Metody numeryczne

Sprawozdanie 1

Diagonalizacja macierzy metodą potęgową

Mateusz Górczany

Marzec 2020

1 Wstęp teoretyczny

Niech $\lambda_1, \lambda_1, ...\lambda_n$, będą wartościami własnymi macierzy **A**.

Założenie: wartości własne tworzą ciąg:

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant ... \geqslant |\lambda_n|, \tag{1}$$

natomiast wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n$ odpowiadającymi im wektorami własnymi macierzy **A**.

Wobec tego każdy wektor należący do przestrzeni rozpiętej wektorami własnymi, da się zapisać jako kombinacja liniowa tych wektorów.

$$\vec{b}_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_m\vec{v}_m. \tag{2}$$

$$\begin{aligned} A^k\vec{b}_0 &= c_1A^k\vec{v}_1 + c_2A^k\vec{v}_2 + \cdots + c_mA^k\vec{v}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\vec{v}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\left(\vec{v}_1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\vec{v}_2 + \cdots + \frac{c_m}{c_1}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k\vec{v}_m\right) \end{aligned}$$

k - numer iteracji

W związki z tym, że

$$|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}| < 1 \text{ dla } j > 1 \tag{3}$$

to

$$A^k\vec{b}_0 \rightarrow c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 \tag{4}$$

Z drugiej strony:

$$\vec{b}_k = \frac{A^kb_0}{\|A^kb_0\|}. \tag{5}$$

Dlatego $\vec{b}_k$ zbiega do wektora własnego $\vec{v}_1$. Iloraz ciągu: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$,

Powtarzając czynność dla każdego wektora własnego macierzy, można uzyskać przybliżenie wektorów własnych macierzy **A** w zależności od wykonanych przybliżeń (k).

2 Opis rozwiązywanego zadania na laboratoriach

Zadanie polegało na wyznaczeniu wartości własnych, metodą potęgową, macierzy $\mathbf{A}$, której wyrazy spełniały równanie:

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2 + |i - j|}} \tag{6}$$

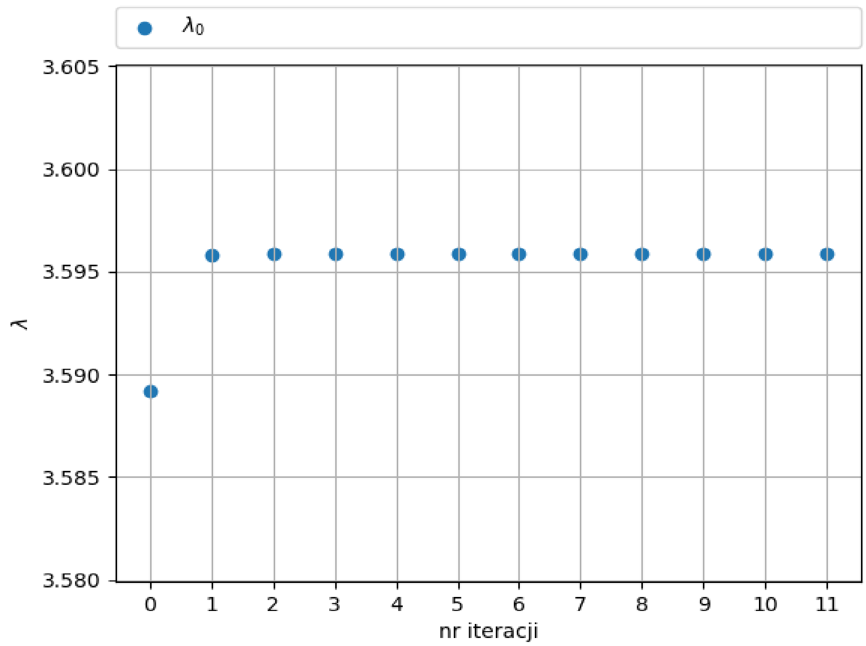
Wykorzystano do tego celu algorytm

$$\begin{array}{l}
W_0 = A \qquad \text{(inicjalizacja macierzy iterującej)} \\
for(k = 0;\ k < K_{val};\ k++)\{ \\
\quad \boldsymbol{x}_k^0 = [1, 1, \ldots, 1] \qquad \text{(inicjalizacja wektora startowego)} \\
\quad for(i = 1; i <= IT_MAX; i++)\{ \\
\qquad \boldsymbol{x}_k^{i+1} = W_k \boldsymbol{x}_k^i \\
\qquad \lambda_k^i = \dfrac{\left(\boldsymbol{x}_k^{i+1}\right)^T \boldsymbol{x}_k^i}{\left(\boldsymbol{x}_k^i\right)^T \boldsymbol{x}_k^i} \\
\qquad \boldsymbol{x}_k^i = \dfrac{\boldsymbol{x}_k^{i+1}}{\|\boldsymbol{x}_k^{i+1}\|_2} \\
\quad \} \\
\quad W_{k+1} = W_k - \lambda_k\, \boldsymbol{x}_k^i (\boldsymbol{x}_k^i)^T \qquad \text{(iloczyn tensorowy)} \\
\}
\end{array}$$

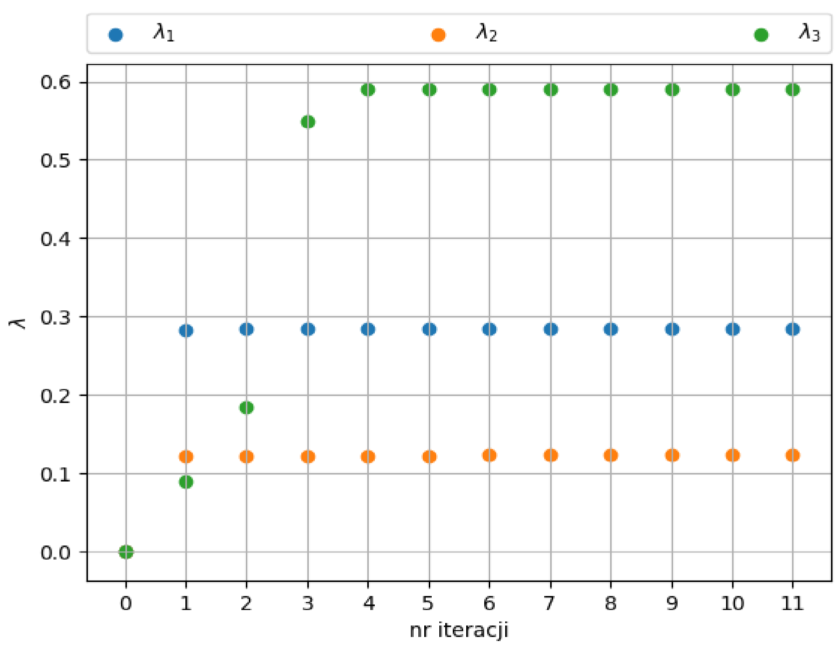
$IT\ MAX = 12$
$n = 7$

Do macierzy $\mathbf{W}$ przypisano macierz $\mathbf{A}$, w celu zachowania orginalnych wartości macierzy $\mathbf{A}$. Następnie wygenerowano wektor jednynek, który posłużył jako punkt startowy do wyznaczania wektora własnego. Potem dokonano iteracji, w celu wygenerowania jak najdokładniejszego oszacowania wektora własnego $\mathbf{x}^i$. Na końcu zredukowano macierz iterującą $\mathbf{W}$. Proces powtórzono dla każdej wartości λ_i oraz $\mathbf{x}^i$.

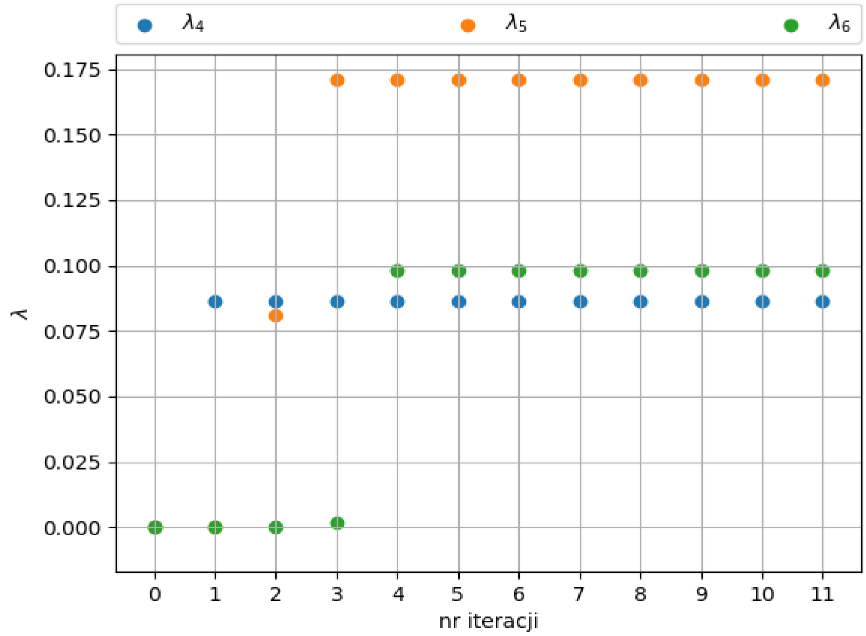
3 Wyniki



kolejne przybliżenia wartości własnej λ_0



kolejne przybliżenia wartości własnych λ_{1-3}



kolejne przybliżenia wartości własnych λ_{4-6}

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \tag{7}$$

Q - macierz wektorów własnych

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3.5959 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.285 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1229 & -0.0070 & -0.0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.007 & 0.5904 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0003 & 0 & 0.0866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.171 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0982 \end{pmatrix} \tag{8}$$

4 Wnioski

Macierz **D** ma na diagonali wartości własne macierzy **A**, co oznacza że uzyskany wynik jest dobry, gdyż zgadza się z teoretycznym przewidywaniem. Wyrazy macierzy zostały zapisane z dokładnością do 4 miejsc po przecinku.

Metoda potęgowa pozwala na szybkie wyznaczenie wartości i wektorów własnych, bez konieczności stosowania skomplikowanego aparatu matematycznego.