Metody numeryczne

Sprawozdanie 9

Aproksymacja funkcji w bazie jednomianów

Mateusz Górczany

Marzec 2020

1 Wstęp teoretyczny

Chcąc przybliżyć funkcję $f(x)$ metodą jednomianów, definuje się funkję aproksymującą jako kombinację liniową jednomianów. Jako przykładu użyto bazy $\{\varphi_i\} = \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m=4} b_i x^{i-1} = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3. \tag{1}$$

Współczynniki b_i są obliczane poprzez minimalizację różnicy wartości między funkcją aproksymowaną a aproksymującą:

$$||f(x) - F(x)||, \tag{2}$$

przyjmując normę L_2 oraz zapis funkcji F(x) w postaci (1), powyższe wyrażenie przyjmuje postać:

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left[f(x) - \sum_{i=1}^{m=4} b_i x^{i-1} \right]^2, \tag{3}$$

różniczkując względem współczynników b_i i przyrównując do zera:

$$\frac{\partial H}{\partial b_k} = -2 \sum_{j=1}^{N} \left[f(x) - \sum_{i=1}^{m=4} b_i x^{i-1} \right]^2 x_j^{k-1} = 0, \tag{4}$$

otrzymuje się warunek na minimum różnicy funkcji f i F:

$$\sum_{j=1}^{N} \left[f\left(x_j\right) - \sum_{i=1}^{m=4} b_i x_j^{i-1} \right] x_j^{k-1} = 0. \tag{5}$$

Zmieniając kolejność sumowania

$$\sum_{i=1}^{m=4} b_i \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^{i+k-2} \right) = \sum_{j=1}^{N} f\left(x_j\right) x_j^{k-1} \tag{6}$$

i wprowadzając oznaczenia:

$$g_{ik} = \sum_{j=1}^{N} x_j^{i+k-2} \quad r_k = \sum_{j=1}^{m} f\left(x_j\right) x_j^{k}$$

$$\sum_{i=0}^{m} b_i g_{ik} = r_k \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{G}^T \vec{b} = \vec{r}, \quad \mathbf{G}^T = \mathbf{G},$$

wyprowadzony zostaje wzór:

$$\mathbf{G}\vec{b} = \vec{r}, \tag{7}$$

który można użyć do obliczenia współczynników b_i.

2 Opis rozwiązywanego zadania na laboratoriach

Zadanie polegało na przybliżeniu funkcji $e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$ metodą opisaną powyżej, jednomianami z bazy $\{\varphi_i\} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Dokonano kilku przekształceń, koniencznych do wykonania obliczeń:

$$g(x) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} = e^{a_0+a_1x+a_2x}, \tag{8}$$

$$a_0 = \frac{\frac{-x_0^2}{2}}{\sigma^2} \quad a_1 = \frac{x_0}{\sigma^2} \quad a_2 = \frac{\frac{-1}{2}}{\sigma^2},$$

$$f(x) = ln(g(x)) = a_0 + a_1x + a_2x^2. \tag{9}$$

Zamiast przybliżania funkcji g(x) za pomocą wielomianu, przybliżono jej wykładnik → f(x)
Funkcja aproksymująca wykładnik przyjęła postać:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m=4} b_i x^{i-1} = b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3, \tag{10}$$

zaś funkcja aproksymująca oryginał:

$$G(x) = e^{F(x)} = e^{b_1+b_2x+b_3x^2+b_4x^3}, \tag{11}$$

$$g(x) \approx G(x).$$

Aproksymacji dokonano wobec funkcji g(x) oraz $g_2(x)$, danej wzorem:

$$g_2(x) = g(x) * (1 + \delta(x)), \tag{12}$$

gdzie $\delta(x)$ jest losowym zaburzeniem.
W ten sposób sprawdzono jak różni się aproksymata funkcji zaszumionej od jej oryginału.

Sposób wykonania:

Na początku wyznaczono równoodległe punkty (węzły), dla których policzono wartości. Następnie przystąpiono do obliczenia macierzy **G** oraz wektora $\vec{r}$. Potem rozwiązano układ $\mathbf{G}\vec{b} = \vec{r}$, w efekcie wyznaczono wzory aproksymat $G(x)$ oraz $G_2(x)$. Na końcu obliczono wartości funkcji aproksymowanej i aproksymującej, narysowano ich krzywe i porównano ich kształt.

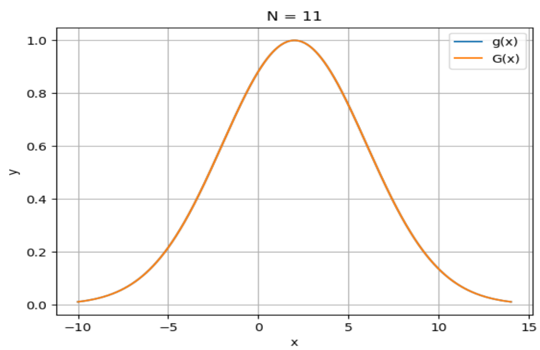
Tą samą operację powtórzono dla funkcji z zaburzeniem, z tą różnicą, że funkcja aproksymowana została przedstawiona jako punkty odzwierciedlające wartości w węzłach.

Cały proces wykonano dla liczby węzłów N = 11, 21, 51, 101.

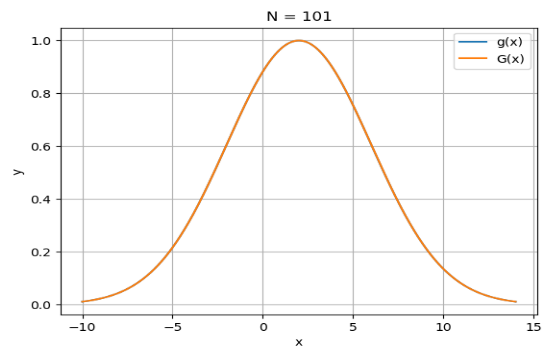
3 Wyniki

3.1 $G(x)$

	N	11	21	51	101
$a_1 = -0.125000$	b_1	-0.125001	-0.125000	-0.125000	-0.125001
$a_2 = 0.125000$	b_2	0.125001	0.125000	0.125000	0.125000
$a_3 = 0.031250$	b_3	-0.031250	-0.031250	-0.031250	-0.031250
	b_4	-2.910383e-11	-6.039045e-10	1.120497e-09	-3.477908e-09



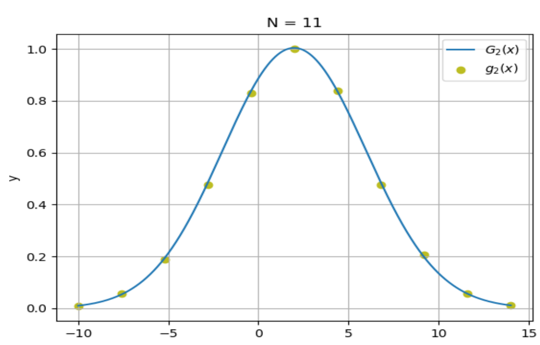
(a)



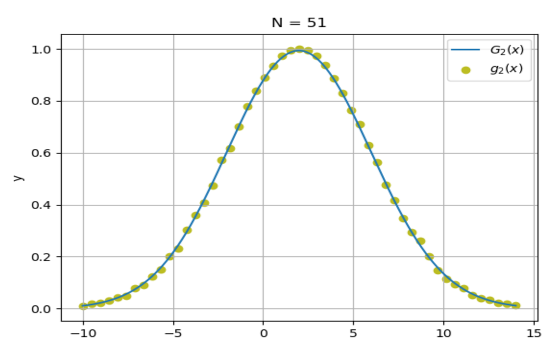
(b)

3.2 $G_2(x)$

	N	11	21	51	101
$a_1 = -0.125000$	b_1	-0.120529	-0.132248	-0.129561	-0.122097
$a_2 = 0.125000$	b_2	0.125764	0.132970	0.124193	0.127201
$a_3 = 0.031250$	b_3	-0.031874	-0.031203	-0.031386	-0.031614
	b_4	4.464437e-05	-7.311794e-05	2.048854e-05	1.295804e-05



(c)



(d)

4 Wnioski

Współczynniki b_i otrzymane przy aproksymacji $g(x)$ prawie nie różnią się od współczynników a_i oryginału. Skalar b_4 został obliczony na kilka rzędów wielkości mniejszy od pozostałych. Ma on prawie zerowy wkład w wartość wynikową funkcji. Wykresy aproksymaty oraz funkcji aproksymowanej pokrywają się, co widać na wykresach (a) i (b). Zwiększenie ilości węzłów nie wpłynęło znacząco na zmianę kształtu krzywej. Oznacza to, że aproksymacja pozwala na otrzymanie wzoru, formułą bardzo zbliżonego do oryginalnego, posiadając jedynie szczątkowe informacje.

Wykresy (c) oraz (d) mają bardzo podobny kształt oraz dobrze odzwierciedlają niezaszumiony oryginał. Aproksymacja funkcji z zaburzeniem pokazała, że niewielki szum towarzyszący pomiarom, oczywiście zmienia w pewnym stopniu współczynniki aproksymaty, jednak nie ma decydującej roli w odtworzeniu przybliżonego kształtu oryginału.