Próbkowanie sygnałów

Mateusz Kacpura

26 listopada 2024

Zadanie 1

Treść zadania

Dany jest sygnał ciągły w czasie

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \ln t \in [1,3], \\ 0 & \text{w.p.} \end{cases}$$

W wyniku próbkowania z częstotliwością $F_s = 4\,\mathrm{Hz}$ powstał sygnał dyskretny $x_s(n)$. Narysuj wykres tego sygnału. Czy znając sygnał dyskretny możemy odtworzyć sygnał oryginalny? Jaka jest najmniejsza wartość częstotliwości próbkowania umożliwiająca dokładną rekonstrukcję $x(t)$?

Sposób rozwiązania

Obliczenie próbek sygnału

Częstotliwość próbkowania wynosi $F_s = 4\,\mathrm{Hz}$, zatem okres próbkowania:

$$T_s = \frac{1}{F_s} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,\mathrm{s}.$$

Próbki są pobierane w chwilach:

$$t_n = nT_s = n \cdot 0{,}25\,\mathrm{s}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Sygnał $x(t)$ przyjmuje wartość 1, gdy $\ln t \in [1,3]$, czyli dla:

$$t \in [e^1, e^3] \approx [2{,}718, 20{,}0855].$$

Zatem musimy znaleźć te wartości n, dla których $t_n \in [2{,}718, 20{,}0855]$.
Obliczamy minimalny i maksymalny indeks n:
Minimalny indeks:

$$n_{\min} = \left\lceil \frac{2{,}718}{0{,}25} \right\rceil = \lceil 10{,}872 \rceil = 11.$$

Maksymalny indeks:

$$n_{\max} = \left\lfloor \frac{20{,}0855}{0{,}25} \right\rfloor = \lfloor 80{,}342 \rfloor = 80.$$

Zatem dla n od 11 do 80 sygnał $x_s(n) = x(nT_s) = 1$. Dla pozostałych wartości n sygnał jest równy 0.

Wykres sygnału

Wykresem sygnału $x_s(n)$ jest funkcja dyskretna, gdzie:

$$x_s(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 11, 12, \ldots, 80, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Możliwość odtworzenia sygnału oryginalnego

Sygnał $x(t)$ jest funkcją prostokątną, która ma nieskończone pasmo częstotliwości ze względu na nagłe skoki (w punkach $t = e^1$ i $t = e^3$). Z tego powodu sygnał nie jest pasmowo ograniczony, a więc nie możemy go dokładnie odtworzyć z próbek dyskretnych przy użyciu twierdzenia o próbkowaniu Shannon'a.

Minimalna częstotliwość próbkowania

Aby dokładnie odtworzyć sygnał, musielibyśmy mieć nieskończoną częstotliwość próbkowania, co jest niemożliwe w praktyce. Jednak w praktycznych zastosowaniach możemy zaakceptować pewne przybliżenie. Zwiększając częstotliwość próbkowania, możemy lepiej aproksymować sygnał oryginalny, ale nigdy nie osiągniemy idealnej rekonstrukcji.

Odpowiedź

Wykres sygnału $x_s(n)$ przedstawia wartość 1 dla $n = 11$ do $n = 80$ i 0 w pozostałych punktach. Nie możemy dokładnie odtworzyć sygnału oryginalnego ze względu na jego nielimitowane pasmo. Idealna rekonstrukcja wymagałaby nieskończonej częstotliwości próbkowania.

Zadanie 2

Treść zadania

Korzystając z własności szeregów Fouriera oraz transformaty Fouriera, udowodnij poniższy lemat Poissona.

Lemat (Reguła Poissona).

Niech $x(t)$ będzie sygnałem, a $X(F)$ jego transformatą Fouriera. Wówczas dla dowolnego T_s zachodzi:

$$\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F - kF_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-2i\pi nFT_s},$$

gdzie lewa strona równania jest funkcją ciągłą zmiennej F, a $F_s = \frac{1}{T_s}$.

Sposób rozwiązania

Krok 1: Definicje

Przypomnijmy definicje:

1. Dyskretyzacja sygnału $x(t)$ poprzez próbkowanie z okresem T_s daje ciąg $x[n] = x(nT_s)$.
2. Szereg Fouriera dla funkcji periodycznej.
3. Transformatę Fouriera sygnału $x(t)$:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2i\pi Ft}dt.$$

Krok 2: Reprezentacja sygnału próbkowanego

Możemy wyrazić sygnał próbkowany za pomocą iloczynu oryginalnego sygnału $x(t)$ i funkcji impulsów Diraca rozmieszczonych co T_s:

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s).$$

Krok 3: Transformatę Fouriera sygnału próbkowanego

Transformatę Fouriera sygnału $x_s(t)$:

$$X_s(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-2i\pi Ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)\right)e^{-2i\pi Ft}dt.$$

$$X_s(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-2i\pi FnT_s}.$$

Krok 4: Wyrażenie sumy szeregów

Chcemy pokazać, że:

$$\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F - kF_s) = X_s(F).$$

Zwróćmy uwagę, że $F_s = \frac{1}{T_s}$.

Krok 5: Wykorzystanie własności transformaty Fouriera

Wiemy, że szereg impulsów Diraca w dziedzinie czasu odpowiada periodization w dziedzinie częstotliwości:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi F_s kt}.$$

Jednakże potrzebujemy bardziej odpowiedniej własności. Skorzystajmy z faktu, że splot w dziedzinie czasu odpowiada mnożeniu w dziedzinie częstotliwości.

Ponieważ:

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s),$$

to w dziedzinie częstotliwości mamy:

$$X_s(F) = X(F) * \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(F - kF_s),$$

gdzie $*$ oznacza splot.

Krok 6: Obliczenie splotu

Splot funkcji $X(F)$ z impulsami Diraca daje sumę przesunięć $X(F)$:

$$X_s(F) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F - kF_s).$$

Krok 7: Podsumowanie

Ostatecznie pokazaliśmy, że:

$$\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F - kF_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-2i\pi nFT_s}.$$

Odpowiedź

Udowodniliśmy regułę Poissona, korzystając z własności transformaty Fouriera i splotu:

$$\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F - kF_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-2i\pi nFT_s}.$$

Zadanie 3

Treść zadania

Dany jest program, który dla podanej częstotliwości próbkowania wyznacza i rysuje próbki sygnału ciągłego w czasie $x(t) = 3\sin(2\pi F_0 t)$, gdzie $F_0 = 80\,\mathrm{Hz}$. Dla jakiej częstotliwości próbkowania ludzkie oczy potrafią zrekonstruować ten sygnał? Jaka częstotliwość próbkowania jest wystarczająca do rekonstrukcji z wykorzystaniem twierdzenia o próbkowaniu?

```
function zadanie2_3(Fs)
F0=80; % SinusFreq.
T=0.06; % Observation Time
n=round(T*Fs);
t=[0:n-1]/Fs;
x=3*sin(2*pi*F0*t);
plot(t,x,'x');
grid;
```

Sposób rozwiązania

Częstotliwość sygnału i próbkowania

Sygnał ma częstotliwość $F_0 = 80\,\mathrm{Hz}$.

Częstotliwość wystarczająca dla ludzkiego oka Ludzkie oko postrzega ciągłość ruchu i kształtów przy częstotliwościach od około 24 klatek na sekundę. W przypadku sygnałów sinusoidalnych, aby wizualnie odtworzyć ich kształt, potrzeba co najmniej kilku punktów na okres.

Aby sygnał sinusoidalny był wizualnie rozpoznawalny na wykresie, zaleca się mieć co najmniej 10 próbek na okres.

Obliczmy minimalną częstotliwość próbkowania F_s:

$$F_s = N \cdot F_0,$$

gdzie $N \geq 10$.

Czyli minimalna częstotliwość próbkowania dla ludzkiego oka to:

$$F_s \geq 10 \times 80\,\mathrm{Hz} = 800\,\mathrm{Hz}.$$

Częstotliwość wymagana przez twierdzenie o próbkowaniu Zgodnie z twierdzeniem o próbkowaniu (twierdzenie Nyquista-Shannona), minimalna częstotliwość próbkowania powinna być większa niż dwukrotność najwyższej częstotliwości sygnału.

$$F_s > 2F_0 = 160\,\mathrm{Hz}.$$

Zatem minimalna częstotliwość próbkowania to 160 Hz, aby móc dokładnie odtworzyć sygnał $x(t)$ z jego próbek.

Odpowiedź

Ludzkie oko potrafi zrekonstruować kształt sygnału przy częstotliwości próbkowania co najmniej 800 Hz (10 próbek na okres). Do dokładnej rekonstrukcji sygnału z wykorzystaniem twierdzenia o próbkowaniu wystarczy częstotliwość próbkowania powyżej 160 Hz.

Zadanie 4

Treść zadania

Poniższy program wczytuje sygnał audio, odtwarza go ze wskazaną częstotliwością próbkowania, a następnie rysuje.

```
[x, Fs] = audioread('phrase.wav');
soundsc(x, Fs);
t = [1:length(x)]/Fs;
plot(t, x);
grid;
```

a) Zmniejsz czterokrotnie częstotliwość próbkowania sygnału audio (zostawiając co czwartą próbkę), odtwórz go i narysuj.

b) Zwiększ czterokrotnie częstotliwość próbkowania sygnału audio (przez operację uzupełnienia zerami pomiędzy kolejnymi próbkami), odtwórz go i narysuj.

Sposób rozwiązania

a) Zmniejszenie częstotliwości próbkowania

Aby zmniejszyć częstotliwość próbkowania czterokrotnie:

1. Wybieramy co czwartą próbkę sygnału x:

$$x_{\text{dec}} = x(1 : 4 : end);$$

2. Nowa częstotliwość próbkowania:

$$F_{s_{\text{new}}} = \frac{F_s}{4};$$

3. Odtwarzamy sygnał:

```
x_dec = x(1:4:end);
Fs_new = Fs / 4;
soundsc(x_dec, Fs_new);
t_dec = [1:length(x_dec)] / Fs_new;
plot(t_dec, x_dec);
grid;
```

b) Zwiększenie częstotliwości próbkowania

Aby zwiększyć częstotliwość próbkowania czterokrotnie:

1. Wstawiamy trzy zera między kolejne próbki:

$$x_{\text{inc}} = \text{upsample}(x, 4);$$

2. Lub manualnie:

$$N = length(x); x_{\text{inc}} = zeros(4 * N, 1); x_{\text{inc}}(1 : 4 : end) = x;$$

3. Nowa częstotliwość próbkowania:

$$F_{s_{\text{new}}} = 4F_s;$$

4. Odtwarzamy sygnał:

```
x_inc = zeros(4*length(x), 1);
x_inc(1:4:end) = x;
Fs_new = 4 * Fs;
soundsc(x_inc, Fs_new);
t_inc = [1:length(x_inc)] / Fs_new;
plot(t_inc, x_inc);
grid;
```

Odpowiedź

a) Zmniejszono czterokrotnie częstotliwość próbkowania poprzez pozostawienie co czwartej próbki. Sygnał odtworzono i narysowano przy nowej częstotliwości $F_s/4$.

b) Zwiększono czterokrotnie częstotliwość próbkowania poprzez wstawienie trzech zer między każdą parę próbek. Sygnał odtworzono i narysowano przy nowej częstotliwości $4F_s$.