1. Liczby zespolone

W zbiorze $\mathcal{C}$ definiujemy równość, dodawanie $\oplus$ oraz mnożenie $\otimes$: jeśli $(a,b),(c,d) \in \mathcal{C}$, to przyjmujemy, że:

$$(a,b) = (c,d) \ \Leftrightarrow\ a = c \ \text{ i } \ b = d, \tag{1}$$

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d), \tag{2}$$

$$(a,b) \otimes (c,d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{3}$$

Twierdzenie

Każdą liczbę zespoloną $z = (a,b)$ można przedstawić w postaci

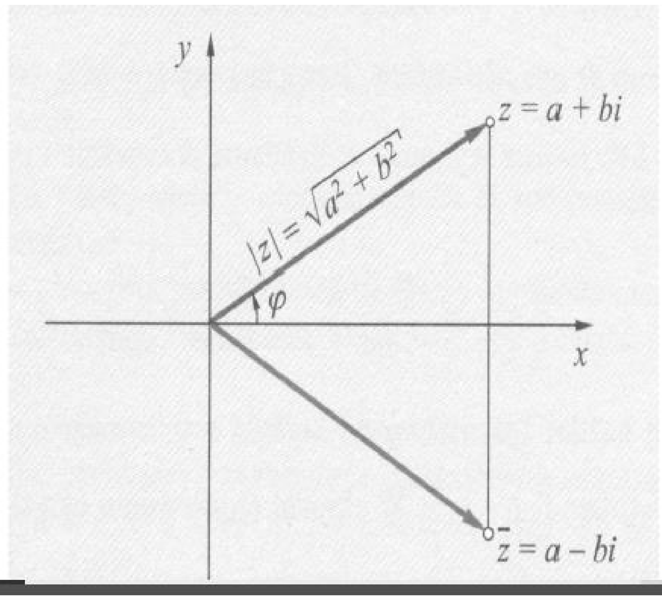
$$\boxed{z = a + bj,}$$

nazywanej postacią kanoniczną liczby $z = (a,b)$.

Definicja

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = a + bj$ (gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi) nazywamy liczbę

$$\overline{z} = a - bj.$$



Definicja (Moduł liczby zespolonej)

Modułem (lub wielkością) liczby zespolonej $z = a + bj$ (gdzie $a,\ b \in R$) nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

Moduł $|z|$ liczby z jest odległością z od 0.

Twierdzenie

Jeśli

$$z = |z|(\cos\alpha + j\sin\alpha) \text{ i } w = |w|(\cos\beta + j\sin\beta),$$

to

$$zw = |z||w|\big(\cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta)\big)$$

i

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\big(\cos(\alpha-\beta) + j\sin(\alpha-\beta)\big),$$

gdy $w \neq 0$.

Twierdzenie (Pierwiastkowanie liczb zespolonych)

Każda liczba zespolona $z = |z|(\cos\alpha + j\sin\alpha)$ różna od zera ma dokładnie n różnych pierwiastków n-tego stopnia i wszystkie one określone są wzorem

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),$$

gdzie $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, a $\sqrt[n]{|z|}$ jest pierwiastkiem arytmetycznym.

Twierdzenie (Pierwiastki stopnia drugiego)

Jeśli a i b są liczbami rzeczywistymi, to pierwiastkami stopnia drugiego z liczby $z = a + jb$ są liczby

$$w = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + j\,\mathrm{sign}\,(b)\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right).$$

Twierdzenie (Własności działań na liczbach zespolonych)

Zbiór $\mathcal{C}$ z działaniami określonymi wzorami (2) i (3) jest ciałem:

(a) $\forall_{z,w\in\mathcal{C}}\ z \oplus w = w \oplus z$, (przemienność dodawania)

(b) $\forall_{z,w,t\in\mathcal{C}}\ z \oplus (w \oplus t) = (z \oplus w) \oplus t$, (łączność dodawania)

(c) $\exists_{z_0\in\mathcal{C}}\ \forall_{z\in\mathcal{C}}\ z \oplus z_0 = z$, ($z_0 = (0,0)$ – zero zespolone)

(d) $\forall_{z\in\mathcal{C}}\ \exists_{-z\in\mathcal{C}}\ z \oplus (-z) = z_0$, ($-z = (-a,-b)$ – liczba przeciwna do $z = (a,b)$)

(e) $\forall_{z,w\in\mathcal{C}}\ z \otimes w = w \otimes z$, (przemienność mnożenia)

(f) $\forall_{z,w,t\in\mathcal{C}}\ z \otimes (w \otimes t) = (z \otimes w) \otimes t$, (łączność mnożenia)

(g) $\exists_{z_1\in\mathcal{C}}\ \forall_{z\in\mathcal{C}}\ z \otimes z_1 = z$, ($z_1 = (1,0)$ – jedynka zespolona)

(h) $\forall_{z\in\mathcal{C}-\{z_0\}}\ \exists_{z^{-1}\in\mathcal{C}}\ z \otimes z^{-1} = z_1$, ($z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, gdy $z = (a,b) \neq z_0$)

(i) $\forall_{z,w,t\in\mathcal{C}}\ z \otimes (w \oplus t) = (z \otimes w) \oplus (z \otimes t)$. (rozdzielność działania $\otimes$ względem $\oplus$)

Twierdzenie

Jeśli z i w są liczbami zespolonymi, to:

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$;

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ (gdy $w \neq 0$);

(c) dla każdej liczby całkowitej n jest $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ ($z \neq 0$, gdy $n \leqslant 0$);

(d) z jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{z} = z$.

Dodatkowo, jeśli $z = a + bj$ (gdzie $a,\ b \in R$), to

$\boxed{(e)\ z + \overline{z} = 2a,\ \ z - \overline{z} = 2bj \ \text{ i } \ z\overline{z} = a^2 + b^2.}$

Twierdzenie (Własności modułu)

Jeśli $z,\ w \in \mathcal{C}$, to:

(a) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;

(b) $|zw| = |z||w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ ($w \neq 0$);

(c) $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z + w| \leqslant |z| + |w|$.

Wniosek (Wzór de Moivre'a)

Jeśli $z = |z|(\cos\alpha + j\sin\alpha)$ i n jest liczbą całkowitą, to

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + j\sin n\alpha),$$

gdzie $z \neq 0$ dla $n \leqslant 0$.

Wniosek

Dla każdej liczby rzeczywistej α i każdej liczby całkowitej n jest

$$(\cos\alpha + j\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + j\sin n\alpha.$$

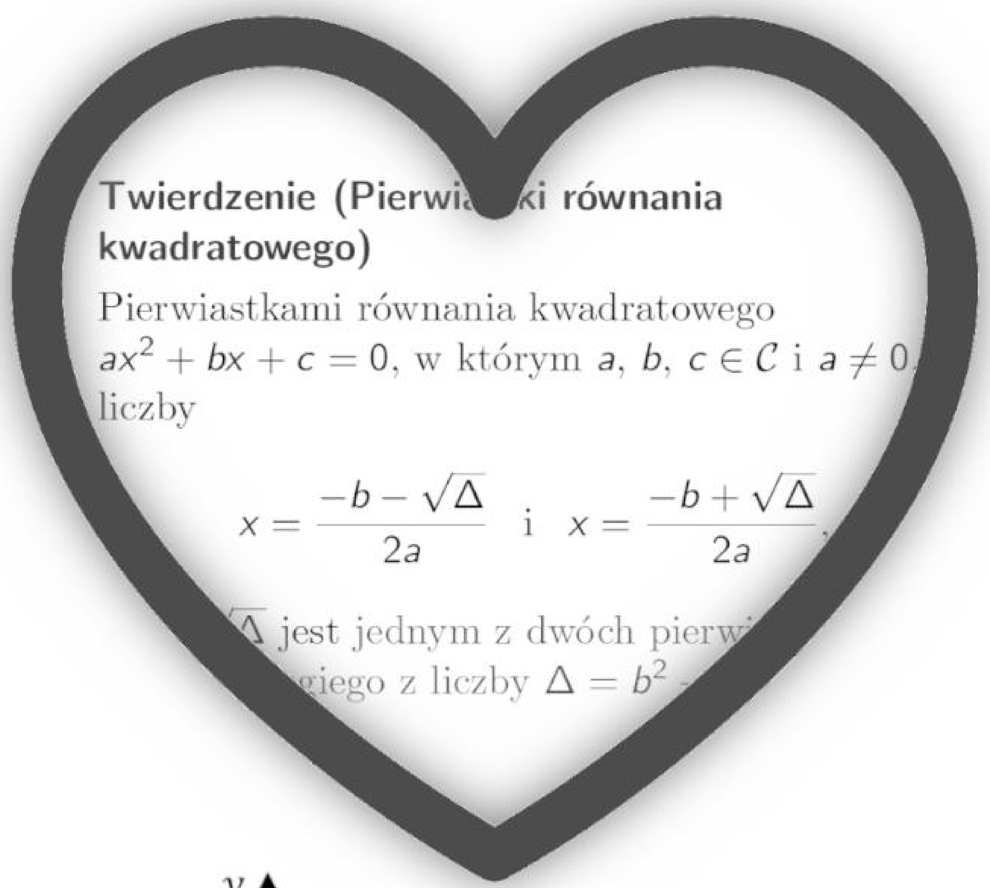
Liczbę $z = a + bj \neq 0$ można przedstawić w postaci

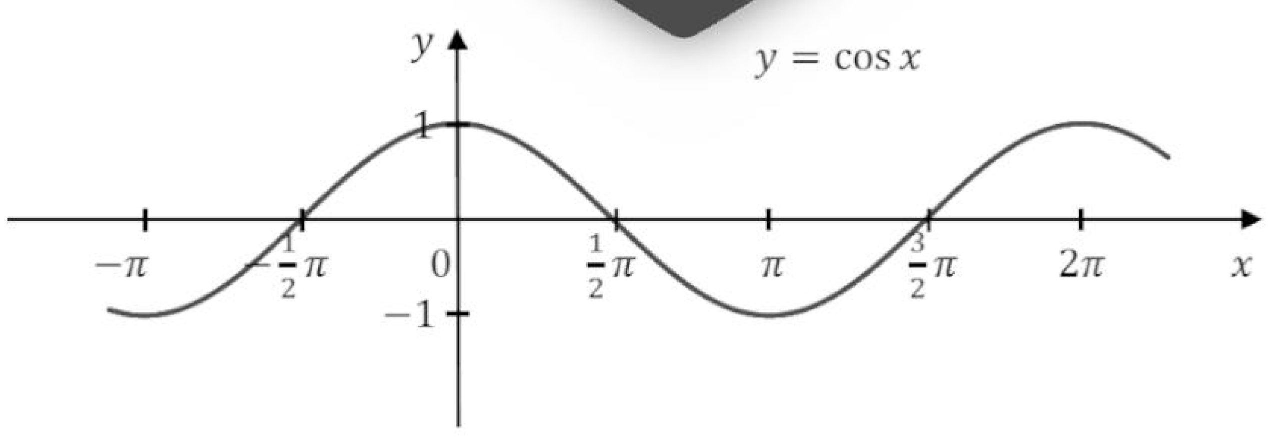
$$\boxed{z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + j\frac{b}{|z|}\right) = |z|(\cos\alpha + j\sin\alpha),}$$

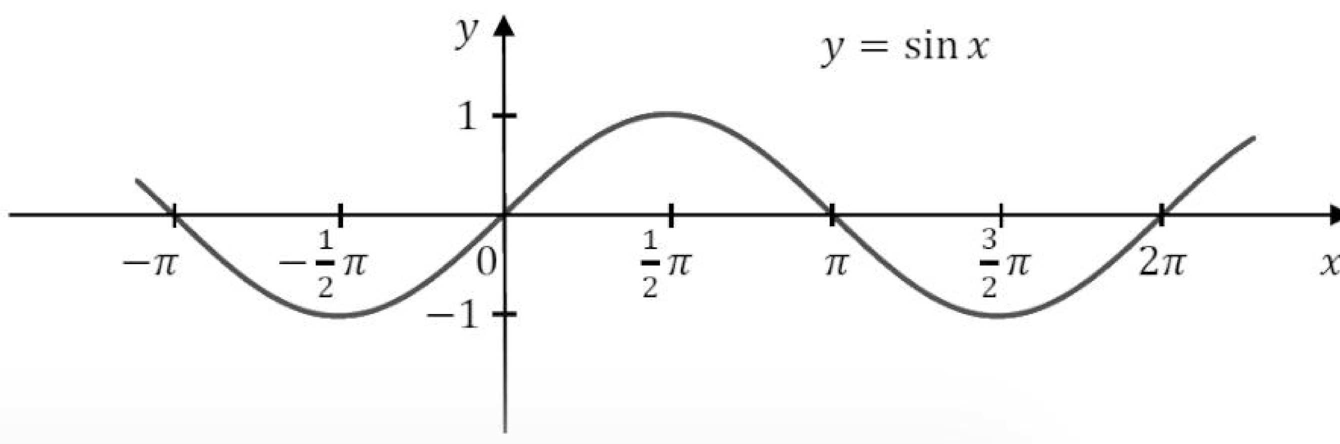
zwanej postacią trygonometryczną liczby z. Liczbę α taką, że

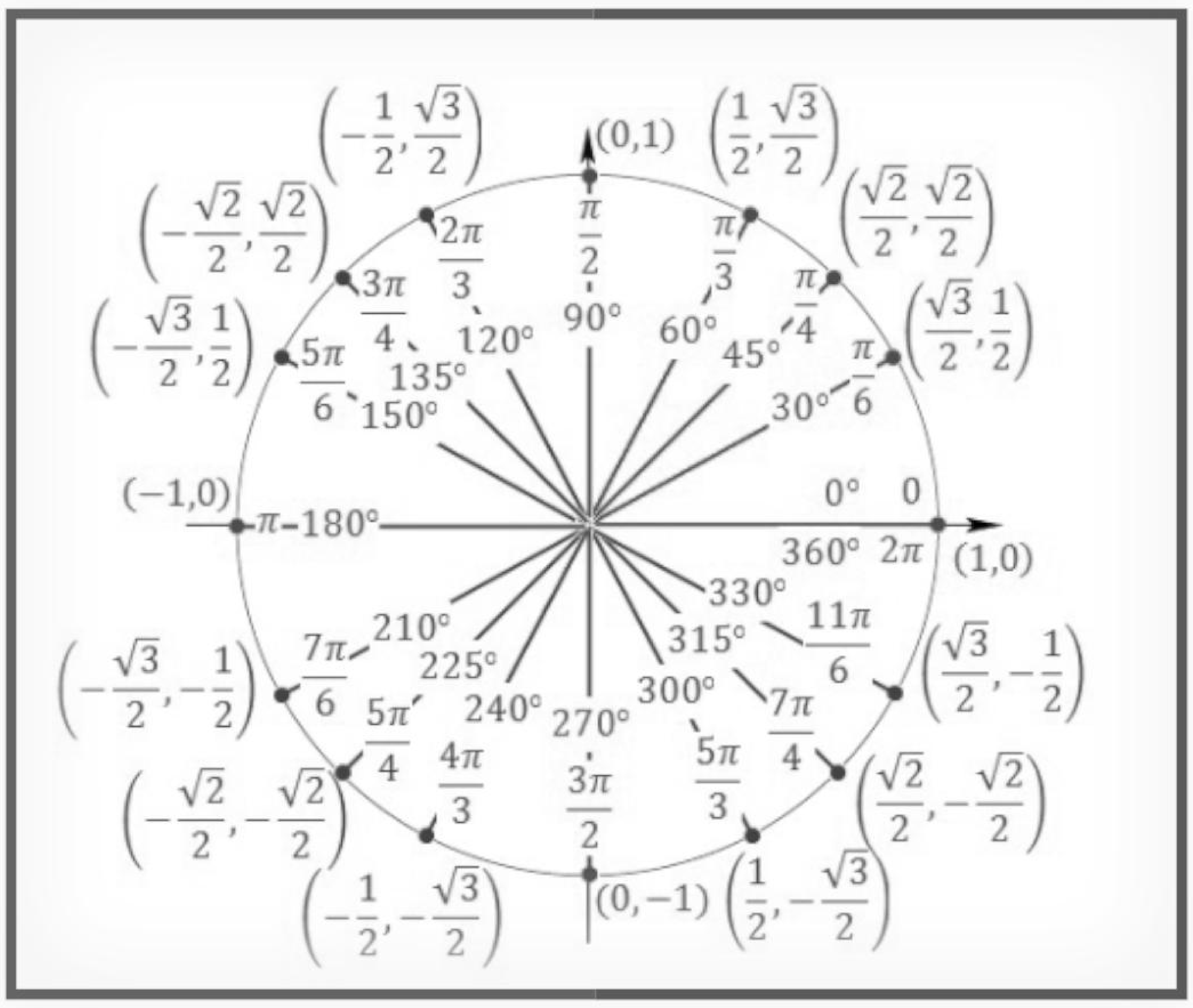
$$\boxed{\frac{a}{|z|} = \cos\alpha \ \text{ i } \ \frac{b}{|z|} = \sin\alpha}$$

nazywa się argumentem liczby $z = a + bj \neq 0$ i oznacza symbolem $\arg(z)$.









2. Wielomiany

Wielomianem jest funkcja postaci $V(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Wielomian możemy zapisać w tzw. postaci zagnieżdżonej,

$$V(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0.$$

Tej postaci odpowiada schemat, nazywany schematem Hornera, przydatny przy wyznaczaniu wartości wielomianu:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline x_0 & y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{array},$$

gdzie $y_0 = a_n$, $y_1 = x_0 y_0 + a_{n-1}$ i ogólnie $y_{i+1} = x_0 y_i + a_{n-i-1}$.

Twierdzenie

Jeżeli $V(x)$ i $W(x)$ są wielomianami i $W(x) \neq 0$, to istnieją jednoznacznie wyznaczone wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$ takie, że

$$V(x) = W(x)Q(x) + R(x) \quad \text{i} \quad \deg R(x) < \deg W(x). \tag{1}$$

- $Q(x)$ - iloraz z dzielenia $V(x)$ przez $W(x)$
- $R(x)$ - reszta z dzielenia $V(x)$ przez $W(x)$

Definicja

Liczbę x_0 nazywamy pierwiastkiem (albo zerem) wielomianu $V(x)$, gdy $V(x_0) = 0$.

Definicja

Liczba x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $V(x)$, gdy istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że

$$V(x) = (x - x_0)^k Q(x) \quad \text{i} \quad Q(x_0) \neq 0.$$

Twierdzenie

Wielomian stopnia $n \geqslant 0$ nad ciałem K ma co najwyżej n pierwiastków w ciele K.

Wniosek

Jeśli $V(x)$ jest wielomianem nad ciałem liczb zespolonych i $\deg V(x) = n > 0$, to $V(x)$ ma dokładnie n pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w ciele $\mathcal{C}$ (niekoniecznie różnych) i może on być przedstawiony w postaci iloczynu

$$V(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

gdzie a jest liczbą różną od zera.

Twierdzenie

Niech $V(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem dodatniego stopnia, którego współczynniki są liczbami całkowitymi. Niech p i q będą liczbami całkowitymi względnie pierwszymi. Jeśli ułamek p/q jest pierwiastkiem wielomianu $V(x)$, to p dzieli wyraz wolny a_0, a q dzieli współczynnik wiodący a_n wielomianu $V(x)$.

Definicja

Niech $V(x)$ i $W(x)$ będą wielomianami. Mówimy, że wielomian $V(x)$ jest podzielny przez wielomian $W(x)$, gdy istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że

$$V(x) = W(x)Q(x).$$

- $Q(x)$ jest ilorazem z dzielenia wielomianu $V(x)$ przez wielomian $W(x)$
- $W(x)$ (jak i $Q(x)$) jest dzielnikiem albo czynnikiem wielomianu $V(x)$.

Wniosek (Twierdzenie o reszcie)

Jeśli $V(x)$ jest wielomianem, to resztą z dzielenia $V(x)$ przez dwumian $x - x_0$ jest $V(x_0)$, czyli istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że

$$V(x) = (x - x_0)Q(x) + V(x_0).$$

Definicja

Liczbę x_0 nazywamy pierwiastkiem (albo zerem) wielomianu $V(x)$, gdy $V(x_0) = 0$.

Twierdzenie (Bézout)

Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $V(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $V(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - x_0$.

Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry Gaussa)

Jeśli $V(x)$ jest wielomianem nad ciałem liczb zespolonych i $\deg V(x) > 0$, to $V(x)$ ma pierwiastek w ciele $\mathcal{C}$.

Twierdzenie

Niech $V(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Jeśli liczba zespolona z_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $V(x)$, to także jej sprzężenie $\overline{z_0}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $V(x)$.

Dla wielomianu **o współczynnikach rzeczywistych**. Jeśli dwumian (x - z) dzieli wielomian V(x), to zachodzi:
$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - 2Re(z)x + |z|^2$