

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka: zestaw zadań nr 7

8 grudnia 2021

7.1. Oblicz: (a) $5!!$, (b) $6!!$, (c) $\frac{10! \cdot 8!}{11! \cdot 10!! \cdot 7!!}$, (d) $\frac{16! \cdot 9!! \cdot 10!!}{18! \cdot 7!}$.

7.2. Oblicz: (a) $\binom{7}{3}$, (b) $\binom{-7}{3}$, (c) $\binom{3/2}{4}$.

7.3. Oblicz $50!$ wykorzystując wzór *Stirlinga*

7.4. Oblicz: (a) $\Gamma(5)$, (b) $\Gamma(3.5)$

7.5. [opcjonalne] Oblicz $\Gamma(-1.5)$

7.6. Wykorzystując właściwości funkcji Γ oblicz $\int_0^{\infty} x^6 e^{-5x} dx$

7.7. Udowodnij, że jeżeli $p > 0$, to $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

7.8. Udowodnij, że jeżeli $n = 0, 1, 2, \dots$, to $\Gamma(n+1) = n!$

7.9. Dla zmiennej losowej X podlegającej rozkładowi *gamma* o parametrach $p > 0$ i $a > 0$ (tzn. $X \sim \Gamma(p, a)$) wyznacz: (a) wartość oczekiwaną, (b) wariancję

7.10. Oblicz: (a) $B(2, 3)$, (b) $B(1.5, 2)$

7.11. Zapoznaj się z opisem funkcji specjalnych dostępnych w pakiecie *Base* (*Special {base}*), a następnie oblicz: (a) `factorial(10)`, (b) `choose(10, 3)`, (c) `gamma(4)`, (d) `gamma(1/2)/sqrt(pi)`, (e) `beta(2, 3)/beta(3, 2)`.

7.12. Wyznacz: (a) stałą C , (b) dystrybuantę, (c) $P(1 \leq X \leq 2)$ zmiennej losowej X podlegającej rozkładowi według gęstości danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ Cx & \text{dla } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{dla } x > 4 \end{cases}$$

7.13. Wyznacz: (a) gęstość rozkładu, (b) dystrybuantę, (c) $P(1.4 \leq X \leq 2)$ zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym, przyjmującej dowolne wartości z przedziału $[1, 3]$.

7.14. Wyznacz: (a) $P(X \leq 1)$, (b) dystrybucję zmiennej losowej X podlegającej rozkładowi *gamma* o gęstości wyrażonej następującym wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(2)} x e^{-x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

7.15. [opcjonalne] Oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X podlegająca rozkładowi *beta* o gęstości określonej poniższym wzorem przyjmie wartość mniejszą od 0.1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(3,2)} x^2 (1-x) & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \text{ lub } x > 1 \end{cases}$$

7.16. Zapoznaj się z rozkładem wykładniczym a następnie wyjaśnij: (a) jego związek z rozkładem *Poissona*, (b) jego związek z rozkładem geometrycznym, (c) jego związek z rozkładem *gamma* oraz (d) własność "braku pamięci".

7.17. Zapoznaj się z rozkładami: normalnym, χ^2 (*chi-kwadrat*) i F (*Snedecora*). Wyjaśnij związki między tymi rozkładami.

Odpowiedzi/wskazówki do wybranych zadań

7.1 (a) 15, (b) 48, (c) 1/110, (d) 40/17

7.2 (a) 35, (b) -84, (c) 3/128

7.3 $\sqrt{100\pi} \left(\frac{50}{e}\right)^{50}$ (pierwsze przybliżenie)

7.4 (a) 24, (b) $15\sqrt{\pi}/8$ (wskazówka: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)

7.5 Wskazówka: $\Gamma(x)$ jest określona również dla argumentów ujemnych, jeśli nie są one liczbami całkowitymi; zachodzi przy tym wzór: $\Gamma(\frac{1}{2} - n) = (-1)^n \frac{2^n \sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}$

7.6 Wskazówka: $\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n = 1, 2, 3, \dots$

7.7 Wskazówka: zastosuj całkowanie przez części

7.9 (a) p/a , (b) p/a^2

7.10 (a) 1/12, (b) 4/15

7.11 Wskazówka: ?Special, (a) 3628800, (b) 120, (c) 6, (d) 1, (e) 1

7.12 (a) 1/8, (c) 3/16, (b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1/16x^2 & \text{dla } 0 \leq x < 4 \\ 0 & \text{dla } x \geq 4 \end{cases}$$

7.13 (c) 0.3

$$(a) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{dla } x > 3 \end{cases} \quad (b) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

7.14 (a) $(e-2)/e$, (b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

7.15 0.0037