Metody numeryczne

Sprawozdanie 6

Wyznaczanie zespolonych zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia i metodą Newtona

Mateusz Górczany

Kwiecień 2020

1 Wstęp teoretyczny

Metoda polega na wyznaczaniu miejsc zerowych wielomianu, za pomocą reszty z dzielenia przez dwumian $(z - z_j) \rightarrow$ oznaczonej jako R_j oraz wartości $f'(z_j) = R'_j$, gdzie z_j jest przybliżeniem miejsca zerowego.

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 = 0 \quad /(z - z_j) \tag{1}$$

$$f(z) = (z - z_j)\left(b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_0\right) + R_j \quad /(z - z_j) \tag{2}$$

$$f(z) = (z - z_j)^2 \left(c_{n-2} z^{n-2} + c_{n-3} z^{n-3} + \ldots + c_0\right) + (z - z_j) R'_j + R_j \tag{3}$$

R_j i R'_j są obliczane w następujący sposób:

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ b_k &= a_{k+1} + z_j b_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 0 \leftarrow \text{rekurencja} \\ R_j &= a_0 + z_j b_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= 0 \\ c_k &= b_{k+1} + z_j c_{k+1}, \quad k = n-2, n-2, \ldots, 0 \leftarrow \text{rekurencja} \\ R'_j &= b_0 + z_j c_0 \end{aligned}$$

b - współczynniki wielomianu $\frac{f(z)}{z-z_j}$, c - współczynniki wielomianu $\frac{f(z)}{(z-z_j)^2}$

Początkowa wartość zmiennej z_j może być dowolną liczbą, w kolejnych iteracjach jej wartość będzie zbiegać do jednego z pierwiastków. Każde następne przybliżenie uzyskiwane jest za pomocą wzoru:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{R_j}{R'_j} \tag{4}$$

2 Opis rozwiązywanego zadania na laboratoriach

Zadanie polegało na obliczeniu zer wielomianu zespolonego:

$$f(z) = 16 + 8i + (-20 + 14i)z + (4 - 8i)z^2 + (-4 + i)z^3 + z^4 \tag{5}$$

$$f(z) = 0 \tag{6}$$

Współczynniki wielomianu zapisano do wektora $\vec{a}$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 16 + 8i \\ -20 + 14i \\ 4 - 8i \\ -4 + i \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

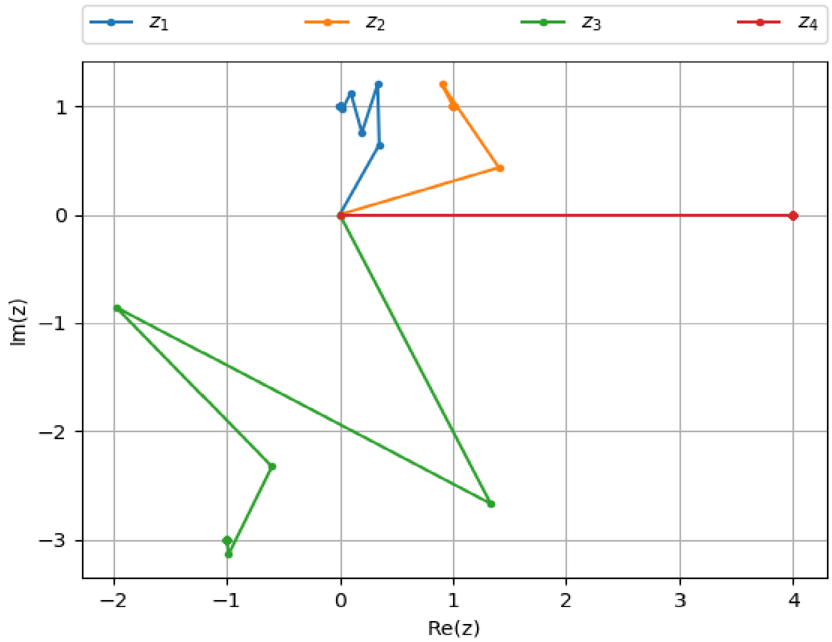
Następnie obliczono kolejne miejsca zerowe za pomocą opisanej wcześniej metody, korzystając z poniższego algorytmu:

$$
\begin{aligned}
inicjalizacja: \quad & \vec{a} = \ldots \\
& z_0 = \ldots \\
& for(l = n; l >= 1; l--)\{ \\
& \quad z_j = z_0 \\
& \quad for(j = 1; j <= IT\_MAX; j++)\{ \\
& \qquad R_j = \ldots \\
& \qquad R_j' = \ldots \\
& \qquad z_j = \ldots \\
& \quad \} \\
& \quad \vec{a} = \vec{b} \quad \text{(deflacja wielomianu czynnikiem liniowym)} \\
& \}
\end{aligned}
$$

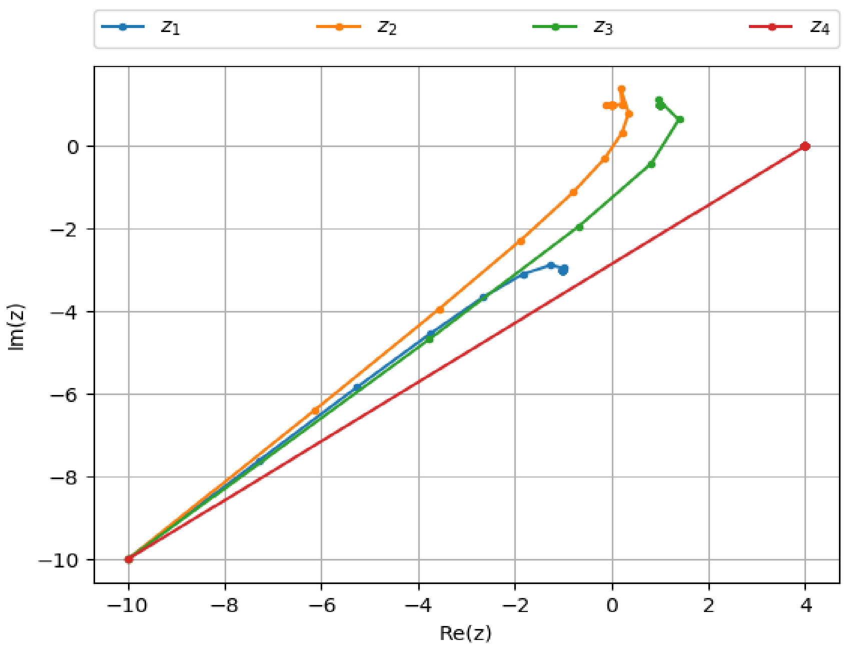
- $n = 4$ (ilość roz
- $IT\ MAX = 20$
- 1. $z_0^{(1)} = 0 + 0i$
  2. $z_0^{(2)} = -10 - 10i$

Utworzono wektor $\vec{a}$ oraz ustawiono początkową wartość z_0. Następnie przystąpiono do iteracyjnego wyznaczenia miejsca zerowego. Obliczono R_j oraz R_j' według wcześniej podanych algorytmów i wyznaczono przybliżenie miejsca zerowego $\rightarrow z_j$. Na końcu iteracji przypisano wektor $\vec{b}$ do wektora $\vec{a}$, co jest równoznaczne z podzieleniem wielomianu (2) przez wyznaczone miejsce zerowe. Metodę powtarzano, do uzyskania wszystkich miejsc zerowych, w tym przypadku czterech.
Są to: $z_1 = 1i \quad z_2 = 1 + i \quad z_3 = -1 - 3i \quad z_4 = 4$

3 Wyniki



kolejne przybliżenia miejsc zerowych z_{1-4} dla $z_0 = 0 + 0i$



kolejne przybliżenia miejsc zerowych z_{1-4} dla $z_0 = -10 - 10i$

4 Wnioski

Obliczone miejsca zerowe zgadzają się z wynikiem uzyskanym analitycznie. Dzięki metodzie iteracyjnej można skutecznie obliczyć miejsca zerowe dowolnego wielomianu, nie używając do tego skomplikowanego aparatu matematycznego.

Zwiększenie liczby iteracji $IT\,MAX$ pozwala pozwala na dokładniejsze przybliżenie wyniku, w przypadku ustawienia miejsca początkowego z_0 z dala od obliczonych zer. Dodatkowo, ustalenie z_0 wpływa na kolejność znajdowanych miejsc zerowych. Metoda, co można wywnioskować z wykresów, wyszukuje pierwiastki w kolejności od najbliższego z_0 do najdalszego z nich $\rightarrow$ stąd zmiana kolejności miejsc zerowych nad drugim wykresie.