Metody numeryczne

Sprawozdanie 12

Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Mateusz Górczany

Maj 2020

1 Wstęp teoretyczny

Metoda Simpsona służy do numerycznego całkowania. Polega na zastąpieniu łuków wykresu funkcji $f(x)$ parabolami, przechodzącymi przez trzy kolejne węzły (a, $\frac{b-a}{2}$, b). Wykorzystuje się w tym celu interpolację Lagrange'a, przybliżając $f(x)$ na przedziale [a,b] funkcją $P(x)$ - wielomianem stopnia drugiego, a następnie licząc pole pod nim.

$$P(x) = f(a)\tfrac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\tfrac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\tfrac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}, \tag{1}$$

całkując powyższe wyrażenie, można pokazać że

$$\int_a^b P(x)\,dx = \tfrac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \tag{2}$$

otrzymując ostatecznie

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \tag{3}$$

gdzie $h = \frac{b-a}{2}$.

Opisany sposób sprawdza się tylko dla wąskiego odcinka. Dla uzyskania zadowalającego efektu rozszerza się powyższą metodę na cały przedział, dzieląc go na n odcinków, a następnie licząc pole pod każdym łukiem. Znając wartości $f(x)$ w $2k+1$ równoodległych węzłach $x_0, x_1, \ldots x_n$ (gdzie $n = 2k$), wzór (3) przyjmuje postać:

$$\int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx C = \frac{h}{3}(f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}), \quad i = 1, 2, \ldots k, \quad k = \frac{n}{2}, \tag{4}$$

a po rozszerzeniu

$$\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{k-1} f_{2i} + f_n\right). \tag{5}$$

$x_i = a + hi$ dla $i = 0, 1, ..., n-1, n$,
$h = \frac{b-a}{n}$,
$x_0 = a$.

2 Opis zadania rozwiązywanego na laboratoriach

Zadanie polegało na obliczeniu następującej całki:

$$I = \int_0^\pi x^m sin(kx) dx, \tag{6}$$

metodą analityczną oraz metodą Simpsona, dla następujących zestawów m i k: $\{\{0,1\},\{1,1\},\{5,5\}\}$. Wartość analityczna I, dla każdej z par m i k, wyniosła: $\{2, \pi, 56.363569\}$.

2.1 Metoda analityczna

W tym przypadku, scałkowano rozwinięcie Taylora funkcji podcałkowej, a następnie przystąpiono do obliczenia wartości uzyskanego wyrażenia, obliczając sumę (?) w górnych granicach: $\ell = 1, 2, 3...30$.

$$f(x) = x^m sin(kx) = (-1)^i \frac{(kx)^{2i+1}}{(2i+1)!} x^m, \tag{7}$$

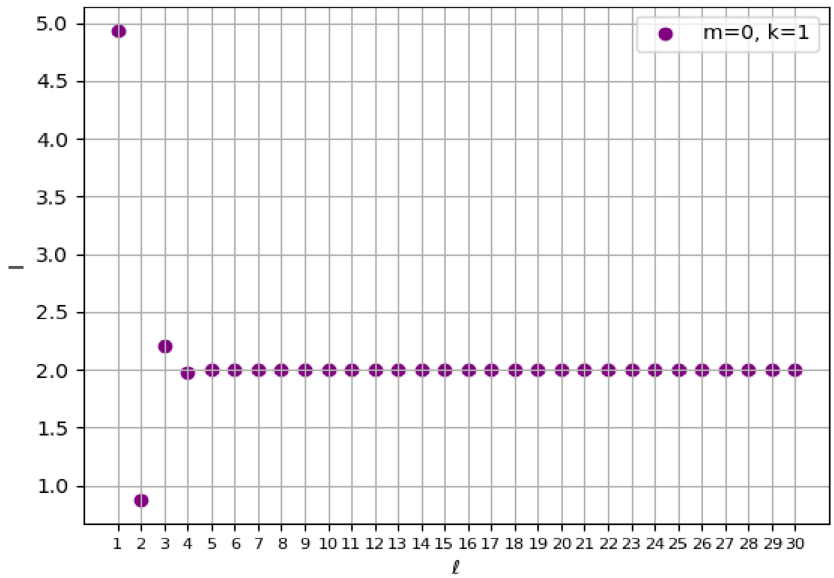
$$\begin{aligned} I = \int_0^\pi x^m \sin(kx) dx &= \int_0^\pi \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(kx)^{2i+1}}{(2i+1)!} x^m \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(kx)^{2i+m+2}}{k^{m+1}(2i+1)!(2i+m+2)} \Bigg|_0^\pi . \end{aligned} \tag{8}$$

Powyższa suma została obliczona dla każdej wartości ℓ, tj. $\sum_{i=0}^{\ell} ...$, a wyniki przedstawiono na poniższych wykresach (a), (b) i (c).

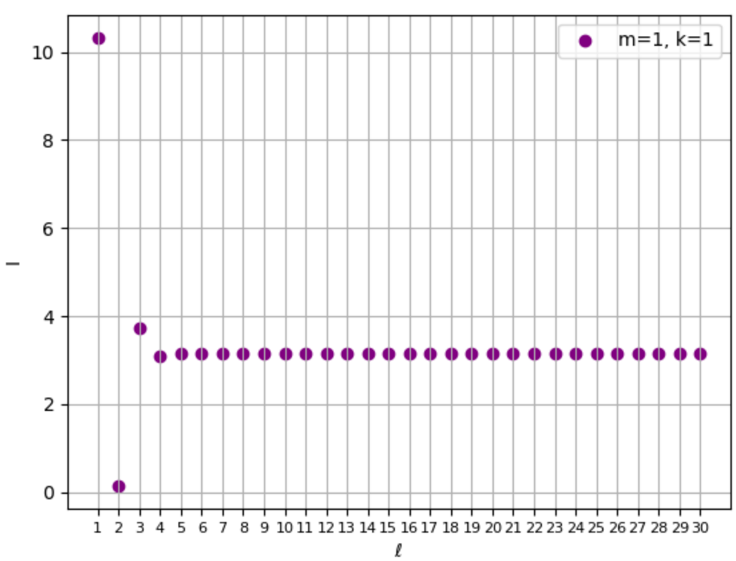
2.2 Metoda Simpsona

Przedział $[0, \pi]$ podzielono na n węzłów, dla każdego obliczono wartość funkcji podcałkowej, a następnie użyto formuły (8), do obliczenia całki. Zabieg powtórzono dla następującej liczby $n = \{11, 21, 51, 101, 201\}$.
Przyjęto następujące wzory: $x_i = h \cdot i$, długość przedziału $h = \frac{\pi - 0}{n-1}$, $n = 2k + 1$. Wyniki przedstawiono na wykresach (d), (e) i (f).

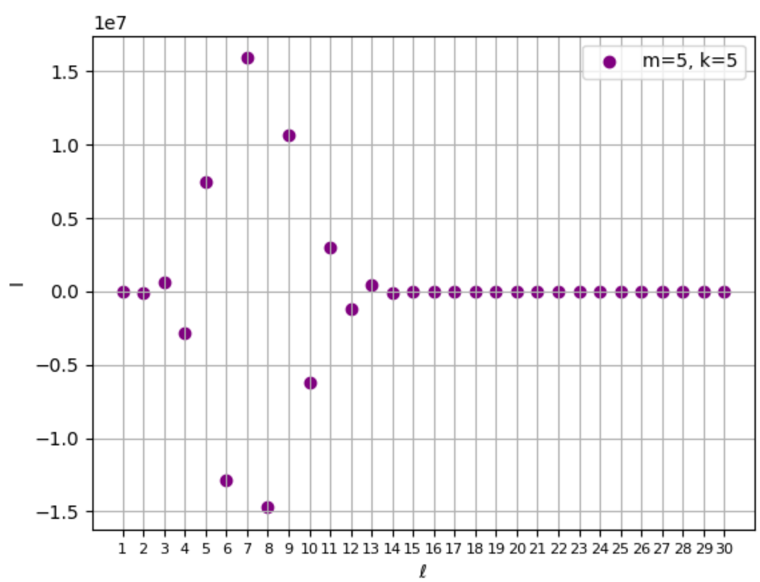
3 Wyniki


m=0, k=1
I
ℓ
5.0 4.5 4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

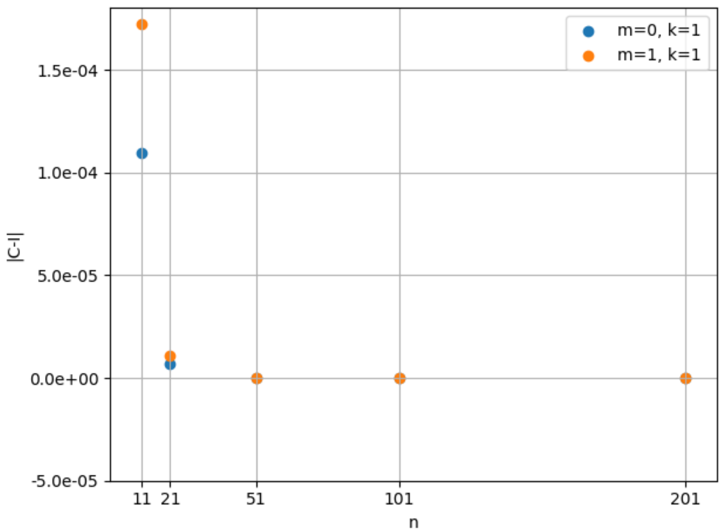
(a)


m=1, k=1
I
ℓ
10 8 6 4 2 0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

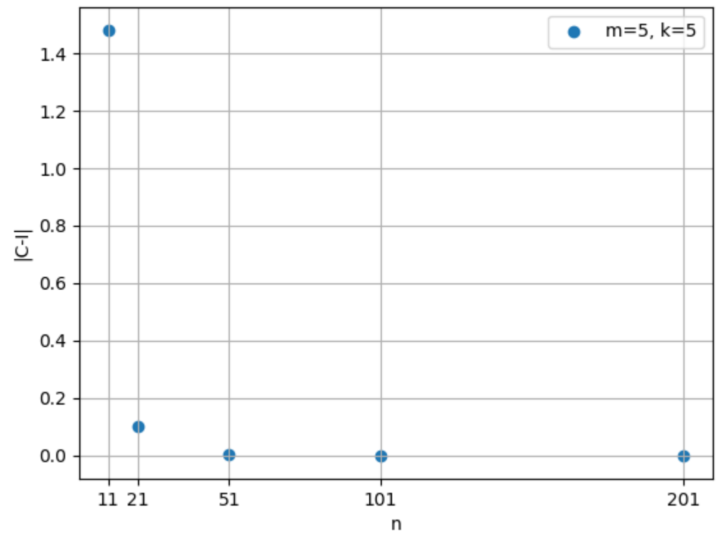
(b)


1e7
m=5, k=5
I
ℓ
1.5 1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0 −1.5
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

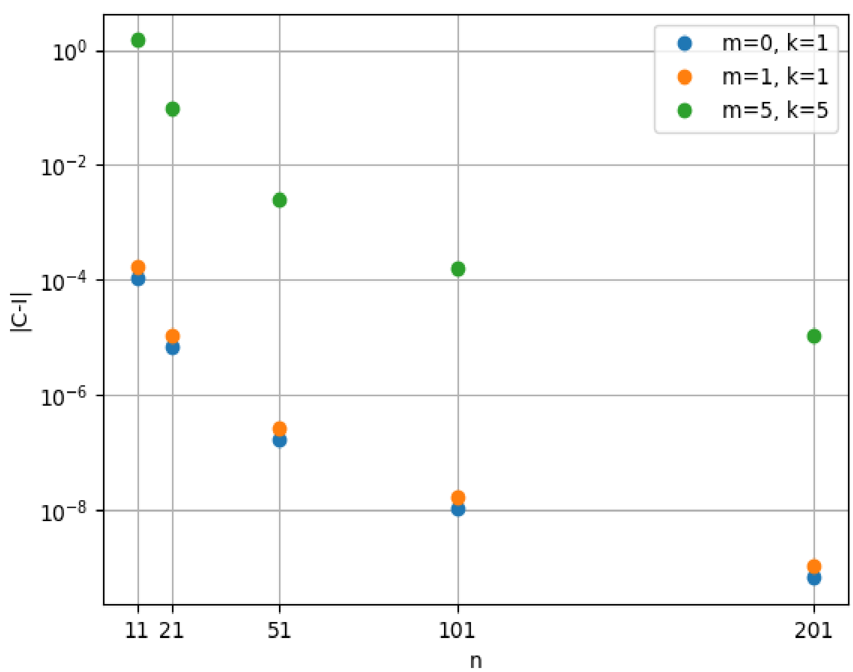
(c)


m=0, k=1
m=1, k=1
1.5e-04
1.0e-04
5.0e-05
0.0e+00
-5.0e-05
|C-I|
11
21
51
101
201
n

(d)


m=5, k=5
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
|C-I|
11
21
51
101
201
n

(e)


m=0, k=1
m=1, k=1
m=5, k=5
10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
|C-I|
11
21
51
101
201
n

(f)

4 Wnioski

Metoda analityczna

Dla tej metody wyniki w pierwszych dwóch przypadkach były zgodne z oczekiwanymi już po trzeciej iteracji. Wraz ze wzrostem wartości m i k różnica pomiędzy niedokładnymi przybliżeniami, tzw. outlierami, zwiększa się. Dla $m = 5, k = 5$ ta różnica jest rzędu 10^7, a algorytm potrzebował 14 iteracji, by zbliżyć się do wartości oczekiwanej.

Metoda Simpsona

Wraz ze wzrostem m i k, podobnie jak w poprzedniej wersji, różnica pomiędzy wartością oczekiwaną I a otrzymywaną staje się coraz większa oraz potrzeba większej liczby iteracji, żeby ją zmniejszyć do poziomu, który osiąga wersja $m = 0$, $k = 1$.

Ogólne

Sposób Simpsona jest mniej dokłady oraz patrząc na wyniki zawarte w plikach z danymi, wolniej zbieżny od metody analitycznej, co nie jest żadnym zaskoczeniem. Sposób Simpsona posiada jedną zasadniczą przewagę - jest to liczba operacji potrzebna do wyliczenia każdego składnika sumy. Patrząc na wzory (4) oraz (8), można dojść do wniosku, że wersja analityczna jest dużo kosztowniejsza dla komputera, a co za tym idzie - wolniejsza. Konkludując - metoda Simpsona jest dobrym narzędziem do przybliżania wartości całki, kiedy ważna jest szybkość obliczeń, bądź funkcja analityczna nie jest znana.