

# 1. Liczby zespolone

W zbiorze  $\mathcal{C}$  definiujemy równość, dodawanie  $\oplus$  oraz mnożenie  $\otimes$ : jeśli  $(a, b), (c, d) \in \mathcal{C}$ , to przyjmujemy, że:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ i } b = d, \quad (1)$$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (2)$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (3)$$

## Twierdzenie

Każdą liczbę zespoloną  $z = (a, b)$  można przedstawić w postaci

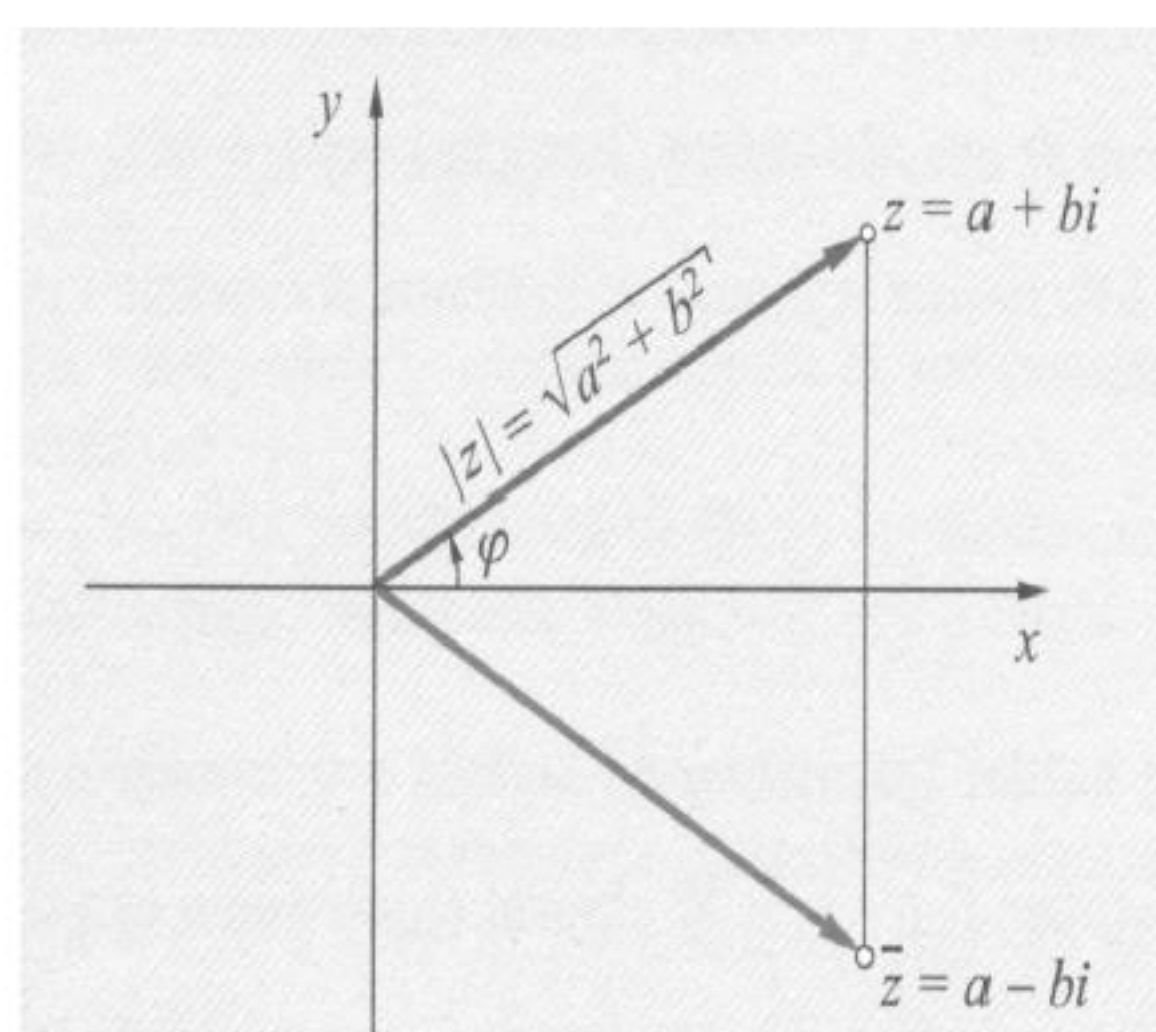
$$z = a + bj,$$

nazywanej postacią kanoniczną liczby  $z = (a, b)$ .

## Definicja

Sprzężeniem liczby zespolonej  $z = a + bj$  (gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami rzeczywistymi) nazywamy liczbę

$$\bar{z} = a - bj.$$



## Definicja (Moduł liczby zespolonej)

Modułem (lub wielkością) liczby zespolonej  $z = a + bj$  (gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ ) nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Moduł  $|z|$  liczby  $z$  jest odległością  $z$  od 0.

## Twierdzenie

Jeśli

$$z = |z|(\cos \alpha + j \sin \alpha) \text{ i } w = |w|(\cos \beta + j \sin \beta),$$

to

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta))$$

i

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha - \beta) + j \sin(\alpha - \beta)),$$

gdzie  $w \neq 0$ .

## Twierdzenie (Pierwiastkowanie liczb zespolonych)

Każda liczba zespolona  $z = |z|(\cos \alpha + j \sin \alpha)$  różna od zera ma dokładnie  $n$  różnych pierwiastków  $n$ -tego stopnia i wszystkie one określone są wzorem

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right),$$

gdzie  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , a  $\sqrt[n]{|z|}$  jest pierwiastkiem arytmetycznym.

## Twierdzenie (Pierwiastki stopnia drugiego)

Jeśli  $a$  i  $b$  są liczbami rzeczywistymi, to pierwiastkami stopnia drugiego z liczby  $z = a + jb$  są liczby

$$w = \pm \left( \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + j \operatorname{sign}(b) \sqrt{\frac{|z| - a}{2}} \right).$$

## Twierdzenie

Jeśli  $z$  i  $w$  są liczbami zespolonymi, to:

- (a)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,  $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$ ;  
(b)  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ ,  $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$  (gdzie  $w \neq 0$ );  
(c) dla każdej liczby całkowitej  $n$  jest  $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$  ( $z \neq 0$ , gdy  $n \leq 0$ );  
(d)  $z$  jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy  $\bar{z} = z$ .

Dodatkowo, jeśli  $z = a + bj$  (gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ ), to

$$(e) \quad z + \bar{z} = 2a, \quad z - \bar{z} = 2bj \quad \text{ i } \quad z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

## Twierdzenie (Własności modułu)

Jeśli  $z, w \in \mathcal{C}$ , to:

- (a)  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ ,  $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ ;  
(b)  $|zw| = |z||w|$ ,  $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$  ( $w \neq 0$ );  
(c)  $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$ .

## Wniosek (Wzór de Moivre'a)

Jeśli  $z = |z|(\cos \alpha + j \sin \alpha)$  i  $n$  jest liczbą całkowitą, to

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + j \sin n\alpha),$$

gdzie  $z \neq 0$  dla  $n \leq 0$ .

## Wniosek

Dla każdej liczby rzeczywistej  $\alpha$  i każdej liczby całkowitej  $n$  jest

$$(\cos \alpha + j \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + j \sin n\alpha.$$

## Twierdzenie (Własności działań na liczbach zespolonych)

Zbiór  $\mathcal{C}$  z działaniami określonymi wzorami (2) i (3) jest ciałem:

- (a)  $\forall_{z,w \in \mathcal{C}} \quad z \oplus w = w \oplus z$ , (przemienność dodawania)  
(b)  $\forall_{z,w,t \in \mathcal{C}} \quad z \oplus (w \oplus t) = (z \oplus w) \oplus t$ , (łączność dodawania)  
(c)  $\exists_{z_0 \in \mathcal{C}} \quad \forall_{z \in \mathcal{C}} \quad z \oplus z_0 = z$ , ( $z_0 = (0, 0)$  – zero zespolone)  
(d)  $\forall_{z \in \mathcal{C}} \quad \exists_{-z \in \mathcal{C}} \quad z \oplus (-z) = z_0$ ,  
( $-z = (-a, -b)$  – liczba przeciwna do  $z = (a, b)$ )  
(e)  $\forall_{z,w \in \mathcal{C}} \quad z \otimes w = w \otimes z$ , (przemienność mnożenia)  
(f)  $\forall_{z,w,t \in \mathcal{C}} \quad z \otimes (w \otimes t) = (z \otimes w) \otimes t$ , (łączność mnożenia)  
(g)  $\exists_{z_1 \in \mathcal{C}} \quad \forall_{z \in \mathcal{C}} \quad z \otimes z_1 = z$ , ( $z_1 = (1, 0)$  – jedynka zespolona)  
(h)  $\forall_{z \in \mathcal{C} - \{z_0\}} \quad \exists_{z^{-1} \in \mathcal{C}} \quad z \otimes z^{-1} = z_1$ , ( $z^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ , gdy  $z = (a, b) \neq z_0$ )  
(i)  $\forall_{z,w,t \in \mathcal{C}} \quad z \otimes (w \oplus t) = (z \otimes w) \oplus (z \otimes t)$ . (rozdzielność działania  $\otimes$  względem  $\oplus$ )

Liczbę  $z = a + bj \neq 0$  można przedstawić w postaci

$$z = |z| \left( \frac{a}{|z|} + j \frac{b}{|z|} \right) = |z| (\cos \alpha + j \sin \alpha),$$

zwanej postacią trygonometryczną liczby  $z$ . Liczbę  $\alpha$  taką, że

$$\frac{a}{|z|} = \cos \alpha \quad \text{ i } \quad \frac{b}{|z|} = \sin \alpha$$

nazywa się argumentem liczby  $z = a + bj \neq 0$  i oznacza symbolem  $\arg(z)$ .

## Twierdzenie (Pierwiastki równania kwadratowego)

Pierwiastkami równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$ , w którym  $a, b, c \in \mathcal{C}$  i  $a \neq 0$  liczby

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ i } \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

gdzie  $\sqrt{\Delta}$  jest jednym z dwóch pierwiastków kwadratowego z liczby  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

