Metody numeryczne

Sprawozdanie 3

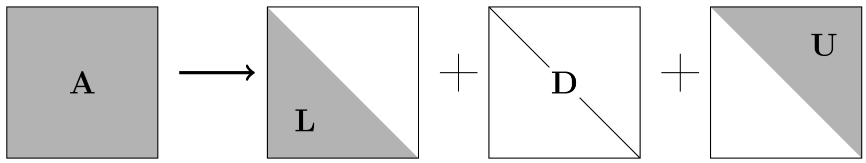
Metoda iteracyjna Jakobiego

Mateusz Górczany

Marzec 2020

1 Wstęp teoretyczny

Metoda iteracyjna Jakobiego polega na rozkładzie macierzy na sumę 3 macierzy odpowiedniego typu: $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$, a następnie obliczenie kolejnych wektorów x^k, które ostatecznie zbiegają do właściwego wyniku, czyli wektora x.



1. **L** (**L**ower) – macierz trójkątna dolna (bez diagonali)
2. **D** (**D**iagonal) – macierz diagonalna
3. **U** (**U**pper) – macierz trójkątna górna (bez diagonali)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad (L + D + U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - (L + U)\mathbf{x}^{(k)}), \tag{1}$$

lub

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \tag{2}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

$$x_n[i] = \frac{1}{d_0[i]}\Big(b[i] - d_1[i]x_n[i-1] - d_2[i]x_n[i-2]\Big) \tag{4}$$

Obliczanie wektora x^{k+1} jest zakończone, gdy różnica pomiędzy sumą kwadratów składowych tego wektora oraz poprzedniego jest mniejsza niż epsilon:

$$\sum (x_i^{k+1})^2 - \sum (x_i^k)^2 < \varepsilon \tag{5}$$

Zastosowane kryterium zbieżności **nie** jest jednak obligatoryjne.

Przykład[(*1)]:
Rozwiązanie układu równań liniowych $\mathbf{A}x = b$ z początkowym wektorem $x^{(0)}$, danymi równaniami:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Użyto równania (1):

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)}),$$

by oszacować $\vec{x}$.
W celu obliczeń uproszczono równanie (1):

$$D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)}) = Tx^{(k)} + C,$$

gdzie

$$T = -D^{-1}(L+U)$$

oraz

$$C = D^{-1}b$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$T = -D^{-1}(L+U)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -5/7 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/2 \\ 13/7 \end{bmatrix}.$$

Mając T i C, można oszacować x jako:

$$x^{(1)} = Tx^{(0)} + C$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -5/7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11/2 \\ 13/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0 \\ 8/7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5 \\ 1.143 \end{bmatrix}.$$

Następna iteracja :

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -5/7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.0 \\ 8/7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11/2 \\ 13/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69/14 \\ -12/7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.929 \\ -1.714 \end{bmatrix}.$$

Wynik po 25 iteracjach:

$$x = \begin{bmatrix} 7.111 \\ -3.222 \end{bmatrix}.$$

2 Opis rozwiązywanego zadania na laboratoriach

Zadanie zakładało rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \beta V + F_0 \sin(\Omega t) \tag{6}$$

opisującego ruch ciała poddanego działaniu siły sprężystej. Przeanalizowano je w kilku wariantach, dla różnych wartości β, F_0 oraz Ω.

Po krótkich przekształceniach równania (6), otrzymano macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

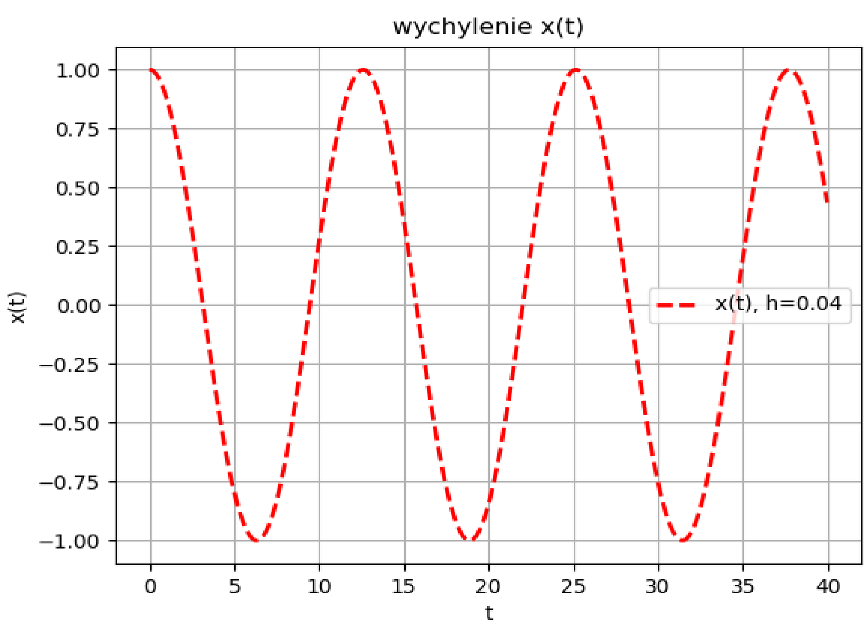
której diagonala i 2 wektory pod nią opisane są w następujący posób:

$$\begin{gathered} d_0 = [1, 1, a_3, a_3, \dots, a_3] \\ d_1 = [0, -1, a_2, a_2, \dots, a_2] \\ d_2 = [0, 0, a_1, a_1, \dots, a_1] \end{gathered} \tag{8}$$

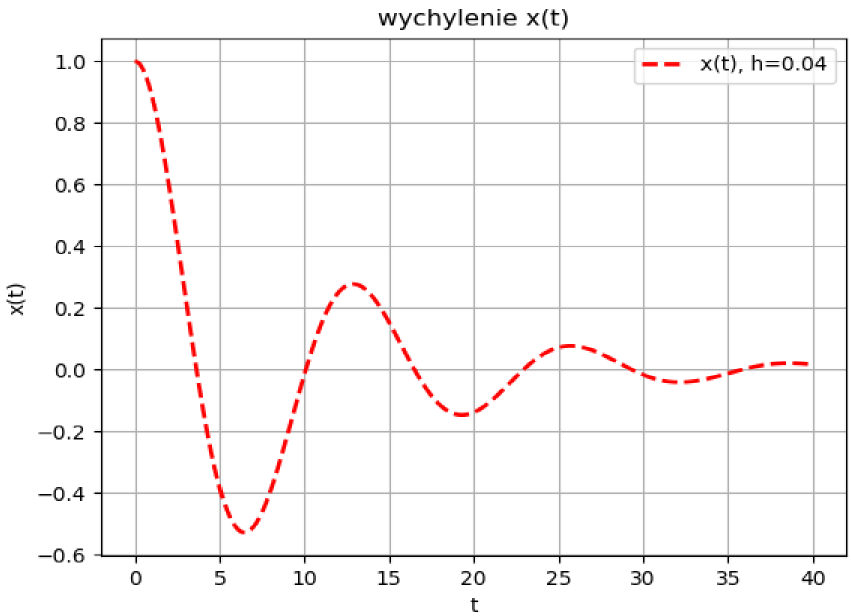
Wektor x otrzymano za pomocą *Metody iteracyjnej Jakobiego*.

3 Wyniki

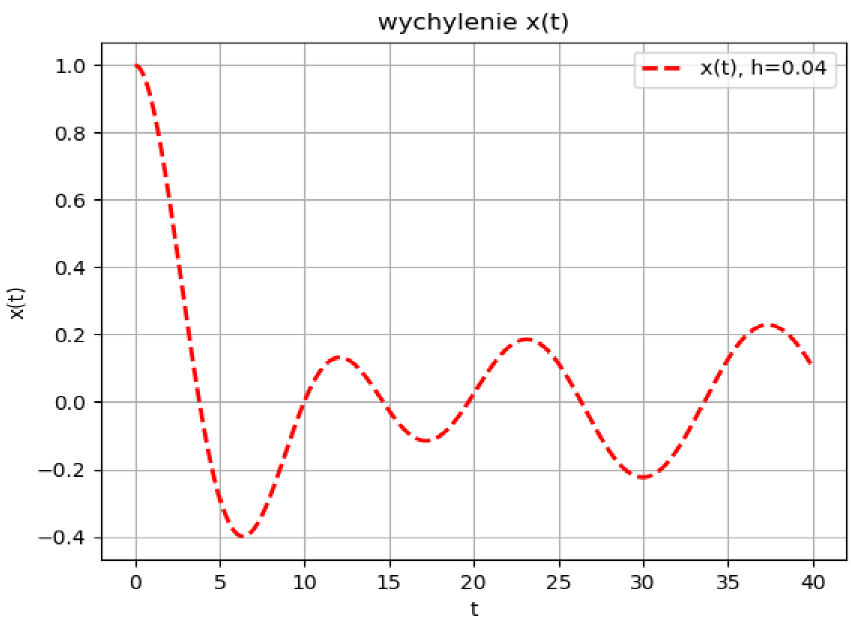
Dokonano 3 wyliczeń. Zestawy wartości parametrów β, F_0 i Ω:
1. $\beta = 0.0$, $F_0 = 0.0$, $\Omega = 0.8$ - ruch harmoniczny prosty
2. $\beta = 0.4$, $F_0 = 0.0$, $\Omega = 0.8$ - ruch harmoniczny tłumiony
3. $\beta = 0.4$, $F_0 = 0.1$, $\Omega = 0.8$ - ruch harmoniczny tłumiony z wymuszeniem



Ruch harmoniczny prosty
$\beta = 0.0,\ F_0 = 0.0,\ \Omega = 0.8$



Ruch harmoniczny tłumiony
$\beta = 0.4,\ F_0 = 0.0,\ \Omega = 0.8$



Ruch harmoniczny tłumiony z wymuszeniem
$\beta = 0.4,\ F_0 = 0.1,\ \Omega = 0.8$

4 Wnioski

Metoda iteracyjna Jakobiego pozwala na sprawne obliczanie układów równań. Bazuje ona na coraz dokładniejszym przybliżaniu wyniku, więc wartości mogą się nieznacznie różnić od teoretycznych oczekiwań. Sposób ten jest wyjątkowo przydatny, gdy ma się do czynienia z macierzami szczególnymi (równanie (7)).

Przypisy:
(*1) - przykład zaczerpnięty z wikipedii:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_method`