2. Wielomiany

Wielomianem jest funkcja postaci $V(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Wielomian możemy zapisać w tzw. postaci zagnieżdżonej,

$$V(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0.$$

Tej postaci odpowiada schemat, nazywany schematem Hornera, przydatny przy wyznaczaniu wartości wielomianu:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline x_0 & y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{array},$$

gdzie $y_0 = a_n$, $y_1 = x_0 y_0 + a_{n-1}$ i ogólnie $y_{i+1} = x_0 y_i + a_{n-i-1}$.

Twierdzenie

Jeżeli $V(x)$ i $W(x)$ są wielomianami i $W(x) \neq 0$, to istnieją jednoznacznie wyznaczone wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$ takie, że

$$V(x) = W(x)Q(x) + R(x) \quad \text{i} \quad \deg R(x) < \deg W(x). \tag{1}$$

- $Q(x)$ - iloraz z dzielenia $V(x)$ przez $W(x)$
- $R(x)$ - reszta z dzielenia $V(x)$ przez $W(x)$

Definicja

Liczbę x_0 nazywamy pierwiastkiem (albo zerem) wielomianu $V(x)$, gdy $V(x_0) = 0$.

Definicja

Liczba x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $V(x)$, gdy istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że

$$V(x) = (x - x_0)^k Q(x) \quad \text{i} \quad Q(x_0) \neq 0.$$

Twierdzenie

Wielomian stopnia $n \geqslant 0$ nad ciałem K ma co najwyżej n pierwiastków w ciele K.

Wniosek

Jeśli $V(x)$ jest wielomianem nad ciałem liczb zespolonych i $\deg V(x) = n > 0$, to $V(x)$ ma dokładnie n pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w ciele $\mathcal{C}$ (niekoniecznie różnych) i może on być przedstawiony w postaci iloczynu

$$V(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

gdzie a jest liczbą różną od zera.

Twierdzenie

Niech $V(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem dodatniego stopnia, którego współczynniki są liczbami całkowitymi. Niech p i q będą liczbami całkowitymi względnie pierwszymi. Jeśli ułamek p/q jest pierwiastkiem wielomianu $V(x)$, to p dzieli wyraz wolny a_0, a q dzieli współczynnik wiodący a_n wielomianu $V(x)$.

Definicja

Niech $V(x)$ i $W(x)$ będą wielomianami. Mówimy, że wielomian $V(x)$ jest podzielny przez wielomian $W(x)$, gdy istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że

$$V(x) = W(x)Q(x).$$

- $Q(x)$ jest ilorazem z dzielenia wielomianu $V(x)$ przez wielomian $W(x)$
- $W(x)$ (jak i $Q(x)$) jest dzielnikiem albo czynnikiem wielomianu $V(x)$.

Wniosek (Twierdzenie o reszcie)

Jeśli $V(x)$ jest wielomianem, to resztą z dzielenia $V(x)$ przez dwumian $x - x_0$ jest $V(x_0)$, czyli istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że

$$V(x) = (x - x_0)Q(x) + V(x_0).$$

Definicja

Liczbę x_0 nazywamy pierwiastkiem (albo zerem) wielomianu $V(x)$, gdy $V(x_0) = 0$.

Twierdzenie (Bézout)

Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $V(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $V(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - x_0$.

Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry Gaussa)

Jeśli $V(x)$ jest wielomianem nad ciałem liczb zespolonych i $\deg V(x) > 0$, to $V(x)$ ma pierwiastek w ciele $\mathcal{C}$.

Twierdzenie

Niech $V(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Jeśli liczba zespolona z_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $V(x)$, to także jej sprzężenie $\overline{z_0}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $V(x)$.

Dla wielomianu **o współczynnikach rzeczywistych**. Jeśli dwumian (x - z) dzieli wielomian V(x), to zachodzi: $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - 2Re(z)x + |z|^2$