zjawisko polega na przekazywaniu energii ruchu bezwładnego między sąsiednimi grupami cząsteczek i nie jest związane z makroskopowym przemieszczaniem się cząsteczek. Przewodzenie ciepła jest charakterystyczne przede wszystkim dla ciał stałych, choć występuje też w cieczach i gazach.

Przekazywany strumień ciepła $q(t)$ jest proporcjonalny do różnicy temperatury $\Delta T(t)$ między punktami przewodzenia:

$$q(t) = K_c \Delta T(t) \quad (\text{II.199})$$



Rys. 10.1. Przewodzenie ciepła poprzez ciało



Rys. 10.2. Przewodzenie ciepła poprzez styk ciał

Współczynnik proporcjonalności K_c jest nazywany **przewodnością cieplną** elementu (**współczynnikiem przenikania**); wyraża się go w W/K. Jeśli ciepło jest przekazywane przez przewód o stałym przekroju A [m²] i stałej długości l [m] (lub przegrodę o powierzchni A i grubości l), przewodność K_c można wyznaczyć ze wzoru:

$$K_c = \frac{\lambda A}{l} \quad (\text{II.200})$$

gdzie λ [W/(K·m)] oznacza przewodność cieplną właściwą materialu*. Przewodność większości materiałów jest funkcją temperatury, przy czym przewodność czystych metali maleje wraz ze wzrostem temperatury, większości stopów – rośnie, cieczy – na ogół wzrasta, a gazów – maleje. Z kolei przewodność materiałów porowatych (np. termoizolacyjnych, budowlanych) wzrasta z temperaturą, co tłumaczy się zwiększonym udziałem zjawisk konwekcji i promieniowania w ogólnej wymianie ciepła. Istnieją też materiały anizotropowe, w których przewodność cieplna zależy od kierunku przepływu ciepła.

F2.9

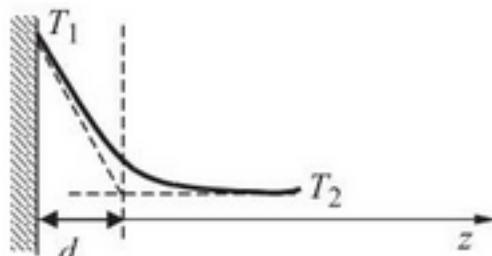
Jeśli przewodzenie ciepła zachodzi między stykającymi się ciałami stałymi, ciałem stałym i płynem lub ciałem stałym i gazem, przewodność można wyrazić wzorem:

$$K_c = k_p A \quad (\text{II.201})$$

gdzie: A – pole powierzchni styku [m²], k_p [W/(K·m²)] – współczynnik nazywany **przewodnością warstwy (współczynnikiem warstwy)**. W przypadku ciała stałego i płynu współczynnik k_p jest funkcją prędkości tych ciał względem siebie. Zmiany współczynnika warstwy wynikają z profilu temperatury w cienkiej warstwie cieczy przylegającej do ściany, w której następuje wyrównanie temperatury od T_1 do T_2 (rys. 10.3). Jeśli założyć, że gradient temperatury jest liniowy, to przekazywanie ciepła na styku można opisać następującą zależnością:

$$q(t) = \lambda A \frac{T_1(t) - T_2(t)}{d} \quad (\text{II.202})$$

gdzie λ jest przewodnością cieplną płynu.



Rys. 10.3. Profil temperatury w pobliżu przegrody

Zastosowanie stałego współczynnika warstwy ($k_p = \lambda/d$) jest aproksymacją rzeczywistego procesu o parametrach rozłożonych. Problem w tym, że grubość warstwy d zależy od kształtu przegrody i różnicy temperatury oraz że zmienia się zazwyczaj w zależności od warunków przepływu cieczy (gazu) w pobliżu (np. aktywne chłodzenie, które przyspiesza naturalne stygnięcie).

* Dodatek F2.9: o przewodności cieplnej wybranych materiałów.

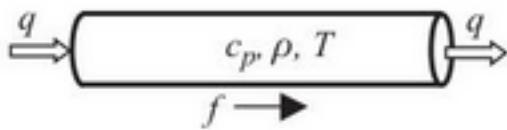
10.2.3. Konwekcja (unoszenie) [3, 6]

Konwekcja polega na unoszeniu się cząsteczek o większej energii i na mieszaniu się ich z cząsteczkami o innej – mniejszej energii. Cząsteczki (lub małe objętości substancji) mogą, ale nie muszą przekazywać energię sąsiednim cząsteczkom. Ten sposób przenoszenia ciepła jest charakterystyczny dla cieczy i gazów, w których cząsteczki mają tak dużą swobodę ruchu, że podlegają ruchom makroskopowym. Ruch ciepła odbywa się poprzez międzycząsteczkową wymianę energii oraz na skutek przemieszczania się cząsteczek o różnej gęstości (konwekcja swobodna) i wymuszenia ruchu cząsteczek przez zewnętrzne siły, np. pompę, wentylator (konwekcja wymuszona). Moc przekazywanego ciepła można opisać wzorem:

$$q(t) = c_p \rho f(t) T(t) \quad (\text{II.203})$$

gdzie: $f(t)$ – objętościowe natężenie przepływu nośnika [m^3/s], $T(t)$ – temperatura nośnika [K], c_p – ciepło właściwe [$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$], a ρ – gęstość nośnika [kg/m^3].

Typowym przykładem zastosowania zjawiska konwekcji w technice jest transport energii cieplnej za pośrednictwem nośnika w postaci cieczy płynącej w przewodzie rurowym (rys. 10.4).



Rys. 10.4. Transport ciepła przez ciecz

W tym przypadku można zastosować wzór (II.203), jeśli nie następuje zmiana temperatury nośnika, to znaczy przy doskonalej izolacji cieplnej przewodu (brak wymiany ciepła z otoczeniem, brak przewodzenia przez obudowę).

Zjawisko konwekcji występuje także w przypadku przejmowania ciepła z ciała przez opływający je gaz lub ciecz. Proces można opisać wzorem (II.199) ze współczynnikiem przewodności:

$$K_c = \kappa A \quad (\text{II.204})$$

gdzie: A – powierzchnia przejmowania ciepła [m^2], κ – współczynnik konwekcji [$\text{W}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$]. W rzeczywistości konwekcja jest procesem złożonym i silnie nielinijnym, a jednocześnie z konwekcją może występować także przewodzenie ciepła.

10.2.4. Promieniowanie (radiacja) [3, 6]

Promieniowanie jest przepływem ciepła odbywającym się za pośrednictwem fal elektromagnetycznych, czyli promieniowania świetlnego z zakresu podczerwieni, emitowanego z powierzchni gorących ciał¹. Przekazywanie energii w ten sposób

¹ Każde ciało o temperaturze bezwzględnej powyżej 0 K jest źródłem promieniowania cieplnego.

nie wymaga żadnego ośrodka materialnego¹. Proces opisuje prawo Stefana-Boltzmana:

$$q(t) = \sigma A \varepsilon \Delta T^4(t) \quad (\text{II.205})$$

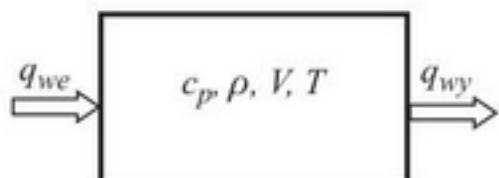
gdzie: σ – stała Stefana-Boltzmana, ε – emisyjność powierzchni A (ε przyjmuje wartości z zakresu 0–1).

10.3. Gromadzenie energii dostarczonej w postaci ciepła

Ciała stałe, ciecze i gazy mogą gromadzić energię dostarczoną w postaci ciepła $Q(t)$, co odpowiada zwiększeniu temperatury ciała o $T(t)$:

$$Q(t) = c_p m T(t) = c_p \rho V T(t) = C_v T(t) \quad (\text{II.206})$$

Współczynnik proporcjonalności C_v [J/K] jest nazywany **pojemnością cieplną** ciała. Zależy on od ciepła właściwego c_p [J/(kg·K)] i masy m [kg], a zatem gęstości ρ [kg/m³] substancji oraz objętości ciała V [m³] (rys. 10.5).



Rys. 10.5. Bilans cieplny ciała

Do opisu dynamiki przepływu ciepła przez ciało stosuje się bilans doprowadzanych i odprowadzanych strumieni ciepła, który wyznacza zmianę w czasie ilości ciepła zgromadzonego w ciele:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = C_v \frac{dT(t)}{dt} = \sum q(t) \quad (\text{II.207})$$

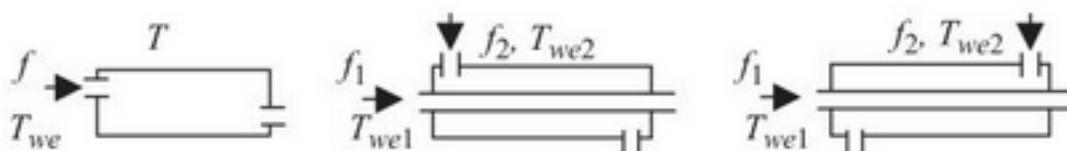
W bilansie należy uwzględnić wszystkie sposoby dostarczania i odbierania energii cieplnej (przewodzenie, unoszenie, promieniowanie).

10.4. Wymiennik ciepła

Typowym elementem obiektów cieplnych są wymienniki ciepła, w których następuje wymiana ciepła między przepływającym nośnikiem ciepła i otoczeniem lub między dwoma niezależnymi strumieniami nośnika (rys. 10.6). Konstrukcja wymiennika zależy od przeznaczenia i założonego kierunku przekazywania ciepła.

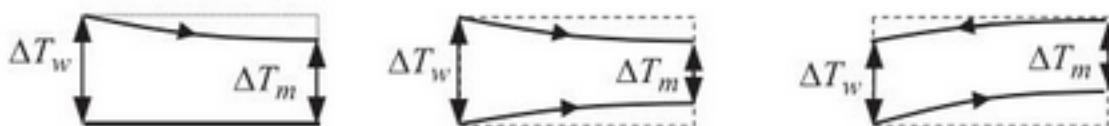
¹ Dzięki promieniowaniu jest przekazywana energia np. ze Słońca na Ziemię poprzez próżnię.

→ Dodatek F2.8: o cieple właściwym wybranych materiałów.



Rys. 10.6. Schemat wymiany ciepła w wymiennikach: a) grzejnik, b) wymiennik współprądowy, c) wymiennik przeciwprądowy

Ponieważ wymienniki ciepła buduje się z materiałów o wysokim przewodniczeniu cieplnym, więc w prostych modelach zaniedbuje się akumulację ciepła w przegrodach wymienników. Najpoważniejszym problemem przy aproksymacji modelu wymiennika za pomocą układu o parametrach skupionych jest poprzeczny kierunek wymiany ciepła, który oznacza, że różnica temperatury cieczy wzduż przegrody wymiennika jest zmieniona (rys. 10.7).



Rys. 10.7. Wykresy zmiany temperatury wzduż przegrody wymiennika: a) grzejnik, b) wymiennik współprądowy, c) wymiennik przeciwprądowy [31]

Całkowity przepływ ciepła przez przegrodę można opisać wzorem:

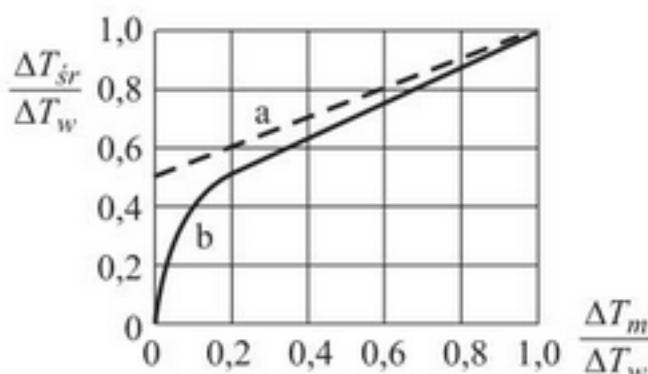
$$q(t) = k_p A \Delta T_{sr}(t) \quad (\text{II.208})$$

gdzie $\Delta T_{sr}(t)$ – średnia różnica temperatury po obu stronach przegrody. Przy projektowaniu instalacji wartość różnicy ΔT_{sr} wyznacza się jako średnią logarytmiczną największej ΔT_w i najmniejszej ΔT_m różnicy temperatury w wymienniku:

$$\Delta T_{sr}(t) = \frac{\Delta T_w(t) - \Delta T_m(t)}{\ln \frac{\Delta T_w(t)}{\Delta T_m(t)}} \quad (\text{II.209})$$

Jeśli wartości największej i najmniejszej różnicy temperatury są zbliżone, to średnią różnicę temperatury ΔT_{sr} można wyznaczyć jako średnią arytmetyczną (rys. 10.8).

Ponieważ przepływ ciepła przez przegrody wymiennika odbywa się głównie metodą przewodnictwa, więc współczynnik przewodności warstwy k_p zależy od różnicy temperatury i natężenia przepływu strumieni nośnika po obu stronach wymiennika.

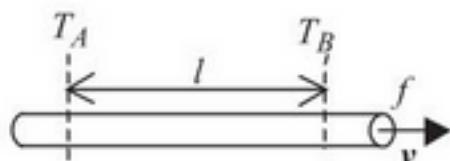


Rys. 10.8. Średnia arytmetyczna (a) i średnia logarytmiczna (b) największej i najmniejszej temperatury w wymienniku [31]

10.5. Opóźnienie transportowe w układach termokinetycznych

Opóźnienie transportowe występuje w przypadku przenoszenia energii za pośrednictwem nośnika ciepła i odzwierciedla skończoną prędkość, z jaką nośnik może być przenoszony z miejsca na miejsce^{*}. Jeśli nośnikiem jest nieściśliwa ciecz, opóźnienie dotyczy zmiennej cechy substancji, jaką jest temperatura (rys. 10.9).

9.3



Rys. 10.9. Ilustracja powstawania opóźnienia transportowego

Zjawisko można opisać jako przesunięcie w czasie:

$$T_B(t) = T_A(t - T_o) \quad (\text{II.210})$$

Parametr T_o jest nazywany **czasem opóźnienia transportowego** i można go wyznaczyć, znając prędkość $v(t)$ poruszania się substancji na odcinku l między punktami AB :

$$t_0(f) = \frac{l}{v(f)} \quad (\text{II.211})$$

Jeśli przepływ nośnika $f(t)$ jest jednostajny, to opóźnienie T_o jest stałe. Jeśli jednak natężenie przepływu się zmienia, to opóźnienie T_o też jest zmienne.

10.6. Wpływ temperatury na parametry układu

Temperatura ma wpływ na większość parametrów opisywanych elementów. W konstrukcji modeli obiektów dla automatyki zjawiska te są często uwzględniane jedynie w ten sposób, że przyjmuje się wartości współczynników właściwe dla danej temperatury pracy układu (oczywiście oprócz przypadku, kiedy model dotyczy np. czujnika temperatury). Jeśli jednak model elementu jest wykorzystywany w dużym zakresie temperatury, to (zwłaszcza w symulacji) najwygodniej jest skorzystać z aproksymacji opisu zjawiska za pomocą następujących wielomianów:

$$x = x_0 + \alpha_1 \Delta T + \alpha_2 \Delta T^2 + \dots \quad (\text{II.212})$$

lub

$$x = x_0 (1 + \alpha_1 \Delta T + \alpha_2 \Delta T^2 + \dots) \quad (\text{II.213})$$

gdzie x_0 – wartość parametru w określonej temperaturze, np. 0°C , 20°C . Im wyższy stopień wielomianu, tym dokładniejsze odwzorowanie wpływu temperatury. Zazwyczaj w obliczeniach technicznych wystarcza przybliżenie liniowe, a wartości współczynników α_1 lub α_2 dla różnych parametrów można znaleźć w tablicach ma-

* W p. 9.3: o opóźnieniu w układach przenoszenia substancji.

F2

tematyczno-fizycznych czy poradnikach[•]. W taki sposób był uwzględniany na przykład wpływ temperatury na rezystancję przewodników (II.10).

Spośród różnych przykładów wpływu temperatury na wartości parametrów warto wyróżnić zjawisko rozszerzalności cieplnej. W przypadku ciał stałych własności substancji charakteryzuje wydłużenie liniowe, które jest praktycznie liniową funkcją przyrostu temperatury ΔT :

$$l = l_0(1 + \alpha\Delta T) \quad (\text{II.214})$$

Współczynnik rozszerzalności liniowej α w niewielkim stopniu zależy od temperatury¹. Jeśli wydłużenie termiczne ciała zostanie zahamowane przez ciśnienie mechaniczne, to wewnątrz ciała powstają naprężenia termiczne². Wartość naprężenia można wyznaczyć przez porównanie przyrostu długości Δl określonego wzorem (II.214) i prawem Hooke'a (II.84):

$$\Delta l = l_0\alpha\Delta T = \frac{pl_0}{E} \quad (\text{II.215})$$

Stąd otrzymujemy wartość ciśnienia p , które zablokuje wydłużenie ciała przy wzroście temperatury o ΔT :

$$p = E\alpha\Delta T \quad (\text{II.216})$$

Na podstawie współczynnika rozszerzalności liniowej można obliczyć rozszerzalność powierzchniową:

$$l^2 = l_0^2(1 + \alpha\Delta T)^2 \approx l_0^2(1 + 2\alpha\Delta T) = l_0^2(1 + \gamma\Delta T) \quad (\text{II.217})$$

i rozszerzalność objętościową:

$$l^3 = l_0^3(1 + \alpha\Delta T)^3 \approx l_0^3(1 + 3\alpha\Delta T) = l_0^3(1 + \beta\Delta T) \quad (\text{II.218})$$

Przybliżenia zastosowane w powyższych wzorach opierają się na założeniu, że $\alpha \ll 1$. Jeśli rozszerzalność ciał stałych jest uwzględniana w modelach obiektów, to zwykle dotyczy to zmiany ich wymiarów. Należy zwrócić uwagę, że otwory w ciałach rozszerzają się w tym samym stopniu, co otaczający materiał.

Ciecze zazwyczaj rozszerzają się pod wpływem wzrostu temperatury. Wyjątkiem jest woda, która się rozszerza w temperaturze wyższej od 4°C , lecz w zakresie $0\text{--}4^\circ\text{C}$ się kurczy. Zjawisko rozszerzalności cieczy jest włączane do opisu elementów najczęściej w postaci zmiany gęstości aproksymowanej wielomianem (II.212). W zasadzie przy uwzględnianiu rozszerzalności cieczy należy pamiętać również o rozszerzalności naczynia. Dlatego wprowadza się pojęcie rozszerzalności cieczy względem naczynia, które można opisać jako różnicę zmiany objętości cieczy V_c i naczynia V_n :

$$V_c - V_n = V_0(1 + \beta_c\Delta T) - V_0(1 + \beta_n\Delta T) = V_0(\beta_c - \beta_n)\Delta T \quad (\text{II.219})$$

gdzie β_c i β_n to współczynniki objętościowej rozszerzalności, odpowiednio, cieczy i naczynia.

[•] Dodatek F2: wybrane wielomiany aproksymacyjne dla wody.

¹ W tablicach podaje się średnią wartość α w określonym zakresie temperatury.

² Zjawisko wykorzystywane w bimetalowych czujnikach temperatury.

Elementy układów termodynamicznych

11.1. Charakterystyka

Przedmiotem termodynamiki są zależności ilościowe między energią, pracą i ciepłem. **Calkowita energia ciała** znajdującego się w zewnętrznym polu sił obejmuje energię kinetyczną E_k , potencjalną E_p i wewnętrzną U :

$$E = E_k + E_p + U \quad (\text{II.220})$$

Energia kinetyczna i energia potencjalna dotyczą ciała jako całości, a ich wartości określa się względem przyjętego układu odniesienia. Energia внутренняя zależy od rodzaju ruchu i wzajemnego oddziaływanego cząsteczek tworzących ciało, a o jej wartości również decyduje wybór poziomu odniesienia¹. Jednak w termodynamice nie mają znaczenia bezwzględne wartości energii, a jedynie zmiana energii внутренней dU . **Pierwsza zasada termodynamiki** stwierdza, że przyrost energii внутренnej dU jest równy sumie pracy dW i ciepła dQ , które zostały pobrane przez układ:

$$dU = dW + dQ \quad (\text{II.221})$$

Energia внутренняя jest jednoznaczna funkcją stanu układu, natomiast praca i ciepło są różnymi formami przekazywania energii i występują tylko w czasie trwania aktu przekazywania². Terminy te oznaczają również ilość energii przeniesionej w postaci pracy albo ciepła. Praca wykonywana przez siły zewnętrzne i ciepło dostarczane do układu są dodatnie. Praca, jaką układ wykonuje, i ciepło, jakie oddaje są ujemne.

Temodynamiczny opis zjawisk ma podstawowe znaczenie w odniesieniu do wszelkiego rodzaju obiektów, w których zachodzą procesy wymiany energii, pracy i ciepła. W każdym ruchu, któremu towarzyszy tarcie, następuje zamiana energii mechanicznej w ciepło. Działanie różnego typu maszyn cieplnych (np. silników spalinowych) polega na zamianie części ciepła na energię mechaniczną. W kolej-

¹ Zazwyczaj poziom odniesienia przyjmuje się taki, że dla $T=0$ jest $U=0$.

² Po zakończeniu procesu nie ma ani pracy, ani ciepła – przechodzą w energię внутреннюю.

nych podrozdziałach zostanie natomiast przedstawiony termodynamiczny opis elementów, w których zachodzi sprężanie i rozprężanie gazu, co występuje między innymi w układach pneumatycznych.

11.2. Opis stanu gazu

11.2.1. Równanie stanu [16]

Stan gazu jest określony przez podanie trzech parametrów: temperatury, objętości i ciśnienia. Wielkości te są związane ze sobą tzw. **równaniem stanu (równanie Clapeyrona)**, które dla jednego kilomola dowolnego gazu ma postać:

$$p(t)V(t) = RT(t) \quad (\text{II.222})$$

a dla dowolnej masy gazu:

$$p(t)V(t) = \frac{m(t)}{M} RT(t) \quad (\text{II.223})$$

gdzie: $p(t)$ – ciśnienie, $V(t)$ – objętość, $T(t)$ – temperatura, $m(t)$ – masa gazu, M – masa cząsteczkowa gazu i R – uniwersalna stała gazowa¹. Równanie stanu jest spełnione ściśle tylko dla gazu doskonałego, to znaczy takiego, w którym cząsteczki mają zerową objętość, a ich siły wzajemnego przyciągania się znoszą. W prostych modelach stosuje się ten opis także w odniesieniu do gazów rzeczywistych². Na podstawie (II.223) możliwe jest wyznaczenie gęstości gazu w dowolnych warunkach ciśnienia i temperatury:

$$\rho(t) = \frac{m(t)}{V(t)} = \frac{Mp(t)}{RT(t)} \quad (\text{II.224})$$

Można także dla określonej masy gazu wyznaczyć jedną z wielkości p , V , T , jeśli znane są dwie pozostałe.

Równanie stanu jest wykorzystywane również w molekulamo-kinetycznej teorii gazów, na podstawie której wyprowadza się wzór na energię wewnętrzną gazu. W przypadku gazu doskonałego jest ona równa sumie energii kinetycznej ruchu cieplnego wszystkich cząsteczek. Dla danej ilości gazu jest więc wyłącznie funkcją temperatury i nie zależy od ciśnienia oraz objętości. Energia wewnętrzna jednego kilomola gazu doskonałego wynosi:

$$U(t) = f \frac{RT(t)}{2} \quad (\text{II.225})$$

gdzie: f – liczba stopni swobody; dla cząsteczek jednoatomowych $f=3$, dla dwuatomowych $f=5$, a dla pozostałych $f=6$. Ilość ciepła, jaką należy przekazać, aby podnieść temperaturę gazu o ΔT zależy od tego, czy podczas ogrzewania zmienia się jego objętość, tzn. czy jest wykonywana praca. Przy zachowaniu stałej objętości

¹ $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ($R = p_0 V_0 / T_0$, gdzie $p_0 = 1013 \text{ hPa}$, $T_0 = 0^\circ\text{C}$, $V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$).

² Stan gazu rzeczywistego opisuje dokładnie równanie van der Waalsa.

$(dW = 0)$ dostarczone ciepło w całości zamienia się w energię wewnętrzną, więc wzrost temperatury o ΔT wymaga ciepła w ilości:

$$dU = dQ_v = c_v m \Delta T \quad (\text{II.226})$$

gdzie: m – masa gazu, c_v – ciepło właściwe przy stałej objętości. Ciepło potrzebne do uzyskania takiego samego wzrostu temperatury przy zachowaniu stałego ciśnienia wynosi:

$$dQ_p = c_p m \Delta T \quad (\text{II.227})$$

gdzie c_p – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu. Stosunek c_p/c_v wynosi:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f} \quad (\text{II.228})$$

Jest więc wartością charakterystyczną dla danego gazu.

11.2.2. Przemiana izotermiczna [16]

Proces sprężania i rozprężania gazu zachodzący w stałej temperaturze nazywa się przemianą izotermiczną. Stała temperatura oznacza, że nie zmienia się energia wewnętrzna gazu ($dU = 0$), więc na podstawie I zasady termodynamiki:

$$dQ(t) = -dW(t) \quad (\text{II.229})$$

To znaczy, że ciepło pobrane przez gaz ($dQ > 0$) zamienia się na pracę przy rozprężaniu gazu:

$$-dW(t) = p(t)dV(t) > 0 \quad (\text{II.230})$$

Zależność między objętością $V(t)$ i ciśnieniem $p(t)$ określonej masy gazu przy stałej temperaturze opisuje prawo Boyle'a-Marriotte'a:

$$p(t)V(t) = \text{const} \quad (\text{II.231})$$

Równanie przemiany izotermicznej stosuje się przy rozpatrywaniu „zwyczajnych” sytuacji, to znaczy kiedy panują niskie ciśnienia, gdy sprężanie i rozprężanie zachodzi na tyle wolno, że można przyjąć stałość temperatury.

11.2.3. Przemiana adiabatyczna [16]

Przemiana adiabatyczna zachodzi wówczas, gdy nie następuje wymiana ciepła z otoczeniem, na przykład kiedy układ jest doskonale izolowany termicznie. Ponieważ $dQ = 0$, więc I zasada termodynamiki dla tego procesu ma postać:

$$dU(t) = dW(t) \quad (\text{II.232})$$

Zależność między parametrami gazu w procesie adiabatycznym opisuje prawo Poissona, które można przedstawić w następującej formie:

$$V^{\kappa-1}(t)T(t) = \text{const} \quad (\text{II.233})$$

lub po pomnożeniu stronami przez równanie stanu gazu (II.222) w postaci $p(t)V(t)/T(t) = R$, jako:

$$p(t)V^\kappa(t) = \text{const} \quad (\text{II.234})$$

Stosowana jest też trzecia postać równania Poissona, którą otrzymuje się przez podniesienie równania stanu (II.222) do potęgi κ i podzieleniu przez (II.234):

$$\frac{p^{\kappa-1}(t)}{T^\kappa(t)} = \text{const} \quad (\text{II.235})$$

W praktyce przyjmuje się, że przemiana adiabatyczna zachodzi wówczas, gdy sprężanie i rozprężanie jest na tyle szybkie, że nie następuje wymiana ciepła z otoczeniem (np. gdy w aparaturze powstają fale sprężania o dużej prędkości rozchodzenia).

11.3. Mechanika gazów

11.3.1. Wprowadzenie

Gazy, podobnie jak cieczy, nie wykazują sprężystości postaci, a jedynie sprężystość objętościową, przybierając więc kształt naczynia, w którym się znajdują, przy czym gaz wypełnia zawsze całą objętość naczynia. Dynamikę ruchu gazów można opisać tymi samymi wielkościami co dynamikę ruchu cieczy, z tym że poszczególne zjawiska mają inne proporcje. W gazach opór czynny i bezwładność¹ mają mniejsze znaczenie niż w cieczach, ale zdecydowanie większy jest efekt sprężystości. Ponadto w gazach oprócz dynamiki ruchu zwykle trzeba uwzględnić zjawiska termodynamiczne, jakie zachodzą przy sprężaniu i rozprężaniu gazów.

11.3.2. Opór czynny [16]

 Opór przepływu jest efektem lepkości gazów i może być opisany podobnie jak dla cieczy². Mała lepkość gazów powoduje, że ich przepływ jest zawsze turbulentny. Większe znaczenie ma wpływ różnych parametrów na współczynnik lepkości gazu – głównie wpływ temperatury i ciśnienia. Wzrost temperatury zmniejsza lepkość gazu, natomiast wzrost ciśnienia zwiększa lepkość, ale tylko wtedy, kiedy ciśnienia są małe (w większych ciśnieniach nie ma już wpływu).

11.3.3. Pojemność ścisliwości [3, 16]

 Pojemność ścisliwości występuje przy sprężaniu/rozprężaniu gazów albo odkształcaniu aparatury pod wpływem ciśnienia. Zagadnienia związane ze sprężystością aparatury są takie same jak w przypadku cieczy³. Przy opisie po-

¹ Gęstość gazów jest około 10^3 razy mniejsza niż gęstość cieczy. Podobnie lepkość gazów.

² W p. 8.3.2: o oporze hydraulicznym.

³ W p. 8.4.3: o pojemności sprężystej aparatury.

jemności wynikającej ze ścisliwością gazów należy jednak uwzględnić odpowiednie zjawiska termodynamiczne.

Powolne sprężanie/rozprężanie gazu jest procesem izotermicznym i można go opisać równaniem (II.231):

$$p(t)V(t) = \text{const}$$

które po zróżniczkowaniu przyjmuje postać:

$$V(t) \frac{dp(t)}{dt} + p(t) \frac{dV(t)}{dt} = 0 \quad (\text{II.236})$$

lub:

$$dp(t) = -p(t) \frac{dV(t)}{V(t)} \quad (\text{II.237})$$

Przez analogię do opisu sprężystości (ścisliwości) cieczy (II.136):

$$dp = -K \frac{dV}{V}$$

można wprowadzić objętościowy moduł ścisliwości K dla gazów, który w stałej temperaturze jest równy jego ciśnieniu. Na tej podstawie, podobnie jak w przypadku cieczy (II.138), można wyznaczyć zmianę ciśnienia gazu $dp(t)$, jaka nastąpi po wprowadzeniu dodatkowej objętości gazu $dV(t)$ do naczynia o objętości V_0 , w którym panuje ciśnienie p_0 :

$$dp(t) = p_0 \frac{dV(t)}{V_0} \quad (\text{II.238})$$

Po podstawieniu $dV(t) = f(t)dt$ zależność (II.238) można przedstawić w postaci:

$$\frac{V_0}{p_0} \frac{dp(t)}{dt} = f(t) \quad (\text{II.239})$$

Współczynnik $V_0/p_0 = C$ określa **izotermiczną pojemność ścisliwości gazu** w rozpatrywanym zbiomiku.

Jeśli proces sprężania i rozprężania zachodzi gwałtownie, to można założyć, że odbywa się praktycznie bez wymiany ciepła z otoczeniem. Jest to więc proces adiabatyczny, opisany równaniem (II.234):

$$p(t)V^\kappa(t) = \text{const}$$

Po zróżniczkowaniu:

$$V_0^\kappa \frac{dp(t)}{dt} + p_0 \kappa V_0^{\kappa-1} \frac{dV(t)}{dt} = 0 \quad (\text{II.240})$$

Zależność ta pozwala wyznaczyć zmianę ciśnienia gazu $dp(t)$, która wynika z wprowadzenia dodatkowej objętości gazu $dV(t)$. Po podstawieniu $dV(t) = f(t)dt$ można ją przedstawić w postaci:

$$\frac{V_0}{\kappa p_0} \frac{dp(t)}{dt} = f(t) \quad (\text{II.241})$$

Współczynnik $V_0/(\kappa p_0) = C$ określa **adiabatyczną pojemność ściśliwości gazu** w zbiorniku. Jest ona proporcjonalna do pojemności w procesie izotermicznym ze stałym współczynnikiem proporcjonalności κ .

Analogie elementów

W tabeli 12.1 zestawiono podstawowe modele elementarne opisane w tej części. Nawet pobiczne porównanie pozwala dostrzec podobieństwa w opisie elementów z różnych dziedzin. Na tej podstawie są formułowane często analogie między różnorodnymi zjawiskami.

Tabela 12.1. Porównanie modeli elementarnych

Układ	Elementy układu			Źródło o stałym natężeniu prądu	
Elektryczny	pojemność (kondensator)	opór (rezystor)	indukcyjność (cewka)	napięciu	natężeniu prądu
	$u = 1/C \int i dt$	$u = Ri$	$u = L di/dt$	u	i
	$i = C \dot{u}$	$i = G u$	$i = 1/L \int u dt$		
	$u = 1/(Cq)$	$u = R \dot{q}$	$u = L \ddot{q}$		\dot{q}
Mechaniczny – ruch posuwisty	sprężystość (sprężyna)	tarcie (tłumik)	bezwładność (masa)	sile	prędkości
	$F = cx$	$F = b\dot{x}$	$F = m\ddot{x}$	F	\dot{x}
	$F = c \int v dt$	$F = bv$	$F = m\dot{v}$		v
Mechaniczny – ruch obrotowy	sprężystość (sprężyna)	tarcie (tłumik)	bezwładność (moment bezwładności)	momentem siły	prędkości
	$M = c\varphi$	$M = b\dot{\varphi}$	$M = J\ddot{\varphi}$		
	$M = c \int \omega dt$	$M = b\omega$	$M = J\dot{\omega}$		
Hydrauliczny pneumatyczny	pojemność ścisliwości (zbiornik)	opór hydrauliczny (zawór, rura)	bezwładność (masa medium)	ciśnieniu	przepływie
	$\Delta p = B/V \int f dt$	$\Delta p = Rf^2$	$\Delta p = M d f/dt$	p	f
	$f = V/B \Delta p$	$\Delta p = Rf$			\dot{V}
Cieplny	kumulacja (magazyn ciepła)	przewodzenie (przewód, styk)		temperaturze	moc cy
	$Q = C_v \dot{T}$	$Q = K_c T$		T	Q
					\dot{E}

Część III

Zasady konstrukcji modeli dynamiki obiektów i przykłady modeli

Jak konstruować modele dynamiki prostych układów elektrycznych, mechanicznych, przenoszenia masy i energii? Jakiego typu modele powstają? Jaki wpływ mają przyjmowane założenia?

Dysponując odpowiednim zestawem modeli elementarnych (część II), możemy przystąpić do modelowania złożonych obiektów. U podstaw konstrukcji modelu zawsze leży zasada zachowania energii lub masy, jednak w różnych dziedzinach wygodniej jest zastosować szczególne formy tej zasady. W kolejnych podrozdziałach poznamy więc sposoby tworzenia modeli dynamiki w różnych dziedzinach i przeanalizujemy proste przykłady, które je ilustrują. Przedstawiane modele często będą miały pierwotną formę wynikającą ze sposobu konstrukcji, którą można wykorzystać w jego aplikacji w programie symulacyjnym; będzie to tematem IV części książki. Przekształcenie modelu do postaci uporządkowanych równań stanu czy transmitancji jest sprawą czysto techniczną. Wykonamy przekształcenia dla wybranych przypadków w celu ilustracji interesujących własności obiektu.

Obwody elektryczne

13.1. Ogólne zasady konstruowania modeli

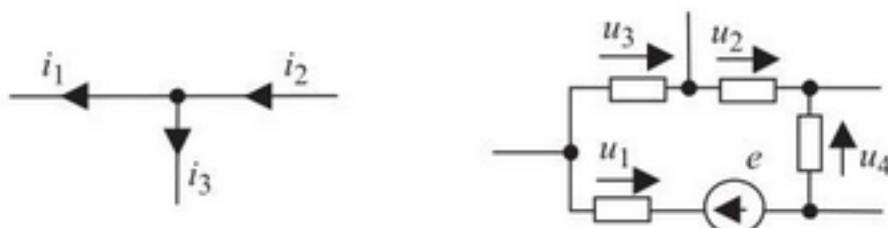
Modele obwodów elektrycznych można konstruować różnymi metodami, wszystkie jednak opierają się na dwóch prawach Kirchhoffa. Pierwsze z nich jest bilansem natężen prądów (ładunków) dopływających do węzła obwodu i odpływających z węzła:

$$\sum i_k = 0 \quad (\text{III.1})$$

Drugie prawo ma postać bilansu spadków napięcia i sił elektromotorycznych w dowolnym zamkniętym obwodzie elektrycznym, czyli także w oczku¹:

$$\sum u_k + \sum e_k = 0 \quad (\text{III.2})$$

Prawa te obowiązują zarówno w liniowych, jak i nieliniowych obwodach (rys. 13.1).



Rys. 13.1. Bilans prądów w węźle i bilans napięć w oczku

Konstrukcję modelu obwodu elektrycznego rozpoczęliśmy od ustalenia schematu zastępczego, zawierającego skupione i idealne elementy, reprezentujące znaczące zjawiska zachodzące w fizycznych składnikach obwodu. Zakłada się, że linie połączeń przedstawiane w obwodzie zastępczym nie wpływają w żaden sposób na przepływ prądu. Jeśli więc na przykład rezystancja przewodów łączących w rzeczywistym obwodzie jest znacząca (porównywalna z innymi elementami), to w obwodzie zastępczym wprowadza się rezistor o odpowiedniej wartości rezystancji. Po-

¹ Oczko jest prostym obwodem wydzielonym z układu złożonego.

nieważ znaczenie różnych zjawisk zależy od charakteru przebiegów prądowych i napięciowych, ważne jest ustalenie zakresu częstotliwości sygnałów, jakie będą analizowane – a przynajmniej, czy tworzony model dotyczy obwodu prądu stałego (w tym też wolnozmennego), czy przemiennego.

Najprostsze do konstruowania i analizowania są modele liniowych obwodów elektrycznych. W obwodach prądu stałego oznacza to stałe wartości rezystancji (R), indukcyjności (L) i pojemności (C), a w obwodach prądu przemiennego – stałe wartości impedancji (Z) dla danej częstotliwości. Na przykładzie obwodów liniowych przedstawiono kilka metod układania równań stosowanych w elektrotechnice. Analogiczne metody są stosowane także w układach hydraulicznych, pneumatycznych i cieplnych. Do prezentacji metod zostanie użyty zapis operatorowy, ale te same metody stosuje się przy układaniu równań różniczkowych. Przedstawione metody można częściowo zastosować (lub przystosować) do ułożenia układów równań dla obwodów zawierających elementy opisane nieliniową zależnością $u = f(i)$, z tym że rozwiązanie takich układów może być trudne¹.

13.2. Operatorowe modele obwodów liniowych

13.2.1. Ogólne zasady układania równań dla obwodów elektrycznych

Modele elektrycznych obwodów liniowych tworzy się najczęściej w postaci operatorowej Laplace'a lub Fouriera. Wybór transformaty zależy od celu badań i narzędzi, z których korzysta się podczas analizy czy symulacji. W praktyce, ze względu na jednoznaczny związek przekształceń \mathcal{L} i $\mathcal{F}(s=j\omega)$, operatorowy zapis zmiennych $u(s)$, $i(s)$ oznacza ogólnie transformaty czasowych przebiegów napięć $u(t)$ i natężen prądu $i(t)$, a zapis $Z(s)$ – impedancję, czyli własność elementów obwodu. Dla wszystkich liniowych elementów obwodu obowiązuje uogólnione prawo Ohma (II.69):

$$u(s) = i(s)Z(s)$$

6.7

Przed przystąpieniem do układania operatorowych równań bilansowych zaleca się wprowadzenie impedancji zastępczych (wypadkowych)², co pomaga uprościć strukturę analizowanego obwodu. W modelach przedstawionych poniżej wszystkie elementy obwodu są reprezentowane przez ogólny symbol impedancji, który może oznaczać pojedyncze elementy lub różne konfiguracje elementów RLC . Skonstruowany układ równań czy transmitancja będzie więc dokładną postacią modelu dopiero po rozwinięciu wzorów na impedancje poszczególnych elementów.

13.2.2. Metoda prądów oczkowych

Najczęściej stosowaną metodą konstrukcji modeli liniowych obwodów elektrycznych jest metoda oczkowa. W obwodzie wybiera się niezależne oczka, przyjmuje

¹ Rozwiązanie analityczne może być nawet niewykonalne.

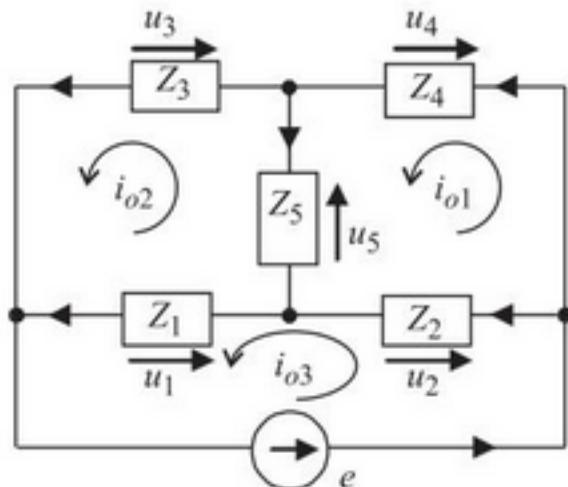
² W p. 6.7: o impedancji zastępczej.

się kierunki prądów oczkowych, a następnie układa się bilans napięć dla tych oczek w oparciu o II prawo Kirchhoffa. Zmiennymi modelu są natężenia prądów w poszczególnych oczkach. Na ich podstawie można później wyznaczyć natężenie prądu w każdej gałęzi obwodu (przez superpozycję prądów oczkowych). Jeśli obwód zawiera g gałęzi i w węzłów, to liczba niezależnych oczek, a tym samym równań modelu, wynosi:

$$n = g - (w - 1) \quad (\text{III.3})$$

Oczka można wybierać na różne sposoby. Aby zapewnić sobie ich niezależność, można w każdym kolejnym oczku wybierać jedną gałąź, która nie będzie należeć do żadnego następnego oczka.

Metodę prądów oczkowych zastosujemy do ułożenia równań dla typowego układu pomiarowego (rys. 13.2). Wyznaczmy trzy oczka ($n = 6 - 4 + 1$), zakładając jednocześnie kierunki prądów oczkowych.



Rys. 13.2. Ilustracja metody prądów oczkowych dla układu mostkowego

Podstawą modelu obiektu są trzy równania bilansu napięć w oczkach:

$$\begin{cases} u_5(s) + u_4(s) - u_2(s) = 0 \\ u_3(s) - u_5(s) - u_1(s) = 0 \\ u_1(s) + u_2(s) = e(s) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

W obwodach liniowych każde napięcie występujące we wzorze można wyznaczyć na podstawie natężeń prądów oczkowych, korzystając z prawa Ohma:

$$\begin{aligned} u_1(s) &= Z_1(s)(i_{o3}(s) - i_{o2}(s)), & u_2(s) &= Z_2(s)(i_{o3}(s) - i_{o1}(s)), \\ u_3(s) &= Z_3(s)i_{o2}(s), & u_4(s) &= Z_4(s)i_{o1}(s), \\ u_5(s) &= Z_5(s)(i_{o1}(s) - i_{o2}(s)) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Podstawiając zależności (III.5) do (III.4) i porządkując równania, otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} Z_{o1}(s) & -Z_5(s) & -Z_2(s) \\ -Z_5(s) & Z_{o2}(s) & -Z_1(s) \\ -Z_2(s) & -Z_1(s) & Z_{o3}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{o1}(s) \\ i_{o2}(s) \\ i_{o3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e(s) \end{bmatrix}$$

$$Z_{o1}(s) = Z_2(s) + Z_4(s) + Z_5(s) \quad (\text{III.6})$$

$$Z_{o2}(s) = Z_1(s) + Z_3(s) + Z_5(s)$$

$$Z_{o3}(s) = Z_1(s) + Z_2(s)$$

A4.5 Do rozwiązania powyższego układu, czyli wyznaczenia wartości natężenia prądów oczkowych, można zastosować wzory Cramera[•], w których oblicza się wyznaczniki odpowiednich macierzy. Jeśli zadanie polega na wyznaczeniu stanu ustalonego w układzie, to wyznaczniki oblicza się na komputerze.

Dla zbadania własności dynamicznych konieczne jest przekształcenie modelu do postaci transmitancji macierzowej:

$$\mathbf{i}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{e}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s)\mathbf{e}(s)$$

3.2.4 Wymaga to kłopotliwej operacji odwrócenia macierzy impedancji $\mathbf{Z}(s)$. Macierz $\mathbf{G}(s)$ można jednak też wyznaczyć metodą eliminacji kolejnych zmiennych i [•]. Do określenia stabilności układu wystarczy zastosować ten sposób i zbadać jedną reprezentatywną transmitancję: $i_i(s) = G_i(s)e(s)$.

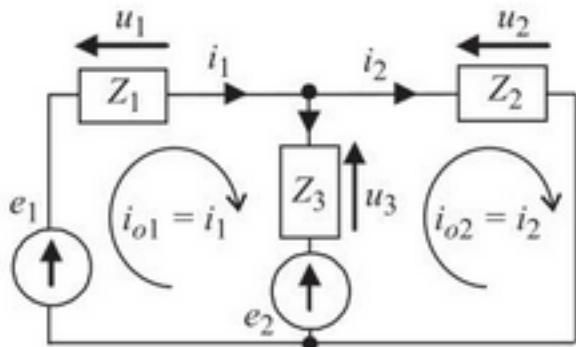
Istotną cechą metody prądów oczkowych jest mała liczba równań opisujących układ, co znacznie ułatwia dalszą analizę. Metoda ma jeszcze inną własność, mianowicie model w postaci (III.6) można napisać od razu po wyznaczeniu oczek, bez układania równań Kirchhoffa, stosując pewne reguły mnemotechniczne:

- na przekątnej macierzy należy umieścić impedancje własne poszczególnych oczek – impedancja własna oczka jest równa sumie impedancji wszystkich gałęzi występujących w danym oczku;
- pozostałe elementy macierzy to impedancje wzajemne odpowiednich oczek; impedancja wzajemna jest równa impedancji wspólnej gałęzi obu oczek (ze zmienionym znakiem, jeśli prądy oczkowe mają przeciwnie zwroty);
- prawą stronę równania tworzy wektor napięć źródłowych oczka – napięciem źródłowym oczka jest algebraiczna suma napięć źródłowych występujących w tym oczku.

Przeanalizujemy jeszcze jeden przykład zastosowania omawianej metody w odniesieniu do obwodu z dwoma źródłami napięcia (rys. 13.3).

• Dodatek A4.5: o zastosowaniu macierzy do rozwiązywania układów równań.

• W p. 3.2.4: o transmitancji macierzowej.



Rys. 13.3. Ilustracja metody prądów oczkowych dla obwodu z dwoma źródłami napięciowymi

Ponieważ w dalszej części będziemy się jeszcze odwoływać do procedury układania równań dla tego obiektu, wyznaczmy ogólny model obwodu przez ułożenie równań bilansu napięć w oczkach:

$$\begin{cases} u_1(s) + u_3(s) = e_1(s) - e_2(s) \\ u_2(s) - u_3(s) = e_2(s) \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Po podstawieniu opisów elementów:

$$\begin{cases} Z_1(s)i_1(s) + Z_3(s)(i_1(s) - i_2(s)) = e_1(s) - e_2(s) \\ Z_2(s)i_2(s) - Z_3(s)(i_1(s) - i_2(s)) = e_2(s) \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

i uporządkowaniu (lub zastosowaniu reguł mnemotechnicznych) model ma postać:

$$\begin{cases} (Z_1(s) + Z_3(s))i_1(s) - Z_3(s)i_2(s) = e_1(s) - e_2(s) \\ -Z_3(s)i_1(s) + (Z_2(s) + Z_3(s))i_2(s) = e_2(s) \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Na jego podstawie można wyznaczyć transmitancyjną postać modelu:

$$\begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{M(s)} \begin{bmatrix} Z_2(s) + Z_3(s) & -Z_2(s) \\ Z_3(s) & Z_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix}$$

$$M(s) = (Z_1(s) + Z_3(s))(Z_2(s) + Z_3(s)) - Z_3^2(s) \quad (\text{III.10})$$

Podstawiając odpowiednie wzory na impedancje $Z_1(s)$, $Z_2(s)$, $Z_3(s)$, otrzymuje się dokładne transmitancje dla różnych wariantów obwodu.

Metodę prądów oczkowych można do pewnego stopnia przystosować do obwodów nieliniowych, to znaczy wybrać niezależne oczka, ułożyć równania bilansów napięć i podstawić w miejsce napięć funkcje zależne od natężenia prądów oczkowych. Należy tylko pamiętać, że opis spadku napięcia na nieliniowym elemencie jest funkcją natężenia prądu gałęziowego – np. jeśli w układzie (III.7) spadek napięcia na elemencie $Z_3(s)$ zależy od kwadratu prądu, to do układu należy podstawić:

$$u_3(s) = Z_3(s)(i_1(s) - i_2(s))^2$$

13.2.3. Metoda praw Kirchhoffa

CD

Na podstawie I prawa Kirchhoffa układą się równania dla $w - 1$ węzłów obwodu oraz jedno równanie na podstawie II prawa Kirchhoffa. Zmiennymi są natężenia prądu w gałęziach. *Dokładniejszy opis na CD.*

13.2.4. Metoda potencjałów węzłowych

CD

Wybiera się węzeł uziemienia. Na podstawie I prawa Kirchhoffa układą się $w - 1$ równań bilansowych dla nieuziemionych węzłów. Zmiennymi są potencjały węzłów względem węzła uziemionego. *Dokładniejszy opis na CD.*

13.2.5. Metoda przekształcania sieci

CD

Wyznacza się impedancję zastępczą całego obwodu. Zazwyczaj upraszcza się stopniowo strukturę sieci, wykorzystując gotowe wzory na impedancję zastępczą połączeń szeregowych i równoległych. *Dokładniejszy opis na CD.*

13.2.6. Zastosowanie schematów zastępczych

W przypadku układów zawierających złożone elementy, np. wzmacniacze operacyjne, pierwszym krokiem w konstruowaniu modelu jest zastosowanie prostych schematów zastępczych. Dalsze postępowanie polega na zastosowaniu jednej z metod omówionych wcześniej. *Dokładniejszy opis na CD.*



Pytania i zadania

1. Powtórz przykłady ilustrujące omówione metody, stosując inny wybór węzłów, oczek.
2. Porównaj zastosowanie różnych metod do konstruowania modelu obwodu z rys. 13.3.
3. Przedstawione metody są znane w elektrotechnice jako metody rozwiązywania obwodów elektrycznych. Czym się różni rozwiązywanie obwodów elektrycznych od badania dynamiki tych obwodów?
4. Wyznacz dokładne transmitancje obwodu z rys. 13.3 dla następujących wariantów:
 - a) w gałęzi Z_1 szeregowo połączenie R i C , w gałęzi Z_2 szeregowo połączenie R i L , Z_3 = rezistor;
 - b) jw. i dodatkowy rezistor w gałęzi Z_2 ;
 - c) w gałęziach Z_1 i Z_2 szeregowo połączenie R i C , Z_3 = rezistor;
 - d) w gałęziach Z_1 i Z_2 szeregowo połączenie R i L , Z_3 = rezistor.

Zbadaj stabilność obwodów.

5. Zastosuj omówione metody do wykonania modelu obwodu z rys. 13.3, zakładając, że wszystkie elementy obwodu są opisane nieliniową zależnością w postaci $u = Ri^2$.

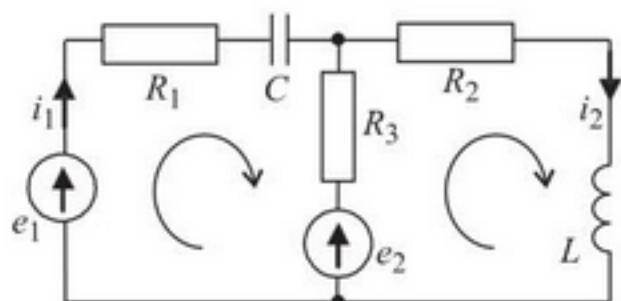
13.3. Równania stanu obwodów elektrycznych

13.3.1. Zasady wyboru zmiennych stanu

Modele obwodów elektrycznych można również tworzyć w formie układu równań różniczkowych. Forma ta jest stosowana głównie do opisu obwodów zawierających elementy nieliniowe (nie można zastosować uogólnionego prawa Ohma) oraz jeśli model będzie wykorzystywany do symulowania przebiegów zaczynających się w dowolnych warunkach początkowych^{3.2.1}. Zastosowanie metody oczkowej do ułożenia bilansowych równań różniczkowych, w których zmiennymi są napięcia i natężenia prądu powoduje, że w zależnościach pojawiają się składniki całkowe (napięcia na kondensatorze). Aby uzyskać zapis w postaci równań stanu^{2.4.1}, zaleca się wybierać zmienne stanu według reguły – nie zależne napięcia na kondensatorach i natężenia prądów w cewkach. Taki sposób wyboru zmiennych daje gwarancję, że w modelu nie wystąpią pochodne zmiennych wejściowych. Jednocześnie, określenie wartości początkowych dla tych zmiennych jednoznacznie wyznacza stan energetyczny układu w chwili $t = 0$, co stanowi podstawową własność zmiennych stanu. Poniższe przykłady ilustrują opisaną zasadę wyboru zmiennych. Będą to różne warianty obwodu (rys. 13.3), dla którego wcześniej wyznaczyliśmy ogólną transmitancję metodą oczkową. Warto zwrócić uwagę, że transmitancje powstające na podstawie równań stanu będą inne (inny wybór zmiennych wyjściowych modelu).

13.3.2. Dwuoczkowy obwód z dwoma magazynam energii

Pierwszy wariant analizowanego obwodu zawiera jeden kondensator i jedną cewkę (rys. 13.4).



Rys. 13.4. Schemat obwodu 1: z dwoma magazynamami

^{3.2.1} W p. 3.2.1: o ograniczeniach w zastosowaniu transmitancji operatorowej.

^{2.4.1} W p. 2.4.1: o równaniach i zmiennych stanu.

Układ równań różniczkowych obwodu ma postać:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)i_1(t) + \frac{1}{C} \int i_1(t)dt - R_3 i_2(t) = e_1(t) - e_2(t) \\ (R_2 + R_3)i_2(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} - R_3 i_1(t) = e_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Stosując zalecaną regułę obierania zmiennych stanu, przyjmuje się dwie zmienne: $x_1(t) = \frac{1}{C} \int i_1(t)dt$ (stąd $i_1 = C\dot{x}_1$) oraz $x_2(t) = i_2(t)$. Po podstawieniu zmiennych, równania bilansowe mają postać:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)C\dot{x}_1(t) + x_1(t) - R_3 x_2(t) = e_1(t) - e_2(t) \\ (R_2 + R_3)x_2(t) + L\dot{x}_2(t) - R_3 C\dot{x}_1(t) = e_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Proste uporządkowanie prowadzi do modelu w postaci następujących równań stanu:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)C\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + R_3 x_2(t) + e_1(t) - e_2(t) \\ (R_1 + R_3)L\dot{x}_2(t) = -R_3 x_1(t) - R_{123}x_2(t) + R_3 e_1(t) + R_1 e_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

$$R_{123} = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$$

13.3.3. Dwuoczkowy obwód z trzema magazynami

W drugim wariantie obwodu (rys. 13.5) dodano jeden kondensator w gałęzi Z_2 zawierającej cewkę.

Równania bilansu napięć w oczkach mają postać:

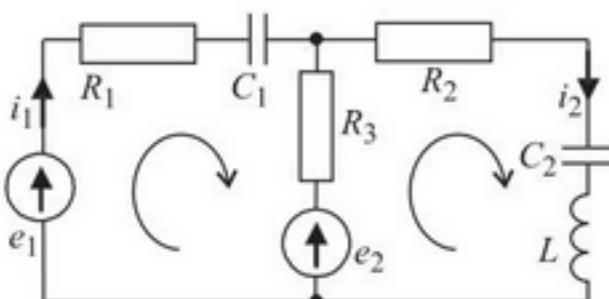
$$\begin{cases} (R_1 + R_3)i_1(t) + \frac{1}{C_1} \int i_1(t)dt - R_3 i_2(t) = e_1(t) - e_2(t) \\ (R_2 + R_3)i_2(t) + \frac{1}{C_2} \int i_2(t)dt + L \frac{di_2(t)}{dt} - R_3 i_1(t) = e_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Według reguły obierania zmiennych stanu należy wyznaczyć trzy zmienne:

$$x_1(t) = \frac{1}{C_1} \int i_1(t)dt, \quad x_2(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2(t)dt \quad \text{i} \quad x_3(t) = i_2(t) \quad (\text{stąd } i_1 = C_1 \dot{x}_1 \text{ i } x_3 = C_2 \dot{x}_2).$$

Po podstawieniu zmiennych równania bilansowe mają postać:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)C_1 \dot{x}_1(t) + x_1(t) - R_3 x_3(t) = e_1(t) - e_2(t) \\ (R_2 + R_3)x_3(t) + x_2(t) + L\dot{x}_3(t) - R_3 C_1 \dot{x}_1(t) = e_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$



Rys. 13.5. Schemat obwodu 2: z trzema magazynami

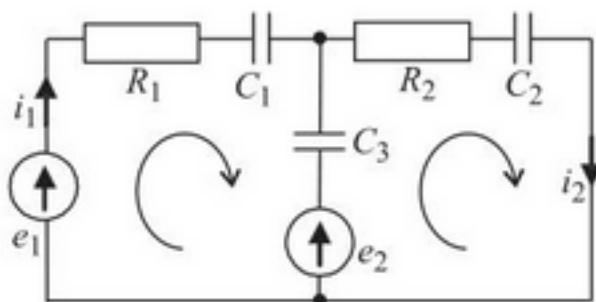
Uwzględniając zależność $x_3 = C_2 \dot{x}_2$ i porządkując równania, otrzymuje się model:

$$\begin{cases} R_{13}C_1\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + R_3x_3(t) + e_1(t) - e_2(t) \\ C_2\dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ R_{13}L\dot{x}_3(t) = -R_3x_1(t) - R_{13}x_2(t) - R_{123}x_3(t) + R_3e_1(t) + R_1e_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

$$R_{13} = R_1 + R_3, \quad R_{123} = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3$$

13.3.4. Obwody z zależnymi magazynami energii

Liczba równań stanu nie zawsze odpowiada liczbie wszystkich kondensatorów i cewek w obwodzie. Zmiennymi stanu są tylko niezależne napięcia na kondensatorach i natężenia prądu w cewkach, co ilustruje trzeci wariant obwodu (rys. 13.6) zawierający kondensator w każdej z trzech gałęzi.



Rys. 13.6. Schemat obwodu 3: z zależnymi magazynami energii

Równania bilansowe obwodu mają postać:

$$\begin{cases} R_1i_1(t) + \frac{1}{C_1} \int i_1(t) dt + \frac{1}{C_3} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt = e_1(t) - e_2(t) \\ R_2i_2(t) + \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt + \frac{1}{C_3} \int (i_2(t) - i_1(t)) dt = e_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Zgodnie z regułą, zmienne stanu powinny być niezależne. Ten warunek spełniają zmienne $x_1(t) = \frac{1}{C_1} \int i_1(t) dt$ i $x_2(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt$ (stąd $i_1 = C_1 \dot{x}_1$, $i_2 = C_2 \dot{x}_2$), po-

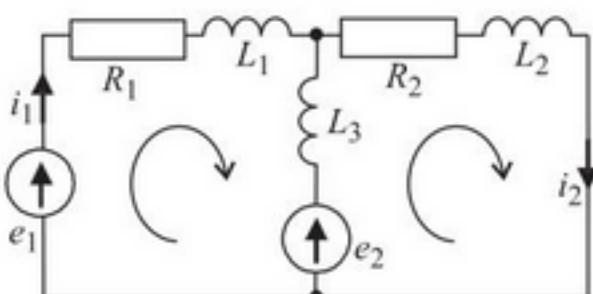
nieważ napięcie na kondensatorze C_3 można wyznaczyć jako: $\frac{1}{C_3} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt = \frac{C_1}{C_3} x_1(t) - \frac{C_2}{C_3} x_2(t)$ (liniowa kombinacja zmiennych x_1 i x_2).

Dla nowych zmiennych równania mają postać:

$$\begin{cases} R_1C_1\dot{x}_1(t) + x_1(t) + \frac{C_1}{C_3}x_1(t) - \frac{C_2}{C_3}x_2(t) = e_1(t) - e_2(t) \\ R_2C_2\dot{x}_2(t) + x_2(t) + \frac{C_2}{C_3}x_2(t) - \frac{C_1}{C_3}x_1(t) = e_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Równania stanu można jeszcze uporządkować:

$$\begin{cases} R_1C_1C_3\dot{x}_1(t) = -(C_1 + C_3)x_1(t) + C_2x_2(t) + C_3e_1(t) - C_3e_2(t) \\ R_2C_2C_3\dot{x}_2(t) = C_1x_1(t) - (C_2 + C_3)x_2(t) + C_3e_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.19})$$



Rys. 13.7. Schemat obwodu 4: z trzema cewkami

CD

W podobny sposób byłby konstruowany analogiczny model z trzema cewkami (rys. 13.7). *Dokładniejszy opis na CD.*



Pytania i zadania

- Ułóż równania obwodów 1–4 metodą prądów oczkowych w wersji operatowej (13.2.2) i porównaj z odpowiednimi transformacjami równań stanu (III.13), (III.16), (III.19).
- Porównaj transmitancje obwodów 1–4 otrzymanych z równań stanu (III.13), (III.16) i (III.19) z odpowiednim rozwinięciem ogólnej transmitancji (III.10).
- Ułóż równania obwodów 1–4, stosując opis elementów w postaci funkcji zależnych od ładunku, wynikający z definicji natężenia prądu $i = dq/dt$ ($u = Rq$, $u = 1/(Cq)$, $u = Lq$). Przedstaw modele w postaci równań stanu. Porównaj otrzymane modele z równaniami (III.13), (III.16) i (III.19). Czy równania charakterystyczne modeli są podobne?
- Spróbuj w równaniach dla obwodów 3 i 4 wprowadzić trzy zmienne stanu (dla każdego kondensatora i każdej cewki). Dlaczego zmienne stanu muszą być niezależne?
- Wyjaśnij różnice między modelem obwodu ze zmiennymi w postaci natężen prądu w cewkach i napięć na kondensatorach i modelem tego samego obwodu ze zmiennymi w postaci natężen prądu w gałęziach lub oczkach.
- Zbadaj stabilność równań stanu (III.13), (III.16) i (III.19).

13.4. Transformator

13.4.1. Założenia dla modelu transformatora

6.6.1 Spośród podstawowych elementów obwodów elektrycznych został przedstawiony opis idealnego transformatora*, oparty na zjawiskach indukcyjności wzajemnej i indukcyjności własnej. W rzeczywistym transformatorze znaczną wartość ma także rezystancja uzwojeń, co jest uwzględnione w modelach przedstawionych poniżej. Zostanie przyjęte założenie, że zmienną wejściową jest napięcie przyłożone po stronie pierwotnej, a zmienną wyjściową – napięcie wygenerowane po stronie wtórnej transformatora.

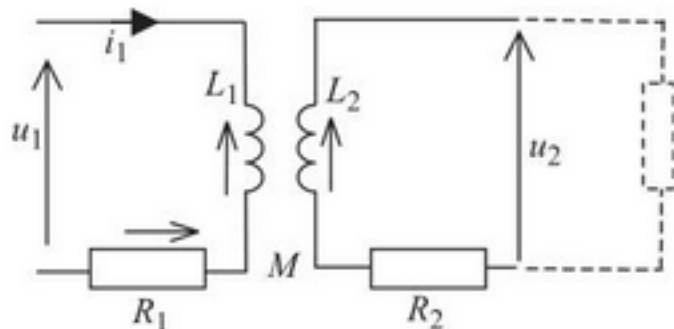
* W p. 6.6.1 o modelu idealnego transformatora.

13.4.2. Transformator bez obciążenia

W pierwszej kolejności rozważymy model transformatora pracującego bez obciążenia (rys. 13.8), czyli przy rozwartym obwodzie wtórnym.

Napięcie $u_1(t)$ przyłożone po stronie pierwotnej jest równoważone przez spadek napięcia na uzwojeniach o rezystancji R_1 i siłę elektromotoryczną indukcji własnej z_1 uzwojeń (indukowaną przez strumień magnetyczny $\Phi_1(t)$ wytwarzany przez prąd o natężeniu $i_1(t)$). Napięcie $u_2(t)$ występujące na zaciskach obwodu wtórnego odpowiada sile elektromotorycznej indukcji wzajemnej (indukowanej w z_2 uzwojeniach przez strumień $\Phi_1(t)$ pomniejszony o strumień, który uległ rozproszeniu $\Phi_r(t)$). Obwód wtórzmy jest otwarty, więc po stronie wtórnej prąd nie płynie. Równania bilansów napięć w oczkach po obu stronach transformatora mają zatem postać:

$$\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + z_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt} \\ u_2(t) = z_2 \frac{d(\Phi_1(t) - \Phi_r(t))}{dt} \end{cases} \quad (\text{III.20})$$



Rys. 13.8. Schemat transformatora bez obciążenia

Jeśli założyć, że zależność między strumieniem magnetycznym i natężeniem prądu wytwarzającego ten strumień jest liniowa (II.20), to równania nieobciążonego transformatora można przedstawić w postaci:

$$\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \\ u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

W transformatorach z rdzeniem ferromagnetycznym, dla których zależność między strumieniem i natężeniem prądu wynika z krzywej magnesowania, równania te mogą stanowić jedynie zlinearyzowany opis obiektu. Równania operatorowe dla liniowej (lub zlinearyzowanej) wersji modelu mają postać:

$$\begin{cases} u_1(s) = (R_1 + sL_1) i_1(s) \\ u_2(s) = sM i_1(s) \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

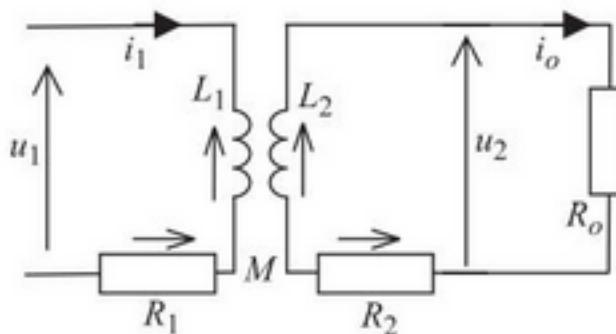
Z układu równań można wyznaczyć transmitancję:

$$G(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{ks}{T_1 s + 1}, \quad \text{priy czym} \quad T_1 = \frac{L_1}{R_1}, \quad k = \frac{M}{R_1} \quad (\text{III.23})$$

 Transformator pracujący bez obciążenia jest więc członem inercyjnym pierwszego rzędu, zawsze stabilnym[→].

13.4.3. Transformator z obciążeniem czynnym

Jeśli do transformatora jest podłączony odbiornik o rezystancji R_o , zamkajający obwód wtórnego (rys. 13.9), w równaniach obiektu pojawiają się składniki wynikające z przepływu prądu po stronie wtórnej $i_o(t)$.



Rys. 13.9. Schemat transformatora z obciążeniem czynnym

Siłę elektromotoryczną indukowaną po stronie wtórnej będzie zatem równoważyć spadek napięcia na uzwojeniach o rezystancji R_2 i odbiorniku o rezystancji R_o oraz siła elektromotoryczna indukcji własnej z_2 uzwojeń. Przepływ prądu o natężeniu $i_o(t)$ powoduje również powstanie strumienia magnetycznego $\Phi_2(t)$ – po stronie pierwotnej wystąpi więc siła elektromotoryczna indukcji wzajemnej, pochodząca od strumienia $\Phi_2(t)$ pomniejszonego o strumień rozproszenia $\Phi_r(t)$. Zjawiska te można ująć w następujące równania bilansowe:

$$\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + z_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt} - z_1 \frac{d(\Phi_2(t) - \Phi_r(t))}{dt} \\ z_2 \frac{d(\Phi_1(t) - \Phi_r(t))}{dt} = (R_2 + R_o)i_o(t) + z_2 \frac{d\Phi_2(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Zakładając liniową (lub zlinearyzowaną) zależność między strumieniem magnetycznym i natężeniem prądu, równania można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_o(t)}{dt} \\ M \frac{di_1(t)}{dt} = (R_2 + R_o)i_o(t) + L_2 \frac{di_o(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

→ W p. 3.2.5: o własnościach członu inercyjnego.

Stąd wynikają następujące równania operatorowe obciążonego transformatora:

$$\begin{cases} u_1(s) = (R_1 + sL_1)i_1(s) - sMi_o(s) \\ sMi_1(s) = (R_o + R_2 + sL_2)i_o(s) \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Po przekształceniu równań i podstawieniu $u_2(s) = R_o i_o(s)$ model uzyskuje postać transmitancji:

$$G(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{sMR_o}{s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_1R_{2o} + L_2R_1) + R_1R_{2o}} \quad (\text{III.27})$$

gdzie $R_{2o} = R_2 + R_o$. Transmitancja jest rzędu drugiego, można więc ją zapisać w postaci członu oscylacyjnego:

$$G(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{ks}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (\text{III.28})$$

gdzie:

$$k = \frac{MR_o}{R_1(R_o + R_2)}, \quad T = \sqrt{\frac{L_1L_2 - M^2}{(R_o + R_2)R_1}},$$

$$\xi = \frac{L_1(R_o + R_2) + L_2R_1}{2\sqrt{(L_1L_2 - M^2)(R_o + R_2)R_1}}$$

Zapis modelu w postaci (III.28) ma uzasadnienie, jeśli w transformatorze z obciążeniem czynnym mogą wystąpić oscylacje. Sprawdźmy więc, czy można wykazać, że dla rzeczywistych wartości parametrów pierwiastki transmitancji mogą być tylko rzeczywiste (brak oscylacji). Można to zrobić na podstawie wyznacznika Δ równania charakterystycznego transmitancji (III.27):

$$\Delta = (L_1R_{2o} + L_2R_1)^2 - 4(L_1L_2 - M^2)R_1R_{2o} > 0 \quad (\text{III.29})$$

lub na podstawie współczynnika tłumienia ξ transmitancji (III.28):

$$\xi^2 = \frac{(L_1R_{2o} + L_2R_1)^2}{4(L_1L_2 - M^2)R_1R_{2o}} > 1 \quad (\text{III.30})$$

W obu wypadkach, po wykonaniu prostych operacji:

$$L_1^2R_{2o}^2 + L_2^2R_1^2 + 2L_1L_2R_1R_{2o} - 4L_1L_2R_1R_{2o} + 4M^2R_1R_{2o} > 0$$

$$L_1^2R_{2o}^2 + L_2^2R_1^2 - 2L_1L_2R_1R_{2o} + 4M^2R_1R_{2o} > 0$$

otrzymuje się warunek:

$$(L_1R_{2o} - L_2R_1)^2 + 4M^2R_1R_{2o} > 0 \quad (\text{III.31})$$

* W p. 3.2.5: o własnościach członu oscylacyjnego.



który w rzeczywistych obwodach (dodatnie wartości parametrów) jest zawsze spełniony, co oznacza, że transformator z obciążeniem czynnym nie jest członem oscylacyjnym, tylko członem inercyjnym drugiego rzędu. Pierwiastki równania charakterystycznego będą więc liczbami rzeczywistymi:

$$s_{1,2} = \frac{-(L_1 R_{2o} + L_2 R_1) \pm \sqrt{(L_1 R_{2o} - L_2 R_1)^2 + 4M^2 R_1 R_{2o}}}{2(L_1 L_2 - M^2)} \quad (\text{III.32})$$

2.2.4 Warunki stabilności obiektu można ustalić, badając, kiedy pierwiastki (III.32) są ujemne lub kiedy współczynnik tłumienia (III.30) spełnia warunek $\xi > 1$. Najprościej będzie jednak skorzystać z kryterium Hurwitz⁸, zastosowanego do równania charakterystycznego transmitancji (III.27), co w tym wypadku oznacza jedynie ustalenie, kiedy wszystkie współczynniki mianownika są dodatnie:

$$L_1 L_2 - M^2 > 0 \quad i \quad L_1 R_{2o} + L_2 R_1 > 0 \quad i \quad R_1 R_{2o} > 0$$

6.6.1 W ten sposób można wykazać, że oba pierwiastki (III.32) są ujemne, jeśli tylko $L_1 L_2 > M^2$, a to, jak wiemy, w rzeczywistych układach jest spełnione zawsze⁹. Tak więc zlinearyzowany model transformatora z obciążeniem czynnym jest stabilnym układem inercyjnym drugiego rzędu.

Pytania i zadania



1. Jaka jest odpowiedź skokowa transformatora bez obciążenia i z obciążeniem czynnym?
2. Co można powiedzieć o modelu transformatora z obciążeniem: a) rezystancyjno-indukcyjnym, b) rezystancyjno-pojemnościowym? Rozpatrz najprostszego szeregowego i równoległe połączenie elementów.
3. Jak zinterpretujesz zmienne modelu transformatora w obwodzie prądu stałego (wolnozmiennego) i przemiennego (sinusoidalnego)?

13.5. Silnik prądu stałego

13.5.1. Zasada działania silnika prądu stałego

6.6.3 Wytworzenie momentu obrotowego $M_e(t)$ w silniku prądu stałego opiera się na wykorzystaniu oddziaływanego stało pola magnetycznego na przewód z płynącym prądem¹⁰. Pole magnetyczne jest wytwarzane przez magnesy trwałe lub przez uzwojenie źródła wzbudzenia zasilane stałym napięciem. Na wimiku silnika umieszczone jest uzwojenie twornika zasilane stałym napięciem. Pole magnetyczne

⁸ W p. 2.2.4: o kryterium stabilności Hurwitza.

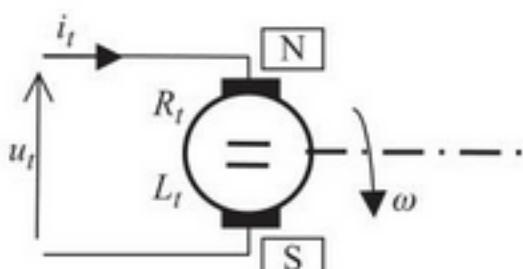
⁹ W p. 6.6.1: o własnościach idealnego transformatora.

¹⁰ W p. 6.6.3: o siłach w polu magnetycznym.

działa na uzwojenia twomika i powoduje obrót wirnika. Ponieważ uzwojenia twornika są zasilane poprzez komutator, następuje zmiana kierunku zasilania uzwojeń, co zapewnia warunki do kontynuowania obrotu w tę samą stronę.

13.5.2. Silnik z trwałym polem magnetycznym

W silniku z magnesami trwałymi (rys. 13.10) jest zapewniony stały strumień magnetyczny, a w uzwojeniach twornika zasilanych napięciem $u_t(t)$ płynie prąd o natężeniu $i_t(t)$.



Rys. 13.10. Schemat silnika z trwałymi magnesami

Moment elektryczny $M_e(t)$ powodujący obrót wimika jest proporcjonalny do natężenia prądu $i_t(t)$:

$$M_e(t) = k_m i_t(t) \quad (\text{III.33})$$

Obwód twornika można opisać za pomocą bilansu napięć, który uwzględnia spadek napięcia na uzwojeniach twomika o rezystancji R_t , siłę elektromotoryczną indukcji własnej z_t uzwojeń twornika (indukowaną przez strumień $\Phi_t(t)$, wytworzony przez prąd obwodu twornika o natężeniu $i_t(t)$) oraz siłę elektromotoryczną wynikającą z ruchu uzwojeń w stałym polu magnetycznym i proporcjonalną do prędkości obrotowej twornika $\omega(t)$:

$$u_t(t) = R_t i_t(t) + z_t \frac{d\Phi_t(t)}{dt} + k_t \omega(t) \quad (\text{III.34})$$

Równanie jest liniowe przy założeniu liniowej zależności natężenia prądu $i_t(t)$ i strumienia $\Phi_t(t)$:

$$u_t(t) = R_t i_t(t) + L_t \frac{di_t(t)}{dt} + k_t \omega(t) \quad (\text{III.35})$$

Korzystając z (III.33), można wyeliminować zmienną $i_t(t)$:

$$u_t(t) = \frac{R_t}{k_m} M_e(t) + \frac{L_t}{k_m} \frac{dM_e(t)}{dt} + k_t \omega(t) \quad (\text{III.36})$$

Napięcie zasilania $u_t(t)$ jest wielkością wejściową układu, wykorzystywana do sterowania. Pozostają jeszcze dwie zmienne: prędkość obrotowa $\omega(t)$ i moment elektryczny $M_e(t)$, który równoważy moment obciążenia silnika. Jedną z nich uznamy za

* W p. 6.6.2: o indukowaniu sem w prądnicy i w silniku.

wielkość wejściową. Jeśli moment elektryczny jest wielkością wejściową, to operatorowy model silnika ma postać:

$$\omega(s) = \frac{1}{k_t} \left[1 - \frac{R_t + sL_t}{k_m} \right] \begin{bmatrix} u_t(s) \\ M_e(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

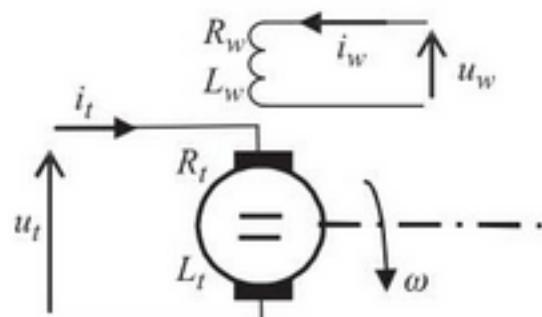
Jeśli wielkością wejściową jest prędkość obrotowa, to model jest następujący:

$$M_e(s) = \frac{k_m}{R_t + sL_t} [1 - k_t] \begin{bmatrix} u_t(s) \\ \omega(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.38})$$

14.5.2 W dalszej części do konstruowania modelu układu napędowego zostanie wykorzystana dodatkowa zależność, która wiąże ze sobą prędkość i moment obrotowy.

13.5.3. Silnik obcowzbudny

W obcowzbudnym silniku prądu stałego (rys. 13.11) strumień magnetyczny $\Phi_w(t)$ jest wytwarzany przez prąd o natężeniu $i_w(t)$ płynący w uzwojeniach źródła wzbudzenia, zasilanych stałym napięciem $u_w(t)$. W uzwojeniach twornika zasilanych napięciem $u_t(t)$ płynie prąd o natężeniu $i_t(t)$.



Rys. 13.11. Schemat silnika obcowzbudnego

Moment obrotowy $M_e(t)$ zależy od strumienia wzbudzenia i od natężenia prądu w obwodzie wirnika, zgodnie ze wzorem:

$$M_e(t) = c_m \Phi_w(t) i_t(t) \quad (\text{III.39})$$

przy czym współczynnik c_m jest stały i zależy od konstrukcji maszyny. Dla obwodu wzbudzenia można napisać równanie bilansu napięcia, obejmujące spadek napięcia na uzwojeniach źródła wzbudzenia o rezystancji R_w i siłę elektromotoryczną indukcji własnej z_w uzwojeń źródła wzbudzenia (indukowaną przez strumień $\Phi_w(t)$, wytworzony przez prąd obwodu wzbudzenia o natężeniu $i_w(t)$):

$$u_w(t) = R_w i_w(t) + z_w \frac{d\Phi_w(t)}{dt} \quad (\text{III.40})$$

Bilans napięć dla obwodu twornika uwzględnia spadek napięcia na uzwojeniach twornika, siłę elektromotoryczną indukcji własnej z_t uzwojeń twornika (indukowaną

* W p. 14.5.2: o konstrukcji modelu układu napędowego z silnikiem.

przez strumień $\Phi_t(t)$ wytworzony przez prąd płynący w obwodzie twomika, o natężeniu $i_t(t)$) oraz siłę elektromotoryczną wynikającą ze sprzężenia magnetycznego z obwodem wzbudzenia, zależną od strumienia sprzężenia $\Psi_w(t)$ i prędkości obrotowej twomika $\omega(t)$:

$$u_t(t) = R_t i_t(t) + z_t \frac{d\Phi_t(t)}{dt} + c_t \Psi_w(t) \omega(t) \quad (\text{III.41})$$

Zakładając liniową zależność natężenia prądu i wytworzonego strumienia magnetycznego, równania (III.39)–(III.41) można uprościć i przedstawić w postaci:

$$\begin{cases} M_e(t) = c_m L_w i_w(t) i_t(t) \\ u_w(t) = R_w i_w(t) + L_w \frac{di_w(t)}{dt} \\ u_t(t) = R_t i_t(t) + L_t \frac{di_t(t)}{dt} + c_t \Psi_w(i_w) \omega(t) \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

Ponieważ strumień sprzężenia Ψ_w jest funkcją natężenia prądu wzbudzenia, więc model jest nieliniowy, co w zasadzie nie przeszkadza przy jego zastosowaniu w symulacji, jest jednak trudniejsze do analizy teoretycznej. Układ równań (III.42) zlinearyzowany w punkcie pracy (u_{w0} , u_{t0} , i_{w0} , i_{t0} , M_{e0} , ω_0) ma postać:

$$\begin{cases} \Delta M_e(t) = c_m L_w (i_{w0} \Delta i_t(t) + i_{t0} \Delta i_w(t)) \\ \Delta u_w(t) = R_w \Delta i_w(t) + L_w \frac{d \Delta i_w(t)}{dt} \\ \Delta u_t(t) = R_t \Delta i_t(t) + L_t \frac{d \Delta i_t(t)}{dt} + k_{iw0} \Delta i_w(t) + k_{\omega0} \Delta \omega(t) \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

gdzie: $k_{iw0} = c_t \omega_0 \left. \frac{\partial \Psi(i_w)}{\partial i_w} \right|_0$, $k_{\omega0} = c_t \Psi(i_{w0})$. Napięcia zasilania uzwojeń wzbudzenia $u_w(t)$ i twornika $u_t(t)$ są wielkościami wejściowymi. Podobnie jak w poprzednim układzie (p. 13.5.2) zmienne odpowiadające prądom w obwodach są zwykle eliminowane z modelu i jedna z wielkości – prędkość obrotowa $\omega(t)$ lub moment elektryczny $M_e(t)$ – jest wielkością wejściową. Jeśli zmienną wyjściową jest prędkość obrotowa, to model można przedstawić w postaci transmitancji:

$$\omega(s) = \frac{1}{k_{\omega0}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{(R_t + sL_t)i_{t0} - k_{iw0}i_{w0}}{(R_w + sL_w)i_{w0}} & \frac{R_t + sL_t}{c_m L_w i_{w0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t(s) \\ u_w(s) \\ M_e(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

Jeśli natomiast zmienną wyjściową jest moment elektryczny, model ma postać:

$$M_e(s) = \frac{c_m L_w}{R_t + sL_t} \begin{bmatrix} i_{w0} & \frac{(R_t + sL_t)i_{t0} - k_{iw0}i_{w0}}{R_w + sL_w} & -k_{\omega0}i_{w0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t(s) \\ u_w(s) \\ \omega(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

14.5.3

Do przedstawionego modelu powrócimy[→] przy konstrukcji modeli układów napędowych i wprowadzimy związek momentu z prędkością obrotową.

Pytania i zadania



1. Na podstawie opisu zjawisk fizycznych (p. 6.1) uzasadnij wzory (III.33) i (III.39).
2. Scharakteryzuj przedstawione modele silników (liniowość, człony dynamiki, stabilność).
3. Przedstaw modele silników w postaci równań stanu. Jaka jest fizyczna interpretacja zmiennych stanu?
4. Dla każdego wariantu modelu zbierz listę przyjętych założeń (uwzględnione zjawiska, wybór zmiennych, warunki liniowości).
5. Jak zmienią się modele silników, jeśli zewnętrzne warunki powodują, że prędkość obrotowa ω jest proporcjonalna do momentu M_e ?

* W p. 14.5.3: o konstrukcji modelu układu napędowego z silnikiem obcowzbudnym.

Układy mechaniczne

14.1. Ogólne zasady konstruowania modeli

Podstawą tworzenia modeli układów mechanicznych jest dynamiczna równowaga sił i momentów sił, wynikająca z zasady d'Alemberta:

$$\sum F = 0, \quad \sum M = 0 \quad (\text{III.46})$$

Zależności odnoszą się do poszczególnych kierunków działania sił i osi momentów sił, i muszą uwzględniać wszystkie działające siły i momenty. Konstrukcję modelu rozpoczyna się więc od ustalenia granic analizowanego układu. Tym samym zostaną określone siły i momenty sił, które pochodzą spoza układu i które będą reprezentowane w równaniach bilansowych jako idealne źródła siły lub przesunięcia, oraz siły i momenty działające wewnątrz układu. W dalszym postępowaniu pomocne jest przedstawienie obiektu za pomocą schematu z idealnymi elementami, a więc wprowadzenie punktów materialnych reprezentujących ciała o określonych masach, ustalenie sił tarcia oraz elementów sprężystych. Na podstawie uproszczonego schematu łatwiej jest określić zależności geometryczne: wyznaczyć układ odniesienia, kierunek i zwrot współrzędnych, zdefiniować tożsamości geometryczne. Kolejnym krokiem jest wypisanie wszystkich bilansów sił i momentów sił. Rozpatruje się przy tym poszczególne kierunki działania sił, układając bilanse sił dla wszystkich punktów tego kierunku, które mogą się poruszać z różnymi prędkościami, oraz poszczególne osie obrotu, bilansując momenty sił w każdym punkcie o różnej prędkości obrotowej. Następnie wprowadza się do bilansów opis poszczególnych elementów: sprężyn, tłumików, ciał (mas); w ten sposób siły działające w układzie zostają powiązane z geometrią układu. Jeśli liczba niezależnych równań jest taka sama jak liczba niewiadomych, można przystąpić do uporządkowania równań bilansowych, czyli wyeliminowania z nich zmiennych, które można wyznaczyć na podstawie ustalonych wcześniej zależności geometrycznych.

Przedstawione zasady konstrukcji modelu dynamiki układu mechanicznego dotyczą ogólnego przypadku ruchu i mogą się wydawać nieco skomplikowane. Naj-

lepiej więc rozpocząć modelowanie obiektów mechanicznych od przeanalizowania prostych przypadków ruchu postępowego wzduż jednego kierunku lub obrotów wokół jednej osi.

14.2. Prosty ruch postępowy i obrotowy

14.2.1. Zasady konstruowania modelu

Konstruując model układu mechanicznego poruszającego się wzduż jednego kierunku, należy wyznaczyć wszystkie punkty układu, które mają różne prędkości. Dla każdego takiego punktu zakłada się dodatni kierunek ruchu i układu bilans sił działających w tym punkcie:

$$\sum F_a(t) = \sum F_r(t) \quad (\text{III.47})$$

gdzie: F_a – zewnętrzne siły akcji, F_r – siły reakcji poszczególnych elementów.

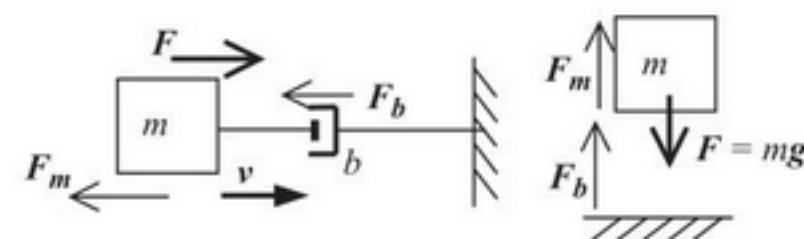
Analogicznie, najprostsze przypadki ruchu obrotowego dotyczą obiektów, w których obrót jest konstrukcyjnie ograniczony do jednej osi i wynika z działania zewnętrznego momentu siły. Zasada układania równań dla takich obiektów dotyczy bilansowania momentów sił:

$$\sum M_a(t) = \sum M_r(t) \quad (\text{III.48})$$

gdzie: M_a – zewnętrzne momenty siły akcji, M_r – momenty sił reakcji poszczególnych elementów.

14.2.2. Układ pojedynczej masy i tłumika

Jako pierwszy przykład rozważymy układ (rys. 14.1), w którym siła zewnętrzna $F(t)$ działa na ciało o masie m połączone z nieruchomym obiektem (ścianą) za pośrednictwem tłumika. Może to być też opis ciała spadającego pod wpływem własnego ciężaru ($F = mg$) z uwzględnieniem oporu ośrodka, w którym odbywa się ruch (siły tarcia F_b).



Rys. 14.1. Układ masy i tłumika

Punktem, który porusza się z pewną prędkością jest w tym przypadku ciało traktowane jako punkt materialny o masie m (np. środek ciężkości ciała fizycznego). Założmy, że prędkość $v(t)$ tego punktu ma zwrot zgodny ze zwrotem zewnętrznej siły F .

Sily reakcji elementów: ciała $F_m(t)$ i tłumika $F_b(t)$ są zwrócone przeciwnie do prędkości. Dla rozważanego punktu można napisać bilans sił:

$$F(t) = F_m(t) + F_b(t) \quad (\text{III.49})$$

Obie sily reakcji można wyrazić jako funkcje przesunięcia:

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) \quad (\text{III.50})$$

lub prędkości:

$$F(t) = m\dot{v}(t) + bv(t) \quad (\text{III.51})$$

Zależności (III.50) i (III.51) są liniowe, odpowiadają więc następującym transmitancjom:

$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{k}{s(Ts + 1)} \quad \text{lub} \quad \frac{v(s)}{F(s)} = \frac{k}{Ts + 1} \quad (\text{III.52})$$

gdzie: $k = 1/b$, $T = m/b$. Zależnie od wyboru zmiennej wyjściowej (x lub v) model ma postać członu inercyjno-całkującego lub prostego członu inercyjnego.

14.2.3. Układ pojedynczej sprężyny i tłumika

Punkty bilansowania sił są wyznaczane przez miejsca łączenia elementów. Nie ma potrzeby, aby w tym punkcie występowała masa, jak w przypadku prostego połączenia sprężyny i tłumika.

Przykład na CD.

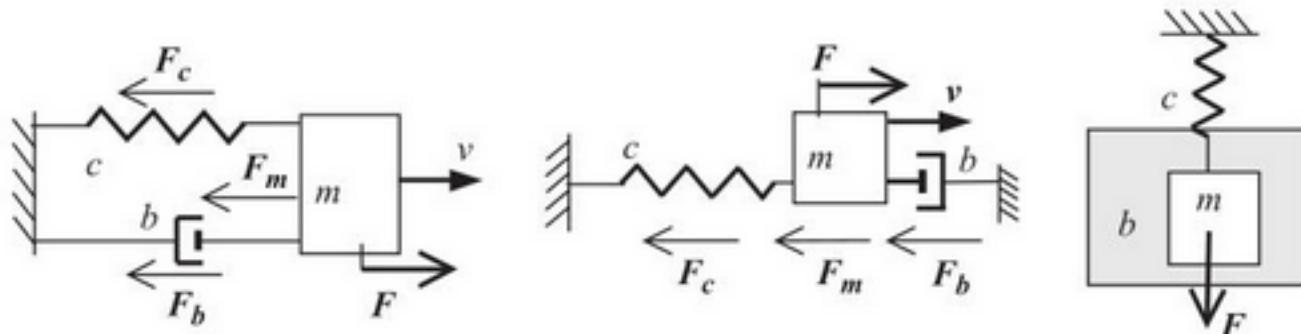
CD

14.2.4. Układ pojedynczej masy, sprężyny i tłumika

Rozważmy układ, w którym między ciałem o masie m i nieruchomym obiektem (ścianą) działają sily sprężystości i tarcia (rys. 14.2). Na ciało działa zewnętrzna sila $F(t)$. Może to być też model ciała zawieszonego na sprężynie i poruszającego się w ośrodku powodującym znaczące tarcie.

Zakładając, że prędkość $v(t)$ poruszającego się ciała ma zwrot zgodny z zewnętrzną siłą, można napisać następujący bilans sił:

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) \quad (\text{III.53})$$



Rys. 14.2. Układ masy, sprężyny i tłumika

Układ jest przykładem prostego członu oscylacyjnego o transmitancji:

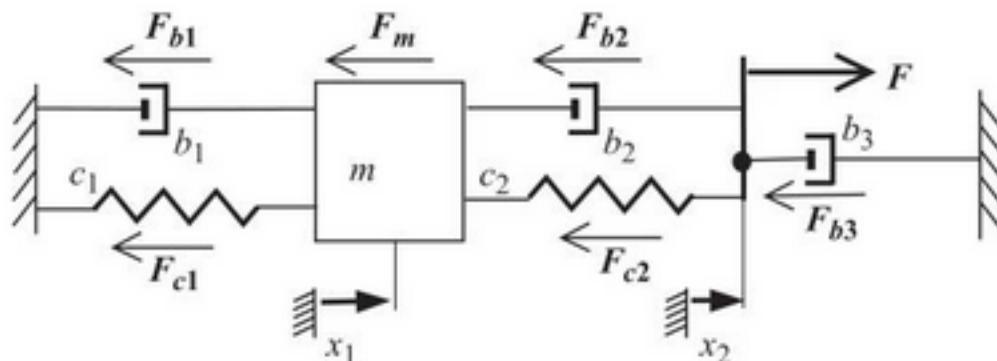
$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 c} \quad (\text{III.54})$$

gdzie: $k = 1/m$, $\zeta = b/(2\sqrt{mc})$, $\omega = \sqrt{c/m}$. Przedstawienie transmitancji w postaci

3.2.5 typowego członu pozwala w prosty sposób wykorzystać znane własności członu oscylacyjnego[→] w badaniu dynamiki układu. W tym przypadku dla typowych elementów (dodatnie wartości wszystkich parametrów) układ jest zawsze stabilny (zawsze jest $b/(2\sqrt{mc}) > 0$), a oscylacje wystąpią, jeśli tylko współczynnik tłumika nie będzie zbyt duży ($b < 2\sqrt{mc}$).

14.2.5. Przykład układu z kilkoma punktami ruchu

Jeśli w układzie ciał, sprężyn i tłumików można wyróżnić kilka punktów, które w tym samym czasie mogą się poruszać z różnymi prędkościami, to dla każdego takiego punktu wyznacza się układ odniesienia i dodatni kierunek ruchu oraz układ się równanie bilansu sił.



Rys. 14.3. Układ z dwoma punktami ruchu

Obiekt na rysunku (rys. 14.3) jest więc opisany dwoma równaniami:

- dla punktu o współrzędnej x_1 :

$$0 = m\ddot{x}_1(t) + b_1\dot{x}_1(t) + b_2[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] + c_1x_1(t) + c_2[x_1(t) - x_2(t)] \quad (\text{III.55})$$

- dla punktu o współrzędnej x_2 :

$$F(t) = b_2[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + b_3\dot{x}_2(t) + c_2[x_2(t) - x_1(t)] \quad (\text{III.56})$$

Miedzy punktami znajdują się dwa wspólne elementy, więc w obu równaniach występują podobne składniki związane z siłą reakcji sprężyny c_2 i tłumika b_2 , lecz różniące się znakami. Różnica znaków wynika z zasady określania siły reakcji elementu z ruchomymi końcami – siła reakcji zależy od różnicy przesunięć (prędkości) punktu, dla którego tworzy się bilans, i punktu na drugim końcu.

→ W p. 3.2.5 (a także 2.2.5): o własnościach członu oscylacyjnego.

Model obiektu tworzy układ obu równań bilansowych i w takiej postaci można go wykorzystywać w symulacji. W celu zastosowania teoretycznych metod analizy należałoby wprowadzić zmienną fazową $y_1 = \dot{x}_1$ i zapisać bilans w postaci układu równań pierwszego rzędu^{22.2}:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = y_1(t) \\ b_{23}\dot{x}_2(t) = c_2x_1(t) - c_1x_2(t) + b_2y_1(t) + F(t) \\ m_1b_{23}\dot{y}_1(t) = k_{x1}x_1(t) + c_2b_3x_2(t) - k_{y1}y_1(t) + b_2F(t) \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

gdzie: $k_{x1} = c_{12}b_{23} - c_1b_2$, $k_{y1} = b_{12}b_{23} - b_2^2$ lub przekształcenie go do postaci operatowej i wyznaczenie transmitancji:

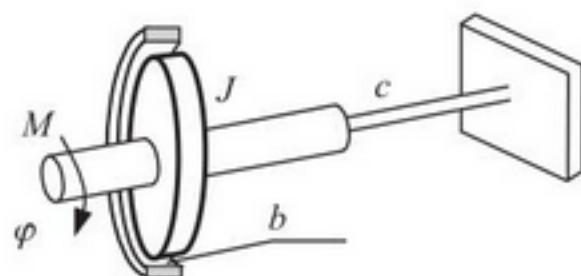
$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{M(s)} \begin{bmatrix} b_2s + c_2 \\ ms^2 + b_{12}s + c_1 + c_2 \end{bmatrix} F(s)$$

$$M(s) = (ms^2 + b_{12}s + c_{12})(b_{23}s + c_2) - (b_2s + c_2)^2 \quad (\text{III.58})$$

gdzie: $c_{12} = c_1 + c_2$, $b_{12} = b_1 + b_2$, $b_{23} = b_2 + b_3$. Zwróćmy uwagę, że: 1) analizowany obiekt ma dwa punkty o różnych prędkościach (co decyduje o liczbie równań bilansowych), lecz stan obiektu reprezentują trzy zmienne stanu, 2) zmienne x_1 i x_2 wpływają na siebie nawzajem, a obie wyznaczone transmitancje układu (x_1/F i x_2/F) mają taki sam mianownik.

14.2.6. Układ obrotowy z pojedynczą masą, sprężyną i tłumikiem

Prosty układ obrotowy tworzy tarcza o bezwładności J , łożysko wprowadzające tarcie lepkie b i wał o sprężystości c (rys. 14.14).



Rys. 14.14. Układ masy, sprężyny i tłumika

Przy założeniu, że kierunek kąta obrotu $\varphi(t)$ jest zgodny z kierunkiem zewnętrznego momentu wymuszającego $M(t)$, równanie bilansowe ma postać:

$$M(t) = M_i(t) + M_b(t) + M_c(t) \quad (\text{III.59})$$

Po wprowadzeniu opisu poszczególnych elementów jako funkcji kąta obrotu:

$$M(t) = J\ddot{\varphi}(t) + b\dot{\varphi}(t) + c\varphi(t) \quad (\text{III.60})$$

^{22.2} W p. 2.2.2: o przekształcaniu równania różniczkowego w układ równań pierwszego rzędu.

Zależnie od wartości parametrów obiekt jest prostym członem oscylacyjnym lub członem inercyjnym drugiego rzędu.

14.2.7. Przykład układu z punktami o różnej prędkości obrotu

CD

W układach obrotowych mogą również wystąpić punkty o różnych prędkościach obrotowych, co wymaga ułożenia odpowiednio większej liczby równań.
Przykład takiego układu na CD.

Pytania i zadania



1. Przeanalizuj powyższe przykłady układów prostego ruchu postępowego, zakładając przeciwnie zwroty przesunięć.
2. Wyznacz charakterystyki statyczne przedstawionych układów.
3. Porównaj równanie charakterystyczne układu równań (III.57) i transmitancji (III.58).
4. Wykonaj model obiektu z rys. 14.3 dla przypadku, gdy zewnętrzna siła F jest przyłożona do punktu reprezentującego masę m .
5. Wykonaj model obiektu z rys. 14.3 dla przypadku, gdy masa m znajduje się w punkcie, w którym działa zewnętrzna siła F .
6. Jak wpłynie na model układu z rys. 14.3 założenie o niewielkiej wartości masy m ?
7. Dla przedstawionych powyżej przykładów ruchu postępowego zaproponuj analogiczne układy w ruchu obrotowym.
8. Jak dobrać wartości elementów, aby w odpowiedzi układu (III.60) nie występowały oscylacje?

14.3. Ruch względny

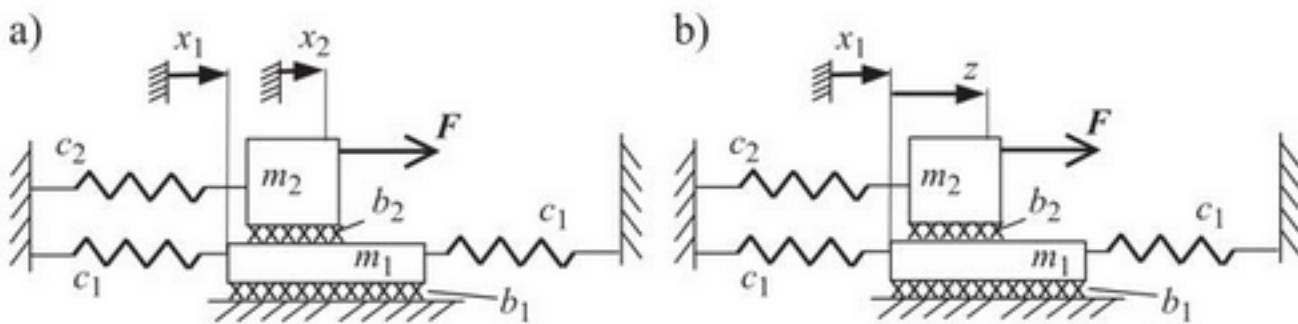
Typowe zmienne układów mechanicznych to przesunięcia liniowe i kątowe. Ponieważ wartość tego typu zmiennych zależy od wybranego układu odniesienia, kolejne przykłady ilustrują zagadnienie wyboru takiego układu.

14.3.1. Względny układ odniesienia [5]

Rozważmy przykład układu, w którym jedno ciało przesuwa się po powierzchni innego ciała znajdującego się w ruchu (rys. 14.5).

Opisując obiekt za pomocą przesunięć x_1 i x_2 określonych względem stałych punktów odniesienia (rys. 14.5a), otrzymujemy następujące równania:

$$\begin{cases} 0 = m_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 \dot{x}_1(t) + 2c_1 x_1(t) + b_2 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] \\ F(t) = m_2 \ddot{x}_2(t) + c_2 x_2(t) + b_2 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] \end{cases} \quad (\text{III.61})$$



Rys. 14.5. Układ z przesunięciem względnym mas; (a) stałe i (b) względne punkty odniesienia

Wspólnym elementem obu równań jest tarcie lepkie b_2 , różne są jednak znaki wprowadzonej do równań siły tarcia $b_2[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)]$. Właściwe znaki zapewnia konsekwentne stosowanie zasady wyznaczania siły reakcji tłumika o dwóch ruchomych końcach¹. Transformaty równań (III.61) mają postać:

$$\begin{cases} 0 = (m_1 s^2 + (b_1 + b_2)s + 2c_1)x_1(s) - b_2 s x_2(s) \\ F(t) = -b_2 s x_1(s) + (m_2 s^2 + b_2 s + c_2)x_2(s) \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

Przesunięcie x_2 ciała o masie m_2 można również jednoznacznie określić przez podanie przesunięcia względem masy m_1 , czyli przez zmienną z . Zmianę współrzędnych przeprowadza się przez podstawienie wyrażenia:

$$x_2(t) = x_1(t) + z(t)$$

do układu równań (III.61), co daje:

$$\begin{cases} 0 = m_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 \dot{x}_1(t) + 2c_1 x_1(t) - b_2 \dot{z}(t) \\ F(t) = m_2 [\ddot{x}_1(t) + \ddot{z}(t)] + c_2 [x_1(t) + z(t)] + b_2 \dot{z}(t) \end{cases} \quad (\text{III.63})$$

a w wersji operatorowej:

$$\begin{cases} 0 = (m_1 s^2 + b_1 s + 2c_1)x_1(s) - b_2 s z(s) \\ F(t) = (m_2 s^2 + c_2)x_1(s) + (m_2 s^2 + b_2 s + c_2)z(s) \end{cases} \quad (\text{III.64})$$

Równania (III.63) można oczywiście ułożyć bezpośrednio na podstawie rysunku (rys. 14.5b). W ustaleniu znaku siły tarcia (b_2) występującej między obu ciałami nadal pomaga zasada wyznaczania różnicy prędkości w punktach bilansu – dla bilansu w punkcie m_1 jest więc $b_2[0 - \dot{z}(t)]$, a dla bilansu w punkcie m_2 jest $b_2[\dot{z}(t) - 0]$, ponieważ w układzie odniesienia zmiennej z masa m_1 jest nieruchoma. Z kolei przy określaniu sił bezwładności należy pamiętać, że siły te są proporcjonalne zawsze do przyspieszenia absolutnego, a nie do względnego.

Na podstawie układów równań operatorowych (III.62) lub (III.64) można wyznaczyć następujące transmitancje obiektu:

¹ Siła jest proporcjonalna do różnicy prędkości punktu, dla którego jest tworzony bilans, i prędkości drugiego końca.

$$G_{x_1}(s) = \frac{x_1(s)}{F(s)} = \frac{b_2 s}{M(s)}$$

$$G_{x_2}(s) = \frac{x_2(s)}{F(s)} = \frac{m_1 s^2 + (b_1 + b_2)s + 2c_1}{M(s)} \quad (\text{III.65})$$

$$G_z(s) = \frac{z(s)}{F(s)} = \frac{m_1 s^2 + b_1 s + 2c_1}{M(s)}$$

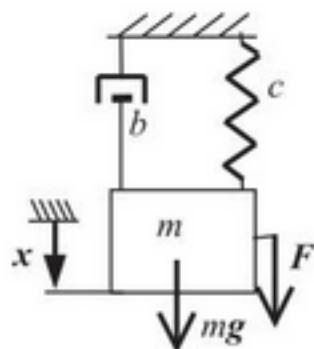
gdzie $M(s) = (m_1 s^2 + b_1 s + 2c_1)(m_2 s^2 + b_2 s + c_2) + b_2 s(m_2^2 s^2 + c_2)$. Transformaty przesunięć $G_{x_2}(s)$ i $G_z(s)$ wiążą taka sama relacja jak zmienne $x_2(t)$ i $z(t)$:

$$x_2(s) = G_{x_2}(s)F(s) = (G_{x_1}(s) + G_z(s))F(s) = x_1(s) + z(s)$$

Właściwości dynamiczne modelu nie zależą od wyboru układu odniesienia dla zmiennych przesunięć.

14.3.2. Przesunięty układ odniesienia

Przesunięcia określające stan ustalony układów zawierających sprężyny, tłumiki i ciała o określonej masie zależą tylko od wartości zewnętrznych wymuszeń i parametrów sprężyn. Układy odniesienia dla przesunięć są zazwyczaj wybierane w taki sposób, aby zerowe wartości zmiennych oznaczały, że sprężyny w układzie nie są ani rozciągnięte, ani ściśnięte. Jednak nie jest to regułą, co ilustruje kolejny przykład układu z ciałem o danej masie, tłumikiem i sprężyną, poruszającego się w polu grawitacyjnym (rys. 14.6).



Rys. 14.6. Układ ciała, tłumika i sprężyny w polu grawitacyjnym

Układ można opisać jednym równaniem wyznaczonym względem stałego punktu odniesienia:

$$F(t) + mg = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) \quad (\text{III.66})$$

W równaniu występują dwie siły akcji – wymuszenie $F(t)$ oraz stały ciężar ciała mg . W sytuacji braku wymuszenia $F(t) = 0$ stan równowagi ustala się pod wpływem siły grawitacji i wynosi:

$$x_0 = mg/c \quad (\text{III.67})$$

Zastosujmy teraz w modelu układu zmienną $z(t)$, która oznacza przesunięcie masy względem stanu równowagi x_0 . W tym celu do równania (III.67) podstawimy:

$$x(t) = x_0 + z(t)$$

i otrzymamy model w postaci:

$$F(t) + mg = m\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) + c(x_0 + z(t)) \quad (\text{III.68})$$

Na podstawie (III.67) wiadomo, że $cx_0 = mg$, więc ostatecznie:

$$F(t) = m\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) + cz(t) \quad (\text{III.69})$$

W ten sposób uzyskaliśmy prostszy model, w którym nie występuje ciężar ciała, z tym że zerowe przesunięcie ($z = 0$) oznacza tu sprężynę rozciągniętą o x_0 . Uproszczenie modelu było możliwe dzięki liniowości opisu sprężyny.

14.3.3. Układ odniesienia względny i przesunięty

Problem wyboru względnego układu odniesienia i jego przesunięcia mogą występować łącznie.

Przykład na CD.

CD

Pytania i zadania

1. Z układów równań (III.62) i (III.64) wyprowadź transmitancje (III.64).
2. Zastosuj przesunięcie punktu odniesienia w układzie pokazanym na rys. 14.6, przy założeniu, że model sprężyny ma postać $F_c = cx^2$. Czy zmiana punktu odniesienia uprościła model?
3. Czy zastosowanie względnego i przesuniętego układu odniesienia ma wpływ na opis dynamicznych własności obiektu?



14.4. Ruch złożony

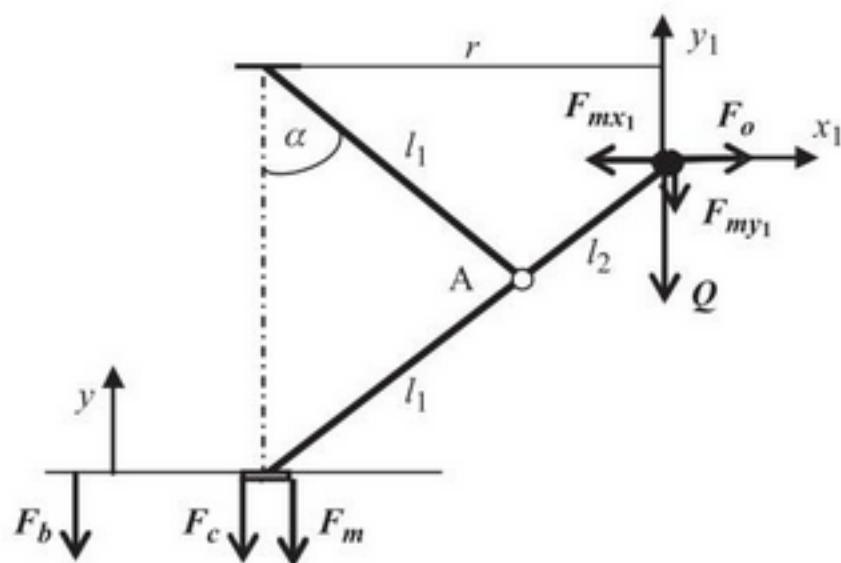
14.4.1. Wprowadzenie

Ogólny przypadek opisu dynamiki ruchu obiektów dotyczy ruchu ciała swobodnego, na które działa dowolny układ sił. Oznacza to, że ciało nie ma ograniczonego toru ruchu ani osi obrotu i że może na niego działać dowolna liczba sił, dowolnie skierowanych, zaczepionych w różnych punktach tego ciała. W układach technicznych zazwyczaj występują konstrukcyjne ograniczenia liczby stopni swobody, co znacznie upraszcza modelowanie, zawsze jednak konieczne jest uwzględnienie wektorowego charakteru sił i momentów sił.

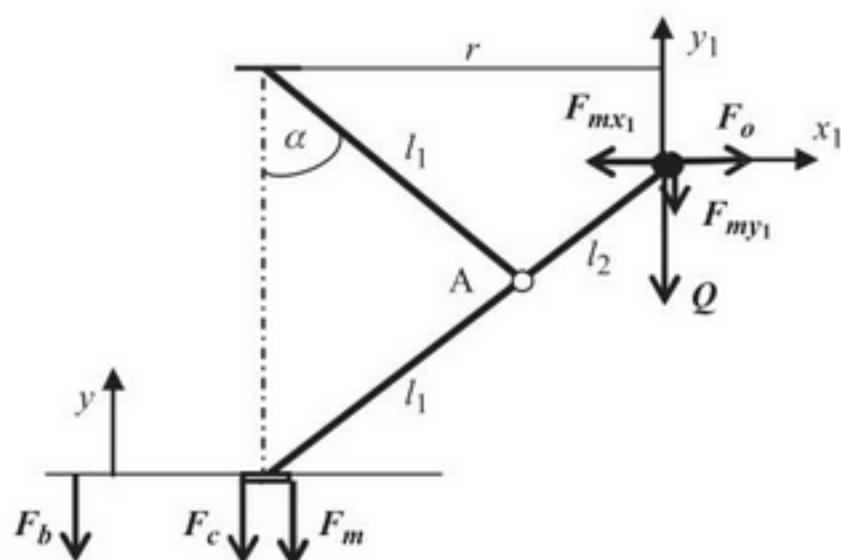
14.4.2. Ruch mechanizmu odśrodkowego

Klasycznym przykładem ruchu złożonego jest ruch mechanizmu odśrodkowego (rys. 14.7). Konstrukcja tego mechanizmu umożliwia pionowy ruch pierścienia o masie m_p , sprężonego ze sprężyną k i tłumikiem b , oraz ruch po okręgu dwóch kul o masach m . Dla uproszczenia pomija się masę ramion mechanizmu.

W układzie można wyróżnić dwie grupy sił (rys. 14.8) – siły związane z pierścieniem i siły związane z kulami.



Rys. 14.7. Schemat mechanizmu odśrodkowego



Rys. 14.8. Siły działające w układzie mechanizmu odśrodkowego

Sily przyłożone do pierścienia wynikają z ruchu postępowego i są to:

$$- \text{ siła reakcji sprężyny} \quad F_c(t) = cy(t) \quad (\text{III.70})$$

$$- \text{ siła reakcji tłumika:} \quad F_b(t) = b\dot{y}(t) \quad (\text{III.71})$$

$$- \text{ siła bezwładności:} \quad F_m(t) = m_p\ddot{y}(t) \quad (\text{III.72})$$

Sily związane z kulami wynikają z ruchu obrotowego, ale także z ruchu w kierunku pionowym i poziomym:

$$- \text{ siła odśrodkowa kul: } F_o(t) = 2m\omega^2(t)r(t) \quad (\text{III.73})$$

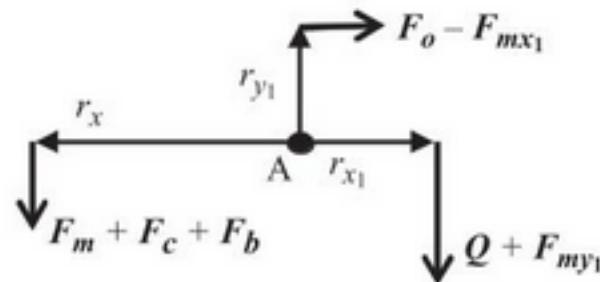
$$- \text{ siła bezwładności kul w kierunku } x_1: F_{mx_1}(t) = 2m\ddot{x}_1(t) \quad (\text{III.74})$$

$$- \text{ siła bezwładności kul w kierunku } y_1: F_{my_1}(t) = 2m\ddot{y}_1(t) \quad (\text{III.75})$$

$$- \text{ ciężar kul: } Q = 2mg \quad (\text{III.76})$$

W ruchu obrotowym kul występuje jeszcze siła związana z przyspieszeniem stycznym do toru ruchu. Działa ona jednak w płaszczyźnie prostopadłej do innych sił, więc w rozważanym przypadku nie ma znaczenia.

Do konstrukcji modelu wykorzystamy warunek równowagi momentów wyznaczonych względem przegubu A, pamiętając, że moment siły nie zmienia się przy przesuwaniu siły wzdułż linii jej działania (rys. 14.9).



Rys. 14.9. Momenty sił względem przegubu A

Równanie równowagi w przegubie A jest następujące:

$$(F_m(t) + F_b(t) + F_c(t))r_x(t) = (Q + F_{my_1}(t))r_{x_1}(t) + (F_o(t) - F_{mx_1}(t))r_{y_1}(t) \quad (\text{III.77})$$

Po podstawieniu do bilansu wzorów opisujących poszczególne siły, czyli (III.70)–(III.76), i ramiona sił:

$$r_x(t) = l_1 \sin \alpha(t), \quad r_{x_1}(t) = l_2 \sin \alpha(t), \quad r_{y_1}(t) = l_2 \cos \alpha(t) \quad (\text{III.78})$$

oraz obustronnym podzieleniu przez $2l_2 m \sin \alpha(t)$ otrzyma się:

$$\frac{l_1}{2l_2 m} (m_p \ddot{y}(t) + b\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t)) = g + \ddot{y}_1(t) + (\omega^2(t)r(t) - \ddot{x}_1(t)) \operatorname{ctg} \alpha(t) \quad (\text{III.79})$$

Przy założeniu, że zmienną wejściową jest prędkość $\omega(t)$, a zmienną wyjściową przesunięcie $y(t)$, w równaniu występują jeszcze inne zmienne (y_1 , x_1 , r , α), które trzeba wyeliminować na podstawie zależności geometrycznych (szczególny analizy na CD). Wynika z nich, że pionowe położenie kul y_1 można wyrazić jako:

$$y_1(t) = 2l_1 - (l_1 - l_2) \cos \alpha(t) \quad (\text{III.80})$$

natomiast położenie $x_1(t)$ obracających się kul jest równe promieniowi $r(t)$:

$$x_1(t) = r(t) = (l_1 + l_2) \sin \alpha(t) \quad (\text{III.81})$$

CD

W ten sposób trzy zmienne (y_1 , x_1 , r) zostały wyrażone za pomocą funkcji kąta α , który jest związany ze zmienną wyjściową y zależnością:

$$y(t) = 2l_1(1 - \cos \alpha(t)) \quad (\text{III.82})$$

Po podstawieniu do równania bilansowego (III.79) wyprowadzonych wzorów i odpowiednich pochodnych uzyskuje się następującą postać:

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{2l_2 m} (m_p \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + c y(t)) &= g + \frac{l_1 - l_2}{2l_1} \ddot{y}(t) + \omega^2(t)(l_1 + l_2) \cos \alpha(t) - \\ &- \beta \left(\dot{y}(t) \operatorname{ctg}^2 \alpha(t) - \frac{\dot{y}^2(t) \cos \alpha(t)}{2l_1 \sin^4 \alpha(t)} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.83})$$

Aby otrzymać ostateczną formę modelu, należy jeszcze wyeliminować funkcje zmiennej $\alpha(t)$, która występuje jako argument funkcji trygonometrycznych. Punktem wyjścia jest tu związek (III.82) i odpowiednie twierdzenia trygonometryczne (szczegóły analizy na CD). W wyniku przeprowadzonych przekształceń uzyskuje się następujący model:

CD

$$a_1(t) \ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_3(t) \dot{y}^2(t) + a_4(t) y(t) = \beta(2l_1 - y(t)) \omega^2(t) + g$$

gdzie: $a_1(t) = \frac{m_p l_1}{2ml_2} - \frac{l_1 - l_2}{2l_1} + \frac{\beta}{y(t)} \frac{(2l_1 - y(t))^2}{4l_1 - y(t)}$,

$$a_2 = \frac{bl_1}{2ml_2}, \quad a_3(t) = -\beta \frac{4l_1^2(2l_1 - y(t))}{(4l_1 - y(t))^2 y^2(t)}, \quad a_4 = \frac{cl_1}{2ml_2} \quad (\text{III.84})$$



Wyrażenie jest nieliniowym równaniem różniczkowym w postaci uwikłanej. Można je wykorzystać praktycznie tylko w badaniach symulacyjnych*. Model przeznaczony do badań analitycznych można zlinearyzować* w punkcie pracy (y_0, ω_0) , wyznaczonym na podstawie charakterystyki statycznej ($\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = 0$):

$$y_0 = 2ml_2 \frac{g + 2l_1 \beta \omega_0^2}{cl_1 + 2ml_2 \beta \omega_0^2} \quad (\text{III.85})$$

14.4.3. Uproszczony model mechanizmu odśrodkowego

Model mechanizmu odśrodkowego można uprościć, przyjmując kilka założeń. Założymy więc, że momenty sił wynikające z bezwładności kul poruszających się w kierunku x_1 (III.74) i y_1 (III.75) oraz ciężaru kul (III.76) są znacznie mniejsze niż pozostałe momenty. Wówczas równanie bilansowe obiektu ma postać:

$$(F_m(t) + F_b(t) + F_c(t))r_x(t) = F_o(t)r_{y1}(t) \quad (\text{III.86})$$

* W p. 21.4: o symulacji nieliniowych równań różniczkowych.

* W p. 2.3.1: o linearyzacji lokalnej równań różniczkowych.

Po rozwinięciu równania z uwzględnieniem wzorów (III.70)–(III.73) i (III.78) otrzyma się:

$$(m_p \ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t))l_1 \sin \alpha(t) = 2m\omega^2(t)r(t)l_2 \cos \alpha(t) \quad (\text{III.87})$$

Kolejne kroki w uporządkowaniu modelu to obustronne dzielenie przez $2l_2 m \sin \alpha(t)$ i zastosowanie wzoru (III.80):

$$\frac{l_1}{2ml_2} (m_p \ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t)) = \omega^2(t)(l_1 + l_2) \cos \alpha(t) \quad (\text{III.88})$$

oraz wyeliminowanie zmiennej $\alpha(t)$ na podstawie zależności (III.82). Ostateczna postać modelu to:

$$\frac{l_1}{2ml_2} (m_p \ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t)) = \beta(2l_1 - y(t))\omega^2(t) \quad (\text{III.89})$$

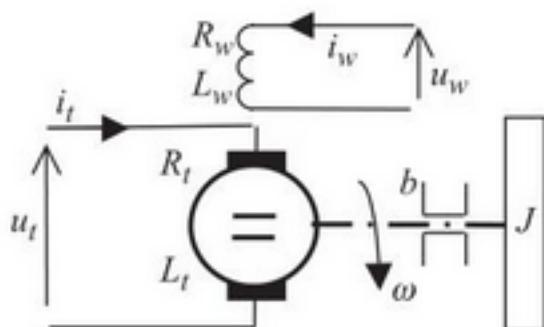
Uproszczony model mechanizmu odśrodkowego nadal ma postać nieliniowego równania różniczkowego w wersji uwikłanej, ale o znacznie prostszej formie niż wyrażenie (III.84). Prostsza jest też charakterystyka statyczna obiektu:

$$y_0 = 2ml_2 \frac{2l_1 \beta \omega_0^2}{cl_1 + 2ml_2 \beta \omega_0^2} \quad (\text{III.90})$$

14.5. Układy z napędem elektrycznym

14.5.1. Charakterystyka ogólna

Modele obiektów mechanicznych są wykorzystywane do opisu obciążenia mechanicznego układów napędowych, w których źródłem siły czy momentu obrotowego jest silnik elektryczny (rys. 14.10).



Rys. 14.10. Schemat układu z napędem elektrycznym

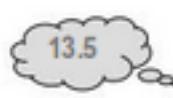
Połączenie modeli układów mechanicznych i elektrycznych w ruchu obrotowym odbywa się na podstawie bilansu momentu obrotowego, wytworzanego przez napęd elektryczny, $M_e(t)$, i mechanicznego momentu obciążenia $M_m(t)$:

$$M_e(t) = M_m(t) \quad (\text{III.91})$$

W przedstawianym przykładzie moment mechaniczny jest sumą momentów wynikających z tarcia w łożyskach (b) i bezwładności obracanych elementów (J) oraz mo-

mentu siły $M_o(t)$, wymuszającego obrót napędzanego urządzenia (obciążenie, jakie stanowi zewnętrzny układ mechaniczny):

$$M_m(t) = J\dot{\omega}(t) + b\omega(t) + M_o(t) \quad (\text{III.92})$$

 Moment elektryczny wytwarzany przez silnik prądu stałego lub zmiennego zależy od własności i parametrów silnika odpowiedniego typu[•]. W następnych podrozdziałach zostaną porównane modele napędów z silnikami prądu stałego.

14.5.2. Napęd z silnikiem o trwałych magnesach

Konstrukcja modelu napędu z silnikiem o trwałych magnesach opiera się na równaniach (III.91) i (III.92) oraz zlinearyzowanych równaniach (III.33) i (III.34), opisujących moment elektryczny $M_e(t)$ oraz bilans napięć w twomiku silnika zasilanym napięciem $u_t(t)$. Po wyeliminowaniu zmiennych $M_e(t)$ i $M_m(t)$ i przekształceniu do postaci operatorowej, układ równań ma postać:

$$\begin{cases} (b + sJ)\omega(s) + M_o(s) = k_m i_t(s) \\ u_t(s) = (R_t + sL_t)i_t(s) + k_t\omega(s) \end{cases} \quad (\text{III.93})$$

Jeśli wielkością wyjściową układu jest prędkość obrotowa ω , to transmitancja obiektu ma postać:

$$\omega(s) = \frac{1}{(R_t + sL_t)(b + sJ) + k_m k_t} \begin{bmatrix} u_t(s) \\ M_o(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.94})$$

Jeśli natomiast wyznacza się moment obciążenia M_o , to transmitancja jest następująca:

$$M_o(s) = \frac{1}{(R_t + sL_t)} \begin{bmatrix} k_m & -(R_t + sL_t)(b + sJ) - k_m k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t(s) \\ \omega(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.95})$$

14.5.3. Napęd z silnikiem obcowzbudnym

Przy konstruowaniu modelu napędu z silnikiem obcowzbudnym zostaną wykorzystane równania (III.91) i (III.92) oraz zlinearyzowany układ równań (III.43), zawierający równanie momentu elektrycznego, opis obwodu twornika zasilanego napięciem $u_t(t)$ oraz obwodu wimika zasilanego napięciem $u_w(t)$. Przy założeniu, że obciążenie napędu jest stałe ($M_o(t) = \text{const}$), a wielkością wyjściową jest prędkość obrotowa silnika $\omega(t)$, podstawą modelu jest operatorowy układ równań w postaci:

$$\begin{cases} (b + sJ)\omega(s) + M_o(s) = c_m L_w(i_{w0}i_t(s) + i_{t0}i_w(s)) \\ u_w(s) = (R_w + sL_w)i_w(s) \\ u_t(s) = (R_t + sL_t)i_t(s) + k_{hv0}i_w(s) + k_{\omega0}\omega(s) \end{cases} \quad (\text{III.96})$$

• W p. 13.5: o modelu silnika prądu stałego o.

Model napędu można przedstawić w postaci transmitancji, np. ze zmienną wyjściową ω :

$$\omega(s) = \frac{1}{M(s)} \begin{bmatrix} c_m L_w i_{w0} & c_m L_w \frac{(R_t + sL_t)i_{t0} - k_{iw0}i_{w0}}{(R_w + sL_w)} & R_t + sL_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t(s) \\ u_w(s) \\ M_o(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.97})$$

$$M(s) = (R_t + sL_t)(b + sJ) + k_{w0}c_m L_w i_{iw0}$$

Jeśli silnik jest sterowany od strony wzbudzenia (tzn. poprzez napięcie zasilające uzwojenie wzbudzenia $u_w(t)$), to zasilanie uzwojenia twornika jest stałe ($u_t(t) = \text{const}$). Jeśli sterowanie silnika odbywa się za pomocą napięcia zasilającego uzwojenie twornika $u_t(t)$, to zasilanie uzwojenia wzbudzenia jest stałe ($u_w(t) = \text{const}$). To oznacza, że w praktyce model można uprościć, ponieważ zwykle jedna ze zmiennych wejściowych – $u_t(s)$ lub $u_w(s)$ – jest równa zeru (są to transformaty zmiennych przyrostowych $\Delta u_t(t)$, $\Delta u_w(t)$).

Pytania i zadania

1. Porównaj modele silników i napędów: (III.37) i (III.94) oraz (III.44) i (III.97). Jak na postać modelu wpływa uwzględnienie momentu bezwładności, tarcia i obciążenia?
2. Co można powiedzieć o stabilności i oscylacjach w odpowiedziach przedstawionych modeli?
3. Przedstaw modele napędów w postaci równań stanu.



Układy hydrauliczne

15.1. Ogólne zasady konstruowania modeli

Podstawą konstrukcji modeli układów hydraulicznych jest bilansowanie przepływu cieczy w zbiornikach i rozgałęzieniach sieci oraz ciśnień w elementach przepływo-wych. W bilansie ciśnień wykorzystuje się prawo Bernoullego[→] przystosowane do własności cieczy rzeczywistej:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + \Delta p \quad (\text{III.98})$$

gdzie: p , v i h z indeksami 1 i 2 to ciśnienie, prędkość przepływu i wysokość położenia w dwóch punktach instalacji, a Δp – straty ciśnienia w instalacji. Stosowanie odpowiednich założeń dotyczących znaczenia poszczególnych zjawisk hydraulicznych pozwala uprościć wzór (III.98), a tym samym model całego obiektu.

Przede wszystkim zwykle nie uwzględnia się efektu pojemnościowego i bezwładnościowego. Pominięcie pojemności jest uzasadnione ze względu na bardzo małą ściśliwość cieczy i zazwyczaj dużą sztywność aparatury, co pozwala korzystać z prawa ciągłości przepływu. Jeśli w układzie nie występują gwałtowne zmiany prędkości przepływu, to pomija się również efekt bezwładnościowy (znaczna masa, ale niewielkie przyspieszenie). W efekcie straty ciśnienia Δp wynikają przede wszystkim z oporów hydraulicznych. W pewnych warunkach można założyć, że ciecz rzeczywista zachowuje się w przybliżeniu jak ciecz doskonała (brak oporu hydraulicznego i pojemności ściśliwości) – mały współczynnik lepkości i niewielkie prędkości przepływu pozwalają korzystać z prawa Bernoullego dla cieczy doskonałych ($\Delta p = 0$).

Kolejne uproszczenia wzoru (III.98) wynikają z własności obiektu. Dla instalacji znajdujących się na jednym poziomie nieistotne jest ciśnienie podnoszenia ($\rho g h$). Taka sama prędkość przepływu cieczy w całej instalacji pozwala wyeliminować ciśnienie dynamiczne ($\rho v^2/2$). W otwartych fragmentach instalacji nie wystę-

8.7

* W p. 8.7: o prawie Bernoullego dla cieczy doskonałej (nielepkiej i nieściśliwej).

puje ciśnienie statyczne (p). Tego typu uproszczenia zwykle mają uzasadnienie w przypadku niewielkich układów, w których istotne są zjawiska wynikające z lepkości, ściśliwości i bezwładności cieczy.

15.2. Zbiornik ze swobodnym wypływem

15.2.1. Model ogólny dynamiki wypływu

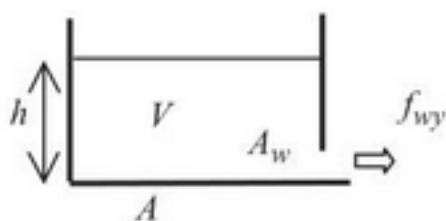
Ogólny model dynamiki przepływu cieczy przez otwarty zbiornik ze swobodnym wypływem, wyprowadzony na podstawie prawa Bernoullego (tj. dla cieczy doskonałej), ma postać (II.173):

$$\dot{V}(t) = -A_w \sqrt{2gh(t)} \quad (\text{III.99})$$

Kształt zbiomika ma wpływ na to, w jaki sposób zmiana objętości, występująca we wzorze, zależy od poziomu cieczy w zbiorniku. Poniżej przedstawiono przykłady modeli zbiorników, dla których istnieje prosta zależność pomiędzy objętością i wysokością. W każdym przypadku gdy korzysta się ze wzoru (III.99), zakłada się, że prędkość, z jaką przemieszcza się ciecz w zbiorniku jest znacznie mniejsza niż prędkość wypływu – tym samym nie uwzględnia się energii kinetycznej opadającej cieczy, tarcia o ściany zbiornika, efektu bezwładnościowego przy zmianie prędkości.

15.2.2. Prosty zbiornik o płaskim dnie i pionowych ścianach

W zbiorniku o płaskim dnie i prostopadłych do niego ścianach na całej wysokości jest takie samo pole przekroju A (rys. 15.1).



Rys. 15.1. Schemat prostego zbiornika ze swobodnym wypływem

W takim przypadku objętość cieczy wypełniającej zbiornik zależy liniowo od wysokości:

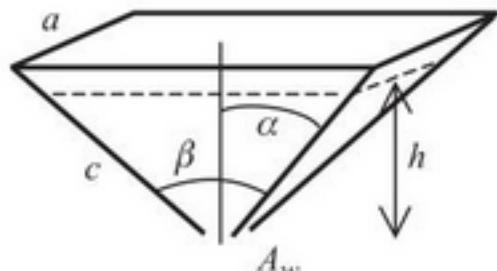
$$V(t) = A_w h(t) \quad (\text{III.100})$$

Po podstawieniu pochodnej objętości do równania (III.99) otrzyma się model dynamiki swobodnego wypływu cieczy z prostego zbiornika:

$$A\dot{h}(t) = -A_w \sqrt{2gh(t)} \quad (\text{III.101})$$

15.2.3. Zbiornik o kształcie ostrosłupa

Jeśli zbiornik ma kształt ostrosłupa foremnego, z wypływem w wierzchołku (rys. 15.2), to na podstawie zależności matematycznych



Rys. 15.2. Wielkości opisujące zbiornik o kształcie ostrosłupa

wiadomo, że objętość takiego zbiornika jest funkcją wysokości h i długości boku podstawy a :

$$V(t) = \frac{1}{3} h(t) a^2(t) \quad (\text{III.102})$$

W czasie opróżniania zbiornika zmienia się i wysokość, i pole podstawy bryły, jaką tworzy ciecz wypełniająca zbiornik. Nie zmienia się natomiast kąt α między wysokością ostrosłupa i jego krawędzią, a także kąt β między krawędziami ścian. Dzięki temu na podstawie zależności geometrycznych:

$$c(t) = \frac{h(t)}{\cos \alpha} = \frac{a(t)}{2 \sin(\beta/2)} \quad (\text{III.103})$$

można wyznaczyć zmienną $a(t)$. Objętość części ostrosłupa wypełnionej do wysokości $h(t)$ można przedstawić wzorem:

$$V(t) = kh^3(t) \quad (\text{III.104})$$

gdzie $k = \frac{4}{3} \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\cos \alpha} \right)^2$ jest stałym współczynnikiem wynikającym z konstrukcji zbiornika. Po podstawieniu pochodnej objętości:

$$\dot{V}(t) = 3kh^2(t)\dot{h}(t) \quad (\text{III.105})$$

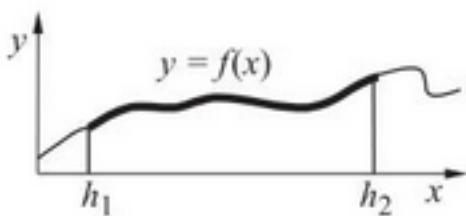
do wzoru (III.99) otrzyma się model w postaci:

$$3k\dot{h}(t) = -A_w \frac{\sqrt{2gh(t)}}{h^2(t)} \quad (\text{III.106})$$

15.2.4. Zbiorniki z pionową osią obrotu

Ściana bryły obrotowej powstaje przez obrót krzywej $y=f(x)$ wokół osi bryły (rys. 15.3); objętość takiej bryły określa wzór:

$$V = \pi \int_{h_1}^{h_2} f^2(x) dx \quad (\text{III.107})$$

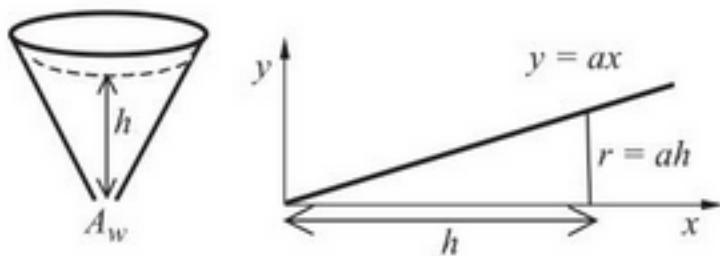


Rys. 15.3. Tworząca bryły obrotowej

Jeśli zbiornik ma kształt stożka (rys. 15.4), to linia tworząca ścianę boczną zbiornika jest linią prostą: $y = ax$.

Korzystając ze wzoru (III.107), można zapisać zależność objętości cieczy od jej poziomu $h(t)$:

$$V(t) = \pi \int_0^h a^2 x^2 dx = \frac{\pi a^2}{3} h^3(t) \quad (\text{III.108})$$



Rys. 15.4. Wielkości opisujące zbiornik o kształcie stożka

Po wyznaczeniu pochodnej objętości:

$$\dot{V}(t) = \pi a^2 h^2(t) \dot{h}(t) \quad (\text{III.109})$$

i podstawieniu do (III.99) otrzymuje się model w postaci:

$$\pi a^2 \dot{h}(t) = -A_w \frac{\sqrt{2gh(t)}}{h^2(t)} \quad (\text{III.110})$$

CD

W podobny sposób wyznacza się model przepływu przez każdy inny zbiornik o kształcie bryły obrotowej, np. $y = a\sqrt{x}$. Wybrane przykłady na CD.

Można się domyślać, że modele przepływu dla takich zbiorników są nieliniowe, podobnie jak model (III.110); charakter nieliniowości zależy od kształtu zbiornika. W jednym szczególnym przypadku można jednak uzyskać model liniowy.

Pytania i zadania



1. Kiedy założenie o niewielkiej prędkości opadania cieczy w zbiorniku jest spełnione?
2. Zlinearyzuj wzory (III.101), (III.106) i (III.110) opisujące wypływ ze zbiorników.
3. Jaką funkcją musiałby być opisany kształt zbiornika, aby model wypływu był liniowy?

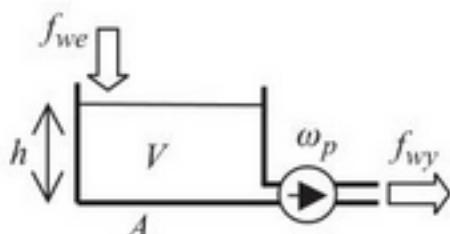
15.3. Układy zbiorników

15.3.1. Wprowadzenie

Kolejne przykłady dotyczą połączenia zbiornika z różnymi elementami przepływowymi. Rozpatrywane są proste zbiomiki o pionowych ścianach, prostopadłych do dna. Zakłada się również, że prędkość przepływu cieczy w zbiorniku jest bardzo mała, nie ma strat wynikających z oporów tarcia i brak efektu bezwładnościowego. Poza tym przepływająca ciecz jest jednorodna, ma stałą temperaturę i jest nieściśliwa, tak jak i sama aparatura.

15.3.2. Zbiornik z pompą

Do zbiornika o powierzchni dna A (rys. 15.5) z jednej strony ciecz jest wprowadzana z natężeniem $f_{we}(t)$, a z drugiej strony ciecz jest wypompowywana z wydajnością $f_{wy}(t)$ przez pompę o regulowanej prędkości obrotowej $\omega_p(t)$.



Rys. 15.5. Schemat zbiornika z pompą

Przy założeniu, że natężenia przepływu cieczy wpływającej i wypływającej są wielkościami wejściowymi, model zbiomika z pompą wynika wprost z chwilowego bilansu objętości cieczy w zbiorniku:

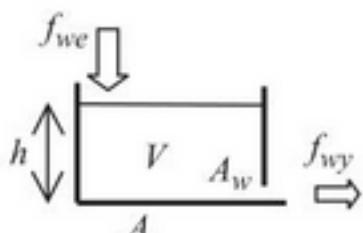
$$A \dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{III.111})$$

Można go przedstawić w postaci transmitancji układu całkującego:

$$G(s) = \frac{h(s)}{\sum f(s)} = \frac{1}{As} \quad (\text{III.112})$$

15.3.3. Zbiornik z wypływem swobodnym

Do otwartego zbiornika o powierzchni dna A (rys. 15.6) wpływa ciecz z natężeniem $f_{we}(t)$, natomiast wypływ cieczy odbywa się swobodnie przez otwór o powierzchni A_w .



Rys. 15.6. Schemat zbiomika z wypływem swobodnym

Model zbiornika opiera się na bilansie zmiany objętości cieczy w zbiorniku, wyrażonej przez zmianę poziomu cieczy $h(t)$:

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{III.113})$$

i wzorze na natężenie swobodnego wypływu $f_{wy}(t)$, zależnego od poziomu cieczy:

$$f_{wy}(t) = A_w \sqrt{2gh(t)} = k \sqrt{h(t)} \quad (\text{III.114})$$

Po wyeliminowaniu zmiennej f_{wy} model ma postać nieliniowej zależności:

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - k \sqrt{h(t)} \quad (\text{III.115})$$

Na podstawie modelu można sprawdzić, że jeśli rośnie natężenie cieczy wpływającego f_{we} , to wysokość h też wykazuje tendencję do wzrostu, ale jednocześnie ten wzrost wysokości powoduje zwiększenie wypływu f_{wy} . Obiekt ma zdolność samoregulacji poziomu – pod wpływem sił grawitacji pojawia się wewnętrzne ujemne sprzężenie zwrotne. Sprzężenie jest nieliniowe ($k \sqrt{h(t)}$). Model można zlinearyzować w punkcie pracy (f_{we0}, h_0) i opisać równaniem:

$$A\Delta\dot{h}(t) = \Delta f_{we}(t) - k_{h_0} \Delta h(t) \quad (\text{III.116})$$

gdzie $k_{h_0} = \left. \frac{\partial f_{wy}}{\partial h} \right|_0 = \frac{k}{2\sqrt{h_0}}$, co z kolei pozwala przedstawić transmitancję obiektu

$G(s) = \Delta h(s)/\Delta f_{we}(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{As + k_{h_0}} \Leftrightarrow G(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad \text{gdzie } k = 1/k_{h_0}, \quad T = Ak_{h_0} \quad (\text{III.117})$$

3.2.5

W tym przypadku model zbiornika jest stabilnym członem inercyjnym[•].

15.3.4. Zbiornik z wypływem swobodnym przez zawór

CD

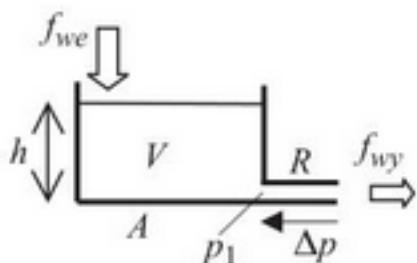
Wypływ cieczy ze zbiornika przez zawór można interpretować jako wypływ swobodny przez otwór o regulowanym przekroju.

Przykład na CD.

15.3.5. Zbiornik z wypływem ograniczonym oporem hydraulycznym

Podobnie jak w poprzednich przykładach, do zbiornika o powierzchni dna A wpływa ciecz z natężeniem $f_{we}(t)$, ale wypływ cieczy jest ograniczony wskutek znacznego oporu hydraulycznego R , np. w długim odcinku przewodu rurowego (rys. 15.7).

[•] W p. 3.2.5: o właściwościach członu inercyjnego.



Rys. 15.7. Schemat zbiornika z oporem hydraulicznym wypływu

Podstawą modelu jest bilans objętości cieczy w zbiorniku:

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{III.118})$$

Ze względu na opór przewodu, wypływ cieczy ze zbiornika nie jest swobodny. Równanie Bernoullego, ograniczone tylko do zbiornika, zawiera po jednej stronie ciśnienie zależne od wysokości słupa cieczy $h(t)$ i jej gęstości cieczy ρ , a po drugiej – ciśnienie $p_1(t)$, jakie panuje na wejściu do przewodu:

$$\rho gh(t) = p_1(t) \quad (\text{III.119})$$

Przepływ cieczy (energia kinetyczna) należy już do zjawisk zachodzących w odcinku przewodu¹. Ze względu na opór R , do opisu odcinka przewodu należy zastosować równanie Bernoullego dla cieczy rzeczywistej (III.98). Zakładając, że przewód leży poziomo i ma stały przekrój, w bilansie ciśnień występują tylko ciśnienia na końcach przewodu oraz strata ciśnienia na przewodzie. Ponieważ na wejściu do przewodu panuje ciśnienie $p_1(t)$, a na wyjściu przewodu ciśnienie atmosferyczne, które jako ciśnienie odniesienia jest równe zeru, więc strata ciśnienia na przewodzie wynosi:

$$\Delta p(t) = p_1(t) - 0 = \rho gh(t) \quad (\text{III.120})$$

Ciśnienie to jest w całości zużywane na pokonanie oporów hydraulicznych.

Jeśli przepływ w przewodzie można uznać za laminarny[→] (np. niewielka przedkość przepływu), to:

$$\Delta p(t) = Rf_{wy}(t) \quad (\text{III.121})$$

Z zależności (III.120) i (III.121) można wyznaczyć natężenie wypływu $f_{wy}(t) = \frac{\rho gh(t)}{R}$ i po podstawieniu do (III.118) otrzymuje się liniowy model zbiornika:

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - \frac{\rho g}{R} h(t) \quad (\text{III.122})$$

¹ Przy wyprowadzaniu wzoru na swobodny wypływ bilans Bernoullego obejmował punkt poza zbiornikiem (ciśnienie statyczne na granicy zbiornika = ciśnieniu dynamicznemu poza zbiornikiem).

→ W p. 8.3.2: o przepływie laminarnym i turbulentnym.

Jeśli przepływ w przewodzie, jak to zwykle bywa, ma charakter turbulentny, to należy zastosować dokładniejszy, nieliniowy wzór na spadek ciśnienia na odcinku przewodu:

$$\Delta p(t) = R f_{wy}^2(t) \quad (\text{III.123})$$

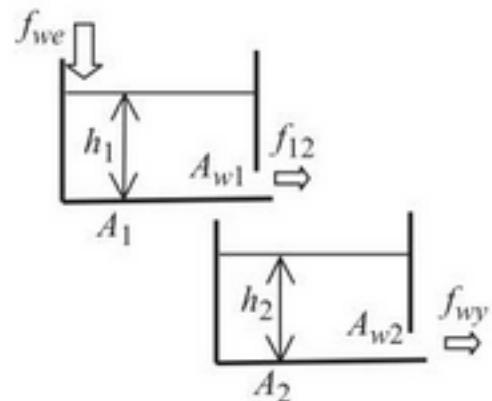
i wówczas otrzyma się nieliniowy model zbiornika w postaci:

$$A \dot{h}(t) = f_{we}(t) - \frac{\rho g}{R} \sqrt{h(t)} \quad (\text{III.124})$$

Model zbiornika z wypływem ograniczonym oporem hydraulicznym wykazuje podobną nieliniowość jak model zbiornika z wypływem swobodnym, lecz inna jest interpretacja współczynników w modelu.

15.3.6. Kaskada zbiorników ze swobodnym wypływem

W kolejnym przykładzie obiektem jest układ dwóch zbiomików (rys. 15.8). Do zbiornika o powierzchni dna A_1 wpływa ciecz z natężeniem $f_{we}(t)$. Zbiomik jest opróżniany wskutek wypływu cieczy przez otwór o powierzchni A_{w1} ; wypływająca ciecz wpływa do drugiego zbiornika o powierzchni A_2 , który również jest opróżniany w wyniku swobodnego wypływu cieczy przez otwór o powierzchni A_{w2} .



Rys. 15.8. Schemat kaskady zbiorników ze swobodnym wypływem cieczy (kaskada niewspółdziałaająca)

Model obiektu konstruuje się na bazie układu dwóch równań, opisujących bilanse zmian objętości w zbiornikach, wyrażone przez zmiany poziomów cieczy $h_1(t)$ i $h_2(t)$:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{12}(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{12}(t) - f_{wy}(t) \end{cases} \quad (\text{III.125})$$

Ponieważ wypływy cieczy ze zbiorników opisują równania:

$$f_{12}(t) = A_{w1} \sqrt{2gh_1(t)} \quad (\text{III.126})$$

$$f_{wy}(t) = A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \quad (\text{III.127})$$

więc po wyeliminowaniu zmiennych f_{12} i f_{wy} z układu równań (III.125), model obiektu ma postać:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - k_1 \sqrt{h_1(t)} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = k_1 \sqrt{h_1(t)} - k_2 \sqrt{h_2(t)} \end{cases} \quad (\text{III.128})$$

gdzie: $k_1 = A_{w1}\sqrt{2g}$ i $k_2 = A_{w2}\sqrt{2g}$. Nieliniowy model można bez przeszkód zastosować w badaniach symulacyjnych[→], a badanie stabilności przeprowadzić na przykład na podstawie wyznacznika macierzy Jacobiego[→]:

$$\begin{cases} \dot{h}_1(t) = \frac{f_{we}(t)}{A_1} - \frac{k_1}{A_1} \sqrt{h_1(t)} \\ \dot{h}_2(t) = \frac{k_1}{A_1} \sqrt{h_1(t)} - \frac{k_2}{A_2} \sqrt{h_2(t)} \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{-k_1}{2A_1\sqrt{h_{10}}} - \lambda & 0 \\ \frac{k_1}{2A_1\sqrt{h_{10}}} & \frac{-k_2}{2A_2\sqrt{h_{20}}} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III.129})$$

czyli rozwiązując równanie charakterystyczne:

$$\left(\frac{-k_1}{2A_1\sqrt{h_{10}}} - \lambda \right) \left(\frac{-k_2}{2A_2\sqrt{h_{20}}} - \lambda \right) = 0 \quad (\text{III.130})$$

Do określenia stabilności w zasadzie wystarczy stwierdzenie, że pierwiastki λ są ujemne, co w przypadku (III.130) jest oczywiste.

Charakterystyczną cechą analizowanego obiektu jest to, że w każdym ze zbiorników oddzielnie występuje zjawisko samoregulacji poziomu cieczy (szybsze napełnianie powoduje szybsze opróżnianie). Układ jako całość nie wykazuje jednak takiego sprzężenia – stan pierwszego zbiornika wpływa na stan drugiego, ale nie odwrotnie – zbiorniki tworzą kaskadę niewspółdziałającą. Jeśli układ równań (III.128) zostanie zlinearyzowany w punkcie równowagi (f_{we0}, h_{10}, h_{20}):

$$h_{10} = \frac{f_{we0}^2}{2gA_{w1}^2}, \quad h_{20} = \frac{f_{we0}^2}{2gA_{w2}^2}$$

to można przedstawić następujące równanie operatorowe obiektu:

$$\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(A_1 s + k_{10})} \\ \frac{1}{(A_1 s + k_{10})(A_2 s + k_{20})} \end{bmatrix} f_{we}(s) \quad (\text{III.131})$$

gdzie: $k_{10} = \frac{A_{w1}\sqrt{g}}{\sqrt{2h_{10}}} = \frac{gA_{w1}^2}{f_{we0}}$ i $k_{20} = \frac{A_{w2}\sqrt{g}}{\sqrt{2h_{20}}} = \frac{gA_{w2}^2}{f_{we0}}$. Zależnie od wyboru zmiennej wyjściowej, model układu zbiorników jest członem inercyjnym pierwszego lub

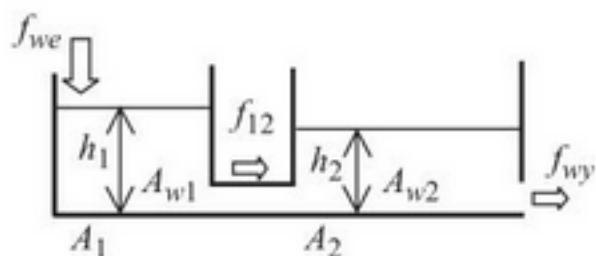
[→] W p. 21.4: o symulacji nieliniowych równań różniczkowych.

[→] W p. 2.3.3: o badaniu stabilności układu nieliniowych równań stanu.

drugiego rzędu, przy czym model obejmujący oba zbiorniki stanowi iloczyn modeli pojedynczych zbiorników. Model kaskady niewspółdziałającej jest więc szeregowym połączeniem dwóch członów unilateralnych^{*}. Stałe czasowe kaskady są równe stałym czasowym tworzących ją zbiorników.

15.3.7. Kaskada zbiorników połączonych krótkim przewodem rurowym

Obiektem jest układ dwóch zbiorników połączonych krótkim przewodem rurowym (rys. 15.9). Do zbiornika o powierzchni dna A_1 wpływa ciecz z natężeniem $f_{we}(t)$ i przez rurę o przekroju A_{w1} przepływa do drugiego zbiornika o powierzchni A_2 , z którego wypływa przez otwór o powierzchni A_{w2} .



Rys. 15.9. Schemat kaskady zbiorników współdziałających

Zakłada się, że przewód łączący oba zbiorniki stanowi pomijalny opór hydraliczny. Bazą dla modelu jest układ równań opisujący bilans zmian objętości w zbiornikach, wyrażone odpowiednio przez zmiany poziomów cieczy $h_1(t)$ i $h_2(t)$:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{12}(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{12}(t) - f_{wy}(t) \end{cases} \quad (\text{III.132})$$

Wypływ cieczy z pierwszego zbiornika odbywa się pod działaniem ciśnienia słupa cieczy w tym zbiorniku, ale musi pokonać ciśnienie słupa cieczy w drugim zbiorniku; natężenie wypływu $f_{12}(t)$ zależy więc od różnicy poziomów cieczy w obu zbiornikach:

$$f_{12}(t) = A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \quad (\text{III.133})$$

Wypływ z drugiego zbiornika jest swobodny:

$$f_{wy}(t) = A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \quad (\text{III.134})$$

Po wyeliminowaniu zmiennych f_{12} i f_{wy} model obiektu ma postać:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - k_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = k_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - k_2 \sqrt{h_2(t)} \end{cases} \quad (\text{III.135})$$

* W p. 5.2.2: o członach unilateralnych.

gdzie: $k_1 = A_{w1}\sqrt{2g}$ i $k_2 = A_{w2}\sqrt{2g}$. Zbiorniki tworzą kaskadę współdziałającą – stan pierwszego zbiornika wpływa na stan zbiornika drugiego i odwrotnie. Układ równań (III.128) można zlinearyzować w punkcie pracy (f_{we0}, h_{10}, h_{20}):

$$h_{10} = \frac{(A_{w1}^2 + A_{w2}^2)f_{we0}^2}{2gA_{w1}^2 A_{w2}^2}, \quad h_{20} = \frac{f_{we0}^2}{2gA_{w2}^2}$$

i przedstawić w postaci operatorowej:

$$\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{M(s)} \begin{bmatrix} A_2 s + k_{20} - k_{10} \\ k_{10} \end{bmatrix} f_{we}(s) \quad (\text{III.136})$$

$$M(s) = (A_1 s + k_{10})(A_2 s + k_{10} + k_{20}) - k_{10}^2$$

gdzie: $k_{10} = \frac{A_{w1}\sqrt{g}}{\sqrt{2(h_{10} - h_{20})}} = \frac{gA_{w1}^2}{f_{we0}}$ i $k_{20} = \frac{A_{w2}\sqrt{g}}{\sqrt{2h_{20}}} = \frac{gA_{w2}^2}{f_{we0}}$. Bez dalszych przekształceń widać, że stałe czasowe kaskady współdziałającej nie są równe stałym czasowym pojedynczych zbiorników, z których układ się składa. Bez zbadania biegunów mianownika (III.136) nie można nawet stwierdzić, czy model kaskady jest członem inercyjnym drugiego rzędu, czy może członem oscylacyjnym.

Pytania i zadania

- W podrozdziałach 15.3.2 i 15.3.3 zastosuj inny zbiornik (np. rys. 4.14). Przedstaw wzory na współczynnik wzmacnienia i stałą czasową zlinearyzowanych modeli zbiorników.
- Porównaj parametry transmitancji zlinearyzowanych modeli (III.115), (III.122) i (III.124). Jak poszczególne parametry fizyczne wpływają na właściwości dynamiczne obiektu?
- Wyznacz i porównaj równanie charakterystyczne jacobianu układu (III.135), równanie charakterystyczne zlinearyzowanego układu (III.135) i równanie charakterystyczne transmitancji (III.136).
- Określ warunki stabilności oraz możliwość wystąpienia oscylacji w kaskadach niewspółdziałającej i współdziałającej? Warto wykorzystać tu kryteria stabilności (p. 17.2.2).



15.4. Sieci hydrauliczne

15.4.1. Wprowadzenie

Kolejna grupa obiektów hydraulicznych to sieci złożone z przewodów rurowych i elementów przepływowych. Jeśli model opisuje długie przewody, to należałoby uwzględnić sprężystość cieczy, a jeśli w badaniach będą rozważane gwałtowne

zmiany ciśnienia lub oporów hydraulicznych (awarie sieci cieplowniczej, praca sieci wodociągowej), to konieczne jest uwzględnienie także efektu bezwładnościowego.

Skupimy się głównie na obiektach, dla których założono, że wszystkie elementy są sztywne, a przepływająca ciecz jest jednorodna, nieściśliwa i nie podlega dużym przyspieszeniom – nie występują więc efekty pojemnościowe i bezwładnościowe. Uwzględnienie jedynie zjawiska oporu hydraulicznego prowadzi do modeli, które nie opisują dynamiki sieci, lecz pozwalają wyznaczyć ustalone natężenia przepływów i spadki ciśnień w poszczególnych fragmentach sieci. Znajdują one zastosowanie jako elementy modeli dynamicznych innych procesów, na przykład instalacji grzewczych[→].

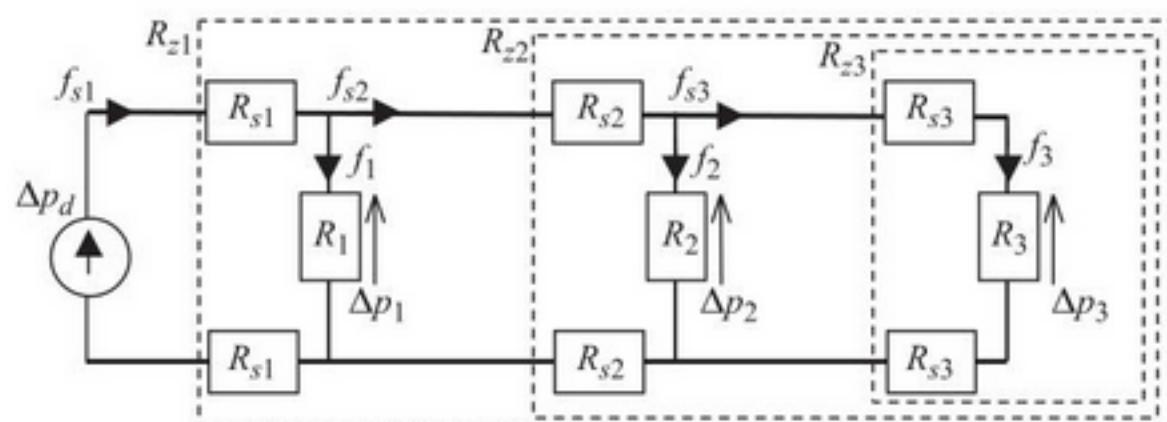
Zadanie modelowania sieci hydraulicznej jest proste, jeśli założy się laminarny przepływ lub korzysta się ze zlinearyzowanej zależności ciśnienia i przepływu. Można wówczas, przez analogię do liniowych układów elektrycznych, zastosować np. metodę oczkową[→]. Jeśli jednak model ma reprezentować układ z przepływem turbulentnym, to jego konstrukcja opiera się na bilansowaniu przepływów w rozgałęzieniach sieci i spadków ciśnień na poszczególnych odcinkach sieci oraz na wykorzystaniu nieliniowej zależności przepływu i spadku ciśnienia $\Delta p = Rf^2$.

17.3.6

13.2.2

15.4.2. Pozioma sieć z obiegiem zamkniętym

Rozważmy zamknięty obieg hydrauliczny, w którym ruch cieczy wymusza pompę wytwarzającą różnicę ciśnień $\Delta p_d(t)$ – (rys. 15.10).



Rys. 15.10. Schemat zastępczy prostej sieci z trzema odbiorami

Jeśli cała instalacja znajduje się na jednym poziomie, a prędkość przepływu cieczy w przewodach jest jednakowa (odpowiednio dobrane przekroje przewodów), to różnica ciśnień $\Delta p_d(t)$ pokrywa opory tarcia i sieć może być rozważana jako szeregowo-równolegle połączenie oporów hydraulicznych. Ponieważ w sieci występuje tylko jedno źródło ciśnienia, więc do rozwiązywania układu (tzn. obliczenia wartości przepływów w gałęziach) można zastosować metodę uproszczenia sieci przez wy-

→ W p. 17.3.6: o modelu sieci grzewczej.

→ W p. 13.2.2: o metodzie oczkowej w układach elektrycznych.

znaczenie zastępczego oporu hydraulicznego[→]. W przypadku nieliniowej zależności przepływu i ciśnienia wzór na opór zastępczy byłby dość złożony, więc zostanie on wprowadzony w postaci rekurencyjnej.

13.2.5

W układzie obowiązuje prawo zachowania masy, stąd:

$$f_1 + f_{s2} = f_{s1}, \quad f_2 + f_{s3} = f_{s2}, \quad f_3 = 0 + f_{s3} \quad (\text{III.137})$$

Ponieważ założono turbulentny charakter przepływu, więc dla poszczególnych odcinków sieci obowiązują następujące zależności dotyczące gałęzi równoległych:

$$\Delta p_1 = R_1 f_1^2, \quad \Delta p_2 = R_2 f_2^2, \quad \Delta p_3 = R_3 f_3^2 \quad (\text{III.138})$$

i dla odcinków sieci:

$$\Delta p_d = 2R_{s1}f_{s1}^2 + \Delta p_1, \quad \Delta p_1 = 2R_{s2}f_{s2}^2 + \Delta p_2, \quad \Delta p_2 = 2R_{s3}f_{s3}^2 + \Delta p_3 \quad (\text{III.139})$$

Wprowadzając dla fragmentów sieci pojęcie zastępczego oporu hydraulicznego (R_{z1} , R_{z2} , R_{z3}):

$$\Delta p_d = R_{z1}f_{s1}^2, \quad \Delta p_1 = R_{z2}f_{s2}^2, \quad \Delta p_2 = R_{z3}f_{s3}^2 \quad (\text{III.140})$$

i porównując z odpowiednimi zależnościami (III.139), otrzymuje się równania:

$$\Delta p_1 = (R_{z1} - 2R_{s1})f_{s1}^2, \quad \Delta p_2 = (R_{z2} - 2R_{s2})f_{s2}^2, \quad \Delta p_3 = (R_{z3} - 2R_{s3})f_{s3}^2 \quad (\text{III.141})$$

W kolejnym kroku, w bilansach (III.137), zostaną podstawione wartości przepływów wyliczone kolejno z zależności (III.138), (III.140) i (III.141):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\Delta p_1}{R_1}} + \sqrt{\frac{\Delta p_1}{R_{z2}}} &= \sqrt{\frac{\Delta p_1}{R_{z1} - 2R_{s1}}} \\ \sqrt{\frac{\Delta p_2}{R_2}} + \sqrt{\frac{\Delta p_2}{R_{z3}}} &= \sqrt{\frac{\Delta p_2}{R_{z2} - 2R_{s2}}} \\ \sqrt{\frac{\Delta p_3}{R_3}} &= \sqrt{\frac{\Delta p_3}{R_{z3} - 2R_{s3}}} \end{aligned} \quad (\text{III.142})$$

Po uproszczeniu i przekształceniu każdej z zależności (III.142) powstają rekurencyjne wzory na opory zastępcze:

$$R_{z1} = \frac{R_{z2}R_1}{(\sqrt{R_{z2}} + \sqrt{R_1})^2} + 2R_{s1}, \quad R_{z2} = \frac{R_{z3}R_2}{(\sqrt{R_{z3}} + \sqrt{R_2})^2} + 2R_{s2}, \quad (\text{III.143})$$

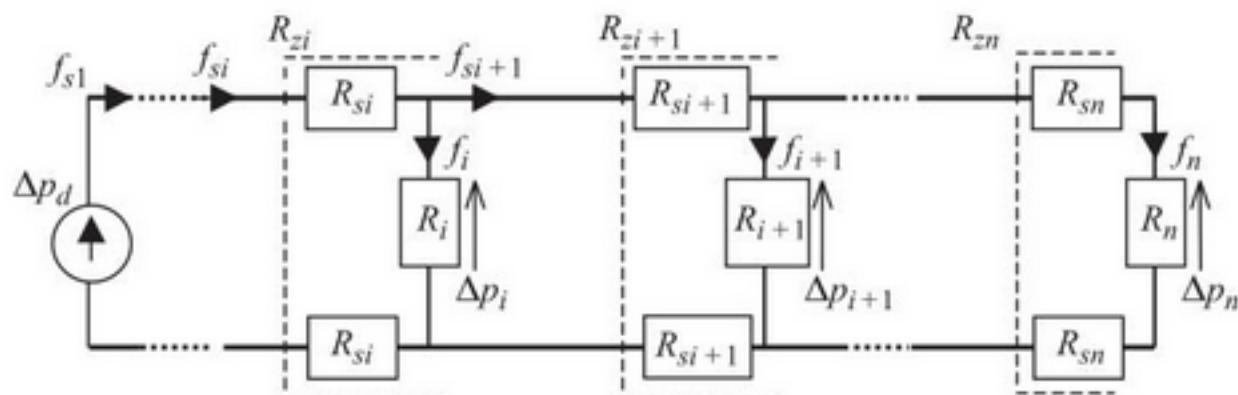
$$R_{z3} = R_3 + 2R_{s3}$$

Na podstawie zatem zależności (III.137)–(III.140) można wyznaczyć wszystkie natężenia przepływu i spadki ciśnienia w sieci.

[→] W p. 13.2.5: o analogicznej metodzie przekształcania w układach elektrycznych.

15.4.3. Rekurencyjny model sieci z obiegiem zamkniętym

 Jeśli model sieci będzie wykorzystywany jedynie do badań symulacyjnych, to najwygodniej zbudować go i używać w postaci rekurencyjnej[→] (rys. 15.11).



Rys. 15.11. Schemat zastępczy odcinka sieci

W pierwszym etapie wyznacza się zastępcze opory hydrauliczne, począwszy od ostatniej gałęzi sieci w kierunku pompy wytwarzającej ciśnienie:

$$R_{zi} = R_n + 2R_{sn}, \quad R_{zi} = \frac{R_{zi+1}R_i}{(\sqrt{R_{zi+1}} + \sqrt{R_i})^2} + 2R_{si}, \quad \text{dla } i \in \langle n-1, 1 \rangle \quad (\text{III.144})$$

W drugim etapie wyznacza się ciśnienia i przepływy w gałęziach, począwszy od pierwszej gałęzi:

$$f_{si} = \sqrt{\frac{p_{i-1}}{R_{zi}}}, \quad p_i = \frac{R_{zi} - 2R_{si}}{R_{si}} p_{i-1}, \quad f_i = \sqrt{\frac{p_{i-1}}{R_{zi}}}, \quad \text{dla } i \in \langle 1, n \rangle \quad (\text{III.145})$$

Pytania i zadania



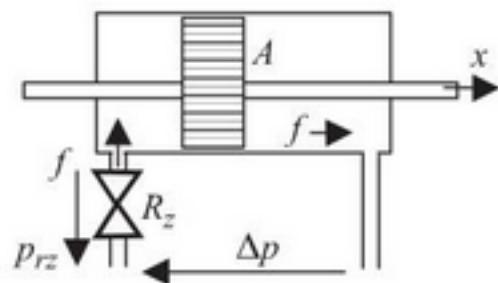
1. Przedstaw analogiczny model rekurencyjny sieci przy założeniu przepływu laminarnego.
2. Wyznacz wzory końcowe na przepływy i spadki napięć dla sieci o dwóch gałęziach: a) dla przepływu turbulentnego, b) dla przepływu laminarnego.

15.5. Elementy hydrauliczne

15.5.1. Siłownik

Układy hydrauliczne stanowią w praktyce elementy obiektów innego typu, np. mechanicznych, cieplnych. Połączenie z układami mechanicznymi jest bardzo naturalne – ciśnienie, z definicji, jest siłą działającą na jednostkową powierzchnię.

* W p. 22.3: aplikacja rekurencyjnego modelu sieci w programie symulacyjnym.



Rys. 15.12. Schemat siłownika

Jako przykład elementu hydraulicznego rozważymy siłownik, w którym ciecz przepływająca przez cylinder przesuwa tłok o powierzchni A (rys. 15.12).

Ruch cieczy jest wymuszany przez zewnętrzne ciśnienie $\Delta p(t)$, które musi pokonać opory przepływu. Zakłada się, że jedyny opór stanowi zawór na doprowadzeniu (R_z). Należy wyznaczyć zależność między doprowadzonym ciśnieniem i przesunięciem tłoka $x(t)$. Podstawą modelu jest bilans ciśnień:

$$\Delta p(t) = \Delta p_{rz}(t) \quad (\text{III.146})$$

w którym spadek ciśnienia Δp_{rz} zależy od natężenia przepływu $f(t)$ i oporu hydraulicznego R_z , przy czym dla uproszczenia przyjmuje się, że jest to zależność liniowa:

$$\Delta p_{rz}(t) = R_z f(t) \quad (\text{III.147})$$

Kształt elementu zapewnia prosty związek między przepływem w komorze i prędkością przesuwania tłoka:

$$f(t) = A \dot{x}(t) \quad (\text{III.148})$$

Uporządkowanie zależności (III.146)–(III.148) daje następującą postać modelu:

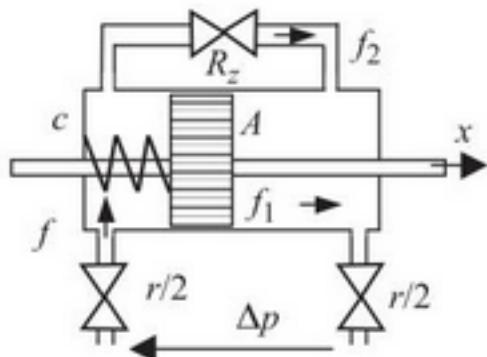
$$\Delta p(t) = A R_z \dot{x}(t) \quad (\text{III.149})$$

czyli członu całkującego:

$$x(s) = \frac{1}{A R_z s} \Delta p(s) \quad (\text{III.150})$$

15.5.2. Siłownik ze sprężyną

Ciśnienie $\Delta p(t)$ doprowadzone do siłownika wymusza całkowity przepływ cieczy o wartości $f(t)$, z tym że składa się on z dwóch strumieni: $f_1(t)$ i $f_2(t)$ (rys. 15.13).



Rys. 15.13. Schemat siłownika ze sprężyną

Spełnione jest więc równanie:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (\text{III.151})$$

Jeden strumień $f_1(t)$ przesuwa się wraz z tłokiem, a drugi $f_2(t)$ pokonuje opór R_z , co wywołuje różnicę ciśnień $\Delta p_{rz}(t)$. Bilans ciśnień na elemencie ma więc postać:

$$\Delta p(t) = \Delta p_r(t) + \Delta p_{rz}(t) \quad (\text{III.152})$$

a poszczególne spadki ciśnień można opisać (w uproszczeniu) zależnościami:

$$\Delta p_r(t) = rf(t) \quad (\text{III.153})$$

$$\Delta p_{rz}(t) = R_z f_2(t) \quad (\text{III.154})$$

Spadek ciśnienia $\Delta p_{rz}(t)$ na oporze R_z oznacza jednocześnie różnicę ciśnienia po obu stronach tłoka, co stanowi siłę do pokonywania reakcji sprężyny o współczynniku c . Stąd wynika następujący bilans sił działających na sprężynę:

$$A \Delta p_{rz}(t) = cx(t) \quad (\text{III.155})$$

oraz prosta zależność między przepływem w cylindrze i ruchem tłoka:

$$f_1(t) = A \dot{x}(t) \quad (\text{III.156})$$

Porządkowanie podanych zależności przeprowadzimy w następującej kolejności – do równania (III.151) podstawimy wielkość $f_2(t)$, wyznaczoną z porównania (III.153) i (III.154) oraz $f_1(t)$ wyznaczoną z (III.156):

$$f(t) = A \dot{x}(t) + \frac{c}{AR_z} x(t) \quad (\text{III.157})$$

Wielkość $f(t)$ uwzględniamy we wzorze (III.153), który podstawiamy wraz z (III.155) do bilansu (III.152). Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\Delta p(t) = Ar \dot{x}(t) + \frac{c(R_z + r)}{AR_z} x(t) \quad (\text{III.158})$$

co odpowiada transmitancji członu inercyjnego:

$$x(s) = \frac{k}{Ts + 1} \Delta p(s), \quad \text{gdzie } k = \frac{AR_z}{c(R_z + r)}, \quad T = \frac{A^2 R_z r}{c(R_z + r)} \quad (\text{III.159})$$

Pytania i zadania



1. Jakie zjawiska wpływają na dynamiczne właściwości przedstawionych elementów?
2. Czy modele (III.149) i (III.158) mogą mieć postać równań statycznych?
3. Jak wygląda reakcja modelowanych elementów na wymuszenie skokowe i impulsowe?
4. Jak zmienią się modele, jeżeli założy się przepływ turbulentny?

15.6. Kaskady przepływowe

15.6.1. Wprowadzenie

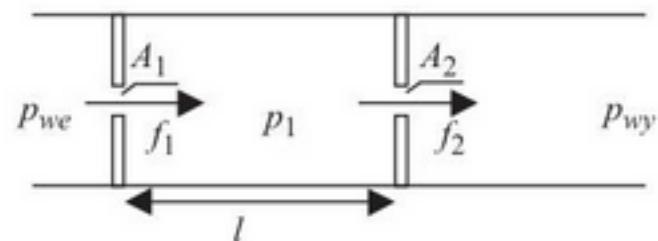
W kolejnych przykładach przedmiotem modelowania będą elementy przepływowe przedzielone zwężkami o stałym przekroju. Uwzględniony zostanie efekt pojemnościowy wynikający ze sprężystości cieczy lub konstrukcji. Do opisu natężenia przepływu $f(t)$ przez zwężkę o powierzchni otworu A , przy różnicy ciśnień $\Delta p(t)$ zastosujemy wzór (II.181):

$$f(t) = \alpha A \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\Delta p(t)}{R}}$$

w którym założymy stałość oporu przepływu R . W rzeczywistości zależy on od gęstości ρ , która się zmienia ze względu na ściśliwość cieczy.

15.6.2. Kaskada sztywna otwarta

Ciecz przepływa przez rurę o przekroju A , w której znajdują się dwie zwężki o powierzchni otworów A_1 i A_2 (rys. 15.14). Konstrukcja elementu jest sztywna, ale medium ulega sprężeniu w komorze o długości l .



Rys. 15.14. Schemat kaskady sztywnej otwartej

Podstawą modelu dynamiki jest bilans objętości w komorze:

$$\dot{V}_1(t) = C\dot{p}_1(t) = f_1(t) - f_2(t) \quad (\text{III.160})$$

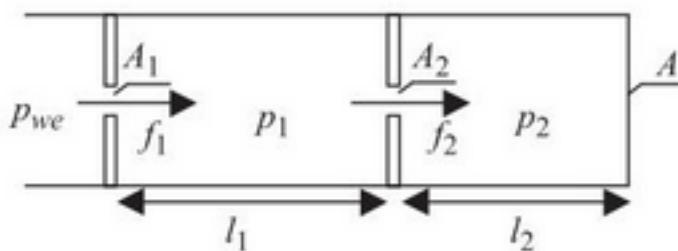
gdzie C to pojemność ściśliwości wynikająca z wymiarów komory i modułu ściśliwości cieczy K ($C = Al/K$). Ostatecznie, po wprowadzeniu wzorów na natężenie przepływu przez zwężki $f_1(t)$ i $f_2(t)$ model ma postać:

$$C\dot{p}_1(t) = \sqrt{\frac{p_{we}(t) - p_1(t)}{R_1}} - \sqrt{\frac{p_1(t) - p_{wy}(t)}{R_2}} \quad (\text{III.161})$$

Model został już uproszczony przez założenie, że opory przepływu R_1 i R_2 są stałe. Dalsze upraszczanie może polegać na linearyzacji w punkcie pracy.

15.6.3. Kaskada sztywna zamknięta

Kolejny element (rys. 15.15) ma zamkniętą sztywną konstrukcję, w której występują dwie komory przedzielone zwężkami o powierzchni A_1 i A_2 .



Rys. 15.15. Schemat kaskady sztywnej zamkniętej

Model opiera się na dwóch bilansach:

$$\begin{cases} \dot{V}_1(t) = C_1 \dot{p}_1(t) = f_1(t) - f_2(t) \\ \dot{V}_2(t) = C_2 \dot{p}_2(t) = f_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.162})$$

gdzie C_1 i C_2 są parametrami komór (pojemnościści ścisliwości). Przyjmując założenie o pomijalnym wpływie zmian gęstości na opory przepływu, równania (III.162) można rozwinąć do postaci:

$$\begin{cases} C_1 \dot{p}_1(t) = \sqrt{\frac{p_{we}(t) - p_1(t)}{R_1}} - \sqrt{\frac{p_1(t) - p_2(t)}{R_2}} \\ C_2 \dot{p}_2(t) = \sqrt{\frac{p_1(t) - p_2(t)}{R_2}} \end{cases} \quad (\text{III.163})$$

Model jest nieliniowy, lecz można go zlinearyzować w punkcie równowagi:

$$\begin{cases} C_1 \Delta \dot{p}_1(t) = k_{10}(\Delta p_{we}(t) - \Delta p_1(t)) - k_{20}(\Delta p_1(t) - \Delta p_2(t)) \\ C_2 \dot{p}_2(t) = k_{20}(\Delta p_1(t) - \Delta p_2(t)) \end{cases} \quad (\text{III.164})$$

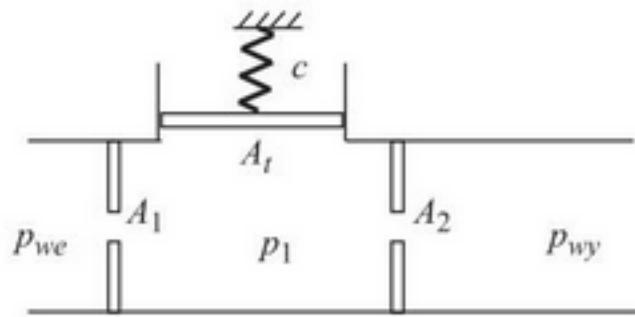
gdzie: $k_{10} = \frac{1}{2\sqrt{R_1(p_{we0} - p_{10})}}$, $k_{20} = \frac{1}{2\sqrt{R_2(p_{10} - p_{20})}}$. Wynik linearyzacji jest jednak nieokreślony, ponieważ w punkcie równowagi: $p_{20} = p_{10} = p_{we0}$.

Wobec tego można zastosować inny sposób linearyzacji wzorów na natężenie przepływu przez zwężki, np. przyjąć zależność $f(t) = k_A \Delta p_A(t)$, wynikającą z linearyzacji przez sieczną^{23.2}.

15.6.4. Kaskada elastyczna otwarta

Kaskada hydrauliczna może być wykonana jako element elastyczny, który zmienia objętość pod wpływem ciśnienia, np. wskutek ruchu tłoka (rys. 15.16).

^{23.2} W p. 2.3.2: o sposobach linearyzacji statycznej.



Rys. 15.16. Schemat kaskady elastycznej otwartej

Jeśli ciecz przepływająca przez zwężki jest ścisliwa, to podstawą modelu dynamiki jest następujący bilans:

$$\frac{V_k(t)}{K} \dot{p}_1(t) = f_1(t) - f_2(t) \quad (\text{III.165})$$

przy czym objętość komory $V_1(t) = V_{10} + Ax(t)$ zależy od przesunięcia $x(t)$ i powierzchni A_t tłoka. Aby wyeliminować jedną ze zmiennych – $p_1(t)$ lub $x(t)$ – zostanie wykorzystany bilans sił działających na tłok – siła ciśnienia i siła sprężyny o współczynniku sztywności c :

$$A_t p_1(t) = cx(t) \quad (\text{III.166})$$

Jeśli zastosuje się wzór na obliczanie natężenia przepływu przez zwężki $f_1(t)$ i $f_2(t)$, model (III.165) sprowadzi się do wzoru:

$$\frac{c V_{10} + A_t^2 p_1(t)}{cK} \dot{p}_1(t) = \sqrt{\frac{p_{we}(t) - p_1(t)}{R_1}} - \sqrt{\frac{p_1(t) - p_{wy}(t)}{R_2}} \quad (\text{III.167})$$

gdzie R_1 i R_2 są stałymi oporami przepływu przez zwężki.

Pytania i zadania

1. Przeprowadź linearyzację modeli kaskad i wyznacz ich transmitancje.
2. Sprawdź, jak wyglądają transmitancje kaskad wyznaczone dla ustalonego punktu pracy.
3. Jak zmienią się modele kaskad, jeśli przekrój zwężek jest zmienny?



16

Układy przenoszenia substancji

16.1. Ogólne zasady konstruowania modeli

Podstawą konstrukcji modeli przenoszenia substancji jest bilans masy, stosowany do wszystkich elementów instalacji technologicznej, w których następuje magazynowanie substancji, oraz opis opóźnienia w układach transportowych. Rozpatrywane są tylko istotne zasobniki przenoszących substancji i istotne opóźnienia transportowe.

16.2. Przepływ substancji przez pojedynczy zasobnik

16.2.1. Zasobnik ze sterowanym dopływem i odpływem

Materiał w postaci taśmy (rys. 16.1) jest przesuwany przez dwa układy napędowe o sterowanej prędkości $v_{we}(t)$ i $v_{wy}(t)$. Ze względu na różnice prędkości między układami napędowymi powstaje zasobnik w postaci pętli o długości $l(t)$.

Zakładając, że taśma nie zmienia swej grubości (np. nie wydłuża się pod wpływem własnego ciężaru), dynamikę obiektu można opisać za pomocą bilansu:

$$\frac{dl(t)}{dt} = v_{we}(t) - v_{wy}(t) \quad (\text{III.168})$$

któremu odpowiada operatorowa postać:

$$l(s) = \frac{1}{s} (v_{we}(s) - v_{wy}(s)) \quad (\text{III.169})$$



Rys. 16.1. Schemat zasobnika ze stałym odpływem

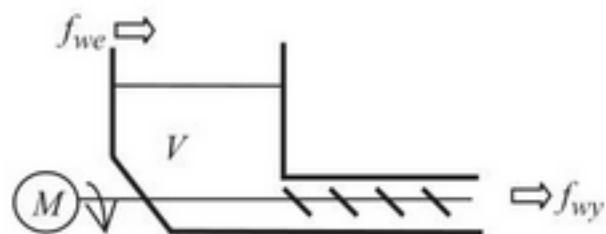
Zasobnik, w którym odpływ nie zależy od jego bieżącego stanu jest członem całkującym. Zależność (III.168) można by również zapisać za pomocą równania statycznego:

$$v_l(t) = v_{we}(t) - v_{wy}(t) \quad (\text{III.170})$$

gdzie $v_l(t)$ jest prędkością przesuwania taśmy w zasobniku. Równanie to jednak nie pozwala modelować stanu zasobnika.

16.2.2. Zasobnik o proporcjonalnym odpływie

Do zbiornika (rys. 16.2) dopływa jednorodna substancja z natężeniem $f_{we}(t)$, natomiast układ sterujący transportera zapewnia odprowadzanie substancji z natężeniem $f_{wy}(t)$, proporcjonalnym do wypełnienia zbiornika V .



Rys. 16.2. Schemat zasobnika o proporcjonalnym odpływie

Dynamika przepływu przez zbiornik jest opisana przez bilans objętości:

$$\dot{V}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t), \quad f_{wy}(t) = k_v V(t) \quad (\text{III.171})$$

Równanie można uporządkować, eliminując zmienną $f_{wy}(t)$:

$$\dot{V}(t) = f_{we}(t) - k_v V(t) \quad (\text{III.172})$$

lub zmienną $V(t)$:

$$\frac{1}{k_v} \dot{f}_{wy}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{III.173})$$

Obie postacie modelu są liniowe i można je przedstawić w formie transmitancji:

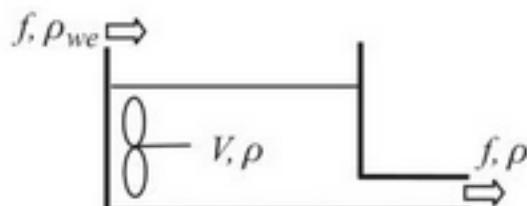
$$G(s) = \frac{V(s)}{f_{we}(s)} = \frac{k}{Ts + 1} \quad \text{lub} \quad G(s) = \frac{f_{wy}(s)}{f_{we}(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (\text{III.174})$$

gdzie: $T = 1/k_v$, $k = 1/k_v$. Niezależnie od wyboru zmiennej wyjściowej, transmitancja obiektu jest członem inercyjnym pierwszego rzędu o różnych wzmacnieniach i takiej samej stałej czasowej.

16.2.3. Zasobnik uśredniający

Do zbiornika (rys. 16.3) dopływa z natężeniem $f(t)$ substancja o gęstości $\rho_{we}(t)$. Zawartość zbiornika jest doskonale mieszana i wypływa ze zbiornika z takim samym natężeniem $f(t)$. Mieszanie jest formą uśredniania gęstości substancji (średnia ważo-

na gęstości substancji w zbiorniku i gęstości substancji dopływającej). Założenie o doskonałym mieszaniu pozwala opisać gęstość całej zawartości zbiornika za pomocą jednej zmiennej, która jednocześnie charakteryzuje to, co ze zbiornika wypływa (ta sama gęstość).



Rys. 16.3. Schemat zasobnika uśredniającego

Model obiektu powstaje na podstawie bilansu masy. Jeśli natężenie przepływu f jest stałe, to objętość substancji V w zbiorniku nie zmienia się, a bilans masy ma postać:

$$V\dot{\rho}(t) = f\rho_{we}(t) - f\rho(t) \quad (\text{III.175})$$

Model obiektu jest, podobnie jak w poprzednim przykładzie, członem inercyjnym pierwszego rzędu:

$$\rho(s) = \frac{1}{Ts + 1} \rho_{we}(s), \quad \text{gdzie } T = \frac{V}{f} \quad (\text{III.176})$$

Jeśli jednak natężenie $f(t)$ przepływu substancji przez zbiornik jest zmienne, to bilans:

$$V\dot{\rho}(t) = f(t)\rho_{we}(t) - f(t)\rho(t) \quad (\text{III.177})$$

jest zależnością nieliniową. Po zlinearyzowaniu w punkcie pracy (f_0, ρ_{we0}, ρ_0) model ma postać:

$$V\Delta\dot{\rho}(t) = (\rho_{we0} - \rho_0)\Delta f(t) + f_0\Delta\rho_{we0}(t) - f_0\Delta\rho(t) \quad (\text{III.178})$$

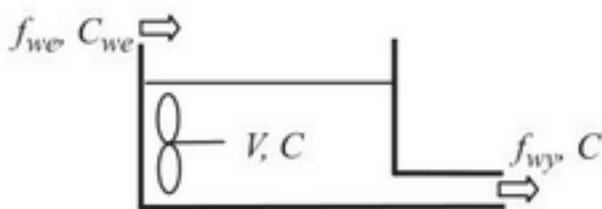
a po przekształceniu operatorowym:

$$\rho(s) = \frac{1}{Ts + 1} (kf(s) + \rho_{we}(s)) \quad (\text{III.179})$$

gdzie: $T = \frac{V}{f_0}$, $k = \frac{\rho_{we0} - \rho_0}{f_0}$. Stała czasowa modelu (III.179) jest taka sama jak modelu ze stałym przepływem (III.176). Warto zauważyć, że w punkcie równowagi, czyli dla $\rho_0 = \rho_{we0}$, gdzie zlinearyzowany model jest najdokładniejszy, transmitancja $\rho(s)/f(s)$ jest pomijalna.

16.2.4. Zasobnik uśredniający ze zmiennym wypełnieniem

Substancja o stężeniu składnika $C_{we}(t)$ jest doprowadzana do zbiornika z natężeniem $f_{we}(t)$ (rys. 16.4). W zbiorniku następuje jej zmieszanie z zawartością i odprowadzanie mieszaniny z natężeniem $f_{wy}(t)$.



Rys. 16.4. Schemat zasobnika uśredniającego ze zmiennym wypełnieniem

Podstawą modelu jest bilans zawartości składnika:

$$\frac{d(V(t)C(t))}{dt} = f_{we}(t)C_{we}(t) - f_{wy}(t)C(t) \quad (\text{III.180})$$

Niezależny dopływ i odpływ substancji powoduje zmiany objętości $V(t)$. Można je wyznaczyć z bilansu objętości:

$$\dot{V}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{III.181})$$

Zmiennymi wejściowymi modelu są: $f_{we}(t)$, $f_{wy}(t)$ i $C_{we}(t)$. Poza tym w równaniach bilansowych (III.180) i (III.181) występują dwie zmienne $C(t)$ i $V(t)$, z tym że w bilansie (III.180) występuje pochodna funkcji złożonej. Aby przedstawić model w postaci równań stanu, konieczne jest jego uporządkowanie, które rozpoczęliśmy od wykonania operacji różniczkowania iloczynu $V(t)C(t)$:

$$\dot{V}(t)C(t) + V(t)\dot{C}(t) = f_{we}(t)C_{we}(t) - f_{wy}(t)C(t) \quad (\text{III.182})$$

Korzystamy z zależności (III.181) i podstawiamy do (III.182):

$$f_{we}(t)C(t) - f_{wy}(t)C(t) + V(t)\dot{C}(t) = f_{we}(t)C_{we}(t) - f_{wy}(t)C(t)$$

Wyrazy $f_{wy}(t)C(t)$ eliminują się (jest to typowe dla tego typu modeli):

$$f_{we}(t)C(t) + V(t)\dot{C}(t) = f_{we}(t)C_{we}(t) \quad (\text{III.183})$$

Model obiektu tworzy uporządkowany układ równań (III.183) i (III.181):

$$\begin{cases} V(t)\dot{C}(t) = f_{we}(t)(C_{we}(t) - C(t)) \\ \dot{V}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \end{cases} \quad (\text{III.184})$$



Postać modelu jest nieliniowa, wystarcza jednak do zastosowania w badaniach symulacyjnych^{21.4}. Jeśli badania analityczne będą się ograniczać do określenia stabilności, można spróbować wyznaczyć pierwiastki równania charakterystycznego otrzymanego na podstawie jakobianu^{23.3}:

$$\begin{cases} \dot{C}(t) = \frac{f_{we}(t)C_{we}(t)}{V(t)} - \frac{f_{we}(t)C(t)}{V(t)} \\ \dot{V}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{f_{we0}}{V_0} - \lambda & \frac{f_{we0}(C_{we0} - C_0)}{-V_0^2} \\ 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III.185})$$

^{21.4} W p. 21.4: o symulacji nieliniowych równań różniczkowych.

^{23.3} W p. 23.3: o badaniu stabilności układu nieliniowych równań stanu.

czyli:

$$\left(\frac{f_{we0}}{V_0} + \lambda \right) \lambda = 0 \quad (\text{III.186})$$

Ponieważ jeden z pierwiastków równania (III.186) ma wartość zero, należy uznać, że układ jest niestabilny. Przy pewnym doświadczeniu taki wniosek można wyciągnąć bez dodatkowej analizy – bezpośrednio na podstawie interpretacji równań (III.186). Zilustrujemy tę własność na zlinearyzowanej postaci modelu (III.186):

$$\begin{cases} V|_0 \Delta \dot{C}(t) + \dot{C}|_0 \Delta V(t) = (C_{we} - C)|_0 \Delta f_{we}(t) + f_{we}|_0 (\Delta C_{we}(t) - \Delta C(t)) \\ \Delta \dot{V}(t) = \Delta f_{we}(t) - \Delta f_{wy}(t) \end{cases}$$

Po uproszczeniu¹ układ równań różniczkowych ma postać:

$$\begin{cases} V_0 \Delta \dot{C}(t) = (C_{we0} - C_0) \Delta f_{we}(t) + f_{we0} (\Delta C_{we}(t) - \Delta C(t)) \\ \Delta \dot{V}(t) = \Delta f_{we}(t) - \Delta f_{wy}(t) \end{cases} \quad (\text{III.187})$$

co odpowiada operatorowej wersji modelu:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} (k(C_{we0} - C_0)f_{we}(s) + C_{we}(s)) \quad (\text{III.188})$$

$$V(s) = \frac{f_{we}(s)}{s} - \frac{f_{wy}(s)}{s}$$

gdzie: $k = 1/f_{we0}$, $T = V_0/f_{we0}$. Zlinearyzowany model ma taką własność, że transmitancje występujące w obliczeniach $C(s)$ i $V(s)$ nie mają wspólnego członu. Jedyne objętość V_0 w punkcie linearyzacji wpływa na stałą czasową modelu. Niestabilność układu wynika więc z natury członu całkującego, który opisuje przebieg zmiennej $V(t)$.

Pytania i zadania

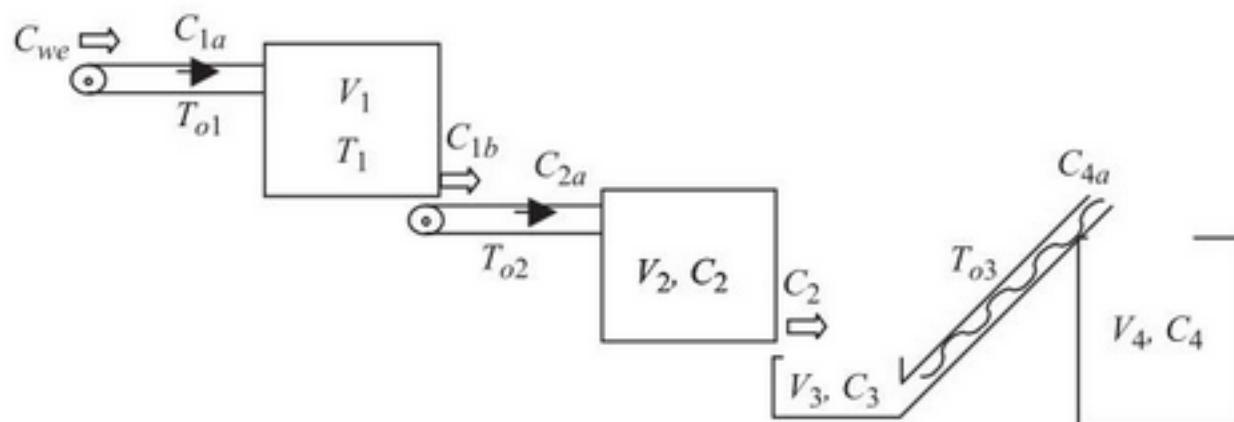
1. Wyznacz stan ustalony modeli (III.172), (III.173), (III.177). Dla porównania, na podstawie odpowiednich transmitancji (III.174), (III.179), wyznacz stan ustalony tych samych modeli.
2. Jak zmieni się model zbiornika ze zmiennym wypełnieniem (rys. 14.30), jeśli wypływ substancji będzie proporcjonalny do wypełnienia: $f_{wy}(t) = k_V V(t)$?



¹ Charakterystyczne uproszczenie w przypadku linearyzacji iloczynu zmiennej i pochodnej zmiennej (wartość pochodnej w punkcie równowagi równa się zeru) – $x(t)\dot{y}(t) \approx x_0\Delta\dot{y}(t)$.

16.3. Układy zasobników

Typowym przykładem układu przenoszenia substancji jest linia technologiczna, składająca się ze zbiorników, w których zachodzą kolejne procesy przetwarzania wprowadzanych substancji (rys. 16.5).



Rys. 16.5. Schemat linii technologicznej z układem zasobników

Załóżmy na początek, że prędkość przenoszenia substancji przez całą instalację jest stała. To pozwoli ograniczyć opis do zmian stężenia – podobnie jak w przypadku modelu zbiornika uśredniającego gęstość (III.175). Model konstrujemy na podstawie bilansu masy dla każdego z kolejnych zasobników i przy uwzględnieniu opóźnień transportowych. Pierwszy zasobnik stanowi reaktor \$V_1\$, w którym ze składnika \$C_{1a}(t)\$ po czasie \$T_1\$ powstaje proporcjonalna ilość produktu \$C_{1b}(t)\$:

$$C_{1b}(s) = k_1 e^{-sT_1} C_{1a}(s) \quad (\text{III.189})$$

W drugim zbiorniku \$V_2\$ następuje mieszanie dostarczanego produktu \$C_{2a}(t)\$ z zawartością zbiornika i jest wyprowadzany produkt uśredniony \$C_2(t)\$:

$$C_2(s) = \frac{1}{(T_2 s + 1)} C_{2a}(s) \quad (\text{III.190})$$

gdzie \$T_2 = V_2/f\$. Następny zasobnik jest zbiornikiem uśredniającym \$V_3\$, z którego wypływa produkt \$C_3(t)\$:

$$C_3(s) = \frac{1}{(T_3 s + 1)} C_{3a}(s) \quad (\text{III.191})$$

gdzie \$T_3 = V_3/f\$. Ostatni zbiornik \$V_4\$ jest magazynem gotowego produktu i w nim zachodzi ostatni etap uśredniania stężenia do wartości \$C_4(t)\$:

$$C_4(s) = \frac{1}{(T_4 s + 1)} C_{4a}(s) \quad (\text{III.192})$$

gdzie \$T_4 = V_4/f\$. Produkt jest przenoszony między kolejnymi zbiornikami za pośrednictwem przenośników o stałej prędkości:

$$C_{1a}(s) = e^{-sT_{o1}} C_{we}(s), \quad C_{2a}(s) = e^{-sT_{o2}} C_{lb}(s), \quad C_{4a}(s) = e^{-sT_{o3}} C_3(s) \quad (\text{III.193})$$

Wykorzystując unilateralne^{*} własności obiektu, czyli jednokierunkowe przenoszenie sygnału, model całej linii można zapisać w postaci:

$$C_4(s) = e^{-sT_o} \frac{k_1}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)} C_{we}(s) \quad (\text{III.194})$$

gdzie $T_o = T_1 + T_{o1} + T_1 + T_{o2} + T_{o3}$ jest sumarycznym czasem opóźnienia linii.



Pytania i zadania

1. Jak na konstrukcję modelu linii technologicznej (rys. 14.31) wpłynie rezygnacja z założenia o stałości przepływu substancji?



^{*} W p. 5.2: o blokach unilateralnych.

Układy termokinetyczne

17.1. Ogólne zasady konstruowania modeli

Procesy cieplne nie tylko stanowią oddzielne operacje technologiczne, lecz także często towarzyszą innym procesom. Układy cieplne występują podczas grzania lub chłodzenia obiektów, przenoszenia ciepła przez substancje lub przez promieniowanie, mieszania gorących i zimnych cieczy, wytwarzania ciepła w wyniku spalania, reakcji chemicznych lub rozpadu atomów.

Konstrukcja modeli procesów cieplnych opiera się na bilansowaniu energii w znaczących magazynach. Trzeba uwzględnić przy tym wszystkie postacie strumienia cieplnego, pochodzące z przewodnictwa, konwekcji, promieniowania i wewnętrznych źródeł, a także pojemność cieplną ciał, która stanowi o dynamice układu cieplnego. W podanych dalej przykładach zostało przyjęte, że substancje fizyczne mają stałe wartości gęstości ρ [kg/m³], ciepła właściwego c_p [J/(kg·K)], przewodności cieplnej γ [W/(K·m)], a w szczególności że nie zależą one od temperatury.

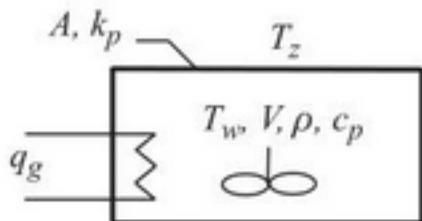
17.2. Magazyny energii w układzie termokinetycznym

Przedstawione poniżej przykłady opisują proste warianty ogrzewania różnego rodzaju zbiorników, pojemników, pomieszczeń itp.

17.2.1. Obiekt z grzałką i „cienką” obudową

Zamknięty pojemnik (pomieszczenie) o pojemności V (rys. 17.1) jest ogrzewany grzałką elektryczną o mocy $q_g(t)$ i jednocześnie traci ciepło przez dość cienką, jednolitą obudowę o powierzchni A .

Substancja wypełniająca pojemnik magazynuje energię dostarczaną w postaci ciepła. Ilość energii zależy od temperatury wewnętrz pojemnika $T_w(t)$ i pojemności



Rys. 17.1. Schemat obiektu z grzałką i cienką obudową

cieplnej magazynu C_{vw} (tj. od objętości pojemnika V i własności substancji wypełniającej – jej gęstości ρ i ciepła właściwego c_p):

$$Q(t) = V\rho c_p T_w(t) = C_{vw} T_w(t) \quad (\text{III.195})$$

Budowa modelu opiera się na bilansie energetycznym pojemnika:

$$\dot{Q}(t) = q_g(t) - q_s(t) \quad (\text{III.196})$$

Strumień ciepła dostarczanego $q_g(t)$ odpowiada mocy grzałki i jest zmienną wejściową modelu. Ciepło tracone $q_s(t)$ wynika z przewodzenia przez ściany obudowy, zależy więc od współczynnika przewodności cieplnej ścian K_{cw} i różnicy temperatury wewnętrz $T_w(t)$ i na zewnątrz $T_z(t)$:

$$q_s(t) = Ak_p \Delta T(t) = K_{cw} (T_w(t) - T_z(t)) \quad (\text{III.197})$$

Po podstawieniu zależności (III.195) i (III.197) do bilansu (III.196), powstaje model pojemnika ogrzewanego grzałką:

$$C_{vw} \dot{T}_w(t) = q_g(t) - K_{cw} (T_w(t) - T_z(t)) \quad (\text{III.198})$$

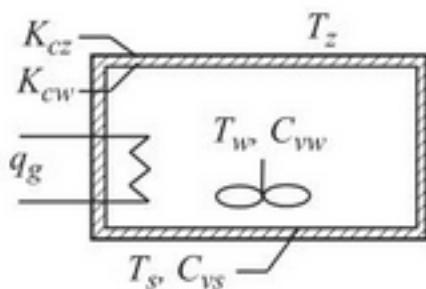
Model jest liniowy, można więc go również przedstawić w postaci operatorowej:

$$T_w(s) = \frac{1}{Ts + 1} \left(\frac{1}{K_{cw}} q_g(s) + T_z(s) \right), \quad \text{gdzie } T = \frac{C_{vw}}{K_{cw}} \quad (\text{III.199})$$

Obiekt ma charakter inercyjny, a stała czasowa jest tym większa, im większy jest stosunek pojemności cieplnej zbiornika C_{vw} do przewodności obudowy K_{cw} . W powyższym modelu nie uwzględniono magazynowania energii przez obudowę pojemnika. Założono, że pojemność cieplna obudowy jest zdecydowanie mniejsza niż pojemność cieplna substancji wewnętrz pojemnika.

17.2.2. Obiekt z grzałką i „grubą” obudową

Rozważmy teraz obiekt podobny do poprzedniego – zamknięty pojemnik o pojemności V , ogrzewany grzałką elektryczną o mocy $q_g(t)$, ale o „grubej” obudowie (rys. 17.2). Umowne określenie „gruba” obudowa oznacza, że objętość materiału w obudowie pojemnika (w ścianach pomieszczenia) lub/i parametry materiału obudowy (gęstość, ciepło właściwe) powodują, że pojemności cieplne materiału obudowy i substancji w pojemniku są porównywalne.



Rys. 17.2. Schemat obiektu z grzałką i grubą obudową

Model obiektu należy skonstruować na podstawie dwóch bilansów energetycznych: wnętrza pojemnika o pojemności cieplnej C_{vw} i temperaturze $T_w(t)$:

$$C_{vw} \dot{T}_w(t) = q_g(t) - q_{sw}(t) \quad (\text{III.200})$$

oraz ścian pojemnika o pojemności cieplnej C_{vs} i temperaturze $T_s(t)$:

$$C_{vs} \dot{T}_s(t) = q_{sw}(t) - q_{sz}(t) \quad (\text{III.201})$$

Strumień ciepła traconego z wnętrza pojemnika $q_{sw}(t)$ jest przejmowany przez obudowę. Odbywa się to przez przewodzenie ciepła na styku substancji wewnętrz pojemnika i materiału obudowy, stąd wzór:

$$q_{sw}(t) = K_{cw}(T_w(t) - T_s(t)) \quad (\text{III.202})$$

gdzie współczynnik K_{cw} jest przewodnością cieplną tej warstwy styku. Również obudowa traci ciepło na zewnątrz przez przewodzenie na styku materiału obudowy i substancji na zewnątrz, zgodnie ze wzorem na strumień ciepła traconego $q_{sz}(t)$:

$$q_{sz}(t) = K_{cz}(T_s(t) - T_z(t)) \quad (\text{III.203})$$

gdzie K_{cz} – współczynnik przewodności warstwy.

Po podstawieniu wzorów (III.202) i (III.203) do bilansów (III.200) i (III.201) uzyskuje się model obiektu w postaci układu równań różniczkowych:

$$\begin{cases} C_{vw} \dot{T}_w(t) = q_g(t) - K_{cw}(T_w(t) - T_s(t)) \\ C_{vs} \dot{T}_s(t) = K_{cw}(T_w(t) - T_s(t)) - K_{cz}(T_s(t) - T_z(t)) \end{cases} \quad (\text{III.204})$$

a po dalszych przekształceniach – w postaci operatorowej:

$$\begin{bmatrix} T_w(s) \\ T_s(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{M(s)} \begin{bmatrix} C_{vs}s + K_{cw} + K_{cz} & K_{cw}K_{cz} \\ K_{cw} & K_{cz}(C_{vw}s + K_{cz}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_g(s) \\ T_z(s) \end{bmatrix}$$

$$M(s) = (C_{vw}s + K_{cw})(C_{vs}s + K_{cw} + K_{cz}) - K_{cw}^2 \quad (\text{III.205})$$

Model jest układem dwóch elementów inercyjnych – wnętrza pojemnika i jego obudowy. Nawet bez dalszych przekształceń można jednak zauważyć, że stałe czasowe obiektu jako całości są inne niż stałe czasowe jego elementów. Ma to miejsce zawsze, gdy magazyny energii wpływają na siebie nawzajem (tak jak w oma-

wianym przykładzie), tzn. temperatura pojemnika wpływa na temperaturę obudowy i odwrotnie. Równanie charakterystyczne modelu (III.205) ma postać:

$$C_{vs}C_{vw}s^2 + (C_{vw}K_{cw} + C_{vw}K_{cz} + C_{vs}K_{cw})s + K_{cz}K_{cw} = 0 \quad (\text{III.206})$$

a wyznacznik równania:

$$\Delta = (C_{vw}K_{cw} + C_{vw}K_{cz} + C_{vs}K_{cw})^2 - 4C_{vs}C_{vw}K_{cz}K_{cw} \quad (\text{III.207})$$

Dalsza analiza jest bardziej przejrzysta po podstawieniu symboli: $C_{vs}K_{cw} = a$, $C_{vw}K_{cz} = b$ i $C_{vw}K_{cw} = c$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (c + a + b)^2 - 4ab \\ \Delta &= c^2 + 2c(a + b) + (a + b)^2 - 4ab \\ \Delta &= c(c + 2a + 2b) + (a - b)^2 > 0 \end{aligned} \quad (\text{III.208})$$

Wyznacznik równania jest zawsze dodatni, ponieważ na podstawie interpretacji fizycznej wiadomo, że czynniki a , b , c są zawsze dodatnie. Pierwiastki równania charakterystycznego są więc rzeczywiste i co więcej – zawsze ujemne:

$$s_{1,2} = \frac{-(a + b + c) \pm \sqrt{(a + b + c)^2 - 4ab}}{2C_{vs}C_{vw}} < 0 \quad (\text{III.209})$$

2.2.4 Wniosek o stabilności układu można uzyskać w prostszy sposób, na podstawie kryterium Hurwitz'a – wystarczy zauważyc, że w rzeczywistych warunkach wszystkie współczynniki w równaniu (III.206) są dodatnie, co w tym wypadku wystarcza do stwierdzenia ujemnej wartości pierwiastków i stabilności modelu.

Ustaliliśmy, że niezależnie od wartości parametrów obiekt fizyczny jest zawsze stabilny, a w jego odpowiedzi skokowej nigdy nie występują oscylacje. Na tej podstawie zamiast modelu drugiego rzędu stosuje się często dla pojemnika (pomieszczenia) prostszy model pierwszego rzędu (III.198), w którym we wzorach pomija się mniej znaczące magazynowanie energii przez obudowę, ale uwzględnia się je pośrednio przez zwiększenie wartości pojemności cieplnej wnętra pojemnika

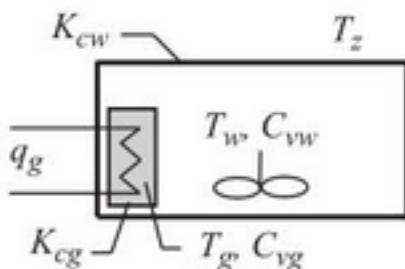
2.2.6 (zastosowanie wypadkowej pojemności wnętra i ścian). Największe różnice w odpowiedzi skokowej prostszego modelu występują w początkowych chwilach po pobudzeniu, tj. dla wysokich częstotliwości, które w przypadku obiektów cieplnych praktycznie można pominąć.

17.2.3. Obiekt z grzejnikiem kumulacyjnym

Kolejnym rozważanym obiektem jest pomieszczenie ogrzewane przez elektryczny grzejnik kumulacyjny o mocy $q_g(t)$ (rys. 17.3).

* W p. 2.2.4: o kryteriach stabilności.

* W p. 2.2.6: o własnościach podstawowych członów dynamiki.



Rys. 17.3. Schemat obiektu z grzejnikiem kumulacyjnym

Model powstanie przy założeniu, że istotnymi magazynami energii w układzie są jedynie powietrze o temperaturze $T_w(t)$ w pomieszczeniu i olej wypełniający grzejnik o temperaturze $T_g(t)$. Podstawą modelu są więc dwa równania bilansowe:

dla grzejnika:

$$C_{vg} \dot{T}_g(t) = q_g(t) - q_{go}(t) \quad (\text{III.210})$$

i dla pomieszczenia:

$$C_{vw} \dot{T}_w(t) = q_{go}(t) - q_s(t) \quad (\text{III.211})$$

Pojemności cieplne grzejnika C_{vg} i pomieszczenia C_{vw} zależą od objętości i właściwości, odpowiednio, powietrza w pomieszczeniu i oleju w grzejniku. Zmienna $q_{go}(t)$ określa strumień ciepła oddawanego przez grzejnik do pomieszczenia w wyniku przewodzenia przez obudowę zgodnie ze wzorem:

$$q_{go}(t) = K_{cg} (T_g(t) - T_w(t)) \quad (\text{III.212})$$

gdzie K_{cg} oznacza przewodność cieplną obudowy grzejnika. Natomiast zmienna $q_s(t)$ określa strumień ciepła tracony przez ściany pomieszczenia o przewodności cieplnej K_{cw} :

$$q_s(t) = K_{cw} (T_w(t) - T_z(t)) \quad (\text{III.213})$$

Po uporządkowaniu powyższych zależności otrzymuje się model w postaci:

$$\begin{cases} C_{vg} \dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_{cg} (T_g(t) - T_w(t)) \\ C_{vw} \dot{T}_w(t) = K_{cg} (T_g(t) - T_w(t)) - K_{cw} (T_w(t) - T_z(t)) \end{cases} \quad (\text{III.214})$$

co odpowiada następującej postaci operatorowej:

$$\begin{bmatrix} T_g(s) \\ T_w(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{M(s)} \begin{bmatrix} C_{vw}s + K_{cg} + K_{cw} & K_{cg}K_{cw} \\ K_{cg} & K_{cw}(C_{vg}s + K_{cg}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_g(s) \\ T_z(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.215})$$

$$M(s) = (C_{vg}s + K_{cg})(C_{vw}s + K_{cg} + K_{cw}) - K_{cg}^2$$

Model obiektu jest analogiczny do modelu w poprzednim przykładzie. Inna jest tylko interpretacja parametrów, inne więc będą ich wartości, a tym samym możliwość uproszczenia modelu obiektu. Przy konstruowaniu tego modelu uwzględniono pojemność cieplną grzejnika, ale pominięto magazynowanie ciepła w ścianach

pomieszczenia i w obudowie grzejnika (co prowadzioby do modelu w postaci układu czterech równań różniczkowych lub transmitancji czwartego rzędu). Porównanie wartości parametrów rzeczywistego obiektu mogłoby wykazać na przykład, że pojemność cieplna grzejnika jest znacznie mniejsza od pojemności cieplnej ścian pomieszczenia i jeśli już, to należy raczej uwzględnić tę ostatnią.

Pytania i zadania



1. Czy o możliwości pomijania ciepła gromadzonego w obudowie pojemnika decyduje tylko jej grubość?
2. Porównaj równania charakterystyczne równań stanu (III.204) i transmitancji (III.205).

17.3. Centralne ogrzewanie

17.3.1. Wprowadzenie

Instalacja centralnego ogrzewania jest powszechnie znanym przykładem procesu cieplnego, który polega na transporcie energii w wyniku wymuszonego obiegu czynnika grzewczego, zwykle wody. W kolejnych przykładach zostały przedstawione proste modele typowych elementów instalacji c.o., które były konstruowane przy założeniu, że pojemność cieplna pomieszczenia stanowi wypadkową pojemności cieplnych powietrza i ścian pomieszczenia.

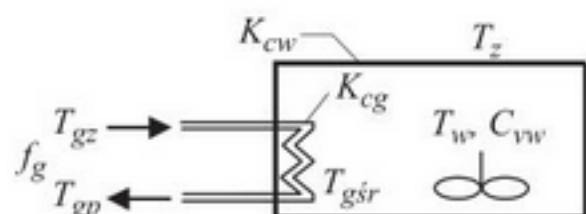
17.3.2. Obiekt z grzejnikiem c.o. o temperaturze T_g

CD

Najprostszy model ogrzewania można uzyskać, jeśli woda przepływająca przez grzejnik ma prawie jednakową temperaturę $T_g(t)$ na całej długości grzejnika, co pozwala przyjąć ją jako zmienną wejściową. *Przykład na CD.*

17.3.3. Obiekt z grzejnikiem c.o. o temperaturze zasilania T_{gz}

Dokładniejszy model pomieszczenia z grzejnikiem przepływowym uwzględnia stopniowe schładzanie wody przepływającej przez grzejnik (rys. 17.4) – woda zasilająca grzejnik ma temperaturę $T_{gz}(t)$, a wypływaną z grzejnika – $T_{gp}(t)$.



Rys. 17.4. Schemat obiektu z grzejnikiem o T_{gz}/T_{gp}

Przy konstruowaniu modelu zostaną wykorzystane (jak w poprzednim przykładzie):

- bilans energii w pomieszczeniu:

$$C_{vw}\dot{T}_w(t) = q_{go}(t) - q_s(t) \quad (\text{III.216})$$

- strumień ciepła oddawanego przez grzejnik do pomieszczenia:

$$q_{go}(t) = K_{cg}(T_{gir}(t) - T_w(t)) \quad (\text{III.217})$$

- przepływ ciepła przez ściany pomieszczenia:

$$q_s(t) = K_{cw}(T_w(t) - T_z(t)) \quad (\text{III.218})$$

Podstawiając wzory (III.217) i (III.218) do bilansu (III.216), otrzymuje się:

$$C_{vw}\dot{T}_w(t) = K_{cg}(T_{gir}(t) - T_w(t)) - K_{cw}(T_w(t) - T_z(t)) \quad (\text{III.219})$$

Model dynamiki obiektu będzie zawierał jedno równanie różniczkowe ze zmienną stanu $T_w(t)$. Temperatury $T_{gz}(t)$ i $T_z(t)$ są zmiennymi wejściowymi. Pozostaje jeszcze do wyznaczenia średnia temperatura wody w grzejniku $T_{gir}(t)$. Aby można było wyeliminować nadmiarową zmienną, należy poszukać kolejnych zależności. Jeśli pominie się akumulację ciepła w grzejniku, to strumień ciepła $q_{go}(t)$ oddawanego przez grzejnik będzie równy strumieniowi ciepła $q_{gd}(t)$ dostarczanego do grzejnika, który z kolei można wyznaczyć na podstawie różnicy mocy cieplnej wody wpływającej do grzejnika i z niego wypływającej:

$$\begin{aligned} q_{gd}(t) &= c_{pw}\rho_w f_g(t)T_{gz}(t) - c_{pw}\rho_w f_g(t)T_{gp}(t) \\ q_{gd}(t) &= c_{pw}\rho_w f_g(t)(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)) \end{aligned} \quad (\text{III.220})$$

gdzie: c_{pw} – ciepło właściwe wody, ρ_w – gęstość wody.

W pierwszym podejściu przyjmiemy założenie o doskonałym mieszaniu wody wewnętrz grzejnika, to znaczy że $T_{gp}(t) = T_{gir}(t)$, więc porównując wzory (III.217) i (III.220), można wyznaczyć zmienną $T_{gp}(t)$:

$$T_{pg}(t) = \frac{c_{pw}\rho_w f_g(t)}{c_{pw}\rho_w f_g(t) + K_{cg}} T_{gz}(t) + \frac{K_{cg}}{c_{pw}\rho_w f_g(t) + K_{cg}} T_w(t) \quad (\text{III.221})$$

Podstawiając ją następnie do (III.219), uzyskuje się ostateczny model:

$$\begin{aligned} C_{vw}\dot{T}_w(t) &= -\frac{c_{pw}\rho_w f_g(t)(K_{cg} + K_{cw}) + K_{cg}K_{cw}}{M_f(t)} T_w(t) + \\ &+ \frac{c_{pw}\rho_w K_{cg} f_g(t)}{M_f(t)} T_{gz}(t) + K_{cw} T_z(t) \end{aligned} \quad (\text{III.222})$$

gdzie $M_f(t) = c_{pw}\rho_w f_g(t) + K_{cg}$.

24.1

Powyższe równanie opisuje w pełni dynamikę obiektu. Często jednak dołącza się do modelu równanie (III.221) jako równanie zmiennej wyjściowej[•].

Jeśli natężenie przepływu wody przez grzejnik jest stałym parametrem obiektu ($f_g(t) = f_g$), to model (III.222) jest liniowy i można przedstawić równanie operatorowe obiektu:

$$T_w(s) = \frac{1}{Ts + 1} \left(\frac{c_{pw}\rho_w f_g K_{cg}}{M_{f1}} T_{gz}(s) + \frac{M_f K_{cw}}{M_{f1}} T_z(s) \right) \quad (\text{III.223})$$

gdzie: $T = \frac{(c_{pw}\rho_w f_g + K_{cg})C_{vw}}{M_{f1}}$,

$$M_{f1}(t) = c_{pw}\rho_w f_g (K_{cg} + K_{cw}) + K_{cg} K_{cw}$$

22.3.1

Jeśli jednak natężenie przepływu $f_g(t)$ może się zmieniać, to model obiektu w postaci równania (III.222) jest nieliniowy[•]. Poza tym można go stosować w ograniczonym przedziale zmian, ponieważ w rzeczywistych obiektach natężenie przepływu wody przez grzejnik ma również wpływ na wartość współczynnika przewodności K_{cg} .

10.4

W drugim podejściu założymy, że schłodzenie wody wzduż grzejnika następuje liniowo[•]; temperaturę grzejnika $T_{gir}(t)$ można więc przybliżyć za pomocą średniej arytmetycznej:

$$T_{gir}(t) = (T_{gz}(t) + T_{gp}(t)) / 2 \quad (\text{III.224})$$

Wówczas, porównując wzory (III.217) i (III.220), można wyznaczyć zmienną $T_{gp}(t)$:

$$T_{pg}(t) = \frac{2c_{pw}\rho_w f_g(t) - K_{cg}}{2c_{pw}\rho_w f_g(t) + K_{cg}} T_{gz}(t) + \frac{2K_{cg}}{2c_{pw}\rho_w f_g(t) + K_{cg}} T_w(t) \quad (\text{III.225})$$

Po wprowadzeniu (III.224) i (III.225) do równania (III.219) uzyska się model w postaci:

$$\begin{aligned} C_{vw} \dot{T}_w(t) &= -\frac{2c_{pw}\rho_w f_g(t)(K_{cg} + K_{cw}) + K_{cg} K_{cw}}{M_f(t)} T_w(t) + \\ &+ \frac{2c_{pw}\rho_w K_{cg} f_g(t)}{M_f(t)} T_{gz}(t) + K_{cw} T_z(t) \end{aligned} \quad (\text{III.226})$$

gdzie $M_f(t) = 2c_{pw}\rho_w f_g(t) + K_{cg}$.

[•] W p. 24.1: o równaniach stanu i równaniach wyjściowych.

[•] W p. 22.3.1: o aplikacji modelu pomieszczenia z grzejnikiem w programie symulacyjnym.

[•] W p. 10.4: o przybliżonym opisie procesu schładzania.

Operatorowa forma modelu dla stałego przepływu $f_g(t)$ jest następująca:

$$T_w(s) = \frac{1}{Ts + 1} \left(\frac{2c_{pw}\rho_w f_g K_{cg}}{M_{f1}} T_{gz}(s) + \frac{M_f K_{cw}}{M_{f1}} T_z(s) \right) \quad (\text{III.227})$$

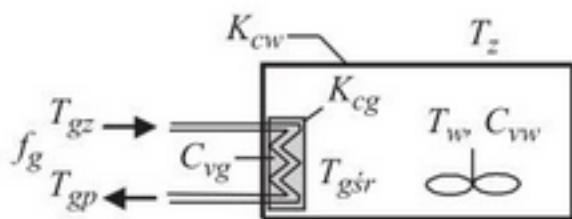
gdzie: $T = \frac{(2c_{pw}\rho_w f_g + K_{cg})C_{vw}}{M_{f1}}$,

$$M_{f1}(t) = 2c_{pw}\rho_w f_g (K_{cg} + K_{cw}) + K_{cg} K_{cw}$$

Z porównania modeli (III.222) i (III.226) oraz, odpowiednio, (III.223) i (III.227) wynika, że jedyną różnicą są stosunkowo niewielkie zmiany we współczynnikach i charakterystycznych parametrach (wzmocnienie, stała czasowa).

17.3.4. Obiekt z grzejnikiem c.o. o temperaturze zasilania T_{gz} i pojemności cieplnej C_{vg}

Kolejny wariant modelu pomieszczenia z grzejnikiem c.o. uwzględnia nie tylko schłodzenie wody, ale także magazynowanie energii w grzejniku (rys. 17.5).



Rys. 17.5. Schemat obiektu z grzejnikiem o pojemności cieplnej C_{vg}

Podstawą modelu będą więc bilanse energii w pomieszczeniu i grzejniku:

$$C_{vw} \dot{T}_w(t) = q_{go}(t) - q_s(t) \quad (\text{III.228})$$

$$C_{vg} \dot{T}_{gir}(t) = q_{gd}(t) - q_{go}(t) \quad (\text{III.229})$$

gdzie podobnie jak w poprzednim przykładzie:

$q_{go}(t)$ – przepływ ciepła z grzejnika do pomieszczenia:

$$q_{go}(t) = K_{cg} (T_{gir}(t) - T_w(t)) \quad (\text{III.230})$$

$q_{gd}(t)$ – strumień ciepła dostarczanego do grzejnika przez wodę:

$$q_{gd}(t) = c_{pw} \rho_w f_g(t) (T_{gz}(t) - T_{gp}(t)) \quad (\text{III.231})$$

$q_s(t)$ – strumień ciepła traconego przez ściany pomieszczenia:

$$q_s(t) = K_{cw} (T_w(t) - T_z(t)) \quad (\text{III.232})$$

Wprowadzenie wzorów $q_{go}(t)$, $q_{gd}(t)$ i $q_s(t)$ do bilansów (III.228) i (III.229) prowadzi do następujących równań:

$$\begin{cases} C_{vw}\dot{T}_w(t) = K_{cg}(T_{gir}(t) - T_w(t)) - K_{cw}(T_w(t) - T_z(t)) \\ C_{vg}\dot{T}_{gir}(t) = c_{pw}\rho_w f_g(t)(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)) - K_{cg}(T_{gir}(t) - T_w(t)) \end{cases} \quad (\text{III.233})$$

W układzie tym należy jeszcze wyeliminować jedną ze zmiennych wyjściowych – T_{gir} lub T_{gp} . Najprościej jest założyć doskonale mieszanie wody wewnątrz grzejnika, czyli $T_{gp}(t) = T_{gir}(t)$, co prowadzi natychmiast do modelu:

$$\begin{cases} C_{vw}\dot{T}_w(t) = K_{cg}(T_{gp}(t) - T_w(t)) - K_{cw}(T_w(t) - T_z(t)) \\ C_{vg}\dot{T}_{gp}(t) = c_{pw}\rho_w f_g(t)(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)) - K_{cg}(T_{gp}(t) - T_w(t)) \end{cases} \quad (\text{III.234})$$

Jeśli natomiast przyjmiemy założenie o liniowym schładzaniu wody w grzejniku, czyli $T_{gir} = (T_{gz} + T_{gp})/2$, to po wyeliminowaniu z równania (III.233) zmiennej T_{gir} model przyjmie postać układu równań:

$$\begin{cases} 2C_{vw}\dot{T}_w(t) = K_{cg}(T_{gz}(t) + T_{gp}(t) - 2T_w(t)) - 2K_{cw}(T_w(t) - T_z(t)) \\ C_{vg}(\dot{T}_{gz}(t) + \dot{T}_{gp}(t)) = k_w f_g(t)(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)) - K_{cg}(T_{gz}(t) + T_{gp}(t) - 2T_w(t)) \end{cases} \quad (\text{III.235})$$

gdzie $k_w = 2c_{pw}\rho_w$. Charakterystyczną cechą modelu (III.235) jest występowanie pochodnej zmiennej wejściowej $T_{gz}(t)$. W równaniu (III.233) można wyeliminować także zmienną $T_{gp} = 2T_{gir} - T_{gz}$, i uzyskać dzięki temu prostszy model:

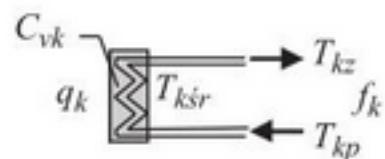
$$\begin{cases} C_{vw}\dot{T}_w(t) = K_{cg}(T_{gir}(t) - T_w(t)) - K_{cw}(T_w(t) - T_z(t)) \\ C_{vg}\dot{T}_{gir}(t) = c_{pw}\rho_w f_g(t)(T_{gz}(t) - T_{gir}(t)) - K_{cg}(T_{gir}(t) - T_w(t)) \end{cases} \quad (\text{III.236})$$

W modelu (III.236) występują tylko pochodne zmiennych stanu $T_w(t)$ i $T_{gir}(t)$. Aby umożliwić wyznaczanie zmiennej $T_{gp}(t)$, wystarczy dołączyć do modelu odpowiednie równanie wyjściowe, wyznaczone z definicji średniej T_{gir} .

Można by przypuszczać, że otrzymane modele (III.234), (III.235) i (III.236) będą się różnić tylko współczynnikami (podobnie jak w poprzednim przykładzie). Okazuje się jednak, że wprowadzenie zależności $T_{gir} = (T_{gz} + T_{gp})/2$ zmienia własności dynamiczne w odniesieniu do zmiennej T_{gp} ¹. Sugeruje się więc stosowanie modelu (III.234).

17.3.5. Kocioł c.o. o mocy q_k i pojemności C_{vk}

Do ogrzewania wody w nowoczesnej instalacji c.o. stosuje się kotły gazowe lub elektryczne, wyposażone w układy sterowania mocą q_k (rys. 17.6).



Rys. 17.6. Schemat działania c.o.

¹ Zmiany dotyczą reakcji T_{gp} na zmiany na wejściu T_{gz} . Dokładna analiza założeń pozwala zauważać, że jest to efektem wykorzystania zależności $T_{gir} = (T_{gz} + T_{gp})/2$, która opisuje relację między zmiennymi grzejnika tylko w stanie ustalonym (nie uwzględnia czasu).

Jeśli założyć, że pojemność cieplna kotła można scharakteryzować za pomocą parametru C_{vk} , to prosty model kotła opiera się na bilansie mocy produkowanej $q_k(t)$ i oddawanej $q_{ko}(t)$:

$$C_v \dot{T}_{kis}(t) = q_k(t) - q_{ko}(t) \quad (\text{III.237})$$

Moc oddawaną przez kocioł można określić za pomocą różnicy temperatury wody zasilającej instalację $T_{kz}(t)$ i wody powracającej z instalacji $T_{kp}(t)$ oraz natężenia przepływu $f_k(t)$ ustalanego przez pompę obiegową instalacji:

$$q_{ko}(t) = c_{pw} \rho_w f_k(t) (T_{kz}(t) - T_{kp}(t)) \quad (\text{III.238})$$

Zakładając, podobnie jak w przypadku grzejnika, prosty, lecz użyteczny wariant modelu z doskonałym mieszaniem, czyli że $T_{kis}(t) = T_{kz}(t)$, uzyskuje się :

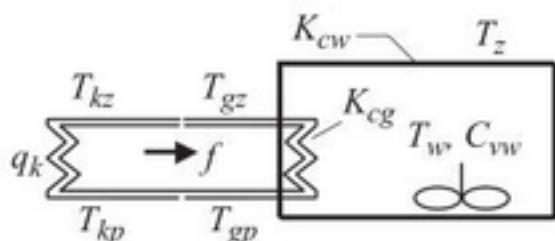
$$C_{vk} \dot{T}_{kz}(t) = q_k(t) - c_{pw} \rho_w f_k(t) (T_{kz}(t) - T_{kp}(t)) \quad (\text{III.239})$$

Przy stałym przepływie wody przez piec ($c_{pw} \rho_w f_k(t) = k_{fk}$) model może mieć postać transmitancji:

$$T_{kz}(s) = \frac{1}{Ts + 1} \left(\frac{1}{k_{fk}} q_k(s) + T_{kp}(s) \right), \quad \text{gdzie } T = \frac{C_{vk}}{k_{fk}} \quad (\text{III.240})$$

17.3.6. Sieć grzewcza

Dla obiektów typu sieć grzewcza można przyjąć, że rozchodzenie się zmiany ciśnienia w sieci¹ jest natychmiastowe w porównaniu z szybkością rozchodzenia się zmiany parametrów nośnika (temperatury). O dynamice modelu sieci grzewczej decyduje więc opóźnienie transportowe. Jako przykład rozpatrzymy proste połączenie kotła i grzejnika ogrzewającego pomieszczenie (rys. 17.7).



Rys. 17.7. Schemat instalacji grzewczej z opóźnieniem transportowym

Zakładając, że energia dostarczona w postaci ciepła akumuluje się jedynie w pomieszczeniu i kotle oraz że przepływ wody w instalacji jest stały, model obiektu można skonstruować, wykorzystując:

- model pomieszczenia: równanie dynamiki (III.222) i równanie wyjściowe (III.221);
- model kotła: równanie dynamiki (III.239).

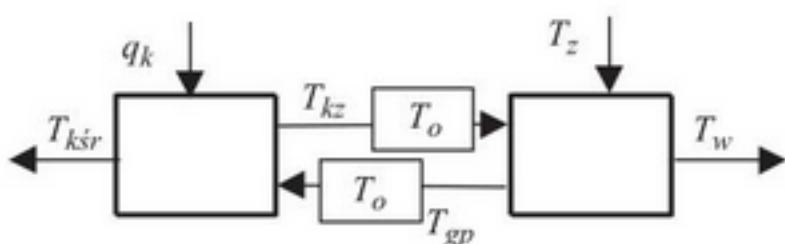
^{*} W p. 22.4: o aplikacji modelu pieca w programie symulacyjnym.

¹ Odbywające się z prędkością rozchodzenia się dźwięku w wodzie.

Pomiędzy temperaturami kotła i grzejnika występuje opóźnienie, co można zapisać:

$$T_{gz}(t) = T_k(t - T_o) \quad \text{oraz} \quad T_{gp}(t) = T_{gp}(t - T_o) \quad (\text{III.241})$$

Dla symulacji wystarczy połączyć wymienione modele zgodnie ze schematem blokowym (rys. 17.8).



Rys. 17.8. Schemat blokowy instalacji z opóźnieniem

Model analityczny uzyska się po wyeliminowaniu zmiennych wewnętrznych – T_{kz} , T_{gp} .

Pytania i zadania



1. Jak fizyczne parametry obiektu wpływają na parametry transmitancji (III.223) i (III.240)?
2. Która pojemność cieplna jest bardziej znacząca: pomieszczenia C_{vw} czy grzejnika C_{vg} ? Oceń wartości pojemności dla przykładowego obiektu.
3. Porównaj równania charakterystyczne modeli (III.234), (III.235) i (III.236) przy założeniu, że przepływ jest stały. Czy wielkość przepływu wpływa na stabilność tych modeli?
4. Przedstaw równania (III.234), (III.235) i (III.236) w postaci operatorowej i porównaj odpowiednie transmitancje. Wyznacz równania operatorowe zmiennej T_{gp} .
5. Zbadaj pierwiastki równania charakterystycznego jakobianu dla modelu (III.236).
6. Skonstruuj transmitancje sieci grzewczej (rys. 17.8), zakładając stały przepływ w instalacji.

17.4. Wymienniki ciepła

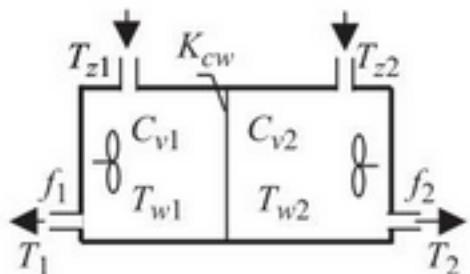
17.4.1. Wprowadzenie

Typowymi elementami układów cieplnych są wymienniki ciepła. Nawet bardzo uproszczone modele tych obiektów w zasadzie wymagają opisu za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. Proste modele o parametrach skupionych można uzyskać przy założeniu doskonałego mieszania nośników ciepła po obu stronach wymiennika. Przykłady podane niżej przedstawiają dwa podejścia do konstrukcji modelu prostego wymiennika. Modele są użyteczne, jeśli przepływy i temperatury nośników ciepła zmieniają się jedynie w niewielkich granicach. Przy większych zmianach po-

winno się stosować poprawkę ze względu na zależność współczynnika przenikalności cieplnej przegrody K_{cw} od temperatury i natężenia przepływu.

17.4.2. Wymiennik charakteryzowany przez temperaturę wypływu

Dwa zbiorniki (rys. 17.9) wymieniają ciepło przez wspólną przegrodę; są przy tym doskonale izolowane, więc nie tracą ciepła do otoczenia.



Rys. 17.9. Schemat wymiennika charakteryzowanego temperaturami T_{w1} , T_{w2}

Model powstanie na bazie bilansów energii magazynowanej po obu stronach wymiennika, którą charakteryzują zmienne stanu $T_{w1}(t)$ i $T_{w2}(t)$:

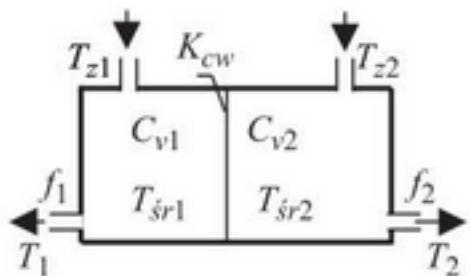
$$\begin{cases} C_{v1}\dot{T}_{w1}(t) = c_p \rho f_1(t)(T_{z1}(t) - T_{w1}(t)) - K_{cw}(T_{w1}(t) - T_{w2}(t)) \\ C_{v2}\dot{T}_{w2}(t) = c_p \rho f_2(t)(T_{z2}(t) - T_{w2}(t)) + K_{cw}(T_{w1}(t) - T_{w2}(t)) \end{cases} \quad (\text{III.242})$$

W równaniach zostało uwzględnione doskonale mieszanie zawartości wymiennika, a więc temperatura nośników wypływających $T_1(t)$ i $T_2(t)$ jest równa odpowiednim zmiennym stanu $T_{w1}(t)$ i $T_{w2}(t)$. Model jest liniowy przy założeniu niezmienności przepływów po obu stronach wymiennika ($c_p \rho f_1(t) = k_{f1}$, $c_p \rho f_2(t) = k_{f2}$):

$$\begin{cases} C_{v1}\dot{T}_{w1}(t) = -(k_{f1} + K_{cw})T_{w1}(t) + K_{cw}T_{w2}(t) + k_{f1}T_{z1} \\ C_{v2}\dot{T}_{w2}(t) = K_{cw}T_{w1}(t) - (k_{f2} + K_{cw})T_{w2}(t) + k_{f2}T_{z2} \end{cases} \quad (\text{III.243})$$

17.4.3. Wymiennik charakteryzowany przez temperatury średnie

Do opisu układu zbiorników, takiego samego jak w poprzednim przykładzie, zostaną przyjęte inne zmienne (rys. 17.10).



Rys. 17.10. Schemat wymiennika charakteryzowanego temperaturami średnimi $T_{\bar{s}1}$, $T_{\bar{s}2}$

Założymy, że nośniki ciepła zmieniają swoją temperaturę stopniowo wzdłuż przegrody wymiennika. Wobec tego jako zmienne stanu opisujące stan magazynów ciepła przyjmiemy wartości średnie temperatury na wejściach i wyjściach wymiennika:

$$T_{sr1}(t) = \frac{T_{z1}(t) + T_1(t)}{2}, \quad T_{sr2}(t) = \frac{T_{z2}(t) + T_2(t)}{2} \quad (\text{III.244})$$

Równania bilansów energii mają postać:

$$\begin{cases} C_{v1}\dot{T}_{sr1}(t) = c_p\rho f_1(t)(T_{z1}(t) - T_1(t)) - K_{cw}(T_{sr1}(t) - T_{sr2}(t)) \\ C_{v2}\dot{T}_{sr2}(t) = c_p\rho f_2(t)(T_{z2}(t) - T_2(t)) + K_{cw}(T_{sr1}(t) - T_{sr2}(t)) \end{cases} \quad (\text{III.245})$$

Po uporządkowaniu i przyjęciu założenia o niezmienności przepływów w wymieniku ($c_p\rho f_1(t) = k_{f1}$, $c_p\rho f_2(t) = k_{f2}$) model ma postać układu równań:

$$\begin{cases} C_{v1}\dot{T}_{sr1}(t) = -(2k_{f1} + K_{cw})T_{sr1}(t) + K_{cw}T_{sr2}(t) + 2k_{f1}T_{z1} \\ C_{v2}\dot{T}_{sr2}(t) = K_{cw}T_{sr1}(t) - (2k_{f2} + K_{cw})T_{sr2}(t) + 2k_{f2}T_{z2} \end{cases} \quad (\text{III.246})$$

Wartości zmiennych wyjściowych $T_1(t)$ i $T_2(t)$ można wyliczyć na podstawie definicji średnich.

Pytania i zadania



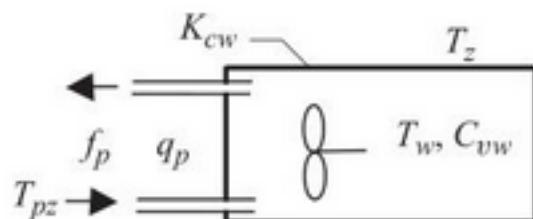
- Porównaj transmitancje układów (III.243) i (III.245).
- Jaki jest związek między zmiennymi stanu T_{w1} , T_{w2} a zmiennymi T_{sr1} , T_{sr2} ?
- Zaimplementuj powyższe modele wymienników w programie symulacyjnym i porównaj ich właściwości dynamiczne – szczególnie reakcje T_1 i T_2 na zakłócenie T_{z1} i T_{z2} .

17.5. Mieszanie substancji

17.5.1. Klimatyzacja (ogrzewanie przez nawiew)

Przez analogię do zbiorników mieszających substancje o różnych gęstościach i stężeniach, można rozważyć zbiorniki, w których następuje mieszanie substancji o różnych temperaturach.

Pomieszczenie o pojemności cieplnej C_{vw} jest ogrzewane ciepłym powietrzem nawiewanym do jego wnętrza (rys. 17.11).



Rys. 17.11. Schemat zastępczy systemu ogrzewania przez nawiew ciepłego powietrza

Przy założeniu, że jedynym magazynem energii jest powietrze o temperaturze $T_w(t)$, podstawą modelu obiektu jest następujący bilans:

$$C_{vw}\dot{T}_w(t) = q_p(t) - q_s(t) \quad (\text{III.247})$$

Moc $q_p(t)$, z jaką pomieszczenie jest ogrzewane, wynika z temperatury wprowadzanego powietrza $T_{pz}(t)$ i natężenia jego przepływu $f_p(t)$. Jeśli przyjąć, że jednocześnie taka sama ilość powietrza jest wyprowadzana z pomieszczenia, to strumień ciepła dostarczany do pomieszczenia w wyniku przepływu powietrza określa zależność:

$$q_p(t) = c_{pp} \rho_p f_p(t)(T_{pz}(t) - T_w(t)) \quad (\text{III.248})$$

gdzie: c_{pp} – ciepło właściwe powietrza, ρ_p – gęstość powietrza. Utrata ciepła następuje przez ściany, o współczynniku przewodności cieplnej K_{cw} , według zależności:

$$q_s(t) = K_{cw}(T_w(t) - T_z(t)) \quad (\text{III.249})$$

Model uzyskuje się po uporządkowaniu zależności i ma postać:

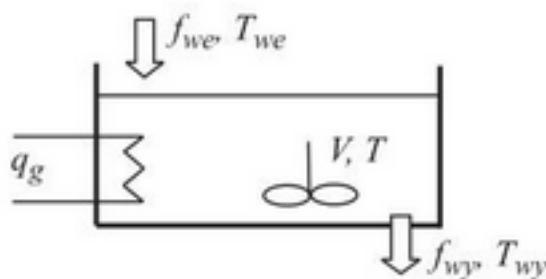
$$C_{vw} \dot{T}_w(t) = c_{pp} \rho_p f_p(t)(T_{pz}(t) - T_w(t)) - K_{cw}(T_w(t) - T_z(t)) \quad (\text{III.250})$$

Jeśli przepływ powietrza jest stały ($c_{pp} \rho_p f_p(t) = k_{fp}$), to model można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} T_w(s) &= \frac{k}{Ts + 1} (k_{fp} T_{pz}(s) + K_{cw} T_z(s)) \\ k &= \frac{1}{k_{fp} + K_{cw}}, \quad T = \frac{C_{vw}}{k_{fp} + K_{cw}} \end{aligned} \quad (\text{III.251})$$

17.5.2. Ogrzewanie zbiornika przepływowego

Prosty, otwarty zbiornik jest napełniany cieczą o temperaturze $T_{we}(t)$, z natężeniem $f_{we}(t)$. W zbiorniku znajduje się grzałka o mocy $q_g(t)$. Wypływ cieczy następuje z natężeniem $f_{wy}(t)$ (rys. 17.12).



Rys. 17.12. Schemat systemu ogrzewania zbiornika przepływowego

Model obiektu opiera się na bilansie zmiany energii dostarczanej w postaci ciepła $\dot{Q}(t)$ i objętości $V(t)$ w zbiorniku:

$$\dot{Q}(t) = q_g(t) + q_{we}(t) - q_{wy}(t) \quad (\text{III.252})$$

$$\dot{V}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{III.253})$$

W bilansie energetycznym pominięto straty ciepła przez ściany zbiornika i przez parowanie z powierzchni. Tak więc dostarczany strumień ciepła pochodzi od grzałki $q_g(t)$ i dopływającej cieczy $q_{we}(t)$ wg wzoru:

$$q_{we}(t) = \rho c_p f_{we}(t) T_{we}(t) \quad (\text{III.254})$$

a strumień tracony wynika z odpływu cieczy wg wzoru:

$$q_{wy}(t) = \rho c_p f_{wy}(t) T(t) \quad (\text{III.255})$$

Temperatura cieczy wypływającej $T_{wy}(t)$ jest równa temperaturze cieczy w zbiorniku $T(t)$, jeśli założyć doskonałe mieszanie cieczy w zbiorniku. Ponieważ objętość cieczy w zbiorniku zmienia się, więc zbiornik nie ma stałej pojemności cieplnej:

$$\dot{Q}(t) = \frac{d(\rho c_p V(t) T(t))}{dt} = \rho c_p (V(t) \dot{T}(t) + \dot{V}(t) T(t)) \quad (\text{III.256})$$

Tworząc z równań (III.253) i (III.252) układ i wykorzystując zależności (III.254), (III.255) i (III.256), otrzymuje się model w postaci:

$$\begin{cases} \rho c_p (V(t) \dot{T}(t) + \dot{V}(t) T(t)) = q_g(t) + \rho c_p f_{we}(t) (T_{we}(t) - T(t)) \\ \dot{V}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \end{cases} \quad (\text{III.257})$$

Wymaga on uporządkowania, które wyeliminuje pochodną objętości w drugim równaniu. W efekcie powstaje układ nieliniowych równań stanu:

$$\begin{cases} \rho c_p V(t) \dot{T}(t) = q_g(t) + \rho c_p f_{we}(t) (T_{we}(t) - T(t)) \\ \dot{V}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \end{cases} \quad (\text{III.258})$$

Model jest analogiczny do modelu zbiomika uśredniającego stężenie substancji (III.184).

Pytania i zadania



1. Zlinearyzuj model (III.250). Wyznacz transmitancje i porównaj z modelem (III.251).
2. Wyznacz transmitancje modelu (III.258).

Układy termodynamiczne

18.1. Ogólne zasady konstruowania modeli

Modelowanie obiektów termodynamicznych zostanie przedstawione na przykładzie układów pneumatycznych, w których zachodzi izotermiczne lub adiabatyczne sprężanie/rozprężanie gazów, opisane za pomocą odpowiedniego wariantu równania stanu gazu doskonałego.

Najprostsze modele tego typu obiektów tworzy się podobnie jak modele układów hydraulicznych, to znaczy na podstawie bilansowania przepływów i ciśnień. W układach pneumatycznych zazwyczaj nie uwzględnia się masy gazu, nie można jednak pominąć jego sprężystości. Podstawowe uproszczenie polega na założeniu stałej wartości izotermicznej (adiabatycznej) pojemności ściśliwości gazu C , co pozwala na bilansowanie przepływów objętościowych[→]:

$$f(t) = \dot{V}(t) = C\dot{p}(t) \quad (\text{III.259})$$

W rzeczywistości pojemność zależy od ciśnienia, jakie panuje w układzie ($C = V_0/p_0$). Metodę można więc stosować wtedy, kiedy zmiany ciśnienia $\dot{p}(t)$ są niewielkie w porównaniu z ciśnieniem układu p_0 .

Dokładniejsze modele opierają się na bilansie masy przepływającej przez element:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho(t)V(t)) = \rho(t)\dot{V}(t) + V(t)\dot{\rho}(t) = \sum f_{mi}(t) \quad (\text{III.260})$$

gdzie: $m(t) = \rho(t)V(t)$ – masa gazu zgromadzonego w elemencie, a $f_{mi}(t)$ – masowy strumień przepływu. W równaniu (III.260) można wyróżnić składnik $\rho(t)\dot{V}(t)$, wynikający z elastyczności aparatury[→], oraz składnik $V(t)\dot{\rho}(t)$, związany ze ściśliwością gazu.

[→] W p. 11.3.3: o pojemności ściśliwości gazów.

[→] W p. 8.4.3: o elastycznej aparaturze w układach hydraulicznych.

11.3.3

8.4.3

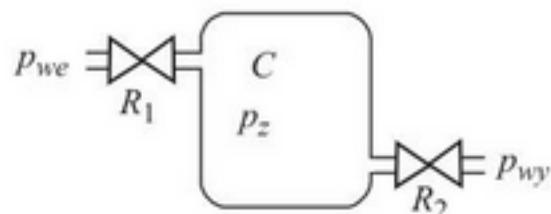
18.2. Przepływ gazu przez zbiorniki

18.2.1. Wprowadzenie

W procesach przedstawionych poniżej sprężanie gazu zachodzi bez zmiany temperatury (sprężanie izotermiczne). Zakłada się pewną stałą pojemność ściśliwości zbiorników. W celu uproszczenia modeli jest również stosowana proporcjonalna zależność między przepływem a spadkiem ciśnienia na oporach, należy jednak pamiętać, że jest to tylko przybliżenie w otoczeniu punktu pracy, ponieważ przepływ gazu jest zawsze turbulentny.

18.2.2. Zbiornik włączony szeregowo

Do zbiornika (rys. 18.1) wpływa gaz pod ciśnieniem $p_{we}(t)$, a wypływa, pokonując ciśnienie $p_{wy}(t)$.



Rys. 18.1. Schemat szeregowego włączenia zbiornika gazowego

Ponieważ sprężanie gazu jest izotermiczne (III.259), to bilans objętości gazu wpływającego i wypływającego można zapisać w postaci:

$$f_{we}(t) - f_{wy}(t) = \dot{V}(t) = C\dot{p}_z(t) \quad (\text{III.261})$$

Strumień gazu $f_{we}(t)$ i $f_{wy}(t)$ przepływają przez zawór wejściowy i wyjściowy, więc ich wartość zależy od oporu stawianego przez dany zawór i różnicy ciśnień po obu stronach zaworu:

$$f_{we}(t) = \frac{p_{we}(t) - p_z(t)}{R_1} \quad (\text{III.262})$$

$$f_{wy}(t) = \frac{p_z(t) - p_{wy}(t)}{R_2} \quad (\text{III.263})$$

Po podstawieniu (III.262) i (III.263) do bilansu (III.261) model obiektu ma postać równania:

$$R_1 R_2 C \dot{p}_z(t) = R_2 (p_{we}(t) - p_z(t)) - R_1 (p_z(t) - p_{wy}(t)) \quad (\text{III.264})$$

Model jest liniowy, więc można go przedstawić w następującej postaci operatorowej:

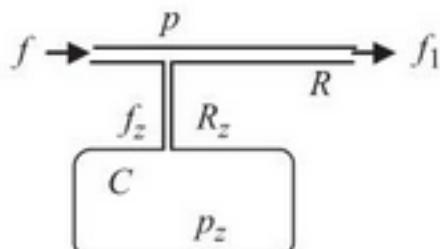
$$p_z(s) = \frac{k}{Ts + 1} (R_2 p_{we}(s) + R_1 p_{wy}(s)) \quad (\text{III.265})$$

$$\text{gdzie: } k = \frac{1}{R_1 + R_2}, \quad T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}.$$

Obiekt w postaci zbiornika wbudowanego szeregowo w przewód ma charakter inercyjny.

18.2.3. Zbiornik włączony równolegle

Przewód, w którym płynie gaz ma odgałęzienie prowadzące do zbiornika o objętości V (rys. 18.2).



Rys. 18.2. Schemat równoległego włączenia zbiornika gazowego

Założenie o sprężaniu izotermicznym pozwala napisać następujący bilans objętości gazu dla zbiornika:

$$\dot{V}(t) = C\dot{p}_z(t) = f_z(t) \quad (\text{III.266})$$

Strumień gazu $f_z(t)$ wynika z ciśnienia $p(t)$ na rozgałęzieniu przewodu, ciśnienia $p_z(t)$ w zbiorniku i oporu odgałęzienia R_z ; można go wyznaczyć z bilansu ciśnień:

$$p_z(t) + R_z f_z(t) = p(t) \quad (\text{III.267})$$

Z kolei wypływ gazu z instalacji zależy od ciśnienia $p(t)$ i oporu przewodu R , zgodnie z zależnością:

$$p(t) = Rf_1(t) = R(f(t) - f_z(t)) \quad (\text{III.268})$$

Z porównania wzorów (III.267) i (III.268) wynika, że:

$$p_z(t) + (R_z + R)f_z(t) = Rf(t) \quad (\text{III.269})$$

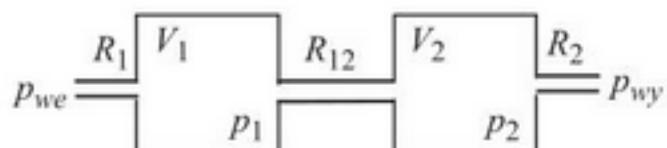
Uwzględniając zależność (III.266), otrzymuje się model w postaci:

$$C(R_z + R)\dot{p}_z(t) + p_z(t) = Rf(t) \quad (\text{III.270})$$

Także w tym wypadku obiekt ma charakter inercyjny.

18.2.4. Układ zbiorników włączonych szeregowo

Na przewodzie gazowym (rys. 18.3) są zainstalowane dwa zbiorniki o objętości V_1 i V_2 . Przepływ gazu następuje na skutek różnicy ciśnienia na wejściu $p_{we}(t)$ i na wyjściu $p_{wy}(t)$.



Rys. 18.3. Schemat układu zbiorników połączonych szeregowo

Podstawę modelu stanowią równania bilansowe objętości gazu w zbiornikach:

$$\begin{cases} C_1 \dot{p}_1(t) = \frac{p_{we}(t) - p_1(t)}{R_1} - \frac{p_1(t) - p_2(t)}{R_{12}} \\ C_2 \dot{p}_2(t) = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{R_{12}} - \frac{p_2(t) - p_{wy}(t)}{R_2} \end{cases} \quad (\text{III.271})$$

Operatorowa postać modelu jest następująca:

$$\begin{bmatrix} p_1(s) \\ p_2(s) \end{bmatrix} = \frac{k}{M(s)} \begin{bmatrix} M_2(s)/R_1 & 1/(R_1 R_{12}) \\ 1/(R_1 R_{12}) & M_1(s)/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{we}(s) \\ p_{wy}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.272})$$

gdzie: $M(s) = M_1(s)M_2(s) - \frac{1}{R_{12}^2}$, $M_1(s) = C_1 s + \frac{R_1 + R_{12}}{R_1 R_{12}}$, $M_2(s) = C_2 s + \frac{R_2 + R_{12}}{R_2 R_{12}}$.



15.3.7 Połączone zbiorniki pneumatyczne tworzą układ współdziałający [↗].

Pytania i zadania



- Przedstaw równania stanu obiektów z rys. 18.1, 18.2, 18.3 z uwzględnieniem turbulentnego charakteru przepływu.
- Zbadaj stabilność modelu (III.272). Jak wykonać obiekt, aby uniknąć oscylacji?
- Zbuduj model zbiornika włączonego równolegle (rys. 18.2), wybierając jako zmienną wyjściową strumień na wyjściu (f_1).

18.3. Kaskady przepływowe

18.3.1. Wprowadzenie

Do konstrukcji modeli kaskad pneumatycznych zostanie zastosowany bilans strumieni masy przepływającej przez elementy. Natężenie przepływu masowego $f_m(t)$ przez zwężkę o powierzchni otworu A , przy różnicy ciśnień $\Delta p(t)$, będzie wyznaczane na podstawie wzoru (II.181):

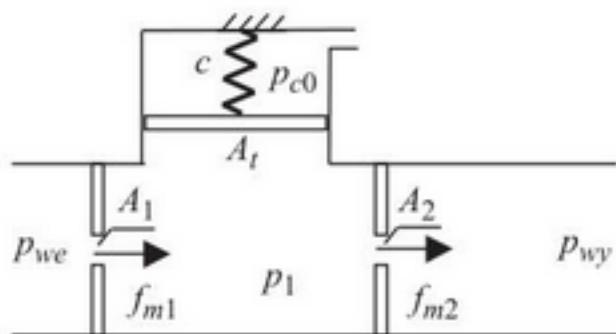
$$f_m(t) = \rho f(t) = \rho \alpha A \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\Delta p(t)}{R_m}}$$

Wprowadzenie stałego parametru R_m w powyższym wzorze jest przybliżeniem, ponieważ R_m zależy od gęstości ρ , która zmienia się ze względu na ścisłość gazu.

[↗] W p. 15.3.7: o układzie współdziałających zbiorników hydraulicznych.

18.3.2. Izotermiczne sprężanie gazu w kaskadzie otwartej

Przepływający gaz ulega sprężaniu w komorze, jaką ograniczają dwie zwężki o powierzchni otworów A_1 i A_2 (rys. 18.4). Prędkość przepływu jest na tyle mała, że sprężanie/rozprężanie odbywa się w stałej temperaturze. Dodatkowo objętość komory zmienia się pod wpływem ciśnienia ze względu na ruchomy tłok o powierzchni A_t , który współpracuje ze sprężyną c .



Rys. 18.4. Schemat kaskady elastycznej otwartej

Na podstawie równania stanu gazu (II.223) można wyznaczyć masę gazu w komorze:

$$m_1(t) = \frac{M}{RT_{10}} p_1(t) V_1(t) \quad (\text{III.273})$$

gdzie T_{10} jest stałą temperaturą przemiany izotermicznej, dla której jest spełnione równanie:

$$p_1(t) V_1(t) = p_{10} V_{10} = \text{const} \quad (\text{III.274})$$

Model konstruuje się na podstawie bilansu masy w komorze:

$$\dot{m}_1(t) = f_{m1}(t) - f_{m2}(t) \quad (\text{III.275})$$

Do wzoru (III.275) należy podstawić zróżniczkowaną zależność (III.273):

$$\dot{m}_1(t) = \frac{M}{RT_{10}} (V_1(t) \dot{p}_1(t) + p_1(t) \dot{V}_1(t)) \quad (\text{III.276})$$

Objętość komory $V_1(t)$ zależy od położenia $x(t)$ tłoka:

$$V_1(t) = V_{10} + A_t x(t) \quad (\text{III.277})$$

Z kolei położenie $x(t)$ wynika z równowagi sił działających na tłok:

$$A_t(p_1(t) - p_{c0}) = cx(t) \quad (\text{III.278})$$

Po uwzględnieniu zależności (III.276)–(III.278) oraz wzorów na przepływ przez zwężkę, model (III.275) uzyskuje postać:

$$\frac{M}{RT_{10}} \left(a + \frac{2A_t^2}{c} p_1(t) \right) \dot{p}_1(t) = \sqrt{\frac{p_{we}(t) - p_1(t)}{R_{m1}}} - \sqrt{\frac{p_1(t) - p_{wy}(t)}{R_{m2}}} \quad (\text{III.279})$$

gdzie $a = V_{10} - A_t^2 p_{c0} / c$.

Model kaskady sztywnej można rozważyć jako szczególny przypadek powyższych zależności. Na podstawie (III.275) i (III.276) oraz wzorów na przepływ przez zwężkę otrzymuje się zależność:

$$\frac{MV_{10}}{RT_{10}} \dot{p}_1(t) = \sqrt{\frac{p_{we}(t) - p_1(t)}{R_{m1}}} - \sqrt{\frac{p_1(t) - p_{wy}(t)}{R_{m2}}} \quad (\text{III.280})$$

ponieważ $V_1(t) = V_{10}$ i $\dot{V}_1(t) = 0$.

18.3.3. Adiabatyczne sprężanie gazu w kaskadzie otwartej

Kolejne modele dotyczą takiej samej konstrukcji elementu (rys. 18.4), z tym że sprężanie/rozprężanie gazu zachodzi bardzo szybko, więc praktycznie nie ma wymiany ciepła z otoczeniem. Podstawą modelu jest bilans masy w komorze:

$$\dot{m}_1(t) = f_{m1}(t) - f_{m2}(t) \quad (\text{III.281})$$

Masa gazu w komorze, na podstawie równania stanu gazu (II.223), zmienia się wówczas z ciśnieniem, objętością i temperaturą:

$$m_1(t) = \frac{M}{R} \frac{p_1(t)V_1(t)}{T_1(t)} \quad (\text{III.282})$$

Na podstawie równania przemiany adiabatycznej (II.235):

$$\frac{p_1^{\kappa-1}(t)}{T_1^\kappa(t)} = \frac{p_{10}^{\kappa-1}}{T_{10}^\kappa}$$

można wyznaczyć $T_1(t)$:

$$T_1^\kappa(t) = T_{10}^\kappa \left(\frac{p_1(t)}{p_{10}} \right)^{\kappa-1} \rightarrow T_1(t) = T_{10} \left(\frac{p_1(t)}{p_{10}} \right)^{(\kappa-1)/\kappa}$$

i podstawić do (III.282):

$$m_1(t) = \frac{M}{R} \frac{p_1(t)V_1(t)}{T_{10} \left(\frac{p_1(t)}{p_{10}} \right)^{(\kappa-1)/\kappa}} = \frac{Mp_{10}^{(\kappa-1)/\kappa}}{RT_{10}} V_1(t) p_1^{1/\kappa}(t) \quad (\text{III.283})$$

Różniczkując (III.283), otrzymujemy:

$$\dot{m}_1(t) = \frac{M}{RT_{10}} (V_1(t) p_1^{(1-\kappa)/\kappa}(t) \dot{p}_1(t) + p_1^\kappa(t) \dot{V}_1(t)) \quad (\text{III.284})$$

Dalszy ciąg przekształceń jest taki, jak przy konstruowaniu modelu kaskady z przemianą izotermiczną. W przypadku zatem elementu elastycznego oblicza się objętość komory $V_1(t)$ na podstawie położenia $x(t)$ tłoka:

$$V_1(t) = V_{10} + A_t x(t) \quad (\text{III.285})$$

które z kolei wyznacza się z równania równowagi sił działających na tłok:

$$A_t(p_1(t) - p_{c0}) = cx(t) \quad (\text{III.286})$$

Dla elementu sztywnego stosuje się uproszczenie modelu ze względu na stałą pojemność, tzn. $V_1(t) = V_{10}$ i $\dot{V}_1(t) = 0$.

Pytania i zadania

1. Dokończ przekształcenia modelu z przemianą adiabatyczną.
2. Jak zmienią się modele kaskad, jeśli ciśnienie $p_c(t)$ jest zmienne?
3. Jakiego typu członami dynamiki można przybliżyć modele kaskad?
4. Porównaj kaskady pneumatyczne z kaskadami hydraulicznymi w postaci elementów przepłybowych lub zbiorników.



Analogie układów

19.1. Charakterystyka ogólna

Jednym z czynników wiążących różne działy fizyki jest podobieństwo opisu matematycznego różnorodnych zjawisk, określane jako analogie układów. Analogie są bardzo użytecznym narzędziem zarówno przy konstruowaniu modeli obiektów, jak i przy ich badaniu. Umożliwiają one przenoszenie posiadanej wiedzy i doświadczenia z jednej dziedziny do innej. Zastosowanie analogii może mieć na celu poznanie nowej dziedziny, ułatwienie wykonania eksperymentu (rzeczywistego lub „myślowego”), a także wykorzystanie znanych metod badawczych czy posiadanego oprogramowania do wspomagania badań i projektów. Metodę tę należy jednak stosować bardzo ostrożnie, ponieważ każda analogia ma ograniczony zasięg.

19.2. Układy mechaniczne i elektryczne

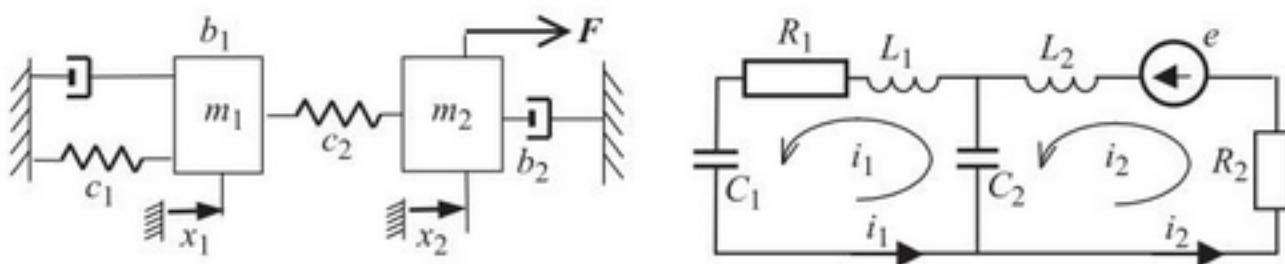
19.2.1. Wprowadzenie

Podobieństwo opisu elementarnych modeli mechanicznych i elektrycznych jest bardzo wyraźne i opiera się zazwyczaj na analogii przesunięcia i ładunku. Podobne są też zasady konstrukcji modeli liniowych układów z obu dziedzin. W układach mechanicznych powstają one przez bilansowanie sił w punktach poruszających się wzdłuż jednego kierunku, co odpowiada bilansowaniu spadków napięć w oczkach obwodu elektrycznego.

19.2.2. Przykłady układów analogicznych

Przykład 1

Przykładowe układy mechaniczny i elektryczny (rys. 19.1) zawierają analogiczne elementy: sprężyny i kondensatory, tłumiki i rezystory oraz masy i cewki.



Rys. 19.1. Przykład analogicznych układów mechanicznego i elektrycznego (1)

Modele obu obiektów wynikają z układu dwóch równań bilansowych. Elementy składowe są liniowe, więc zwykle przedstawia się je w postaci operatorowej (III.287), przy czym w opisie układów mechanicznych jako zmienne przyjmuje się przesunięcia, a w układach elektrycznych – natężenia prądów jako typowe zmienne pomiarowe:

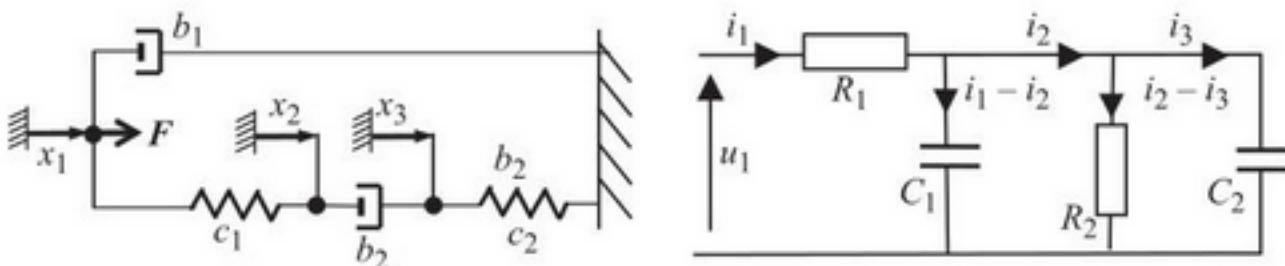
$$\begin{cases} F = s^2 m_2 x_2 + sb_2 x_2 + c_2(x_2 - x_1) \\ 0 = s^2 m_1 x_1 + sb_1 x_1 + c_1 x_1 + c_2(x_1 - x_2) \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} e = sL_2 i_2 + R_2 i_2(s) + \frac{i_2 - i_1}{sC_2} \\ 0 = sL_1 i_1 + R_1 i_1 + \frac{i_1}{sC_1} + \frac{i_1 - i_2}{sC_2} \end{array} \right. \quad (\text{III.287})$$

Podobieństwo obiektów jest jednak najlepiej widoczne, jeśli modele mają postać równań różniczkowych, a zmiennymi stanu są przesunięcia (x_1, x_2) i pochodne prądów oczkowych, czyli ładunki ($q_1 = di_1/dt, q_2 = di_2/dt$):

$$\begin{cases} F = m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) \\ 0 = m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2(x_1 - x_2) \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} e = L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{q_2 - q_1}{C_2} \\ 0 = L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_2} \end{array} \right. \quad (\text{III.288})$$

Przykład 2

Jako drugi przykład analogii mechaniczno-elektrycznej posłużą obiekty opisane przez układ trzech równań (rys. 19.2).



Rys. 19.2. Przykład analogicznych układów mechanicznego i elektrycznego (2)

Modele odpowiadające obiektom mają postać:

$$\begin{cases} F = b_1 \dot{x}_1 + c(x_1 - x_2) \\ 0 = c_1(x_2 - x_1) + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \\ 0 = b_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + c_2 x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + \frac{1}{sC}(i_1 - i_2) \\ 0 = -\frac{1}{sC_1}(i_1 - i_2) + R_2(i_2 - i_3) \\ 0 = -R_2(i_2 - i_3) + \frac{1}{sC_2}i_3 \end{cases} \quad (\text{III.289})$$

Warto zauważyć, że elementy mechaniczne znajdujące się między dwoma punktami odpowiadają w układach elektrycznych wspólnym elementom dwóch oczek.

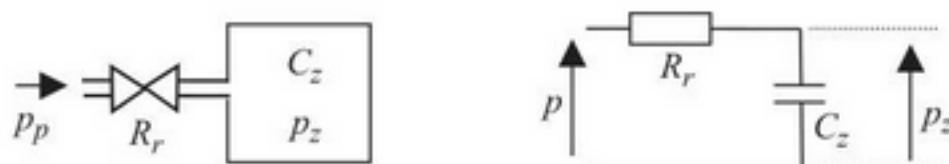
19.3. Układy hydrauliczne (pneumatyczne) i elektryczne

19.3.1. Charakterystyka ogólna

W badaniu własności dynamicznych układów hydraulicznych i pneumatycznych pomocne jest zastosowanie elektrycznych schematów zastępczych, bazujących na analogii elementów opornościowych, pojemnościowych i bezwładnościowych. W każdym z elementów hydraulicznych (pneumatycznych) w różnym stopniu występuje opór, ściśliwość i bezwładność. Zakłada się, że przewody rurowe stanowią opór czynny, ale wykazują także inertację i pojemność ściśliwości. Zawory charakteryzują się przede wszystkim oporem czynnym. Zbiorniki mają pojemność ściśliwości, choć czasem ważny może być również opór czynny. Pompy i kompresory są źródłami natężenia przepływu bądź ciśnienia, ale mają też wewnętrzny opór, pojemności bocznikujące (przecieki, odkształcenia konstrukcji) i inertację (duże przyspieszenia wewnętrznych kanałach). W układach hydraulicznych uwzględnia się szczególnie opór i inertację, a w układach pneumatycznych – opór i ściśliwość. Ograniczeniem może być nieliniowość opisu rzeczywistych elementów hydraulicznych i pneumatycznych.

19.3.2. Analogiczne układy inercyjne

Pierwszy przykład obiektu to prosty przewód zakończony zbiornikiem. W jednym przypadku (rys. 19.3) przewód jest reprezentowany jedynie przez opór (np. instalacja pneumatyczna), w drugim przypadku (rys. 19.4) – przez opór i masę (np. instalacja hydrauliczna).



Rys. 19.3. Przewód rurowy zakończony zbiornikiem (1)



Rys. 19.4. Przewód rurowy zakończony zbiornikiem (2)

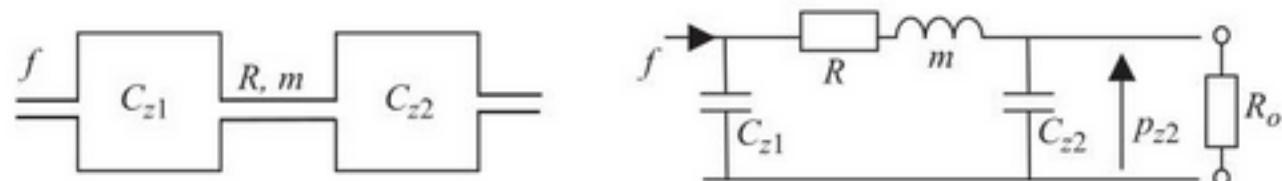
Aby lepiej zilustrować analogię, w odpowiednich układach elektrycznych zastosowano takie oznaczenia parametrów i zmiennych, jak w układach hydraulicznych (pneumatycznych).

19.3.3. Filtrujące własności zbiorników

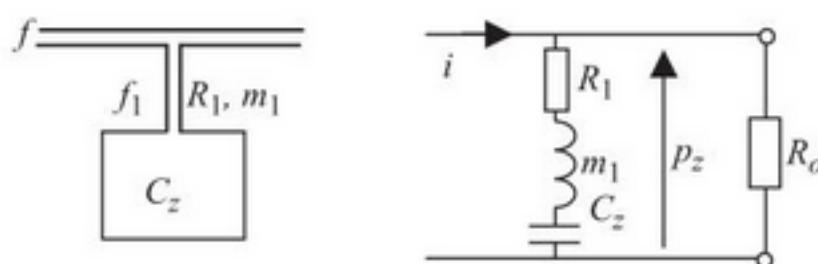
Klasycznym zagadnieniem analizy układów hydraulicznych jest zastosowanie zbiorników do tłumienia drgań w układzie. Odpowiada to projektowaniu filtrów w obwodach elektrycznych. Trzy kolejne przykłady dotyczą typowych układów o własnościach filtrujących (rys. 19.5, 19.6, 19.7).



Rys. 19.5. Schemat układu ze zbiornikiem na przewodzie rurowym



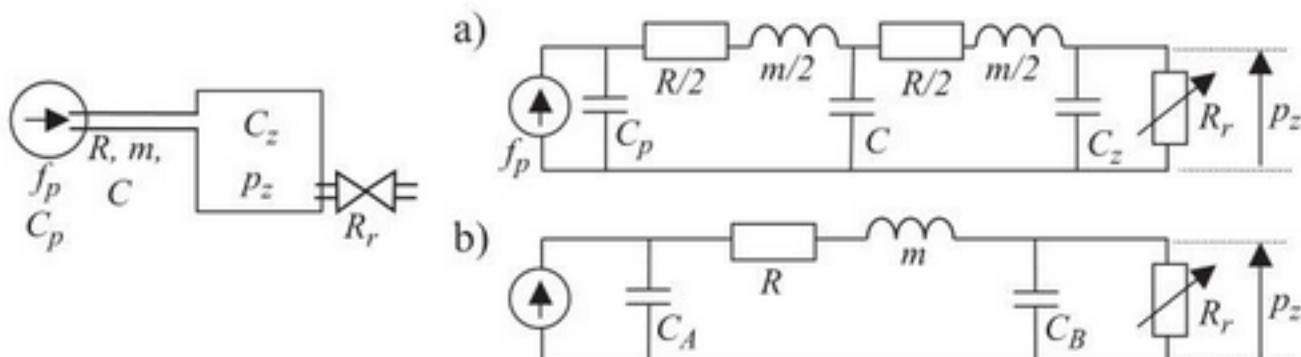
Rys. 19.6. Schemat układu z filtrem dolnoprzepustowym



Rys. 19.7. Schemat układu ze zbiornikiem przeciwtelesniowym

19.3.4. Różne formy układu analogicznego

W przypadku obiektu z długim przewodem rurowym (rys. 19.8) może być konieczne uwzględnienie nie tylko oporu (R) i masy (m), ale także pojemności ściśliwości (C) medium wewnętrz tego przewodu. Przy konstrukcji analogicznego układu elektrycznego pojemność tę może reprezentować kondensator C między parą elementów $R/2$ i $M/2$ (model a) lub też dwa kondensatory $C/2$ umieszczone przed i za elementami R i m (model b).



Rys. 19.8. Schemat długiego przewodu rurowego zakończonego zbiornikiem i zaworem oraz schematy zastępcze układów analogicznych (a i b)

Model obiektu można opisać transmitancją:

$$\frac{p_z(s)}{f_p(s)} = \frac{R_r}{T_3 s^3 + T_2 s^2 + T_1 s + 1} \quad (\text{III.290})$$

$$T_3 = R_r m C_A C_B; \quad T_2 = C_A m + R R_r C_A C_B; \quad T_1 = R C_A + R_r C_A + R C_B$$

gdzie: $C_A = C_p + C/2$ i $C_B = C_L + C/2$.

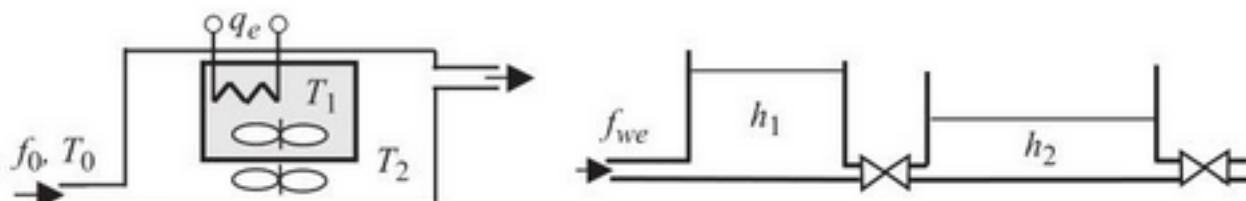
19.4. Układy cieplne i hydrauliczne

19.4.1. Wprowadzenie

Porównanie różnych obiektów do układów elektrycznych jest najczęściej stosowaną formą analogii, zwłaszcza w automatyce. Pozytyczne jednak mogą być również inne porównania, np. układów cieplnych i hydraulicznych, opierające się na podobieństwie bilansów energii cieplnej i bilansów masy. Podstawowym ograniczeniem tej analogii jest nieliniowość układów hydraulicznych, stąd porównywane są tylko układy zlinearyzowane.

19.4.2. Układ dwóch współdziałających zasobników

Obiektem cieplnym jest układ dwóch pojemników (rys. 19.9). Wewnętrzny pojemnik jest ogrzewany grzałką o mocy q_e i wymienia ciepło z zewnętrznym pojemnikiem, a stąd ciepło jest odprowadzane przez przepływające medium. Hydraulicznym odpowiednikiem obiektu cieplnego jest kaskada współdziałających zbiorników, zasilana jednorodną substancją o natężeniu przepływu f_{we} .



Rys. 19.9. Schemat układu dwóch współdziałających zasobników

Model układu cieplnego stanowią dwa równania odpowiadające dwóm zasobnikom ciepła, natomiast model układu hydraulicznego stanowią dwa równania odpowiadające bilansowi objętości cieczy w dwóch zbiornikach, przy czym są to równania zlinearyzowane:

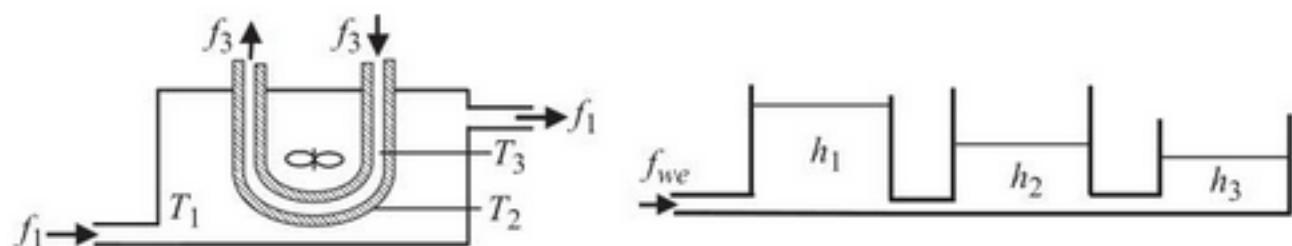
$$\begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = q_e - k_{12}(T_1 - T_2) \\ C_2 \dot{T}_2 = k_{12}(T_1 - T_2) - k_f T_2 + k_f T_0 \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 \dot{h}_1 = f_{we} - k_{12}(h_1 - h_2) \\ S_2 \dot{h}_2 = k_{12}(h_1 - h_2) - k_2 h_2 \end{cases} \quad (\text{III.291})$$

gdzie $k_f = c_p \rho f_0$.

Modele będą zupełnie podobne przy założeniu, że natężenie przepływu f_0 w układzie cieplnym jest stałe, a temperatury T_1 i T_2 są wyznaczane względem temperatury otoczenia T_0 .

19.4.3. Układ trzech współdziałających zasobników

W układzie cieplnym występują trzy magazyny ciepła, którym odpowiadają trzy współdziałające zbiorniki w układzie hydraulicznym (rys. 19.10).



Rys. 19.10. Schemat układu trzech współdziałających zasobników

Oba obiekty są opisane układem trzech równań bilansowych:

$$\begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = k_{f1} T_{01} - k_1(T_1 - T_2) - k_{f1} T_1 \\ C_2 \dot{T}_2 = k_1(T_1 - T_2) - k_2(T_2 - T_3) \\ C_3 \dot{T}_3 = k_2(T_2 - T_3) - k_{f3} T_3 + k_{f3} T_{03} \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 \dot{h}_1 = f_{we} - k_1(h_1 - h_2) \\ S_2 \dot{h}_2 = k_1(h_1 - h_2) - k_2(h_2 - h_3) \\ S_3 \dot{h}_3 = k_2(h_2 - h_3) - k_3 h_3 \end{cases} \quad (\text{III.292})$$

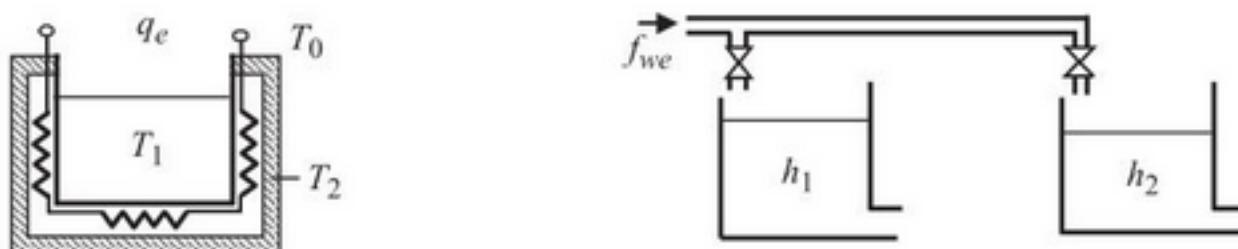
gdzie: $k_{f1} = c_p \rho f_1$, $k_{f3} = c_p \rho f_3$.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, podobieństwo modeli wymaga założenia o stałości natężeń przepływu w układzie cieplnym (f_1, f_3), a poza tym możliwości pominięcia mocy cieplnej czynnika wypływającego, o temperaturze T_1 , i dopływającego o temperaturze T_{03} .

19.4.4. Układ z „martwą” pojemnością boczną

W kolejnym przykładzie (rys. 19.11) ciepło doprowadzane do układu rozdziela się na dwa strumienie, które dostarczają energii do ciała o temperaturze T_1 i do obudowy

o temperaturze T_2 . Analogicznym układem jest układ hydrauliczny z rozdzieleniem strumienia cieczy kierowanego do dwóch niezależnych zbiorników. W obu wypadkach drugi zbiornik reprezentuje straty energii lub cieczy i jest nazywany „martwą” pojemnością boczną.



Rys. 19.11. Schemat układu z „martwą” pojemnością boczną

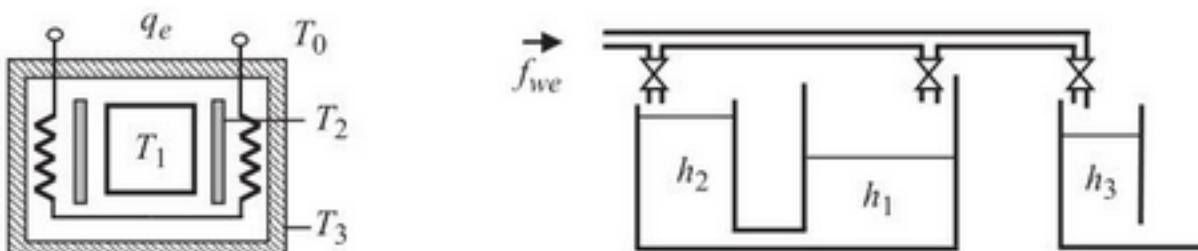
W modelach (III.293) zastosowano współczynniki rozdziału energii k_p i przepływu k_f :

$$\begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = k_p q_e - k_1(T_1 - T_0) \\ C_2 \dot{T}_2 = (1 - k_p) q_e - k_2(T_2 - T_0) \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 \dot{h}_1 = k_f f_{we} - k_1 h_1 \\ S_2 \dot{h}_2 = (1 - k_f) f_{we} - k_2 h_2 \end{cases} \quad (\text{III.293})$$

Rozdział energii cieplnej między ogrzewane ciało i obudowę zależy od różnicy temperatury grzałki i obu cieczy, a także od współczynnika przenikalności cieplnej między grzałką i ogrzewanym ciałem oraz grzałką i obudową. W układzie hydraulicznym rozdział strumienia cieczy zależy od stosunku oporów hydraulicznych na wejściu do zbiorników.

19.4.5. Układ z „czynną” i „martwą” pojemnością boczną

W urządzeniach ciepło pobierane przez elementy stanowiące pojemność boczną może być przekazywane dalej do ogrzewanego ciała, co ilustruje kolejny przykład (rys. 19.12). Energia cieplna dostarczana przez grzałkę do ogrzewanego ciała jest częściowo pochłaniana przez zewnętrzną izolację i wewnętrzną osłonę. Zewnętrzna izolacja, o temperaturze T_3 , przekazuje ciepło do otoczenia („martwa” pojemność boczna), natomiast wewnętrzna osłona, ogrzana do temperatury T_2 , oddaje swoją energię ogrzewanemu ciału („czynna” pojemność boczna).



Rys. 19.12. Schemat układu z „żywą” i „martwą” pojemnością boczną

Modele analogicznych układów mają postać:

$$\begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = k_{p1} q_e + k_{12}(T_2 - T_1) \\ C_2 \dot{T}_2 = k_{p2} q_e - k_{12}(T_2 - T_1) \\ C_3 \dot{T}_3 = k_{p3} q_e - k_3(T_3 - T_0) \\ k_{p1} + k_{p2} + k_{p3} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 \dot{h}_1 = k_{f1} f_{we} + k_{12}(h_2 - h_1) \\ S_2 \dot{h}_2 = k_{f2} f_{we} - k_{12}(h_2 - h_1) \\ S_3 \dot{h}_3 = k_{f3} f_{we} - k_2 h_2 \\ k_{f1} + k_{f2} + k_{f3} = 1 \end{cases} \quad (\text{III.294})$$

19.5. Analogie a różnice i uogólnienia

Przedstawione przykłady dotyczyły typowych analogii; możliwe jest jednak przyjęcie innego klucza i zdefiniowanie innych analogii – wszystko dzięki funkcjonowaniu jednolitego aparatu matematycznego w fizyce klasycznej. Równie ważne jak przyjęta zasada analogii są jej ograniczenia. Typowym przykładem ograniczenia jest brak w układach cieplnych odpowiednika efektu bezwładności, występującego w układach elektrycznych, mechanicznych czy hydraulicznych. Możliwość zastosowania analogii może być ograniczona także przez konieczność przyjęcia określonych założeń. Na przykład definiowana jest analogia między układami hydraulicznymi i układami elektrycznymi czy mechanicznymi, z tym że opis oporu hydraulicznego jest praktycznie zawsze nieliniowy, podczas gdy w układach elektrycznych i mechanicznych wystarczają zależności liniowe.

Jednolity opis zjawisk fizycznych sprzyja także uogólnieniu problemów występujących w różnych dziedzinach. W przypadku badania dynamicznych własności obiektów uogólnione problemy przybrały formę na przykład poszukiwania pierwiastków równania charakterystycznego czy przedstawienia opisu obiektu za pomocą podstawowych członów dynamiki. Takie same własności obiektu w potocznym języku mogą mieć interpretację typową dla danej dziedziny. Przypomnijmy tu opisy, jakie towarzyszyły różnym modelom mającym postać członu inercyjnego: elektryczny filtr dolnoprzepustowy, własność samoregulacji wypływu cieczy ze zbiornika, uśrednianie zawartości zbiornika. Z kolei człon całkujący to różne zasobniki (magazyny), w których odpływ nie zależy od bieżącego stanu, czyli zasobniki bez samoregulacji. Szeregowe połączenie członów inercyjnych to inaczej sprzężenie obiektów unilateralnych, jednokierunkowe przenoszenie sygnału, kaskada nie-współdziałająca; a sprzężenie zwrotne – kaskada współdziałająca, żywa pojemność boczna. Formalizacja problemów, oprócz tego że udostępnia rozwiązania teoretyczne, ułatwia komunikację specjalistów.

20

Układy o parametrach rozłożonych

Z założenia książka ta zawiera przede wszystkim materiał dotyczący modelowania układów o parametrach skupionych. Na koniec jednak przeanalizujemy kilka przykładów wykorzystania metody konstrukcji modeli dynamiki obiektów o parametrach rozłożonych. Pozwoli to zilustrować efekty zastosowania praw zachowania w skali mikroskopowej^{*}. Przykłady dotyczą najprostszych przypadków, gdy model opisuje zmiany wzdłuż jednego kierunku.

12.4

20.1. Jednorodna linia elektryczna

CD

Przykład na CD.

20.2. Przewód rurowy

CD

Przykład na CD.

20.3. Wymiennik ciepła

CD

20.3.1. Wymiennik ogrzewany parą

Przykład na CD.

CD

20.3.2. Przeciwprądowy wymiennik ciepła typu rura w rurze

Przykład na CD.

* W p. 1.2.4: o bilansach w skali mikroskopowej.

Część IV

Zastosowanie prostych modeli dynamiki

*Jak wyznaczyć wartości parametrów modelu?
Jak zaaplikować model w programie symulacyjnym?
Co i jak badać? Jak przygotować model złożonego obiektu?*

Rozwój różnych dziedzin fizyki dostarcza coraz dokładniejszych opisów zjawisk. Są takie obszary zastosowań, gdzie głównym celem modelowania jest wierne odwzorowywanie rzeczywistości, czy to dla celów czysto poznawczych, czy to jako narzędzie projektowania. Nie ogranicza to jednak zapotrzebowania na proste modele dynamiki obiektów technologicznych. Są one pomocne zarówno przy badaniu własności samych obiektów, jak i przy projektowaniu i testowaniu układów regulacji dla tych obiektów.

Wyznaczenie matematycznej formy opisu obiektu jest podstawą modelowania, ale o praktycznym zastosowaniu modelu w równym stopniu decyduje możliwość wyznaczenia wartości parametrów występujących w opisie i możliwość sprawdzenia poprawności wyników symulacji.

Techniczne aspekty badań symulacyjnych

21.1. Wprowadzenie

Jednym z podstawowych obszarów zastosowania modeli dynamiki są badania symulacyjne. Charakterystyczną cechą tych badań jest wykonywanie obliczeń, czyli operowanie na modelach o ustalonych wartościach parametrów. Konstrukcja modelu symulacyjnego obejmuje więc także identyfikację wartości wszystkich parametrów. Pierwszym etapem badań jest poprawna aplikacja modelu w programie symulacyjnym, a następnie weryfikacja jego wiarygodności, czyli sprawdzenie zgodności symulacji z danymi doświadczalnymi. Zasadniczy cel badań może być różny: poznanie własności obiektu (np. warunków stabilności), projektowanie nowych obiektów, odtworzenie zachowania obiektu (np. do projektowania układów regulacji) i inne. Wyniki symulacji rzeczywistych procesów mają dwie ważne cechy – zawsze reprezentują tylko pewne szczególne przypadki rozwiązań, a poza tym mogą się w nich pojawić efekty wynikające z niedokładności metod obliczeniowych. Przedstawione przykłady rozwiązania różnych praktycznych aspektów badań symulacyjnych nie wyczerpują w pełni zagadnienia. Mają jedynie pomóc w realizacji pierwszych samodzielnych badań.

21.2. Identyfikacja parametrów modelu

Dokładne modele zazwyczaj wymagają większej liczby parametrów, więc identyfikacja ich wartości jest bardziej pracochłonna i trudniejsza¹. Jeśli parametry rozbudowanego modelu nie mogą być wyznaczone z odpowiednio małym błędem, to lepiej zastosować prostszy opis. Im prostszy model, tym mniej parametrów i tym łatwiej je wyznaczyć. Granicznym przypadkiem uproszczenia opisu i minimalizacji liczby parametrów są transmitancje zastępcze, wykorzystywane w metodach identyfikacji eksperymental-

¹ Duża liczba parametrów oznacza, że dotyczą one mniej znaczących zjawisk, więc wymagają dokładniejszych metod identyfikacji.

5.3 nej[→]. Przedmiotem naszego zainteresowania jest wyznaczenie wartości parametrów dla modelu skonstruowanego na podstawie makroskopowych praw zachowania. Fizyczna interpretacja parametrów opisu ułatwia wyznaczenie ich wartości. Jest to możliwe nawet na podstawie dokumentacji, a więc w sytuacji, kiedy obiekt jeszcze nie istnieje lub nie ma warunków do wykonywania na nim eksperymentów badawczych.

W analitycznych metodach konstrukcji model obiektu technologicznego powstaje w wyniku odpowiedniego połączenia modeli elementarnych, reprezentujących poszczególne procesy fizyczne. W niektórych przypadkach w modelach elementarnych występują parametry, które można wyznaczyć na podstawie kształtu i wymiarów elementów technologicznych oraz wartości opisujących fizyczne właściwości materiałów, np. gęstości, ciepła właściwego, przewodności. Dotyczy to przede wszystkim parametrów podstawowych elementów elektrycznych (rezystancji opornika, pojemności kondensatora, indukcyjności cewki), mechanicznych (sprężystości i tłumienności prostych elementów, masy), hydraulicznych i pneumatycznych (oporu hydraulicznego prostych przewodów, pojemności ściśliwości zbiorników, współczynnika bezwładności) oraz cieplnych (przewodności i pojemności cieplnej jednolitego ciała). Przykłady odpowiednich wzorów zostały przedstawione w części II w rozdziałach dotyczących omawiania modeli elementarnych.

Istnieją jednak modele elementarne reprezentujące bardzo złożone procesy, zachodzące na obiekcie. Odnosi się to szczególnie do zjawisk cieplnych, przepływu cieczy, maszyn elektrycznych – wszędzie, gdzie zastosowanie modelu o parametrach skupionych jest wyraźną aproksymacją zjawisk przestrzennych i gdzie model zawiera opis jedynie najbardziej znaczącego zjawiska. W przypadku przewodzenia ciepła przez przegrody zakłada się, że strumień ciepła jest proporcjonalny do różnicy temperatury – (II.199):

$$q(t) = K_c \Delta T(t)$$

gdzie parametrem jest stały współczynnik przenikania K_c . Wiadomo jednak, że trudno go wyznaczyć, jeśli przegroda jest niejednorodna (np. ściana budynku) lub ma złożony kształt (np. grzejnik c.o.) oraz że wartość K_c zależy od temperatury, a jeśli wymiana odbywa się między ciałem stałym i ciecza, to również od ruchu cieczy. Zazwyczaj jest to parametr wyznaczany doświadczalnie w określonych warunkach. W prostych modelach zakłada się, że wartość K_c jest stała. Można ją wówczas wyznaczyć, wykorzystując bilans energii w stanie ustalonym i dane uzyskane na podstawie projektu technicznego obiektu lub na podstawie wartości pomiarowych z systemu akwizycji

17.3.3 danych. Na przykład dla pomieszczenia z grzejnikiem c.o.[→] w stanie ustalonym strumienie ciepła: doprowadzony do grzejnika (III.320), następnie przekazany przez grzejnik do pomieszczenia (III.217) i tracony przez zewnętrzne ściany (III.218) są sobie równe, więc obowiązuje następujący układ równań:

$$c_p \rho f_g (T_{gz} - T_{gp}) = K_{cg} (T_{gsr} - T_w) = K_{cw} (T_w - T_z) \quad (\text{IV.1})$$

* W p. 5.3: o identyfikacji eksperymentalnej.

* W p. 17.3.3 (17.3.4): o konstrukcji modelu pomieszczenia z grzejnikiem c.o.

Na podstawie wartości zmiennych T_{z0} , T_{w0} , T_{g0} , T_{gp0} , f_{g0} w stanie równowagi można więc wyznaczyć wartości współczynników K_{cg} i K_{cw} . 

Podobna sytuacja występuje w przypadku oporu czynnego układów hydraulicznych, gdzie pojedynczy element modelu zazwyczaj reprezentuje fragment obiektu, złożonego z przewodów rurowych i różnych oporów miejscowych. Zakłada się, że spadek ciśnienia na elemencie jest funkcją kwadratową przepływu (II.134):

$$\Delta p(t) = Rf^2(t)$$

z zastępczym współczynnikiem oporu R . Wartość współczynnika łatwiej jest wyznaczyć doświadczalnie niż wyliczyć na podstawie kształtu i wymiarów aparatury. W prostych modelach współczynnik R jest stały i można go obliczyć na podstawie znanego stanu ustalonego. Na przykład w modelu sieci z obiegiem zamkniętym², znajomość rozkładu ciśnień i rozpływów w sieci, pozwala wyznaczyć opory zastępcze poszczególnych odcinków i gałęzi. 

Więcej problemów może sprawiać wyznaczenie wartości współczynników, które charakteryzują złożone własności, ale ujawniają się jedynie w stanach przejściowych. Przykładem jest zastępca pojemność cieplna pojemnika (pomieszczenia) wraz z jego różnorodną zawartością i zewnętrznymi ścianami. Na podstawie wymiarów i własności fizycznych można obliczyć pojemność poszczególnych elementów składowych (II.206):

$$C_v T(t) = c_p \rho V T(t)$$

Następnie, porównując wartości, wyznacza się najbardziej znaczące elementy, co pozwala oszacować wartość zastępczej pojemności cieplnej całego obiektu.

W identyfikacji wartości współczynników stanu przejściowego pomocne bywa wykorzystanie danych doświadczalnych. Mogą to być wyniki eksperymentu, np. wyznaczenia odpowiedzi obiektu na pobudzenie skokowe. Mogą to być dane z systemu akwizycji, np. wyszukany w systemie zarejestrowany stan przejściowy, najlepiej jeśli będzie to reakcja na zmianę pojedynczej zmiennej wejściowej. Z jednej strony, wykorzystując metody identyfikacji eksperimentalnej, można wyznaczyć stałe czasowe zastępczej transmitancji. Z drugiej strony, parametry transmitancji mogą być wyznaczone w postaci wzorów, na podstawie nieliniowego modelu obiektu¹. We wzorach tych występują zarówno parametry stanu ustalonego, jak i współczynniki stanu przejściowego. Na przykład, w przypadku wspomnianego już pomieszczenia z grzejnikiem² w operatorowej postaci liniowej wersji modelu (III.222) występuje człon inercyjny (III.223) z następującą stałą czasową:



$$T = \frac{(c_{pw} \rho_w f_g + K_{cg}) C_{vw}}{c_{pw} \rho_w f_g (K_{cg} + K_{cw}) + K_{cg} K_{cw}}$$

¹ W p. 22.2: m.in. o identyfikacji wartości w modelu pomieszczenia z grzejnikiem c.o.

² W p. 15.4.2: o konstrukcji modelu sieci hydraulicznej.

¹ Jeśli model jest nieliniowy, to przyjmuje się jego wersję liniową (prawdziwą przy założeniu stałych wartości pewnych zmiennych) lub przeprowadza linearyzację w wybranym punkcie pracy.

² W p. 17.3.3: o konstrukcji modelu pomieszczenia z grzejnikiem c.o.

Jeśli więc wyznaczy się wartość stałej czasowej T metodą eksperymentalną i wykorzysta stałą wartość przepływu f_g oraz wyznaczone wcześniej wartości współczynników przewodzenia ciepła K_{cw} i K_{cg} , to można obliczyć wartość pojemności cieplnej C_{vw} . Zakładając, że wszystkie współczynniki nieliniowego modelu są stałe, to można rozszerzyć wyniki eksperimentu wykonanego w jednym punkcie pracy na cały zakres, w którym jest stosowany nieliniowy model. To samo założenie pozwala też wykonywać operacje odwrotne – na podstawie wzorów i wartości współczynników nieliniowego modelu można wyznaczyć parametry transmitancji w dowolnym punkcie pracy (w omawianym przykładzie – pojemność C_{vw} dla innej wartości przepływu f_g).

Przy wyznaczaniu wartości parametrów modelu ważne jest ustalenie odpowiednich jednostek fizycznych – czy będą to jednostki podstawowe, czy ich wielokrotności. Chodzi o to, aby podczas symulacji operacje matematyczne nie były prowadzane na liczbach bardzo małych i bardzo dużych. Ma to wpływ zarówno na dokładność obliczeń symulacyjnych, jak i na wygodę przy przetwarzaniu wyników (np. rysowanie różnych przebiegów na wspólnym wykresie). Szczególnie należy przeanalizować operacje na parametrach, które różnią się o kilka rzędów wartości.

21.3. Aplikacja modelu w programie symulacyjnym

21.3.1. Ogólne zasady

Modele wyznaczone na podstawie opisu zjawisk fizycznych mają różną formę. W ogólnym przypadku są to układy nieliniowe o wielu wejściach i wyjściach. Typową formą wykorzystywaną w badaniach dynamiki modeli jest transmitancja operatorowa lub układ równań stanu. Jednak jedną z zalet badań symulacyjnych jest to, że nie trzeba wykonywać pracochłonnych przekształceń, ponieważ istnieje możliwość aplikacji modelu w formie, która wynika ze sposobu jego tworzenia i nie musi być tak uporządkowana.

G2

Zasady aplikacji modeli dynamiki w programach symulacyjnych zostaną przedstawione na przykładzie pakietu Matlab² (wersja 5.x lub nowsza) wraz z typowym dla automatyki uzupełnieniem w postaci modułów Simulink i Control. W interakcyjnym module Simulink badany układ, opisany przez transmitancje lub równania różniczkowe liniowe czy nieliniowe, jest odwzorowywany graficznie – przez połączenie i skonfigurowanie odpowiednich bloków funkcyjnych. Moduł Control umożliwia definiowanie modeli stacjonarnych i liniowych. Są one tworzone przez wywołanie odpowiednich funkcji i zapamiętywane w postaci informatycznych obiektów LTI (Linear-Time Invariant)¹. Obiekty (modele) LTI mogą być następnie parametrymi funkcji, które realizują algorytmy analizy układów automatyki. Można je też wykorzystać jako elementy modeli budowanych przy użyciu modułu Simulink (blok LTI).

² Dodatek G2: o innych programach symulacyjnych.

¹ Nazwy funkcji i zmiennych oraz przykłady operacji Matlaba zostały wyróżnione czcionką Arial. Zmienne i parametry, które we wzorach matematycznych występują z indeksami, w Matlabie i na schematach Simulinka mają nazwy konstruowane według zasady: $X_{ij} \rightarrow x_{ij}$.

21.3.2. Aplikacja modelu w postaci transmitancji operatorowych

Modele w postaci transmitancji operatorowej można łatwo wprowadzić do aplikacji zarówno w module Simulink, jak i Control. Moduł Simulink zawiera specjalny blok do kodowania transmitancji w postaci funkcji wymiernej (Transfer Fcn) oraz blok opóźnienia transportowego (Transport Delay). Aplikacja tych samych modeli w module Control polega na wywołaniu funkcji `tf` (Transfer Function), służącej do tworzenia obiektów LTI w postaci operatorowej.

Pierwsze przykłady dotyczą prostych modeli z jednym wejściem i jednym wyjściem (ang. SISO):

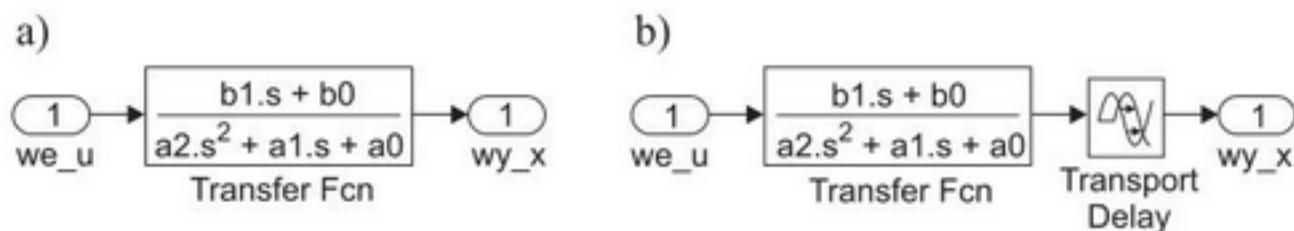
$$\text{a) } x(s) = \frac{L(s)}{M(s)} u(s), \quad \text{b) } x(s) = \frac{L(s)}{M(s)} e^{-sT_0} u(s)$$

gdzie: $L(s) = b_1s + b_0$, $M(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$.

Aplikacja pierwszego modelu w module Simulink (rys. 21.1a) ma postać pojedynczego bloku transmitancji, w którym wartości współczynników wielomianu licznika $L(s)$ i mianownika $M(s)$ są podawane w postaci dwóch wektorów:

$$[b_1 \ b_0] \quad \text{i} \quad [a_2 \ a_1 \ a_0]$$

Model drugi (rys. 21.1b) został zakodowany w postaci szeregowego połączenia bloku transmitancji i opóźnienia.



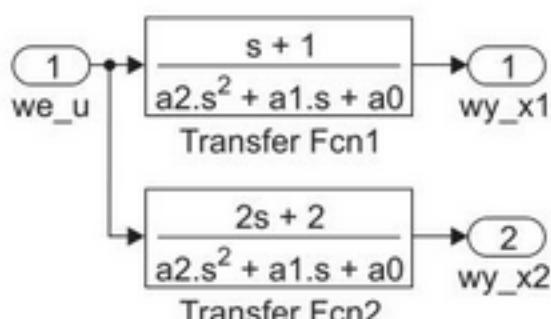
Rys. 21.1. Aplikacja modelu w postaci operatorowej (SISO)

W module Control definicja tych samych modeli ma następującą postać:

$$\text{a) ModelA} = \text{tf}(L, M), \quad \text{b) ModelB} = \text{tf}(L, M, 'Inputdelay', T0),$$

gdzie: $L = [b_1 \ b_0]$ jest wektorem współczynników licznika, $M = [a_2 \ a_1 \ a_0]$ – wektorem współczynników mianownika.

Blok transmitancji w module Simulink umożliwia również kodowanie modeli o jednym wejściu i wielu wyjściach (ang. SIMO). Proste definiowanie tego typu modeli polega na wykorzystaniu dwóch bloków transmitancji (rys. 21.2).

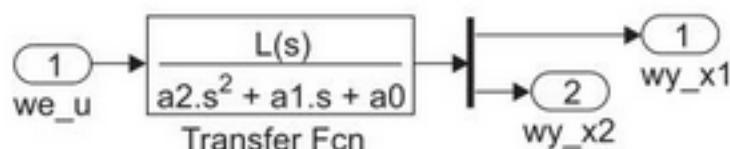


Rys. 21.2. Aplikacja modelu w postaci operatorowej (SIMO), wersja 1

Aplikację tę można uprościć, ale tylko wówczas, gdy transmitancje mają taki sam mianownik, np.:

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{M(s)} \begin{bmatrix} L_1(s) \\ L_2(s) \end{bmatrix} u(s)$$

gdzie: $L_1(s) = s + 1$, $L_2(s) = 2s + 2$, $M(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$. Uproszczenie (rys. 21.3) polega na zastosowaniu jednego bloku transmitancji, w którym licznik podano w postaci macierzy L zdefiniowanej jako $[L_1; L_2]$, gdzie L_1 i L_2 są wektorami współczynników liczników ($L_1 = [1 1]$, $L_2 = [2 2]$).



Rys. 21.3. Aplikacja modelu w postaci operatorowej (SIMO), wersja 2

Modele SIMO w module Control nie muszą mieć wspólnego mianownika, by je definiować za pomocą jednego wywołania funkcji. Na przykład model z jednym wejściem i dwoma wyjściami:

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(s)/M_1(s) \\ L_2(s)/M_2(s) \end{bmatrix} u(s)$$

jest definiowany w następujący sposób:

`Model12 = tf({L1;L2}, {M1;M2}).`

Aplikacja modeli o wielu wejściach i wyjściach (ang. MIMO) w module Simulink wymaga użycia oddzielnych bloków transmitancji, związanych z poszczególnymi wejściami, i sumowaniem ich wyjść, ponieważ blok Transfer Fcn może mieć wiele wyjść, ale tylko jedno wejście. W module Control kodowanie modeli MIMO jest możliwe przy jednokrotnym użyciu funkcji `tf`. Na przykład dla modelu:

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_{11}(s)}{M_{11}(s)} & \frac{L_{12}(s)}{M_{12}(s)} \\ \frac{L_{21}(s)}{M_{21}(s)} & \frac{L_{22}(s)}{M_{22}(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

wywołanie funkcji `tf()` definiującej model ma postać:

`Model22 = tf ({L11 L12; L21 L22} , {M11 M12; M21 M22}).`

Jeśli model ma N_{we} wejść i N_{wy} wyjść, to parametrami funkcji są macierze o wymiarach $N_{wy} \times N_{we}$, przy czym każdy element macierzy jest wektorem współczynników. Elementy L_{ij} i M_{ij} dotyczą transmitancji między i -tym wejściem a j -tym wyjściem.

3.2.2

Moduł Control udostępnia jeszcze jedną funkcję do definiowania transmitancji – `zpg` (zero-pole-gain), w której podaje się wartości zer i biegunów⁴.

⁴ W p. 3.2.2: definicja zer i biegunów transmitancji.

oraz wzmacnienia transmitancji. Jako przykład weźmy model z jednym wejściem i dwoma wyjściami:

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(s)/M_1(s) \\ L_2(s)/M_2(s) \end{bmatrix} u(s)$$

gdzie: $L_1(s) = k_1$, $M_1(s) = s - p_{11}$, $L_2(s) = (s - z_{21})(s - z_{22})$, $M_2(s) = s(s - p_{21})$. W definicji modelu za pomocą funkcji zpg są podawane najpierw zera obu transmitancji, potem biegundy tych transmitancji i na koniec wzmacnienia:

`Model12 = zpg ([] ; [z21 z22], {p11 ; [0 p21]}, {k1; 1}).`

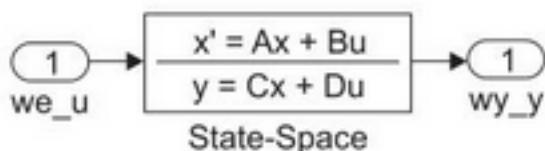
Parametrem funkcji zpg może być także nazwa obiektu LTI, zdefiniowana za pomocą funkcji tf, i odwrotnie:

`ModelZPG = zpg(ModelTF);
ModelTF = tf(ModelZPG).`

Konwersja obiektu typu ZPG na obiekt typu TF jest dokładna, bo polega na mnożeniu wielomianów, natomiast konwersja obiektu typu TF na obiekt typu ZPG jest przybliżona, ponieważ zera i biegundy są wyznaczane metodami numerycznymi.

21.3.3. Aplikacja modelu w postaci liniowych równań stanu

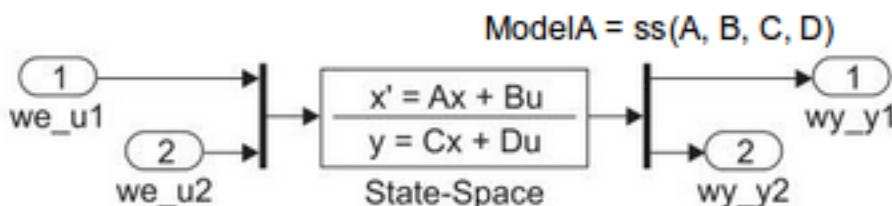
Moduły Simulink oraz Control umożliwiają prostą aplikację modelu przedstawionego w postaci liniowych równań stanu^{24.1} (SISO/MIMO). W module Simulink do tego celu służy blok State-Space, do którego można doprowadzić pojedynczy sygnał wejściowy i obserwować pojedyncze wyjście (rys. 21.4) lub doprowadzić wektor sygnałów wejściowych i otrzymywać wektor sygnałów wyjściowych (rys. 21.5).



Rys. 21.4. Aplikacja modelu w postaci liniowych równań stanu SISO

Sygnalem wyjściowym bloku State-Space jest wektor zmiennych wyjściowych modelu (y). Parametrami bloku są macierze A , B , C , D układu równań oraz wektor wartości początkowych zmiennych stanu. Wprowadzane parametry są sprawdzane pod kątem zgodności wymiarów macierzy.

W module Control jest dostępna funkcja ss (state-space), tworząca obiekt LTI na podstawie macierzy równań stanu:



Rys. 21.5. Aplikacja modelu w postaci liniowych równań stanu MIMO

* W p. 2.4.1: o równaniach stanu.

Parametrem funkcji ss może być również nazwa obiektu LTI utworzonego przez funkcje tf lub zpg:

$$\text{ModelSS} = \text{ss}(\text{ModelTF});$$

$$\text{ModelSS} = \text{ss}(\text{ModelZPG});$$

i odwrotnie, obiekt zdefiniowany przez funkcję ss może być parametrem funkcji tf lub zpg:

$$\text{ModelTF} = \text{tf}(\text{ModelSS});$$

$$\text{ModelZPG} = \text{zpg}(\text{ModelSS});$$

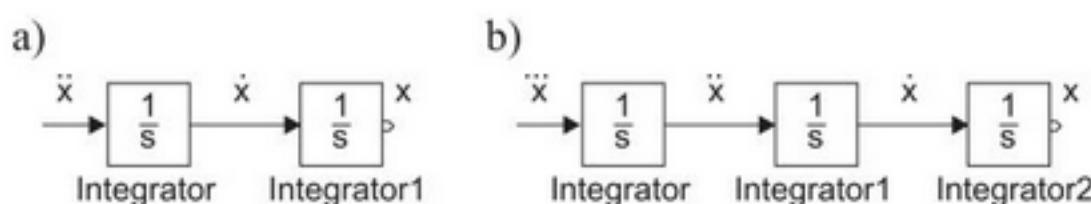
O ile to możliwe, zaleca się stosowanie w obliczeniach modeli typu SS.

21.3.4. Aplikacja modelu w postaci nieliniowych równań różniczkowych

Modele dynamiki w postaci nieliniowego równania różniczkowego lub układu nieliniowych równań różniczkowych najwygodniej tworzy się w module Simulink. W ramach przygotowania aplikacji równanie różniczkowe (liniowe/nieliniowe) należy przekształcić do postaci, w której najwyższa pochodna zmiennej stanu (ewentualnie ze stałym współczynnikiem) znajduje się po lewej stronie równania, a pozostałe składniki po prawej stronie. Jeśli na przykład model tworzy pojedyncze równanie n -tego rzędu, to postać wyjściowa jest następująca:

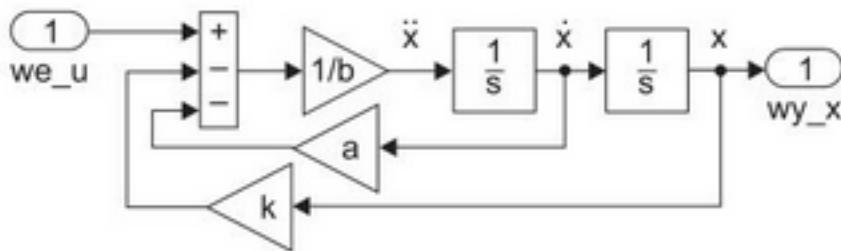
a) równanie liniowe	b) równanie nieliniowe
$b\ddot{x}(t) = u(t) - \alpha\dot{x}(t) - kx(t)$	$\ddot{x}(t) = f(u_1(t), u_2(t), x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$

Pierwszym krokiem wykonywanym w programie symulacyjnym jest wprowadzenie łańcucha bloków całkujących (Integrator), który zapewnia przejście od najwyższej pochodnej do zmiennej stanu – dla powyższych równań pokazano to na rys. 21.6.



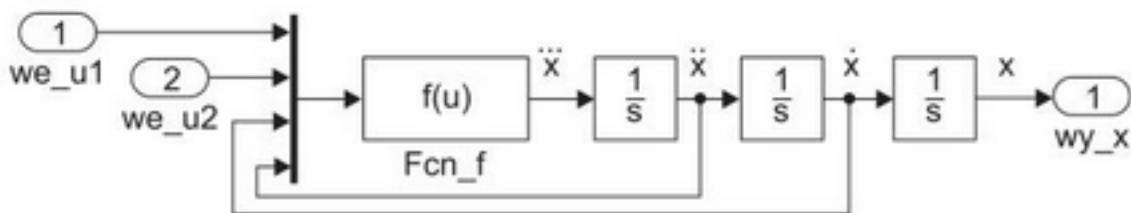
Rys. 21.6. Pierwszy krok aplikacji równania różniczkowego w programie symulacyjnym

Ze schematów wynika, że aby obliczyć zmienną stanu x , należy na wejście pierwszego bloku całkującego podać sygnał najwyższej pochodnej tej zmiennej, którą z kolei można wyznaczyć na podstawie wzoru wyjściowego. Najwyższa pochodna zmiennej stanu w równaniu liniowym (a) jest sumą składników proporcjonalnych do sygnałów wejściowych oraz zmiennej stanu i jej niższych pochodnych. Na schemacie aplikacyjnym (rys. 21.7) można to zrealizować za pomocą bloku sumacyjnego (Sum) i bloków wzmacniających (Gain).



Rys. 21.7. Aplikacja liniowego równania drugiego rzędu: $b\ddot{x} = u(t) - a\dot{x} - kx$

Najwyższa pochodna zmiennej stanu w równaniu nieliniowym (b) jest opisana przez nieliniową funkcję zmiennych wejściowych oraz zmiennej stanu i jej pochodnych. Aplikowanie funkcji może się odbywać na różne sposoby. W przykładzie (rys. 21.8) zastosowano parę bloków Fcn i Mux, co pozwala na wprowadzenie wyrażenia z wieloma zmiennymi.



Rys. 21.8. Aplikacja nieliniowego równania trzeciego rzędu $\ddot{x} = f(u_1, u_2, x, \dot{x}, \ddot{x})$

W przypadku układu równań różniczkowych (liniowych/nieliniowych) postacią wyjściową dla aplikacji jest układ, w którym każde równanie reprezentuje najwyższą pochodną innej zmiennej. Przeanalizujemy dwa przykłady:

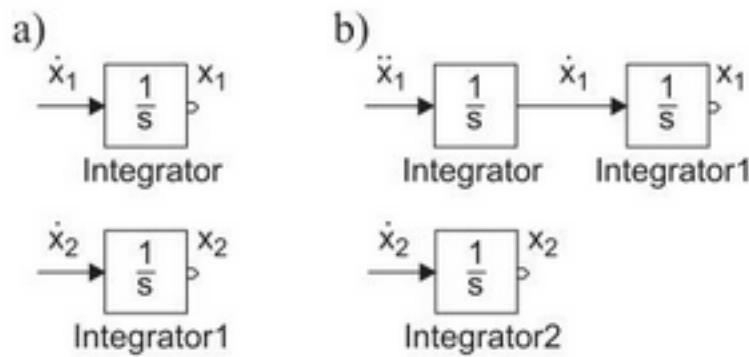
a) układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_1 \dot{x}_1(t) = u(t) - k_{11}x_1(t) - k_{12}x_2(t) \\ a_2 \dot{x}_2(t) = u(t) - k_{21}x_1(t) - k_{22}x_2(t) \end{cases}$$

b) układ równań nieliniowych

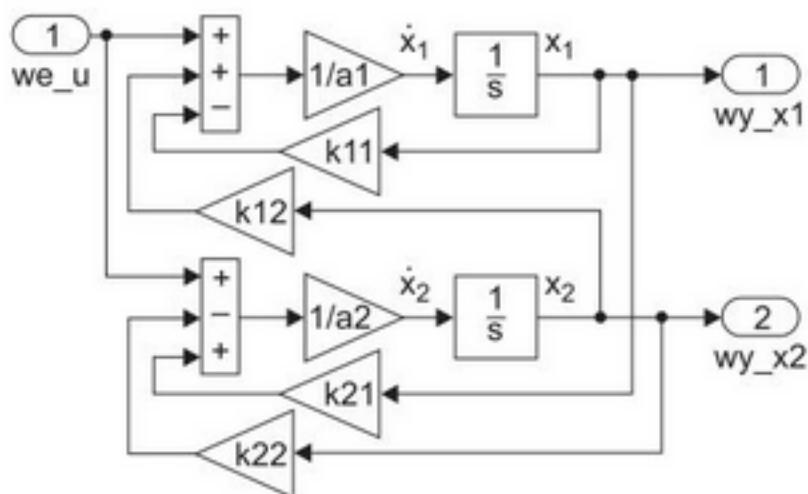
$$\begin{cases} b\ddot{x}_1(t) = f_1(u(t), x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t)) \\ a\dot{x}_2(t) = f_2(u(t), x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t)) \end{cases}$$

W programie symulacyjnym dla każdej zmiennej stanu wprowadza się odpowiedni łańcuch bloków całkujących (rys. 21.9).

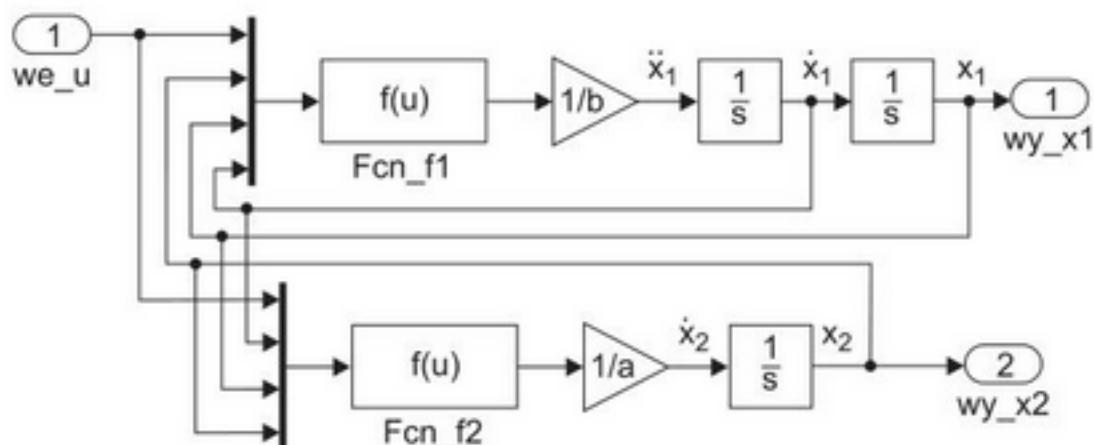


Rys. 21.9. Pierwszy krok aplikacji układu równań różniczkowych w programie symulacyjnym

Następnie, na podstawie kolejnych równań wyjściowych, należy zrealizować funkcje do wyznaczania sygnałów wejściowych dla każdego początkowego bloku łańcucha. W układzie równań liniowych składnikami funkcji będą bloki liniowe (rys. 21.10).



Rys. 21.10. Aplikacja układu dwóch liniowych równań



Rys. 21.11. Aplikacja układu dwóch nieliniowych równań

W aplikacji nieliniowego układu równań odpowiednie funkcje można zrealizować za pomocą bloków Fcn (rys. 21.11).

Charakterystyczną cechą przedstawionej aplikacji równań różniczkowych jest występowanie pętli – pochodna najwyższego rzędu jest liczona na podstawie zmiennej i jej niższych pochodnych, a te są wyznaczane przez wielokrotne całkowanie najwyższej pochodnej.

Stan początkowy symulacji aplikacji z łańcuchami bloków całkujących wyznaczają wartości początkowe zadeklarowane w tych blokach (domyślnie początkowa wartość całkowania jest równa零). Wprowadzając odpowiednie wartości, symulację można uruchamiać od dowolnych warunków początkowych^{21.5.2}.

Wykorzystanie portów wejściowych (In) i wyjściowych (Out) w powyższych przykładach pozwala w prosty sposób zgrupować elementy i utworzyć jeden blok reprezentujący cały model (Subsystem). Nazwy portów zostaną automatycznie przeniesione na nazwy wejść i wyjść bloku. Blok można następnie sparametryzować (operacja Mask). Wszystkie zmienne występujące w bloku należy zadeklarować jako jego parametry lub zamienić je na wielkości liczbowe. Zastosowanie grupowania i parametryzacji pomaga w zachowaniu przejrzystości złożonych schematów symulacyjnych.

^{21.5.2} * W p. 21.5.2: o uruchamianiu symulacji od dowolnych warunków początkowych.

21.4. Weryfikacja modelu

21.4.1. Wprowadzenie

Przed wykorzystaniem nowego modelu symulacyjnego w jakichkolwiek badaniach konieczne jest jego sprawdzenie, zwłaszcza jeśli model nie jest trywialną aplikacją podstawowych członów dynamiki. Im mniej przewidywalne są wyniki badań, tym dokładniejsze powinno być sprawdzenie modelu. Najciekawsze są te badania, których wynik nie jest znany, a dokładna weryfikacja ma zapewnić, by ten wynik nie był efektem przypadkowego błędu.

W procesie weryfikacji można wyróżnić dwa etapy. Pierwszy to sprawdzenie, czy aplikacja modelu w programie symulacyjnym jest poprawna. Drugi etap to uwiarygodnienie modelu przez porównanie wyników prostych symulacji z danymi z rzeczywistego obiektu.

21.4.2. Poprawność aplikacji modelu

Im bardziej złożona struktura modelu, tym ważniejsze jest sprawdzenie poprawności jego aplikacji w programie symulacyjnym. Przy braku wprawy łatwo o pomyłkę, nawet przy modelowaniu pojedynczych równań różniczkowych. Przedstawione metody kontroli można zastosować w prosty sposób do modeli utworzonych przy użyciu modułu Simulink.

Podstawowym sposobem weryfikacji poprawności wprowadzenia modelu dynamiki do programu symulacyjnego jest sprawdzenie go dla stanu ustalonego. W najprostszym przypadku, po podaniu na wszystkie wejścia stałych wymuszeń, wyjścia modelu (zmienne stanu) też się ustabilizują po pewnym czasie. Osiągnięcie stanu ustalonego świadczy o tym, że najprawdopodobniej pętle i sprzężenia występujące w aplikacji są poprawne co do znaku (w blokach sumujących, w wyrażenях bloków Fcn). Kolejnym krokiem jest sprawdzenie, czy wartości w stanie ustalonym są zgodne z charakterystykami statycznymi obiektu. W tym celu w równaniach dynamiki modelu należy wszystkie pochodne przerównać do zera[→] i wyznaczyć zależność zmiennych stanu od zmiennych wejściowych – $x(u)$. Jeśli model jest opisany transmitancjami, do wyznaczenia charakterystyki statycznej stosuje się twierdzenie o wartości końcowej[→]. Następnie, zakładając określone wartości pobudzeń (u_0), oblicza się wartości zmiennych stanu $x_0(u_0)$ i sprawdza przebiegi z symulacji.

Niewielkie odchylenia są zazwyczaj efektem podstawienia niedokładnych wartości parametrów. Większe odchylenia świadczą o błędach w parametrach bloków – złe wartości lub nazwy zmiennych, błędy w wyrażenях itp.

Jeśli podanie stałych wartości wymuszeń nie prowadzi do osiągnięcia stanu ustalonego, powodem może być błąd w aplikacji, ale także niestabilność modelu dynamiki (chyba że kwestia stabilności została wcześniej rozstrzygnięta metodami analitycznymi). Uruchamianie symulacji od przypadkowych warunków początkowych

→ W p. 2.2.4: o wyznaczaniu charakterystyki statycznej.

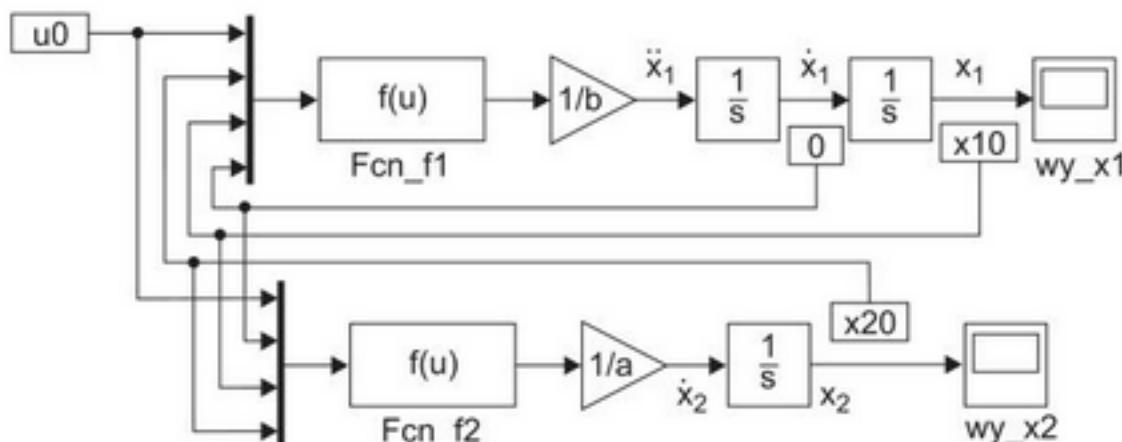
→ W p. 3.2.3: o zastosowaniu transmitancji operatorowej w badaniach.

wych (domyślnie – zerowych) ogranicza skuteczność takiego badania poprawności do modeli stabilnych. Można więc pominąć ten etap i przejść od razu do kolejnego

22.2.2 kroku, który jest dokładniejszą metodą weryfikacji poprawności. Polega ona na obliczeniu warunków początkowych, odpowiednich dla stanu ustalonego

i wprowadzeniu ich do modelu². We wszystkich blokach, które wymagają podawania warunków początkowych, należy podstawić wartości wyliczone na podstawie charakterystyk statycznych. Dotyczy to głównie bloków całkujących pierwszą pochodną zmiennej stanu (ostatni blok każdego łańcucha całkującego, w pozostałych blokach stanem początkowym jest zero), a także (jeśli są) bloków opóźnień transportowych stałych (Transport Delay) i zmiennych (Variable Transport Delay), rejestrów opóźniających sygnał (Memory). Jeśli na wejściach modelu zostaną wymuszone stałe wartości zmiennych wejściowych, a jednocześnie wartości początkowe zostały obliczone dla tych właśnie wartości wejściowych, to poprawnie aplikowany model będzie trwał w stanie ustalonym nawet wówczas, gdy obiekt jest niestabilny¹.

Jednym ze sposobów na zlokalizowanie błędu na schemacie jest rozcinanie kolejnych sprzężeń, podstawianie w te miejsca wartości, jakie powinny tam wystąpić i porównanie ze stanem faktycznym. Na przykładzie aplikacji układu dwóch nieliniowych równań (rys. 21.12), w najgorszym przypadku – po rozcięciu wszystkich sprzężeń i podstawieniu odpowiednich wartości stanu ustalonego (u_0, x_{10}, x_{20}) – schemat ma już zupełnie prostą postać (rys. 21.12), więc łatwiej znaleźć błąd.



Rys. 21.12. Testowanie aplikacji układu dwóch nieliniowych równań

W trakcie weryfikacji modelu pomocne są komunikaty wyświetlane podczas symulacji w głównym oknie Matlaba. Zazwyczaj są to informacje o dość prostych błędach – niepodłączone wejścia/wyjścia bloków, dzielenie przez zero itp. Tam też pojawia się ostrzeżenie o pętlach algebraicznych. Ponieważ spowalniają one obliczenia, warto je usunąć przez wprowadzenie rejestrów opóźniającego (Memory).

² W p. 22.2.2: m.in. o przygotowaniu do weryfikacji modelu pomieszczenia z grzejnikiem.

¹ Pod warunkiem że podstawione są dokładne wartości parametrów w modelu.

21.4.3. Wiarygodność modelu

Po sprawdzeniu poprawności aplikacji modelu w programie symulacyjnym można przystąpić do sprawdzenia zgodności przebiegów symulacyjnych z danymi rzeczywistego obiektu. Na tym etapie weryfikacja dotyczy całego procesu konstrukcji modelu, łącznie z przyjmowanymi na samym początku założeniami.

Najprostsze, choć mało dokładne, są badania na podstawie charakterystyk czasowych. Wykonując symulacje z wymuszeniem skokowym, podobnie jak w metodach identyfikacji eksperymentalnej[→], można wyznaczyć zastępcze stałe czasowe, opóźnienia, wzmacnienia badanego modelu i porównać z wiedzą doświadczalną na temat obiektu. Na początek wystarczy ocena jakościowa (np. czy reakcja modelu na dane wymuszenie ma ten sam charakter jak w rzeczywistości) oraz ocena zgodności rzędu wartości (np. czy czas osiągania stanu równowagi jest rzędu sekund, minut czy godzin). Dokładniejsza weryfikacja wymaga porównania z przebiegami zarejestrowanymi na obiekcie. Jeśli model jest nieliniowy, weryfikację należy powtórzyć w różnych punktach pracy. Można próbować odtworzyć w symulacji proste zdarzenia, jakie wystąpiły w rzeczywistym obiekcie, i porównać zgodność przebiegów. Odpowiednie wymuszenia można odtworzyć za pomocą bloków Matlaba lub wykorzystać dane zarejestrowane na rzeczywistym obiekcie. W wielu przypadkach badany obiekt automatyki jest wyposażony w komputerowy system akwizycji danych pomiarowych (SCADA¹), istnieje więc możliwość automatycznego zbierania danych z obiektu i porównania z wynikami analizy teoretycznej i symulacyjnej. Planując wykorzystanie takich danych, należy jednak pamiętać, że ich jakość (dokładność, częstotliwość rejestracji) zależy od określonych wymagań technologicznych. Nie można więc na ich podstawie odtworzyć wszystkich zjawisk dynamicznych, jakie zachodzą w obiekcie. W typowych aplikacjach SCADA częstotliwość odświeżania danych wynosi kilka–kilkadziesiąt sekund. W pewnych uzasadnionych przypadkach prowadzi się dokładniejszą rejestrację, ale może się również zdarzyć, że system rejestruje dane tylko co kilka minut.

Identyfikacja dokładnego modelu dynamiki na podstawie rozważań teoretycznych bywa trudna, ponieważ wymaga dobrej znajomości natury zjawisk fizycznych w układzie. Problemem może być też upewnienie się, na ile stworzony opis jest rzetelny – czy zostały uchwycone wszystkie istotne magazyny energii, masy lub czy nie wystąpiły magazyny nieistotne lub pozorne. Taką dokładną weryfikację można przeprowadzić na podstawie charakterystyk częstotliwościowych, np. logarytmicznych charakterystyk modułu. Zasady weryfikacji są analogiczne do eksperymentalnych metod identyfikacji na podstawie charakterystyk częstotliwościowych[→]. Znajomość wartości parametrów badanego modelu można wykorzystać do zaplanowania odpowiednich częstotliwości badania, co pozwala ograniczyć liczbę wykonywanych eksperymentów. Jeśli obiekt jest nieliniowy, charakterystyka częstotliwościowa zależy od punktu pracy.

5.3.2

* W p. 5.3.2: o identyfikacji na podstawie charakterystyk czasowych.

¹ Supervisor Control and Data Acquisition.

5.3.3

* W p. 5.3.3: o identyfikacji na podstawie charakterystyk częstotliwościowych.

21.5. Badania symulacyjne modelu

21.5.1. Skrypty jako robocza dokumentacja badań

Załóżmy, że dysponujemy wiarygodnym modelem symulacyjnym. Można więc przystąpić do właściwych badań. Konkretny program badań zależy od założonego celu, na przykład poznanie właściwości obiektu czy zaprojektowanie układu regulacji. Są jednak reguły i ogólne wskazania, które ułatwiają nie tylko prostą realizację zadania, lecz także pewną formę dokumentacji przeprowadzonych badań.

Najprostszy sposób prowadzenia badań dynamiki polega na wykorzystaniu możliwości modułu Simulink. Graficzna postać modelu symulacyjnego ułatwia wprowadzanie wszelkich zmian. W taki sposób zmieniane są zarówno typy i wartości sygnałów wymuszających, jak i wartości wewnętrznych parametrów modelu dynamiki, odpowiednio do zaplanowanych wariantów badań. Uruchamianie poszczególnych simulacji odbywa się ręcznie za pomocą funkcji **Simulation/Start** w menu Simulink. Do powtórzenia symulacji konieczne jest odtworzenie właściwych wartości parametrów lub zapamiętanie całego modelu wraz z tymi wartościami.

Przy realizacji rozbudowanego programu badań warto korzystać z możliwości pisania i uruchamiania skryptów. W ten sposób w module Simulink można przygotować jeden, dokładnie sprawdzony model graficzny, który będzie wykorzystywany w różnych wariantach symulacji, uruchamianych za pomocą różnych skryptów. W skrypcie warto umieścić nawet obliczenia parametrów związane z identyfikacją modelu – stałe wartości parametrów będą przechowywane jako zmienne Matlaba. Posługiwienie się nazwami zmiennych nie tylko jest bardziej czytelne, lecz także ułatwia podstawianie dokładnych wartości parametrów, np. w blokach na schemacie modelu. Większość numerycznych parametrów w blokach Simulinka może mieć postać nazw zmiennych. Nie dotyczy to tylko parametrów, które decydują o strukturze schematu, np. liczba wejść/wyjść bloku. Warianty symulacji polegają zazwyczaj na podstawieniu różnych zestawów wartości parametrów, co można wykonać w skrypcie, podobnie jak uruchomienie symulacji i prezentację wyników. Do uruchomienia symulacji służy komenda sim:

`sim(model, czas, opcje)`

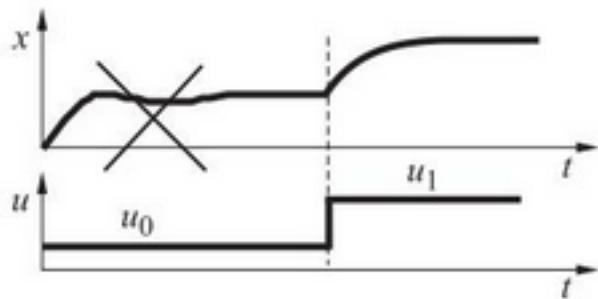
gdzie: model – nazwa pliku zawierającego model graficzny, czas – czas trwania symulacji, opcje – parametry symulacji (definiowane za pomocą funkcji **simget**/**simset**). Ponieważ w skryptach można wykorzystywać takie konstrukcje językowe, jak pętle czy instrukcje warunkowe, możliwe jest więc tworzenie skryptów, które automatycznie uruchamiają całe programy badań. Obiektowy charakter aplikacji Matlab daje bardzo duże możliwości dla operacji wykonywanych w skryptach. Dokumentacja badań opiera się na pliku przechowującym model oraz plikach skryptowych, do których warto wprowadzić jeszcze odpowiednie komentarze.

CD

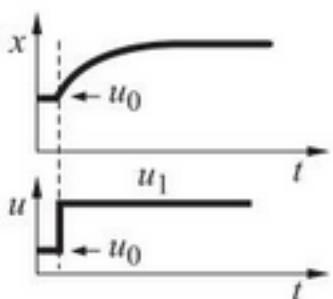
Na CD przykłady skryptów do tworzenia zestawu charakterystyk czasowych i portretów fazowych.

21.5.2. Warunki początkowe

W badaniach symulacyjnych modeli dynamiki obiektów bardzo często spotyka się zadanie wyznaczenia reakcji na różnego typu zdarzenia (zmiany). Aby zarejestrowany przebieg był „czystą” reakcją wyłącznie na badane zdarzenie, trzeba zapewnić to, że odpowiednia zmiana sygnału wejściowego pojawi się, gdy stan układu będzie ustalony. W tym celu stosowane są dwie metody. Prostsza metoda polega na ignorowaniu początkowych przebiegów w każdej symulacji, tak aby oczekać z generacją zakłócenia ($u_0 \rightarrow u_1$) do czasu ustabilizowania układu (rys. 21.13). Wcześniej trzeba się upewnić, jak długi jest ten czas, mierząc go w symulacji bez zakłóceń. Druga metoda wymaga obliczenia warunków początkowych dla stanu ustalonego (u_0, x_0) i podstawienia ich do wszystkich bloków, które tego wymagają¹ (np. bloku całkowania, bloku opóźnienia). Podanie zakłócenia ($u_0 \rightarrow u_1$) może wówczas nastąpić od razu w chwili zero, warto jednak przesunąć zakłócenie o pewien czas (rys. 21.14). Można w ten sposób



Rys. 21.13. Symulacja od przypadkowego stanu początkowego



Rys. 21.14. Symulacja od stanu ustalonego

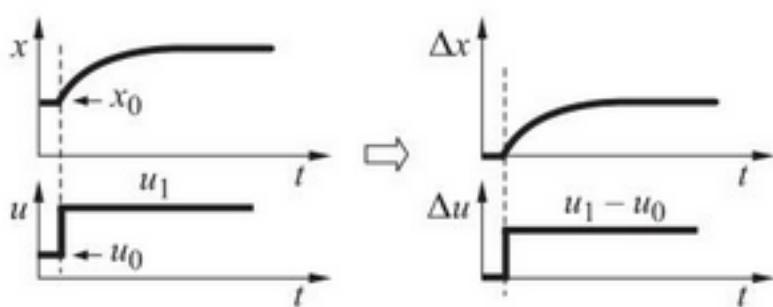
upewnić się, czy wartości stanu ustalonego są rzeczywiście poprawnie wyliczone i wprowadzone do bloków, ponieważ dopóki nie ma zakłócenia, dopóty wszystkie przebiegi z symulacji powinny się utrzymywać na stałym poziomie. Obliczenie stanu ustalonego wymaga dodatkowego przygotowania, ale za to znacznie skracą się czas symulacji. Czasem jest to wręcz konieczne, ponieważ uruchamianie od przypadkowego stanu ustalonego (domyślnie od wartości zero) jest równoznaczne z podaniem dużego zakłócenia na wejście układu, co na przykład w przypadku modeli nieliniiowych może oznaczać uruchamianie w obszarze niestabilności².

2.3.4

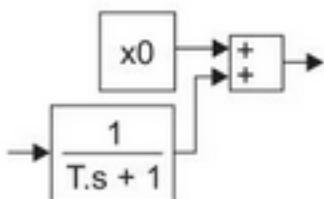
¹ Tak samo jak podczas sprawdzania poprawności aplikacji modelu w programie symulacyjnym.

² W p. 2.3.4: o stabilności układów nieliniiowych.

21.3.3 Wprowadzenie dowolnych warunków początkowych do symulacji jest możliwe w przypadku aplikacji równań różniczkowych za pomocą bloków State-Space[→] lub z użyciem łańcuchów bloków całkujących[→]. Symulacje dla modeli operatorowych (bloki Transfer Fcn) z definicji są uruchamiane od zerowych warunków początkowych[→]. Badanie reakcji na określone zdarzenie można wówczas zrealizować w różny sposób. Można oczywiście poczekać z generacją zakłócenia, aż układ się ustabilizuje (rys. 21.13), albo przesunąć początek układu odniesienia do punktu pracy (u_0, x_0) i badać reakcję na zmianę (Δu) względem stanu ustalonego (rys. 21.15).



Rys. 21.15. Przesunięcie układu odniesienia



Rys. 21.16. Ustalenie punktu pracy w modelu

Aby na wykresach otrzymać przebiegi zmiennych, a nie przebiegi przyrostów Δ , można ustalić punkt pracy za pomocą dodatkowych bloków (rys. 21.16). Sposoby te pozwalają uruchamiać symulacje od dowolnego stanu ustalonego. Nie można jednak w blokach transmisji wprowadzić warunków początkowych, które odpowiadają stanom nieustalonym, co jest możliwe w aplikacjach opartych na łańcuchach bloków całkujących i jest konieczne na przykład do wygenerowania portretu fazowego[→] modelu.

21.5.3. Badania z rejestracją przebiegów czasowych

Dysponując graficznym modelem obiektu w module Simulink, można przeprowadzić symulacje z różnego typu wymuszeniami. Przebiegi czasowe rejestrowane w wybranych punktach schematu są zwykle prezentowane wprost na wykresach (np. blok Scope), ale mogą być także zapamiętywane pod postacią zmiennych (blok Workspace) lub w pliku (blok To File), co umożliwia ich dalsze przetwarzanie.

Zazwyczaj pierwszym etapem badania dynamiki obiektu jest wyznaczanie reakcji modelu na proste zmiany wymuszeń na poszczególnych wejściach. Aby mieć

* W p. 21.3.3: o aplikacji modelu w postaci liniowych równań stanu.

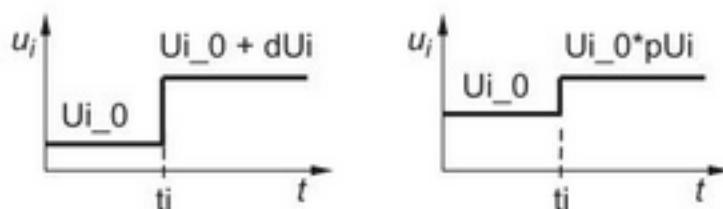
* W p. 21.3.4: o aplikacji modelu w postaci nieliniowych równań różniczkowych.

* W p. 3.2.2: o definicji i ograniczeniach transmitancji.

* W p. 2.4: o opisie w przestrzeni stanów (w tym o portrecie fazowym).

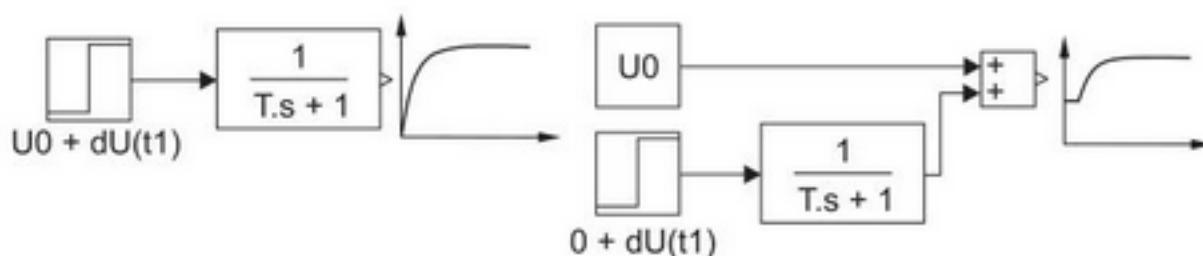
pewność, że badana reakcja obiektu jest wyłącznie wynikiem wprowadzonej zmiany wymuszenia, musi ona nastąpić w czasie, gdy obiekt znajduje się w stanie równowagi (co rozważaliśmy w poprzednim punkcie). Typowym sposobem generowania pojedynczego zakłócenia na wejściu modelu jest zastosowanie bloku skoku wartości (Step). Aby przygotować model graficzny do realizowania symulacji z różnymi wariantami zakłóceń skokowych, można do każdego wejścia modelu przyłączyć źródło skoku jednostkowego (blok Step), a jego parametry zdefiniować za pomocą zmiennych – dla i -tego wejścia będą to (rys. 21.17):

- czas skoku: t_i ,
- wartość początkowa: U_{i_0} ,
- wartość końcowa: $U_{i_0} + dU_i$, lub: $U_{i_0} * pU_i$.



Rys. 21.17. Parametry bloku Step

Wprowadzone zmienne umożliwiają ustalanie warunków symulacji w skrypcie. Ustawiając odpowiednie wartości zmiennych dla poszczególnych wejść, można uruchamiać symulacje z generowaniem zakłócenia dla pojedynczego wejścia lub dla grupy wejść, w określonych chwilach, w różnych punktach pracy, o różnych wartościach skoku, a wszystko bez zmiany modelu graficznego. Poza tym, zmienne określające wartość początkową skoku warto wykorzystać także do obliczania warunków początkowych symulacji. Pozwala to w prosty sposób przygotować aplikację do uruchamiania od dowolnego stanu ustalonego.



Rys. 21.18. Ograniczenie dynamiki zakłócenia skokowego

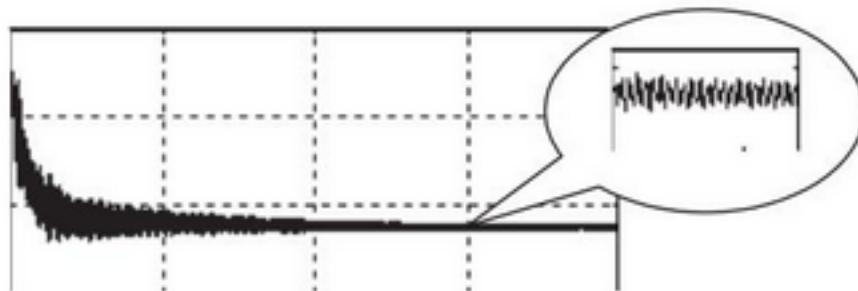
Sygnały skokowe czy impulsowe są stosowane w badaniach własności modelu. W rzeczywistych warunkach tego typu zakłócenia jednak nie występują. Aby ograniczyć dynamikę zakłócenia (szybkość zmiany sygnału), można połączyć źródło sygnału skokowego (Step) z członem inercyjnym (Transfer Fcn). Ponieważ przy prostym szeregowym połączeniu tych bloków każdy generowany sygnał w chwili początkowej ma wartość zero, więc konieczne jest dodanie dodatkowego bloku w celu ustalenia wartości początkowej $u(0)$ (rys. 21.18).

W badaniach dynamiki są również wykorzystywane wymuszenia okresowe. Oprócz stosowania ich do wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych, są one

także używane w zaawansowanych badaniach do symulacji zmian rzeczywistych warunków pracy. Przy tej okazji warto wspomnieć o możliwości skalowania czasu – *opis na CD*.

21.5.4. Interpretacja wyników symulacji

Zarejestrowanie odpowiednich przebiegów nie kończy jeszcze badania symulacyjnego. Pozostaje bardzo ważny etap interpretacji wyników. W praktyce symulacja i interpretacja odbywa się naprzemiennie, a uzyskane rezultaty wyznaczają dalszy kierunek badań. Podczas interpretacji konieczna jest ciągła ocena wiarygodności wyników, zwłaszcza jeśli pojawiają się niespodziewane efekty, które mogą być zarówno odkryciem ciekawego zjawiska, jak i konsekwencją błędów ujawniających się w szczególnych warunkach (np. operacje poza zakresem, typu dzielenie przez zero), czy niedokładności obliczeń (np. kumulacja błędów całkowania numerycznego). Typowym przypadkiem jest pojawienie się na rejestrowanych przebiegach oscylacji o częstotliwości wielokrotnie większej niż parametry czasowe modelu (rys. 21.19).



Rys. 21.19. Błędy obliczeniowe

Otrzymany wykres ma złą jakość graficzną, a ponadto jest on tworzony przy dużych nakładach obliczeniowych (bardzo długie czasy symulacji). Najlepiej oddaje to powiększenie wykresu w części, która oznacza stan ustalony układu – zamiast stałej wartości, która powinna wystąpić i którą można przecież szybko wygenerować, występują oscylacje. Jest to efekt wynikający z zastosowanej metody obliczeniowej lub jej parametrów (krok całkowania, dokładność).

21.5.5. Funkcje wspomagające podstawowe badania dynamiki

G1.3 Znacznym wsparciem dla podstawowych badań dynamiki modeli metodami symulacyjnymi są funkcje dostępne w module Control[↗]. Większość z nich ma zastosowanie jedynie w odniesieniu do modeli LTI, definiowanych w tym samym module. Jednak kilka funkcji, przeznaczonych do automatycznego generowania charakterystyk czasowych i częstotliwościowych, można uruchomić również dla modeli graficznych w module Simulink. Wśród nich jest generowanie charakterystyki skokowej (step) i impulsowej (impulse) oraz charakterystyk częstotliwościowych: amplitudowo-fazowej (nyquist) oraz logarytmicznej charakterystyki modułu i fazy (bo-

[↗] W Dodatku G1.3: o wybranych funkcjach modułu Control Matlab.

de). Liczba wykresów wygenerowanych każdorazowo zależy od liczby wejść i wyjść modelu. Parametrem wywołania funkcji jest między innymi nazwa obiektu LTI, a efektem może być prezentacja graficzna lub zmienna przechowująca wartości. W zastosowaniu funkcji pomocny jest interfejs Itiview, pozwalający wybrać typ uruchamianych funkcji i ich parametry[↗].

G1.2

W przypadku modeli LTI zastosowanie wymienionych funkcji jest naturalne, ponieważ zawsze są to modele stacjonarne i liniowe, a ich wejścia i wyjścia wynikają wprost z definicji. Przedmiotem analizy mogą być również modele nieliniowe, a wygenerowane wówczas wykresy charakteryzują własności modelu zlinearyzowanego w wybranym punkcie pracy.

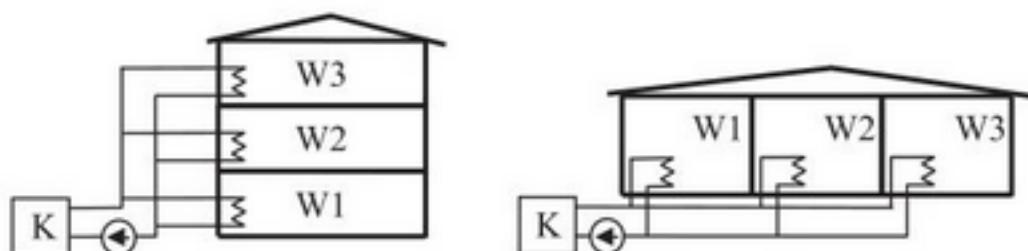
↗ W Dodatku G1.2: o Itiview.

Warianty modelu na przykładzie instalacji c.o.

22.1. Opis modelowanego obiektu

Badania symulacyjne są podstawowym narzędziem analizy dynamiki złożonych, nieliniowych obiektów. Jednym z warunków powodzenia badań jest wybór odpowiedniego modelu – powinien być jak najprostszy, aby ułatwić jego aplikację i skrócić czas symulacji, a przy tym wystarczająco dokładny, aby uwzględnić wszystkie istotne zjawiska. Problem w tym, że przystępując do nowych badań, nie ma pewności, jaki model będzie odpowiedni. Zazwyczaj jako punkt wyjścia wybiera się dość prosty model, który podlega następnie rozbudowie, aż do uzyskania odpowiedniej dokładności. W kolejnych wariantach modelu można uwzględnić coraz więcej zjawisk i coraz dokładniej odtwarzać strukturę obiektu.

Dla przykładu rozważymy w tym rozdziale konstrukcję prostych modeli niewielkiego budynku ogrzewanego przez lokalną kotłownię (rys. 22.1) oraz ich aplikację w środowisku Matlab/Simulink. Modele są przeznaczone do badania własności różnych układów regulacji stosowanych w kotłowni i w pomieszczeniach.



Rys. 22.1. Schemat do konstrukcji modelu budynku

Budynek składa się z trzech mieszkań o kubaturze V_1, V_2, V_3 i powierzchni przegród zewnętrznych (ścian, okien) A_1, A_2, A_3 . Z dokumentacji projektowej wynika, że instalacja została zaprojektowana tak¹, aby przy temperaturze zewnętrznej T_{zN} utrzymywać zadaną temperaturę wewnętrznych pomieszczeń T_{wN} . W warunkach obliczeniowych z kotła

¹ Orientacyjne wartości: $T_{zN} = -20^\circ\text{C}$, $T_{wN} = 20^\circ\text{C}$, $q_{RN} = 20 \text{ kW}$, $T_{kN}/T_{kpN} = 90/70^\circ\text{C}$, $P_{dN} = 10 \text{ kPa}$.

o mocy q_{kN} wypływa woda o temperaturze T_{kzN} , a z instalacji wraca woda o temperaturze T_{kpN} . Obieg wody wymusza pompę obiegową wytwarzającą różnicę ciśnień P_{dn} . Odpowiednie rozdzielenie ciepła na poszczególne mieszkania opiera się na ustaleniu natężen przepływu $f_{g1N}, f_{g2N}, f_{g3N}$ w poszczególnych odcinkach instalacji.

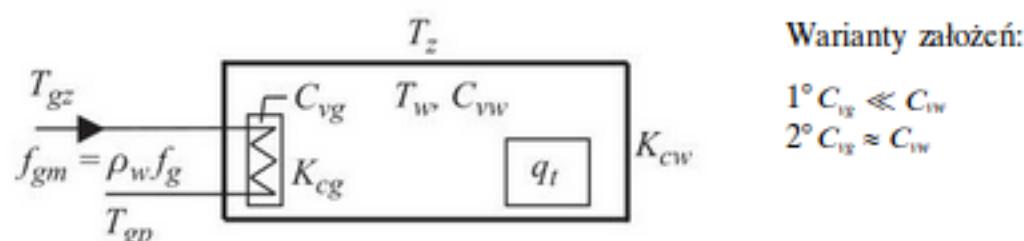
Realizację zadania rozpoczęliśmy od przygotowania sparametryzowanych modeli pojedynczego pomieszczenia z grzejnikiem oraz kotłowni. Na tej podstawie w kolejnych przykładach będą realizowane coraz dokładniejsze modele budynku. Czytelnikowi proponuję porównanie własności poszczególnych modeli i dalsze ich rozwijanie. Można by też przeanalizować, jak na własności modelu wpływają różne sposoby modelowania wymienników ciepła^{*}.

17.4

22.2. Sparametryzowany model ogrzewanego pomieszczenia

22.2.1. Opis zmiennych i parametrów modelu

Model pomieszczenia wykonamy w dwóch wariantach. W pierwszym przypadku założymy, że pojemność cieplna grzejnika C_{vg} jest znacznie mniejsza niż pojemność cieplna pomieszczenia C_{vw} . W drugim przypadku pojemności cieplne C_{vg} i C_{vw} będą porównywalne (rys. 22.2).



Rys. 22.2. Zmienne i parametry modelu pomieszczenia ogrzewanego

Zakładamy, że:

- pojemność cieplna pomieszczenia C_{vw} dotyczy magazynowania energii przez powietrze, ściany i wyposażenie;
- utrata ciepła następuje na skutek przewodzenia przez ściany, o współczynniku przewodności cieplnej K_{cw} ;
- ciepło jest przekazywane do pomieszczenia przez ściany grzejnika, o współczynniku przewodności cieplnej K_{cg} ;
- w grzejniku zachodzi idealne mieszanie, więc $T_{gp} = T_{gsr}$.

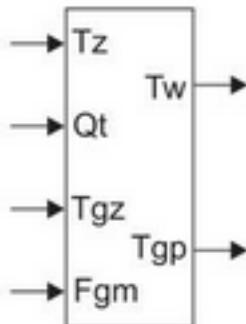
Zmiennymi wejściowymi modelu są:

- temperatura wody zasilającej grzejnik T_{gz} [$^{\circ}\text{C}$];
- masowy strumień przepływu wody przez grzejnik $f_{gm} = \rho_w f_g$ [kg/s];

* W p. 17.4: o różnych sposobach konstrukcji modelu wymiennika ciepła.

- temperatura zewnętrzna T_z [$^{\circ}\text{C}$];
- moc dodatkowych źródeł lub strat ciepła q_t (np. grzalka, otwarte okno).

Model będzie obliczał dwie podstawowe zmienne: temperaturę w pomieszczeniu T_w oraz temperaturę wody wypływającej z grzejnika T_{gp} (rys. 22.3).



Rys. 22.3. Symbol modelu pomieszczenia ogrzewanego

22.2.2. Nieliniowy model pomieszczenia przy założeniu $C_{vg} \ll C_{vw}$

Założenie $C_{vg} \ll C_{vw}$ oznacza, że można pominąć magazynowanie energii w grzejniku^{*}. W sumie dynamikę ogrzewanego pomieszczenia opisuje równanie stanu:

$$\begin{aligned} C_{vw} \dot{T}_w(t) = & -\frac{c_{pw} f_{gm}(t)(K_{cg} + K_{cw}) + K_{cg} K_{cw}}{M_f(t)} T_w(t) + \\ & + \frac{c_{pw} K_{cg} f_{gm}(t)}{M_f(t)} T_{gp}(t) + K_{cw} T_z(t) + q_t(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

gdzie $M_f(t) = c_{pw} f_{gm}(t) + K_{cg}$.

W modelu będzie uwzględnione także równanie wyjściowe, pozwalające obliczyć wartość temperatury wody wypływającej z grzejnika T_{gp} :

$$T_{gp}(t) = \frac{c_{pw} f_{gm}(t)}{M_f} T_{gp}(t) + \frac{K_{cg}}{M_f} T_w(t) \quad (\text{IV.3})$$

Na podstawie stanu równowagi ($\dot{T}_w = 0$) i wartości zmiennych w warunkach obliczeniowych T_{gzN} , T_{gpN} , f_{gmN} , T_{wN} , T_{zN} ($q_{tN} = 0$) można zidentyfikować parametry:

$$K_{cg} = \frac{c_{pw} f_{gmN} (T_{gzN} - T_{gpN})}{T_{gpN} - T_{wN}}, \quad K_{cw} = \frac{c_{pw} f_{gmN} (T_{gzN} - T_{gpN})}{T_{wN} - T_{zN}} \quad (\text{IV.4})$$

Z kolei, znając współczynniki K_{cg} i K_{cw} , z tego samego układu równań w stanie równowagi można wyznaczyć charakterystykę statyczną obiektu:

$$T_{w0} = \frac{c_{pw} f_{gm0} K_{cg}}{M_{f1}} T_{gz0} + \frac{c_{pw} f_{gm0} + K_{cg}}{M_{f1}} (K_{cw} T_{z0} + q_{t0}) \quad (\text{IV.5})$$

* W p. 17.3.3: wyjaśnienie konstrukcji modelu.

gdzie: $M_{f1} = c_{pw} f_{gm0} (K_{cg} + K_{cw}) + K_{cg} K_{cw}$. Wartość T_{w0} wyznaczona dla określonych pobudzeń $T_{gz0}, f_{gm0}, T_z0, q_t0$ będzie wykorzystywana jako warunek początkowy dla bloku całkującego w aplikacji modelu.

CD

Dokładniejsze wyprowadzenie i aplikacja modelu na CD.

22.2.3. Nieliniowy model pomieszczenia przy założeniu $C_{vg} \approx C_{vw}$

17.3.4 Założenie $C_{vg} \approx C_{vw}$, tzn. porównywalne pojemności magazynów energii w pomieszczeniu i w grzejniku* sprawia, że model dynamiki będzie miał postać układu dwóch równań stanu. Konstrukcję odpowiedniego modelu, wyznaczenie wzorów do identyfikacji parametrów i obliczenie warunków początkowych w stanie równowagi przeprowadza się tak jak w pierwszym wariantie.

CD

Proponuję potraktować to jak ćwiczenie i porównać z wynikami na CD.

22.2.4. Liniowe modele pomieszczenia ogrzewanego

Jeśli przepływ wody w sieci jest stały (f_{gm0}) lub zmienia się w niewielkich granicach, to równania stanu opisujące obiekt są liniowe i w badaniach symulacyjnych można wykorzystać modele operatorowe. Model pomieszczenia, przy założeniu, że $C_{vg} \ll C_{vw}$ i że w grzejniku jest doskonale mieszanie, na podstawie równania stanu (IV.2) ma postać:

$$T_w(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \left(\frac{c_{pw} f_{gm0} K_{cg}}{M_{f1}} T_{gz}(s) + \frac{M_f K_{cw}}{M_{f1}} T_z(s) + \frac{M_f}{M_{f1}} q_t(s) \right) \quad (\text{IV.6})$$

gdzie: $T_1 = \frac{M_f C_{vw}}{M_{f1}}$,

$$M_f = c_{pw} f_{gm0} + K_{cg}, \quad M_{f1} = c_{pw} f_{gm0} (K_{cg} + K_{cw}) + K_{cg} K_{cw}.$$

Aplikacja modeli w pakiecie Simulink, polegająca na prostym zastosowaniu bloków transmitancyjnych Transfer Fcn, umożliwia symulację pracy obiektu tylko od zeroowych warunków początkowych. Możliwa jest także aplikacja modelu liniowego za pomocą bloku State-Space, co wymaga uporządkowania równania (IV.2), tak by doprowadzić do ogólnej postaci równań stanu ($\dot{x} = Ax + Bu$).

CD

Opis przekształceń i aplikacja obu wariantów modelu na CD.

Modele uproszczone do postaci liniowej pozwalają oszacować czas reakcji obiektu na zakłócenia przy określonym natężeniu przepływu. Ta informacja z kolei pozwoli ocenić, czy czasy opóźnień transportowych, jakie występują w instalacji, mają istotne znaczenie, na przykład przy projektowaniu układów regulacji.

* W p. 17.3.4: wyjaśnienie konstrukcji modelu.

22.3. Model ogrzewanego budynku – zjawiska cieplne

22.3.1. Zastępczy model całego budynku

Pierwszy najprostszy model budynku będzie miał postać jednego zastępczego pomieszczenia z jednym zastępczym grzejnikiem. Do identyfikacji parametrów modelu wykorzystamy bilans strumieni ciepła w warunkach obliczeniowych:

$$q_{kN} = c_{pw}\rho_w f_{kN} (T_{kzN} - T_{kpN}) = K_{cg} (T_{kzN} - T_{wN}) = K_{cw} (T_{wN} - T_{zN}) \quad (\text{IV.7})$$

Znając wartości zmiennych w warunkach obliczeniowych: T_{zN} – temperaturę zewnętrzną, T_{wN} – temperaturę wewnętrzną, q_{kN} – zapotrzebowanie na ciepło, T_{kzN}/T_{kpN} – temperatury wody wypływającej/powracającej z/do kotłowni, można obliczyć wartości współczynników modelu statycznego: f_{kN} – przepływ wody w instalacji, K_{cg} – zastępczy współczynnik przewodności cieplnej odbiornika ciepła, K_{cw} – zastępczy współczynnik przewodności cieplnej ścian budynku, tak jak dla pomieszczenia (IV.4).

Podobne bilanse opisują stan równowagi w dowolnym punkcie pracy:

$$q_k = c_{pw}\rho_w f_{kN} (T_{kz} - T_{kp}) = K_{cg} (T_{kz} - T_w) = K_{cw} (T_w - T_z) \quad (\text{IV.8})$$

W prostych modelach zakłada się, że wartości współczynników $c_{pw}\rho_w f_{kN}$, K_{cg} i K_{cw} są stałe, więc dzieląc stronami (IV.8) i (IV.7), otrzymujemy układ równań:

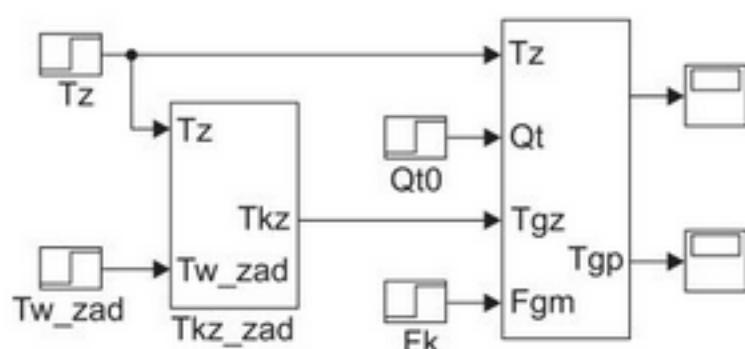
$$\frac{T_{kz} - T_{kp}}{T_{kzN} - T_{kpN}} = \frac{T_{kz} + T_{kp} - 2T_w}{T_{kzN} + T_{kpN} - 2T_{wN}} = \frac{T_w - T_z}{T_{wN} - T_{zN}} \quad (\text{IV.9})$$

Na tej podstawie wyznacza się zależność temperatury zasilania i powrotu od zadanej temperaturyewnętrznej i aktualnej temperatury na zewnątrz:

$$T_{kz} = \frac{T_{kzN} - T_{zewN}}{T_{wN} - T_{zN}} T_w - \frac{T_{kzN} - T_{wewN}}{T_{wN} - T_{zN}} T_z = a_{tz} T_w - b_{tz} T_z \quad (\text{IV.10})$$

$$T_{kp} = \frac{T_{kpN} - T_{zewN}}{T_{wN} - T_{zN}} T_w - \frac{T_{kpN} - T_{wewN}}{T_{wN} - T_{zN}} T_z = a_{tp} T_w - b_{tp} T_z \quad (\text{IV.11})$$

Ogólnie powyższe wzory można wykorzystać jako wartości zadane w układach regulacji (regulacja pogodowa). W tym miejscu zależność (IV.10) zostanie wykorzystana do obliczenia temperatury zasilania (blok T_{kz_zad}), która jest sygnałem wejściowym w aplikacji modelu budynku (rys. 22.4).



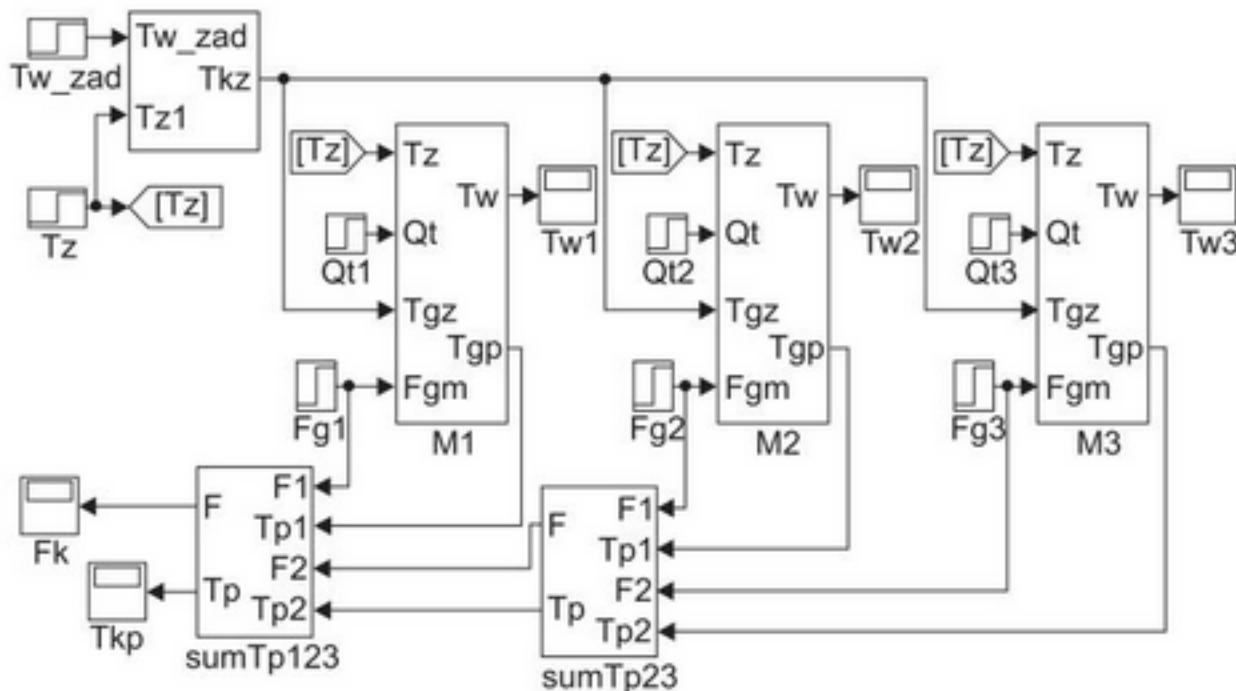
Rys. 22.4. Aplikacja modelu zastępczego całego budynku

22.3.2. Model budynku jako suma zastępczych modeli mieszkań

W kolejnym wariantie modelu budynek podzielimy na mieszkania, reprezentowane przez trzy modele zastępcze. Do identyfikacji parametrów poszczególnych modeli wykorzystamy bilans ciepła analogiczny do (IV.7):

$$q_{gNi} = c_{pw}\rho_w f_{gNi}(T_{kzN} - T_{kpN}) = K_{cgi}(T_{k\bar{s}rN} - T_{wN}) = K_{cwi}(T_{wN} - T_{zN}) \quad (\text{IV.12})$$

Bilans odnosi się do parametrów i -tego mieszkania: f_{gNi} – przepływ wody przez grzejniki mieszkania, K_{cgi} – zastępczy współczynnik przewodności cieplnej odbiornika ciepła, K_{cwi} – zastępczy współczynnik przewodności cieplnej ścian mieszkania. Zapotrzebowanie na ciepło i -tego mieszkania q_{gNi} można wyznaczyć, dzieląc zapotrzebowanie całego budynku proporcjonalnie do zewnętrznych ścian danego mieszkania.



Rys. 22.5. Aplikacja modelu budynku z trzema mieszkańami

Aplikacja modelu budynku (rys. 22.5) składa się z trzech modeli pomieszczeń (M_1 , M_2 , M_3) oraz bloków, które umożliwiają wyznaczenie parametrów wody powracającej do kotłowni (sumTp). Ponieważ mieszkania mogą być różne, więc temperaturę wody powracającą do kotłowni T_{kp} wyznacza się jako średnią wartości temperatury z poszczególnych gałęzi T_{gpi} ważoną po strumieniach przepływu f_{gmi} .

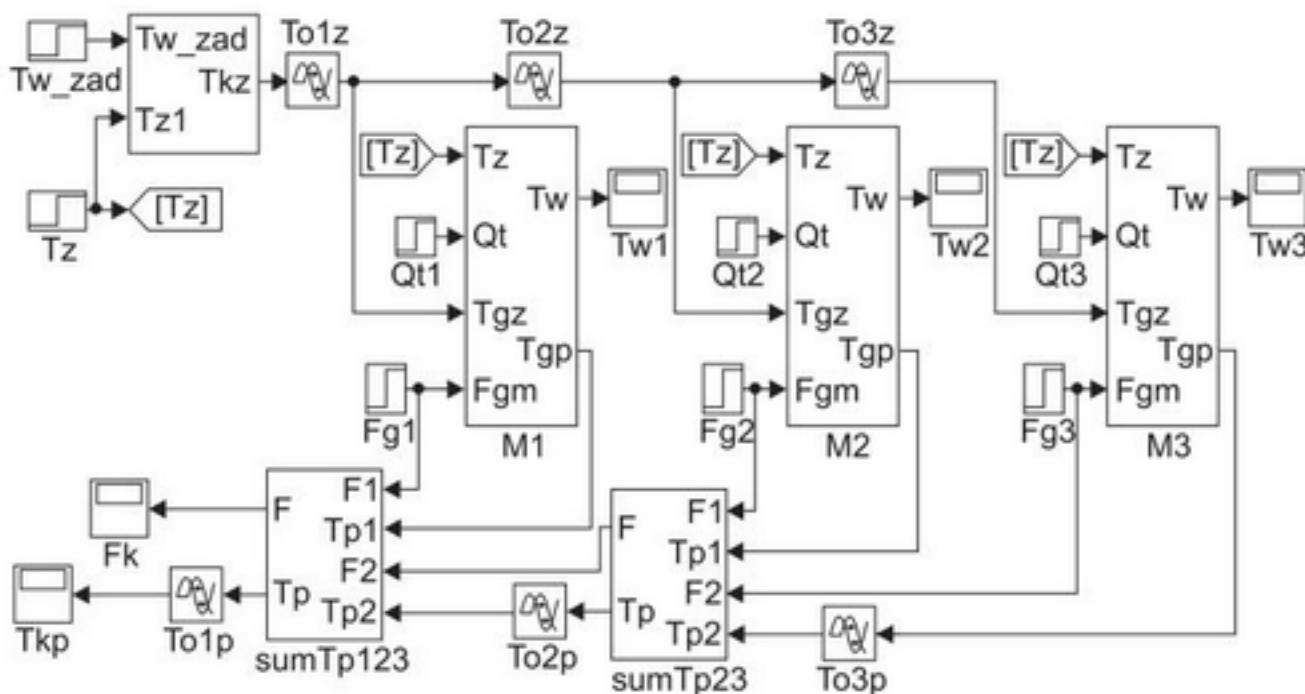
Szczegóły modelu na CD.

Wprowadzając dalszy podział mieszkań na pomieszczenia, można konstruować dokładniejsze modele budynku. Umożliwia to uwzględnienie zróżnicowanego zapotrzebowania na ciepło, wynikającego z położenia pomieszczenia, przekazywanego ciepła między sąsiednimi pomieszczeniami, podziału instalacji na piony itp.

22.3.3. Model budynku z opóźnieniami transportowymi

Charakterystyczną cechą analizowanego obiektu jest występowanie opóźnień transportowych^{*}, które mogą mieć istotne znaczenie dla własności układów regulacji. Najłatwiej jest zastosować stałe opóźnienia (rys. 22.6).

17.3.6



Rys. 22.6. Aplikacja modelu z opóźnieniami transportowymi

Ponieważ pary bloków opóźniających (To_{iz} i To_{ip}) reprezentują równe odcinki instalacji, więc mają zadeklarowane takie same czasy opóźnień. Konieczne jest jedynie zadeklarowanie różnych wartości początkowych (aby uruchamiać symulację od stanu równowagi) – dla bloków To_{iz} jest to wartość $T_{iz}(0)$, dla bloków To_{ip} jest to wartość $T_{kp}(0)$.

Chcąc zwiększyć dokładność modelu, można by wprowadzić zmienne opóźnienia, zwłaszcza jeśli model będzie wykorzystywany do symulowania pracy obiektu przy zmiennych strumieniach przepływu.

22.4. Model instalacji c.o. – zjawiska cieplne i hydrauliczne

22.4.1. Opis zmiennych i parametrów modelu

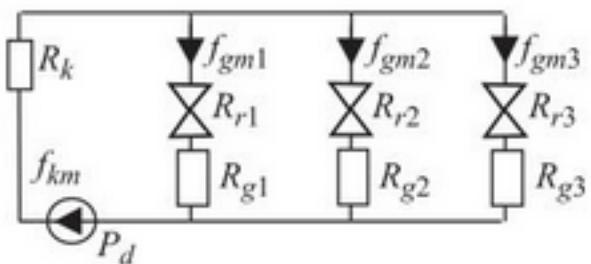
Instalacja c.o. tworzy układ naczyń połączonych, więc zmiana oporów hydraulicznych w jednym miejscu instalacji powoduje zmianę rozprływu wody w całej instalacji. W części III[†] omówiono zasady konstrukcji prostych modeli sieci hydraulicznych, przy założeniu, że przepływy są turbulentne, a sieć stanowi szeregowo-

15.4

* W p. 17.3.6: o opóźnieniu w sieci grzewczej.

† W p. 15.4: o modelach sieci hydraulicznych.

-równoległe połączenie oporów hydraulicznych. Przedstawimy jeszcze prostszy model sieci, który jednak dodatkowo uwzględnia możliwość sterowania przepływami w instalacji za pomocą zaworów przy grzejnikach (rys. 22.7)



Rys. 22.7. Zmienne i parametry modelu hydraulicznego

Zakłada się, że ruch cieczy w sieci wymusza pompą wytwarzającą ciśnienie P_d [Pa] i że wszystkie istotne opory hydrauliczne można przedstawić w postaci równoległego połączenia elementów skupionych: R_k – opory kotłowni, R_{gi} – stałe opory instalacji w mieszkaniach oraz R_{ri} – opory elementów regulacyjnych (zaworów). Ciśnienie P_d i opory regulacyjne R_{ri} są zmiennymi wejściowymi modelu. Zmiennymi wyjściowymi są rozpływ wody w instalacji (f_{gm} , [kg/s]). Zrealizujemy model instalacji przy założeniu, że przepływy są laminarne i opisane liniową zależnością ciśnienia i strumienia ($P = Rf$). Jeśli model uwzględnia turbulentny charakter przepływów, konstrukcja modelu jest analogiczna, tyle że opiera się na kwadratowej zależności ciśnienia i strumienia przepływu ($P = Rf^2$).

22.4.2. Prosty model hydrauliczny instalacji

Model zrealizujemy w sposób rekurencyjny. Konstruowanie modelu rozpoczyna się od rekurencyjnego wyznaczenia zastępczego oporu hydraulicznego całej sieci. Założając liniową zależność ciśnienia i strumienia przepływu, opór zastępczy dwóch równoległych gałęzi (R_1, R_2) można wyznaczyć ze wzoru:

$$R_z = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \quad (\text{IV.13})$$

Na tej podstawie można zbudować blok z wyjściem R_i (rys. 22.8), który oblicza opór równoległego połączenia danej gałęzi (część stała R_g podawana jako parametr, a część zmienna R_r podawana na wejście bloku) oraz wyznaczonego wcześniej oporu zastępczego dalszych gałęzi (R_{i+1}). Zaczynając od najdalszego węzła, można w ten sposób rekurencyjnie wyznaczyć opór zastępczy gałęzi R_z .

W oporze zastępczym całej instalacji należy uwzględnić również opory przepływu przez instalacje kotłowni (R_k). Na podstawie oporu zastępczego i ciśnienia wytwarzanego przez pompę P_d można wyznaczyć strumień wody przepływającej przez kotłownię (f_{km}). To z kolei umożliwia obliczenie różnicy ciśnień w poszczególnych gałęziach P_g . W sumie opisuje to wzór:

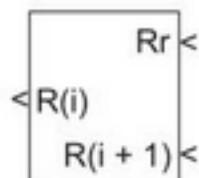
$$P_g = P_d - \frac{P_d}{R_z + R_k} R_k \quad (\text{IV.14})$$

który stanowi podstawę kolejnego bloku z wyjściem P_g (rys. 22.9). Znając ciśnienie w gałęzi (P_g) oraz opory hydrauliczne tej gałęzi (R_g i R_r), można wyznaczyć stru-

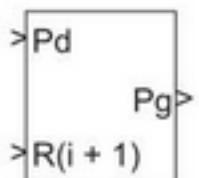
mień wody f_{gm} , co także dla przejrzystości schematu można wykonać w formie bloku z wyjściem F_{gm} (rys. 22.10). Parametrami tworzonych bloków są opory hydrauliczne gałęzi. Identyfikację ich wartości można wykonać na podstawie rozkładu ciśnień i strumieni przepływu w warunkach obliczeniowych (projektowych).

Aplikacje opisanych bloków można sprawdzić na CD.

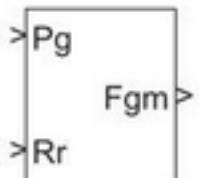
CD



Rys. 22.8. Blok z wyjściem R_i



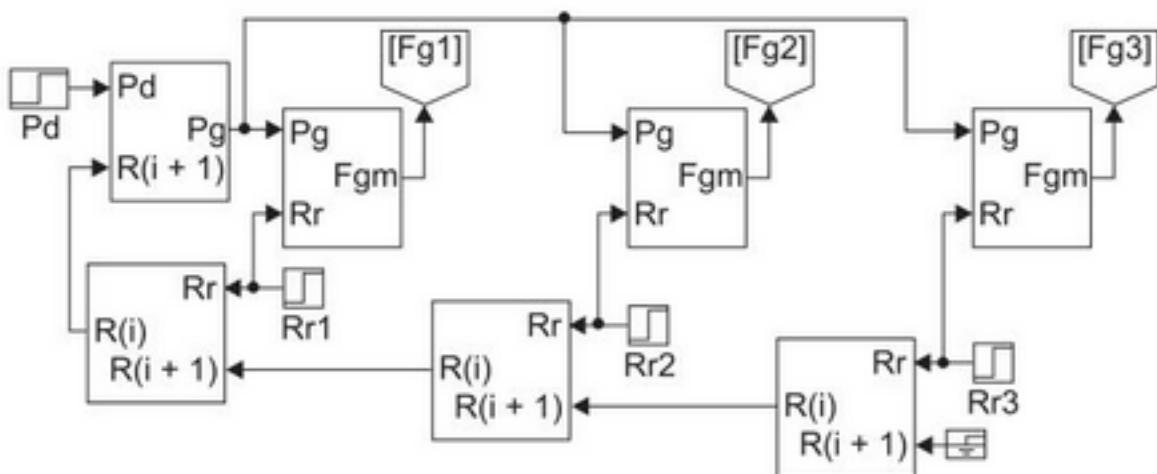
Rys. 22.9. Blok z wyjściem P_g



Rys. 22.10. Blok z wyjściem F_{gm}

22.4.3. Model instalacji c.o.

Na rysunku 22.11 przedstawiono aplikację modelu części hydraulicznej instalacji c.o. w budynku z trzema mieszkaniami.



Rys. 22.11. Aplikacja modelu części hydraulicznej instalacji c.o.

Kompletny model instalacji c.o. obejmuje część hydrauliczną i część cieplną, czyli model ogrzewania budynku (p. rys. 22.6). Połączenie następuje przez sygnały strumieni przepływu F_{gi} , czyli wyjścia części hydraulicznej, które należy podłączyć zamiast bloków wejściowych F_{gi} w części cieplnej.

Szczegóły modelu na CD.

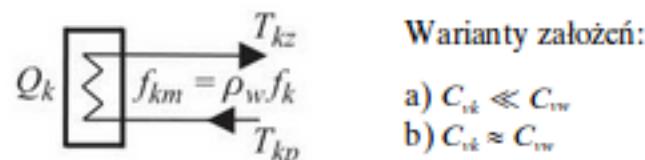
CD

Model w tej postaci można wykorzystać do badania reakcji na zmianę: temperatury na zewnątrz (T_z), wartości zadanej temperatury wewnętrz pomieszczeń ustalonej w kotłowni ($T_{w,zad}$), ciśnienia wytwarzanego przez pompę (P_d), oporów hydraulicznych zaworów regulacyjnych (R_{ri}) oraz dodatkowych zysków lub strat ciepła w mieszkaniach (q_{ti}).

22.5. Sparametryzowany model kotła

22.5.1. Opis parametrów i zmiennych

Do symulowania pracy kotłowni zaproponujemy również dwa warianty modelu – pierwszy przy założeniu, że akumulacja energii w piecu jest pomijalna w stosunku do innych magazynów ($C_{vk} \ll C_{vw}$), a drugi z uwzględnieniem pojemności cieplnej kotła ($C_{vk} \approx C_{vw}$) (rys. 22.12).

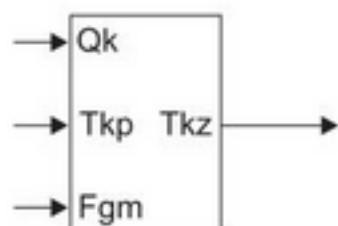


Rys. 22.12. Zmienne i parametry modelu kotłowni

Zakładamy, że ciepło tracone przez kocioł do otoczenia jest pomijalne oraz że w kotle następuje idealne mieszanie wody ($T_{kz} = T_{kir}$).

Zmiennymi wejściowymi modelu są (rys. 22.13):

- temperatura wody wpływającej do kotła T_{kp} [$^{\circ}\text{C}$],
- masowy przepływ wody przez kocioł $f_{km} = \rho_w f_k$ [kg/s],
- moc wytwarzanego ciepła Q_k [W].



Rys. 22.13. Symbol modelu kotłowni

22.5.2. Nieliniowy model kotła przy założeniu $C_{vk} \ll C_{vw}$

Jeśli akumulacja energii w kotle jest pomijalna (wytworzane ciepło natychmiast ogrzewa przepływającą wodę), to równanie bilansowe ma postać:

$$c_{pw} f_{km}(t) T_{kz}(t) = c_{pw} f_{km}(t) T_{kp}(t) + q_k(t) \quad (\text{IV.15})$$

CD

Jest to równanie statyczne, więc jego aplikacja jest bardzo prosta.
Model na CD.

22.5.3. Nieliniowy model kotła przy założeniu $C_{vk} \approx C_{vw}$

Uwzględnienie akumulacji ciepła w kotle przy założeniu doskonałego mieszania oznacza, że model ma postać pojedynczego równania różniczkowego[→]:

$$C_{vk} \dot{T}_{kz}(t) = q_k(t) - c_{pw} f_{km}(t)(T_{kz}(t) - T_{kp}(t)) \quad (\text{IV.16})$$

W stanie równowagi ($\dot{T}_{kz} = 0$), przy ustalonych wartościach zmiennych wejściowych (T_{kp0}, f_{km0}, q_{k0}), zmienna stanu ma wartość wyznaczoną ze wzoru:

$$T_{kz0} = \frac{q_{k0}}{c_{pw} f_{km0}} + T_{kp0} \quad (\text{IV.17})$$

Dokładniejsze wyprowadzenie i aplikacja modelu na CD.

CD

22.5.4. Liniowe modele kotła

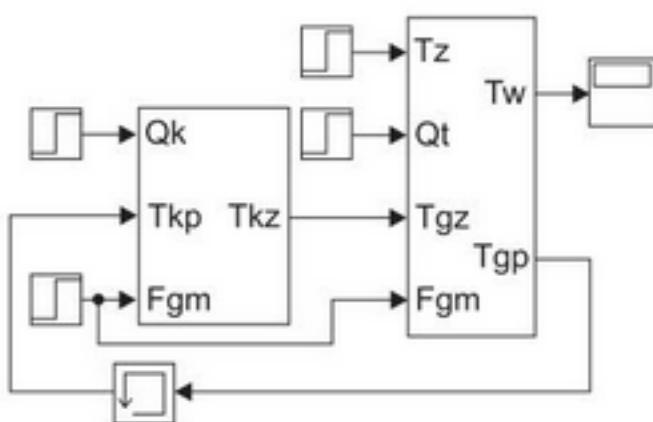
Jeśli przepływ wody w sieci jest stały lub zmienia się w niewielkich granicach, to równania stanu opisujące obiekt są liniowe i w badaniach symulacyjnych można wykorzystać modele operatorowe. Model kotła przy założeniu $C_{vk} \approx C_{vw}$, wyprowadzony na podstawie równania (IV.16), ma postać członu inercyjnego:

$$T_{kz}(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \left(\frac{q_k(t)}{c_{pw} f_{km0}} + T_{kp}(s) \right), \quad \text{gdzie } T_1 = \frac{C_{vk}}{c_{pw} f_{km0}} \quad (\text{IV.18})$$

który łatwo aplikować za pomocą bloku Transfer Fcn. Jeśli równanie (IV.16) zostanie przekształcone do ogólnej postaci równań stanu ($\dot{x} = Ax + Bu$), to również łatwo jest aplikować za pomocą bloku State-Space.

22.5.5. Model budynku i kotłowni

Przygotowany model pieca można zastosować jako element różnych wariantów modelu instalacji c.o. w budynku. W najprostszej aplikacji modelu zastępczego całego budynku (p. rys. 22.4) model kotła zastąpi blok Tkz_zad (rys. 22.14).



Rys. 22.14. Aplikacja modelu zastępczego budynku z kotłownią

→ W p. 17.3.5: o modelu kotła.

Model budynku skojarzony z modelem kotłowni uwzględnia pełne sprzężenie źródła i odbiorników ciepła, jakie stanowi strumień przepływu wody (F_{gm}) i temperatura wody, i to zarówno temperatura wody dostarczanej przez kocioł do instalacji ($T_{kz} \rightarrow T_{gz}$), jak i temperatura wody powracającej z instalacji do kotła ($T_{gp} \rightarrow T_{kp}$). Przy takiej pętli sprzężenia bloków konieczne będzie wprowadzenie bloku rejestru (Memory), który pozwoli uruchomić symulację od dowolnych warunków początkowych. Blok rejestru nie będzie konieczny w modelach uwzględniających opóźnienia transportowe.

Zastosowanie prostych modeli

23.1. Wprowadzenie

W poprzednich częściach omówiliśmy podstawowe metody konstrukcji modeli dynamiki obiektów oraz sposoby badania ich własności. Wykorzystanie różnorodnych narzędzi analitycznych, eksperymentalnych i symulacyjnych umożliwia efektywne rozwiązywanie rzeczywistych problemów w zakresie projektowania i badania obiektów oraz układów sterowania nimi.

23.2. Badanie dynamiki obiektów

23.2.1. Cel zastosowania prostych modeli

Analiza zagadnień uproszczonych pozwala na pewien czas pominąć wpływ wielu nieznanych czynników (np. zmienności właściwości fizycznych wielu substancji) i skupić się na zrozumieniu i rozwiązaniu najważniejszego celu. O użyteczności prostego modelu decyduje możliwość przewidywania na jego podstawie rzeczywistych zjawisk. W trakcie prowadzenia badań i w miarę coraz lepszego poznawania obiektu pojawia się naturalna tendencja do rozbudowy modelu. Zyskuje się w ten sposób na dokładności i uniwersalności, ale traci na przejrzystości i prostocie.

W rzeczywistych warunkach żaden fizyczny układ nie jest całkowicie wolny od zmian przestrzennych i praktycznie nie ma zjawisk, które można by opisać w sposób liniowy. W praktyce zawsze stosuje się pewien rodzaj aproksymacji. Przede wszystkim, o ile to możliwe, unika się modelu o parametrach rozłożonych, ponieważ nawet w prostych przypadkach zarówno analiza, jak i symulacja są znacznie bardziej złożone niż dla modelu o parametrach skupionych. Z kolei nieliniowość modelu sprawia dużo trudności podczas analizy, a nawet eliminuje możliwość zastosowania metod analitycznych. W badaniach symulacyjnych nieliniowe zależności komplikują aplikację modelu w programie i wydłużają obliczenia, ale zazwyczaj w mniejszym stopniu niż nadmiar zmiennych stanu. Uproszczone modele mają mniejszą dokładność, co ogranicza odwzorowanie rzeczywistości. Jednocześnie

jednak wymagają mniejszej liczby parametrów, więc łatwiej je wyznaczyć. Prostsza jest też poprawna aplikacja w programie symulacyjnym, a w szczególnych przypadkach możliwe są badania analityczne. Badanie tak uproszczonych modeli nie jest sposobem na odkrywanie nieznanych zjawisk. Niemniej, można je wykorzystać do opisu złożonych obiektów, a jeśli w strukturze takiego układu występują elementy nieliniowe lub sprzężenia zwrotne, to jego własności nie są już prostą sumą własności elementów.

Proste modele obiektów technicznych są zazwyczaj przedstawiane w formie transmitancji. Wynika to głównie ze stosowanych metod identyfikacji eksperymentalnej i przystosowania opisu obiektu do badań analitycznych. Modele wyznaczone na podstawie opisu zjawisk fizycznych zachowują nieliniowe zależności między zmiennymi, a to z kolei gwarantuje dokładniejsze wyniki symulacji w szerokim zakresie zmian punktu pracy. Na podstawie modelu nieliniowego zawsze można wyznaczyć model zlinearyzowany i jego parametry w dowolnym punkcie pracy, co umożliwia przeprowadzenie analizy teoretycznej. Konstrukcja modelu na podstawie równań bilansowych pomaga również określić charakter transmitancji obiektu i wybrać odpowiednią metodę eksperymentalnej identyfikacji parametrów ze względu na rząd modelu oraz wartości opóźnień i stałych czasowych. Pomocna jest również fizyczna interpretacja parametrów modelu, którą można wykorzystać przy projektowaniu urządzeń – na przykład określenie wymiarów elementów tworzących filtr pneumatyczny czy hydrauliczny (związek między parametrami charakterystyk częstotliwościowych i parametrami fizycznymi).

23.2.2. Ogólna metodologia konstrukcji modelu

Pierwszym problemem w badaniu dynamiki obiektu jest konstrukcja odpowiedniego modelu. Analityczne metody konstrukcji modeli opierają się na podstawowych prawach zachowania energii i masy, wymagają więc rozumienia zjawisk zachodzących na obiekcie. Z tego też powodu zwykle są zaniedbywane w praktyce inżynierskiej. Czasami może to być rzeczywiście trudne, ze względu na złożony lub mało poznany proces. Wówczas jedyną drogą do otrzymania prostego modelu dynamiki pozostaje identyfikacja metodami eksperymentalnymi, pod warunkiem że istnieje możliwość wykonania odpowiednich doświadczeń na obiekcie. Często jednak zachodzące zjawiska i ich opis są znane, a zastosowanie metody analitycznej w praktyce może być prostsze niż wykonanie eksperimentu. I choć sposoby konstrukcji modeli obiektów z różnych dziedzin są opisywane za pomocą różnych pojęć, to w zasadzie są podobne, o czym traktują części II i III.

W każdym przypadku przed przystąpieniem do konstrukcji modelu należy określić jego przeznaczenie. Dokładny model jest skomplikowany, a prosty model jest niedokładny. Dobry model jest wynikiem kompromisu – to najprostszy model, który zachowuje własności istotne dla prowadzonych badań. Modelowanie jest właściwie sztuką stosowania uproszczeń. Stworzenie prostego modelu jest szczególnie ważne, jeśli planowane jest prowadzenie badań analitycznych. Bardzo ważne są uproszczenia wprowadzane na początku procesu konstrukcji modelu przez sformu-

łowanie założeń, w których określa się zjawiska, które można pominąć. Podstawowym założeniem tego typu jest wybór opisu obiektu za pomocą modelu o parametrach skupionych lub modelu o parametrach rozłożonych¹. Odpowiednio mocne założenia bardzo upraszczają sam proces konstrukcji modelu, ale jednocześnie mogą bardzo ograniczyć jego zastosowanie. W efekcie, nawet niewielkie rozszerzenie zakresu badań, jakie może wyniknąć w trakcie pracy, będzie wymagało tworzenia nowego modelu. Uproszczenia stosuje się także w odniesieniu do gotowego modelu. Można więc zaplanować konstrukcję modelu „na wyrost” i dopasować go do aktualnie prowadzonych badań. Można na przykład stworzyć model nieliniowy, który będzie stosowany w badaniach symulacyjnych, a do podstawowych badań analitycznych używać modelu zlinearyzowanego lub ograniczyć liczbę zmiennych, uznając część z nich za stałe parametry obiektu.

Pierwszy etap modelowania polega na określaniu granic analizowanego obiektu, czyli na ustaleniu, które zjawiska należą do układu, a które można uważać za czynnik zewnętrzny. Zjawiska zewnętrzne mogą wpływać na obiekt, ale nie są jego częścią, nawet jeśli mają tę samą naturę. Tym samym wskazuje się wielkości wejściowe modelu. Dobrze jest również założyć, które z wielkości będą w badaniach uznawane za zmienne wejściowe, a które za stałe parametry obiektu.

Dalsze kroki zależą od założonej dokładności modelu i wybranej metody identyfikacji – analitycznej czy eksperimentalnej. Stosując na tym etapie identyfikację eksperimentalną, można uzyskać ogólny model zastępczy obiektu (na zasadzie czarnej skrzynki, bez definiowania wewnętrznej struktury). Dokładniejsze modele wymagają na ogół dalszej analizy działania układu (przebiegu procesu). Na podstawie opisu i schematu technologicznego przyjmuje się założenia upraszczające i tworzy schemat blokowy obiektu. Następnie można opracować schemat strukturalny i przejść do identyfikacji poszczególnych bloków modelu metodą eksperimentalną. W przypadku natomiast konstrukcji modelu metodą analityczną, po skompletowaniu założeń upraszczających przystępuje się do określenia miejsc (punktów), w których następuje akumulowanie energii czy masy lub równoważenie się sił czy napięć. Jeśli zmienne obiektu mają charakter wektorowy (np. w układach mechanicznych), to definiuje się zależności geometryczne w układzie. Układa się odpowiednie bilanse wielkości, po czym porządkuje model przez wyeliminowanie nadmiarowych zmiennych i przekształcenie do postaci odpowiedniej do dalszego zastosowania modelu, np. równań stanu, transmitancji. W trakcie układania równań i ich przekształcania warto na bieżąco kontrolować poprawność wykonanych operacji (np. sprawdzać zgodność jednostek fizycznych, co jest warunkiem koniecznym, choć niewystarczającym, poprawności modelu). Po skonstruowaniu modelu konieczna jest identyfikacja parametrów, czyli określenie ich wartości na podstawie pomiarów wykonanych na rzeczywistym obiekcie lub na podstawie obliczeń z wykorzystaniem wartości parametrów zamieszczonych w tablicach fizycznych lub w projektach technicznych.

Model z określonymi wartościami parametrów powinien zostać poddany weryfikacji. Jeśli model będzie używany do symulacji, to weryfikację poprawności

¹ O warunkach zastosowania modeli o parametrach skupionych np. w [8].

można przeprowadzić po aplikacji modelu w programie symulacyjnym. Porównanie wyników obliczeń (symulacji) z informacjami o rzeczywistym obiekcie (dane projektowe lub pomiarowe, doświadczenie eksperta) najlepiej rozpocząć od analizy stanu ustalonego dla kilku wybranych punktów pracy. W przypadku istotnego braku zgodności powtarza się kontrolę poprawności przekształceń wykonywanych podczas konstrukcji modelu. Jeśli przekształcenia są poprawne, to brak zgodności może oznaczać, że w modelu nie uwzględniono wszystkich zjawisk, które mają istotny wpływ na zachowanie obiektu w danych warunkach i należy powtórzyć procedurę określania początkowych założeń.

23.2.3. Analiza własności modelu

Model dynamiki obiektu można przedstawiać w różnych formach, a wybór zależy od dalszego sposobu prowadzenia badań. Metody analityczne wymagają przekształcenia modelu do jednej z uogólnionych postaci: układu n równań różniczkowych pierwszego rzędu, jednego równania n -tego rzędu, transmitancji operatorowej lub widmowej.

W przypadku modeli liniowych istnieje duża dowolność w wyborze formy modelu, z tym że podstawowe badania własności obiektów – stan równowagi i stabilność – w zasadzie odbywają się na podstawie równań różniczkowych lub transmitancji operatorowej, natomiast transmitancję widmową stosuje się przy badaniu własności filtracyjnych obiektu lub przy projektowaniu układów regulacji dla stabilnego obiektu.

Analityczne badanie stabilności obiektu na podstawie układu równań różniczkowych i transmitancji operatorowej polega na określeniu położenia pierwiastków równania charakterystycznego na płaszczyźnie zespolonej (rozwiązanie równania lub zastosowanie kryterium położenia pierwiastków, np. Hurwitsa, Routha). Równanie charakterystyczne modelu nie zależy od jego formy. Ponadto w przypadku obiektu, którego nie można podzielić na unilateralne człony, jest ono takie samo dla różnych transmitancji tego obiektu. Jest to oczywiście wynik jednoznacznych relacji między rachunkiem różniczkowym i operatorowym w obszarze modeli liniowych. Zastosowanie transmitancji ułatwia operacje na modelach, np. przekształcanie ich, wyznaczanie modeli obiektów złożonych, ale równania różniczkowe są bardziej ogólnym opisem obiektu.

W przypadku modeli nieliniowych analityczne metody badawcze są bardzo ograniczone. Zazwyczaj badania tego typu przeprowadza się, stosując model uproszczony, a model dokładny wykorzystuje się do weryfikacji wyników za pomocą badań symulacyjnych. Uproszczenie modelu polega przede wszystkim na jego linearyzacji. Wnioski uzyskane dla modelu zlinearyzowanego są prawdziwe tylko w ograniczonym obszarze. W celu sprawdzenia ich, porównuje się własności modelu zlinearyzowanego wokół punktu równowagi i modelu powstałego w wyniku linearyzacji harmonicznej. Wykorzystuje się również model zlinearyzowany do badania układu w otoczeniu stanu równowagi, a z dala od tego stanu – portret fazowy modelu uproszczonego do układu drugiego rzędu. O wyborze spo-

sobu analizy nieliniowego układu decydują charakterystyczne własności metod ewolucji stanów i metod częstotliwościowych. W skrócie przedstawiono je w tab. 23.1. Warto też zwrócić uwagę, że liniowy model obiektu często jest efektem założenia stałych wartości odpowiednich zmiennych. Przy niewielkich zmianach tych wielkości można więc stosować prosty model liniowy zamiast modelu nieliniowego lub zlinearyzowanego.

Tabela 23.1. Podstawowe metody badania układów nieliniowych

Metody ewolucji stanów	Metody częstotliwościowe
Warianty	
Metoda płaszczyzny fazowej (dla 1. i 2. rzędu)	Metoda funkcji opisującej (linearyzacja harmoniczna)
Metoda płaszczyzny wielowarstwowej	
Metoda trajektorii obwodzących	
Obszar badań	
Dobrze opisuje układ z dala od stanu równowagi (pozwala uwzględnić nieliniowości, a zwłaszcza nasycenie)	Tylko w pobliżu stanu równowagi
Typ badanych układów	
Liniowe i nieliniowe	Liniowe
Przekaźnikowe i impulsowe	Ciągłe i impulsowe
Ograniczenia	
Charakterystyki statyczne i wymuszenia nie muszą być liniowe i ciągłe	Dla układów nieliniowych wymagana jest linearyzacja harmoniczna
Raczej dla układów niskiego rzędu [*]	Niekoniecznie układy niskiego rzędu
W zasadzie układy autonomiczne ^{**}	Niekoniecznie układy autonomiczne
Projektowanie układów	
Z zadaniem przestawiania	Z zadaniem nadążania

* Dla wyższych rzędów płaszczyzny wielowarstwowe.

** Wpływ zakłóceń bada się dla najgorszego przypadku, za pomocą trajektorii obwodzących.

Możliwości badania własności dynamicznych układów złożonych sprowadzają się w zasadzie do metod symulacyjnych. Podstawową wadą takich badań jest to, że nie dają rozwiązań ogólnego. Otrzymuje się jedynie zbiory wartości przedstawiające rozwiązania szczegółowe dla konkretnych wymuszeń i warunków początkowych. Można sformułować pewne wnioski, ale wyniki symulacji nie stanowią dowodu, a jedynie przykład występowania danej własności. W uogólnieniu wniosków pomaga znajomość zagadnień teoretycznych. Na przykład, interpretując wykres reakcji obiektu liniowego na wymuszenie skokowe, wiadomo, że stabilność jednego wykresu oznacza, że obiekt jest stabilny także w innych punktach pracy (obiekt albo jest stabilny globalnie, albo jest niestabilny). W przypadku złożonych, nieliniowych modeli trudno jednak o takie wsparcie. Jedynie dla układów niskiego rzędu można uzyskać dodatkowe informacje o własnościach dynamicznych na podstawie portretu fazowego.

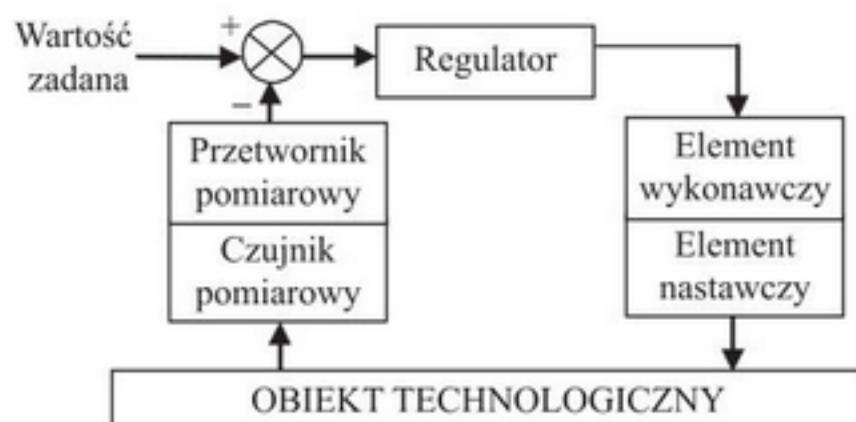
23.3. Układy regulacji

23.3.1. Wybór układu regulacji

Projekt układu regulacji obejmuje ustalenie wielkości regułowanej i sterującej, wybór typu regulatora oraz wyznaczenie jego nastaw w taki sposób, aby układ działał stabilnie i realizował założony cel z określoną dokładnością. Podstawą pracy są dokładne założenia dotyczące obiektu i projektowanego układu:

- typ obiektu (czas opóźnienia, dominujące stałe czasowe, rzad, członki astatyczne, liniowość);
- zakłócenia (miejsce ich oddziaływanego, kształt, czas trwania);
- kryterium jakości (zależnie od wymagań stawianych przez technologię, np. błąd statyczny, czas regulacji, maksymalne odchylenie);
- parametry regulacji (dokładność statyczna, pasmo regulacji, zapas stabilności).

Skompletowanie tych założeń oraz ich realizacja są łatwiejsze, jeśli zna się obiekt z doświadczenia lub też jeśli dysponuje się jego modelem, nawet bardzo prostym. Należy przy tym pamiętać, że we własnościach obiektu należy uwzględnić również elementy pomiarowe i wykonawcze (rys. 23.1).



Rys. 23.1. Schemat blokowy pętli regulacji

Omówienie metod projektowania układów regulacji jest materiałem na oddzielną książkę. Tu przedstawimy tylko kilka zasad związanych ze znajomością dynamicznych własności obiektu.

Przy wyborze typu regulatora może pomóc określenie **współczynnika trudności regulacji** k_r , definiowanego jako stosunek zastępczego opóźnienia T_o do zastępczej stałej czasowej T danego obiektu:

$$k_r = T_o/T \quad (\text{IV.19})$$

Im większa wartość współczynnika, tym trudniejsza regulacja. W każdym wypadku można stosować algorytm PID, ale nie ma takiej potrzeby (tab. 23.2).

Jeśli czas opóźnienia jest mały względem zastępczej stałej czasowej, to można zastosować regulator dwupołożeniowy. W regulacji dwustawowej bez histerezy jakość regulacji zależy tylko od uśredniających własności obiektu. Z jednej strony wy-

Tabela 23.2. Dobór typu regulatora w zależności od współczynnika k_r

Współczynnik k_r	Regulacja	Typ regulatora
$k_r < \frac{1}{20}$	łatwa	wystarczy regulator dwupołożeniowy, jeśli tylko obiekt ma wystarczająco silne własności uśredniające
$\frac{1}{20} < k_r < \frac{1}{4}$	dość trudna	regulator PI lub PID
$k_r > \frac{1}{4}$	trudna	

starczy więc znajomość prostego modelu obiektu, aby ocenić jakość regulacji dwustawnej. Z drugiej strony, na podstawie zarejestrowanego przebiegu sterowania, można zidentyfikować model obiektu (identyfikacja uproszczona).

Nieliniowość statyczna obiektu podwyższa stopień trudności regulacji. Jeśli ponadto jest wymagana duża dokładność regulacji, to stosuje się regulator ciągły lub dyskretny PID, lub inny udoskonalony algorytm. Zmienne parametry obiektu wymagają zastosowania regulatorów adaptacyjnych, które zawierają algorytmy automatycznego dostrajania nastaw regulatora do zmian na obiekcie. Można też zaprojektować regulator odpomy PID, zapewniający odpowiedni zapas stabilności przy niepewnych parametrach obiektu.

23.3.2. Dobór nastaw

Wartości parametrów regulatora ustala się ze względu na zapewnienie stabilności oraz na optymalizację działania układu.

Do określenia stabilności obiektu na podstawie równań różniczkowych i transmitancji operatorowej wystarczy tylko część modelu odpowiadająca mianownikowi transmitancji (równanie charakterystyczne). Jeśli podobna metoda zostanie zastosowana do badania układu regulacji obiektu, to konieczne jest powtórzenie analizy położenia pierwiastków w odniesieniu do kolejnego równania charakterystycznego, wynikającego z transmitancji układu zamkniętego $G_z(s)$. Gdy transmitancja obiektu $G_o(s)$ i regulatora $G_R(s)$ są funkcjami wymiernymi ($G_o = L_o/M_o$, $G_R = L_R/M_R$), to transmitancja układu regulacji ma postać:

$$G_z(s) = \frac{G_o(s)G_R(s)}{1 + G_o(s)G_R(s)} = \frac{L_o(s)L_R(s)}{L_o(s)L_R(s) + M_o(s)M_R(s)} \quad (\text{IV.20})$$

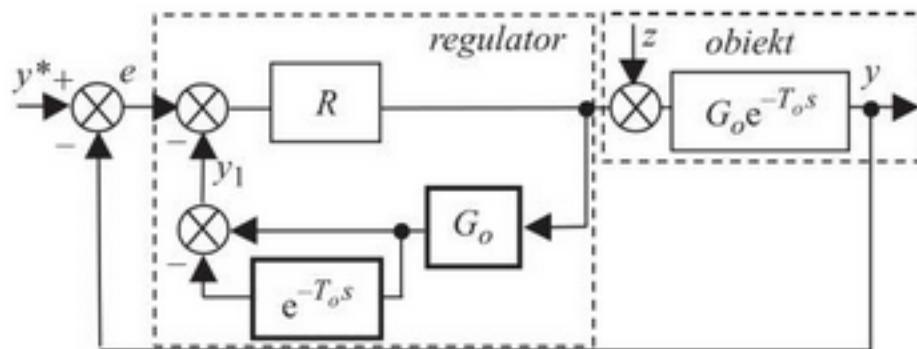
Nowe równanie charakterystyczne łatwo jest wyznaczyć, ale trudniej rozwiązać. Trudno też przewidzieć, jak będzie się zmieniać położenie biegunków transmitancji $G_z(s)$ przy zmianie parametrów obiektu lub regulatora. Można zastosować kryterium położenia pierwiastków, ale nie daje to żadnej informacji o zapasie stabilności, co jest ważnym elementem projektowania układu regulacji. Na ogół więc sprawdza się stabilność układu otwartego na podstawie równania charakterystycznego, a następnie przetwarza się model do postaci transmitancji widmowej, wyznacza charakterystyki częstotliwościowe i stosuje kryterium Nyquista. Badanie biegunków $G_z(s)$ stosuje się praktycznie w przypadkach, gdy układ otwarty jest niestabilny.

Optymalizację działania układu regulacji można przeprowadzić teoretycznie, a o skuteczności takiego działania decyduje w dużej mierze odpowiedni model – możliwie najprostszy. Poprawę jakości można też osiągać metodą kolejnych eksperymentów na obiekcie. Aby radikalnie uprościć obsługę, stosuje się regulatory z samostrojeniem wg przyjętego kryterium, na podstawie automatycznie przeprowadzonej uproszczonej identyfikacji obiektu.

23.3.3. Model jako element układu regulacji

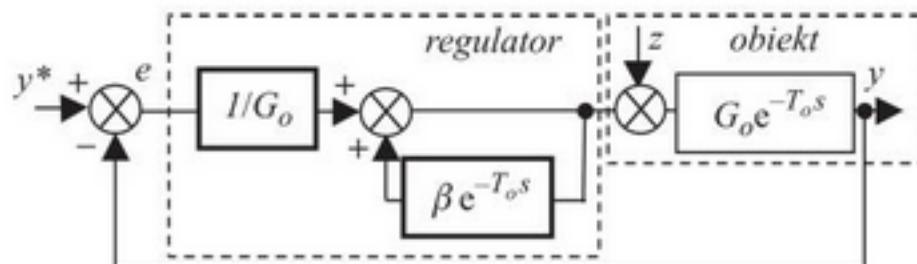
Optymalizacja układów regulacji nie ogranicza się tylko do doboru wartości nastaw regulatora. Dotyczy także poszukiwania nowych algorytmów działania urządzeń sterujących, a kierunki badań są bardzo zróżnicowane. Jednym z nich jest wykorzystanie modelu procesu sterowanego w strukturze regulatora (MBC)¹.

Klasycznym przykładem są rozwiązania przeznaczone dla obiektów z opóźnieniem, gdzie regulator PID nie może zapewnić odpowiednio szybkiej reakcji na zakłócenie, co ogranicza pasmo regulacji. W układzie z predyktorem Smitha (rys. 23.2) regulator zawiera człon G_o , będący modelem obiektu bez opóźnienia.



Rys. 23.2. Układ z predyktorem Smitha

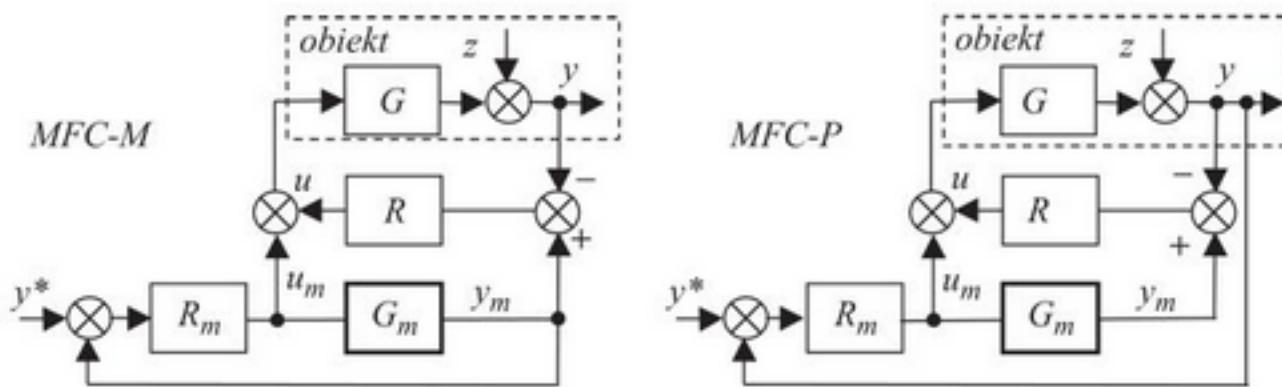
Dostarcza on do regulatora R informację y_1 , o reakcji obiektu, z wyprzedzeniem o czas T_o w stosunku do właściwej reakcji y . Po upływie czasu T_o wielkość wyjściowa z modelu G_o jest znoszona dzięki obecności członu $e^{-T_o s}$ w regulatorze. Jeśli obiekt jest „czystym” opóźnieniem ($G_o = K$), to dla skokowej zmiany zakłócenia odpowiedź na zakłócenie na wyjściu pojawi się w chwili $t = T_o$ i zniknie w chwili $t = 2T_o$, co oznacza, że regulator jest optymalny, bo krótszy czas reakcji nie jest możliwy. Podobne własności wykazuje regulator Reswicka (rys. 23.3).



Rys. 23.3. Schemat blokowy regulatora Reswicka

¹ MBC – Model Based Control.

Ważnym obszarem zastosowania regulatorów wykorzystujących model procesu są układy przeznaczone do sterowania obiektami o zmiennych parametrach. Klasycznym rozwiązaniem problemu są regulatory adaptacyjne. Innym rozwiązaniem są układy regulacji, które wykazują zwiększoną odporność na perturbacje parametrów procesu, np. struktury MFC¹ (rys. 23.4).



Rys. 23.4. Schemat układów regulacji odpomej z wykorzystaniem modelu obiektu

Ponieważ rzeczywisty proces G nie jest do końca znany lub też zmienia się, więc w strukturze regulatora wykorzystuje się przybliżony model G_m . Istotą koncepcji jest sterowanie obiektem za pomocą sumy sygnałów $u_m + u$. Jeden z nich (u_m) pochodzi z regulatora modelu obiektu, natomiast drugi (u) wynika z przetworzenia różnicę sygnałów wyjść modelu i obiektu ($y_m - y$) przez regulator korekcyjny R . Struktura MFC wykazuje dobre nadążanie za zmianami wielkości zadanej y^* oraz dobre tłumienie zakłóceń z , i to przy niezależności od zmian obiektu.

¹ MFC – model-following control.

Część V

Zadania

Wiedzę najlepiej sprawdzić w praktyce, więc na koniec trochę zadań. Polegają one na konstruowaniu modeli i wykonaniu określonych badań analitycznych. Celem ćwiczeń jest nie tylko proste zastosowanie poznanych wcześniej metod, ale również kojarzenie różnych form opisu i różnych metod badania tego samego obiektu i porównywanie podobnych obiektów. Nabycie biegłości w przekształceniach i w interpretacji wyników badań pomaga w przełamywaniu bariery pomiędzy teorią i praktyką. Przed przystąpieniem do konstrukcji modelu można zawsze podjąć próbę przewidywania własności modelu (rzędu, liniowości, stabilności, ...), by porównać je z otrzymanym wynikiem. W ten sposób testujemy umiejętności oceny wpływu założeń, zmiany struktury układu (np. kolejności połączenia elementów) itp.



Aby zbliżyć się do rzeczywistych warunków, kolejność zadań nie jest związana ani z porządkiem poprzednich części, ani ze stopniem trudności. Rozwiążanie zadań wymaga często odwołania do różnych zagadnień. Wśród zadań zdarzają się też polecenia podchwytliwe (np. niekompletne parametry czy założenia, polecenie zastosowania transmitancji do układów nieliniowych). Wszystkie zadania opierają się na materiale przedstawionym w poprzednich częściach. Każdy z badanych modeli można zaaplikować w programie symulacyjnym i przedstawić simulacje, które zilustrują dynamiczne własności obiektu.

Treść zadań i odpowiedzi znajdują się na płycie CD. Poniżej przedstawiono krótką charakterystykę poszczególnych grup zadań.

24.1. Klasyfikacja modeli i podstawowa analiza

ZADANIA: Sklasyfikować modele podane w różnych formach

CELE: Dobór odpowiedniej metody analizy modelu

24.2. Interpretacja charakterystyk

ZADANIA: Opisać właściwości modelu na podstawie różnych typów charakterystyk

CELE: Różne obrazy tych samych właściwości modelu

24.3. Przekształcanie formy modeli

ZADANIA: Przedstawić ten sam model w różnych formach

CELE: Metody przekształceń

24.4. Modele złożone

ZADANIA: Przedstawić modele układów szeregowych, równoległych i ze sprzężeniem

CELE: Wnioskowanie o właściwościach modeli złożonych

Obiekty jednorodne

25.1. Odpowiedzi czasowe

ZADANIA: Ułożyć równanie różniczkowe i przedstawić rozwiązanie
CELE: Rozwiązywanie prostych równań różniczkowych

25.2. Własności układów elementarnych

ZADANIA: Wyznaczyć modele prostych układów elektrycznych (czwórniki, układy mostkowe, układy ze wzmacniaczami operacyjnymi), mechanicznych i hydraulicznych (pneumatycznych).
CELE: Analogie pomiędzy prostymi układami fizycznymi

26

Parametry charakterystyk częstotliwościowych

26.1. Układy elektryczne

ZADANIA: Wyznaczyć charakterystyki prostych czwómków elektrycznych
CELE: Własności filtracyjne układów elektrycznych

26.2. Układy mechaniczne

ZADANIA: Wyznaczyć charakterystyki prostych układów mechanicznych
CELE: Analogie pomiędzy układami elektrycznymi i mechanicznymi

Przepływ cieczy przez zbiorniki

27.1. Wypływ cieczy ze zbiorników o różnych kształtach

ZADANIA: Wyznaczyć dynamiczny model pojedynczego zbiornika

CELE: Wpływ kształtu zbiornika na model dynamiki

27.2. Zbiorniki o różnych kształtach w kaskadzie

ZADANIA: Wyznaczyć dynamiczny model kaskady różnych zbiorników

CELE: Kształty i połączenia zbiorników a model dynamiki

27.3. Przepływ przez kaskadę niewspółdziającą

ZADANIA: Wyznaczyć model dynamiki kaskady niewspółdziającej

CELE: Własności dynamiczne obiektów typu kaskada niewspółdziająca

27.4. Przepływ przez kaskadę współdziającą

ZADANIA: Wyznaczyć model dynamiki kaskady współdziającej

CELE: Własności dynamiczne obiektów typu kaskada współdziająca

27.5. Układ trzech zbiorników

ZADANIA: Wyznaczyć model dynamiki dla różnych wariantów kaskad

CELE: Modele zastępcze

Układy z ogrzewaniem

28.1. Przepływ ciepłego (zimnego) medium

ZADANIA: Przedstawić modele dla różnych wariantów założeń

CELE: Właściwości dynamiczne obiektów cieplnych z przepływającym medium

28.2. Ogrzewanie (chłodzenie) elementu

ZADANIA: Przedstawić modele dla różnych wariantów założeń

CELE: Właściwości dynamiczne różnych wariantów obiektów cieplnych

28.3. Model zastępczy układu cieplnego

ZADANIA: Zaproponować prostsze modele zastępcze układów cieplnych

CELE: Znaczenie założeń upraszczających

28.4. Przepływ i podgrzewanie

ZADANIA: Przedstawić modele układów z mieszaniem podgrzewanych cieczy

CELE: Modele złożonych obiektów z przepływem i ogrzewaniem

Ruch i napęd

29.1. Kierunek ruchu i układ odniesienia

ZADANIA: Przedstawić modele różnych wariantów układów mechanicznych

CELE: Upraszczanie opisu układów mechanicznych

29.2. Napęd elektryczny

ZADANIA: Przedstawić modele silnika elektrycznego z obciążeniem mechanicznym

CELE: Modele złożonych układów elektryczno-mechanicznych

29.3. Elementy hydrauliczne

ZADANIA: Przedstawić modele różnych elementów typu siłownik

CELE: Modele złożonych układów mechaniczno-hydraulicznych, elektro-hydraulicznych

29.4. Parametry ruchu

ZADANIA: Przedstawić modele obiektów o zmiennych parametrach

CELE: Modele różnych wariantów złożonych obiektów

30

Symulacja

Na koniec jeszcze kilka przykładów, które warto przećwiczyć ze względu na zjawiska wynikające z własności algorytmów symulacyjnych

30.1. Parametry symulacji

ZADANIA: Interpretacja wyników
CELE: Dobór parametrów obliczeniowych

30.2. Rozwiązania analityczne i symulacyjne

ZADANIA: Zaplanowanie eksperymentu
CELE: Porównanie wyników symulacji z teorią

31

Egzamin

Sprawdzamy spójność wiedzy teoretycznej oraz intuicję inżynierską

31.1. Egzamin z teorii

ZADANIA: Formy modeli, przekształcenia badania

CEL: Połączenie różnych elementów teorii

31.2. Egzamin „z obiektów”

Kolejne zadania i problemy zapewnia otaczającą nas rzeczywistość:-)

ZADANIA: Przykłady ilustrujące teorię

CEL: Intuicja

Bibliografia

Bibliografia związana z tematyką książki jest bardzo bogata, ponieważ dotyczy różnych dziedzin. Spośród wielu tytułów wybrano tylko te najpopularniejsze.

Monografie i podręczniki

1. Amborski K., Marusak A.: *Teoria sterowania w ćwiczeniach*. WNT, Warszawa 1978.
2. Bracewell R.: *Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania*. WNT, Warszawa 1968.
3. Campbell D.P.: *Dynamika procesów*. PWN, Warszawa 1962.
4. Chmielnicki W.J.: *Sterowanie mocą w budynkach zasilanych z centralnych źródeł ciepła*. PAN, Warszawa 1996.
5. Close C.H., Frederick D.H., Newell J.C.: *Modeling and analysis of dynamic systems*. John Wiley & Sons, Inc., 2002.
6. Douglas J.M.: *Dynamika i sterowanie procesów*. WNT, Warszawa 1976.
7. Findeisen W.: *Technika regulacji automatycznej*. PWN, Warszawa 1978.
8. Friedly J.C.: *Analiza dynamiki procesów*. WNT, Warszawa 1975.
9. Gessing R., Latarnik M., Skrzywan-Kosek A.: *Zbiór zadań z teorii nieliniowych układów regulacji i sterowania*. WNT, Warszawa 1981.
10. Golten J., Verwer A.: *Control system design and simulation*. McGraw-Hill Book Company, Londyn 1991.
11. Hering M.: *Termodynamika dla elektryków*. WNT, Warszawa 1980.
12. Kaczorek T.: *Teoria układów w regulacji automatycznej*. WNT, Warszawa 1974.
13. Koziej E., Sochoń B.: *Elektrotechnika i elektronika*. PWN, Warszawa 1979.
14. Kurman K.J.: *Teoria regulacji*. WNT, Warszawa 1975.
15. Lammel L., Osiadacz A.: *Pneumatyczne przetworniki automatyki*. WNT, Warszawa 1978.
16. Massalski J., Massalska M.: *Fizyka dla inżynierów*. WNT, Warszawa 1980.
17. Morrison F.: *Sztuka modelowania układów dynamicznych*. WNT, Warszawa 1996.
18. Oppelt W.: *Poradnik techniki regulacji*. PWT, Warszawa 1958.
19. Osiowski J.: *Zarys rachunku operatorowego, teoria i zastosowania w elektrotechnice*. WNT, Warszawa 1981.
20. Popiel C.O., Wojtkowiak J.: Własności fizyczne wody przeznaczone do obliczeń wymiany ciepła na komputerach PC. *Cieplownictwo, ogrzewnictwo, wentylacja*, nr 2/95, Warszawa.
21. Resnick R., Halliday D.: *Fizyka I*. PWN, Warszawa 2001.
22. Thaler G.J.: *Nieliniowe układy automatycznego sterowania*. WNT, Warszawa 1965.
23. Trzaska Z.: *Modelowanie i symulacja układów elektrycznych*. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.

24. Żuchowski A.: *Uproszczone modele dynamiki*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1998.
25. *Control System Toolbox, User's Guide*. The MathWorks, Inc., 1999.
26. *Simulink, Dynamic System Simulation for Matlab, Using Simulink*. The MathWorks, Inc., 2000.
27. *Matlab, The Language of Technical Computing, Using Matlab*. The MathWorks, Inc., 2000.

Wybrane poradniki

28. *Poradnik inżyniera. Matematyka*. WNT, Warszawa 1986.
29. *Poradnik inżyniera automatyka*. WNT, Warszawa 1973.
30. *Poradnik warsztatowca mechanika*. WNT, Warszawa 1975.
31. *Poradnik ogrzewanie + wentylacja*. EWFE, Gdańsk 1994.

Skorowidz

- d'Alemberta zasady 212
- Bernoullego równania 163, 227
- Bodego charakterystyki 61
- Charakterystyka(i)**
- czasowa (skokowa i impulsowa) 22–24, 76, 78, 80, 82, 97–100, 308
 - częstotliwościowe 60–62, 76, 82, 102–104, 308
 - dynamiczna 22
 - statyczna 22, 30
 - człon dynamiki (lub obiekt) całkujący 24, 54, 63, 70, 231, 241, 247
 - forsujący 65, 70
 - inercyjny 24–25, 53, 64, 70, 204, 208, 213, 232, 242, 248–249, 256, 263, 265, 269
 - rzędu drugiego 25, 54, 206, 234–237, 257, 259
 - opóźniający 27, 55, 68
 - oscylacyjny 25, 54, 67, 70, 214, 216
 - proporcjonalny 24, 54, 62, 70
 - , przesuwnik fazowy 68
 - różniczkujący 27, 54, 62, 70
 - unilateralny 93, 236, 253
- Diraca impuls (lub delta) 23, 81
- Fouriera przekształcenie i transmitancje 56–60
- Hurwitza kryterium 21, 73, 206, 258
- Identyfikacja eksperymentalna 96–105
- parametrów modelu 291–294, 303
- Kirchhoffa prawa 193
- Küpfmüllera model 198
- Laplace'a przekształcenie i transmitancje 46–50
- Lapunowa definicja stabilności 42–43
- metody 33
- linearyzacja dynamiczna 28–30
- harmoniczna 71
 - statyczna 30
- Metody aproksymacji Padé** 55
- badania modeli analityczne 20–22, 32–34, 327
 - eksperymentalne 22
 - identyfikacji (eksperymentalnej) 96–102
 - częstotliwościowe 71, 102
 - momentów 81, 100–101
 - odpowiedzi czasowych 97–102
 - symulacyjne 104–105
 - konstrukcji modeli dynamiki 5–11
 - linearyzacji 28–31
 - operatorowe 45
 - płaszczyzny fazowej 36, 41–42, 327
 - przekształcania równań różniczkowych 17–20
 - schematów 93–96
 - przekształceń operatorowych 45, 46, 56
 - symboliczne 57
 - upraszczania modeli 105–108
- Nyquista kryterium 72, 103
- Odpowiedź impulsowa 23, 80, 81, 308
- skokowa 23, 78, 82, 307, 308
 - układu (lub obiektu) 13
- Pierwiastki równania charakterystycznego 15, 76
- , położenie 24
 - płaszczyzna fazowa (lub stanów) 36
 - , zastosowanie 41–42
- portret fazowy 36, 76

-
- portret fazowy, cykl graniczny 37–38
 ––, ognisko 37–38
 ––, siodło 37–38
 ––, środek 37–38
 ––, węzeł 37–38
 praca i energia elementarna 111, 134, 154
 – elementów 113, 115, 122, 136, 140, 143, 151,
 164, 184
 prawa zachowania 5–6
 punkt linearyzacji 28
 – równowagi 20, 22, 33
- Routha kryterium** 21, 73
- rozwiązywanie równania różniczkowego liniowego 13, 22
- ogólne 16
 - swobodne 14
 - wymuszone 14, 16
 - układu równań różniczkowych 13
- równanie(a) charakterystyczne 15, 17, 32, 50, 76
- różniczkowe, aplikacja modelu 298–300
 - liniowe 14–16
 - nieliniowe 14, 28
 - stanu 17, 31, 34, 199
 - , aplikacja modelu 297–298
 - statyczne 20, 32
 - , układ 17, 31
 - wyjściowe 35
- rząd układu 35, 106
- Schematy blokowe** 91–96
- składowa przejściowa (lub swobodna) 14, 23
- ustalona (lub wymuszona) 14, 16, 22
- stabilność, definicja 13, 20, 42–43
- globalna 20, 32, 44
- stabilność, kryterium dla układu otwartego (Hurwita, Routha) 21
- zamkniętego (Nyquista) 72, 103
 - lokalna 32
 - , portrety fazowe 37–38
 - , warunki (lub kryterium) 15, 17, 50
- stan przejściowy 23
- równowagi (lub ustalonej) 22, 50, 84
 - trwały i nietrwały 38
- Strejca model 98–99
- Taylora szereg** 28
- trajektoria fazowa (lub stanu) 36–41
- , kierunek 39
 - , równanie 40
- transmitancja operatorowa, aplikacja modelu 295–297
- , bieguna 47, 50, 78, 105
 - Fouriera (lub widmowa) 58–60, 76
 - Laplace'a 47–50, 76, 80
 - , macierz 52
 - , zera 47
- Układ liniowy i nieliniowy** 14, 77
- minimalno fazowy i nieminimalnofazowy 69–70
 - współdziałający i niewspółdziałający (kaskada) 234–237
- Warunki początkowe** 13, 16, 36, 47, 300, 302, 305–306
- Zmienna stanu (lub fazowa)** 34
- wyjściowa 35
 - wymuszająca (wymuszenie lub pobudzenie) 13