Metody numeryczne

Sprawozdanie 8

Interpolacja funkcjami składanymi w bazie

Mateusz Górczany

Kwiecień 2020

1 Wstęp teoretyczny

Metoda interpolacji funkcjami składanymi w bazie (b-sklejek kubicznych) polega na wyznaczeniu krzywej dla zbioru punktów za pomocą wielomianów trzeciego stopnia. Mając do dyspozycji wartości w równoodległych punktach $x_0 ... x_n$, zwanych węzłami, takimi że

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, ...n$$

$$h = \frac{b-a}{n} \leftarrow krok, \quad \text{a,b - krańce, n - liczba węzłów}$$

wyznacza się funkcję interpolującą $s(x)$, będącą kombinacją liniową wielomianów z bazy $\Phi_i^3(x)$. Funkcja ta przyjmuje postać:

$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{1}$$

Φ_i^3 to odopwiedni wielomian dla każdego z przedziałów, $i = -1, 0, 1, ..., n, n+1$:

$$\Phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}) \\ h^3 + 3h^2 (x - x_{i-1}) + 3h (x - x_{i-1})^2 - 3 (x - x_{i-1})^3 & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ h^3 + 3h^2 (x_{i+1} - x) + 3h (x_{i+1} - x)^2 - 3 (x_{i+1} - x)^3 & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ (x_{i+2} - x)^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}) \\ 0 & x \notin [x_{-3}, x_{n+3}] \end{cases} \tag{2}$$

c_i - współczynnik obliczany za pomocą równań:
$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = y_i, \quad i = 0, 1, .., n$
$-c_{-1} + c_1 = \frac{h}{3}\alpha_1$
$-c_{n-1} + c_{n+1} = \frac{h}{3}\beta_1$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 2 & 4 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + \frac{h}{3}\alpha \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{h}{3}\beta \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{df(a)}{dx}, \quad \beta = \frac{d(b)}{dx} \tag{5}$$

Dzięki temu możliwe jest obliczenie wartości dla argumentów pomiędzy węzłami używając wyznaczonej funkcji $s(x)$.

2 Opis rozwiązywanego zadania na laboratoriach

Zadanie zakładało wykonanie interpolacji wyżej opisanym sposobem dla funkcji:

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
2. $f(x) = cos(2x)$

w przedziale $x \in [-5, 5]$, przy następującej liczbie węzłów:

- funkcja [1.]: n = 5, 6, 10, 20
- funkcja [2.]: n = 6, 7, 14

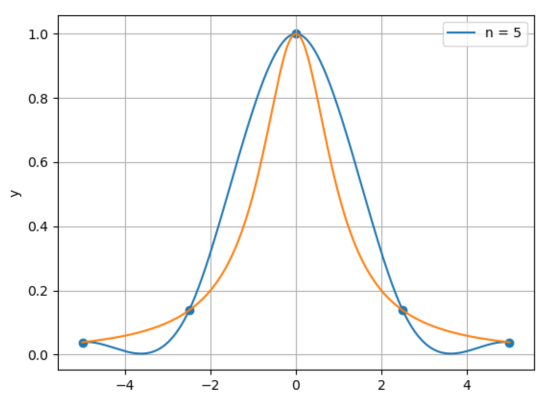
Na początku obliczono wektor węzłów oraz wektor wartości dla nich. Następnie przystąpiono do wyznaczenia współczynników c_i obliczając wektor $\vec{c}$ za pomocą równania (3). Przyjęto za Δx we wzorze (4) wartość 0.01. Potem dokonano kalkulacji $s(x)$.

Na końcu obliczono wartości funkcji interpolującej oraz oryginału. Ich porównanie jest widoczne poniżej.

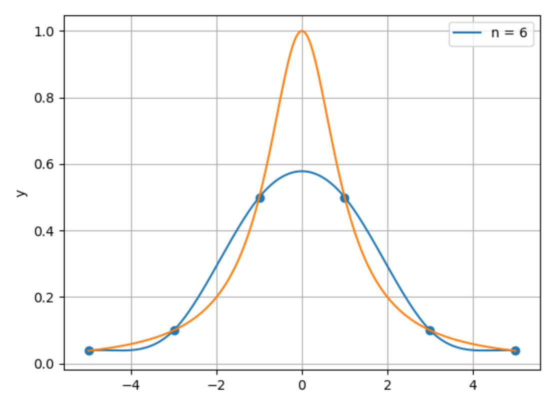
3 Wyniki

- kolor żółty - oryginalna funkcja
- kolor niebieski - interpolacja
- niebieskie punkty - wartości węzłach

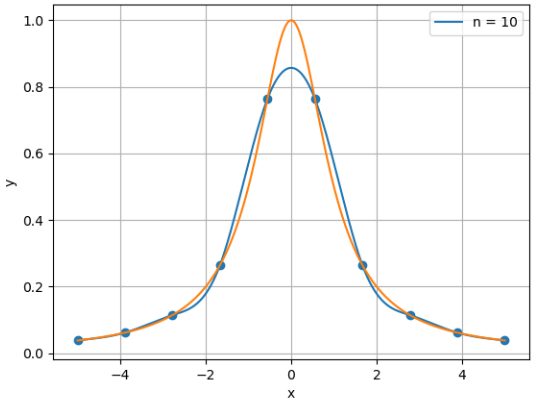
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \downarrow$$



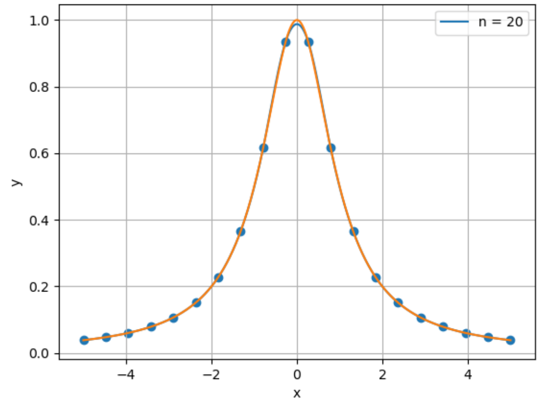
(a) n = 5



(b) n = 6

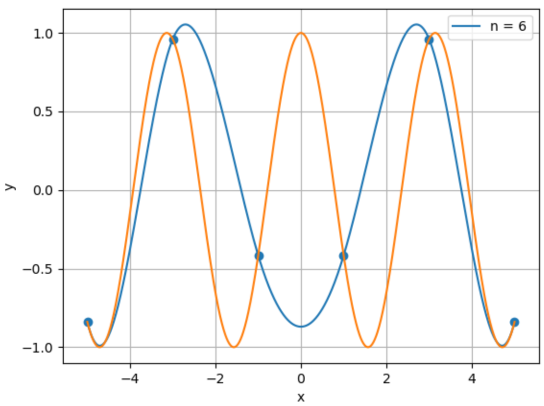


(c) n = 10

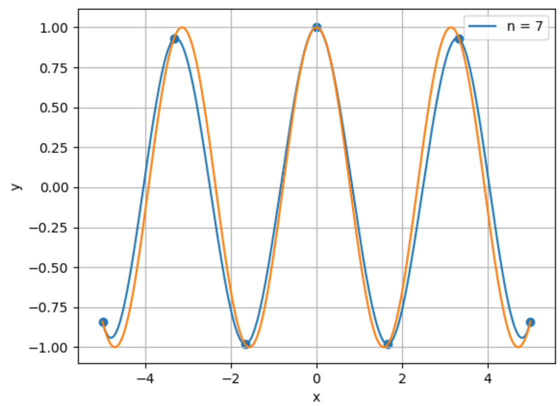


(d) n = 20

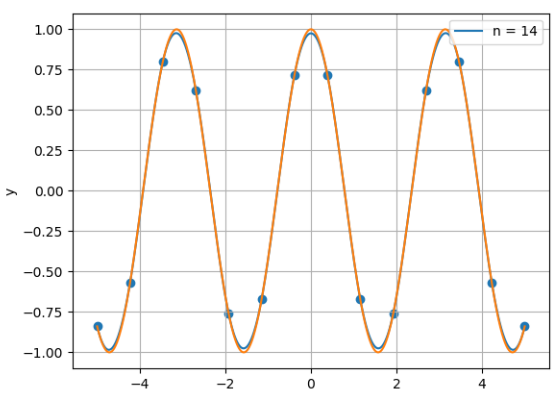
$f(x) = cos(2x) \downarrow$



(e) n = 6



(f) n = 7



(g) n = 14

4 Wnioski

Wartości otrzymane przy użyciu funkcji interpolującej są coraz dokładniejsze przy wzrastającej liczbie węzłów. Przy ich małej liczbie interpolata znacznie odbiega kształtem od oryginału. Może mieć na to wpływ położenie poszczególnych węzłów, które w w niektórych przypadkach nie trafiają w pobliże argumentów dla ekstremów lokalnych, przykład: wykresy (b), (c), (e). Dla n = 20 funkcji [1.] oraz n = 14 dla funkcji [2.] otrzymane w ten sposób wartości są satystakcjonujące.

Metoda interpolacji funkcjami składanymi w bazie pozwala na szybkie wyznaczenie funkcji dosyć dokładnie odzwierciedlającej oryginał. Może być szczególnie przydatna w przypadku, gdy zbierane dane są w równoodległych odstępach czasowych, a potrzebna jest krzywa ukazująca ogólny trend jakim kierują się wartości otrzymywane przy badaniu konkretnego zjawiska.