Metody numeryczne

Sprawozdanie 2

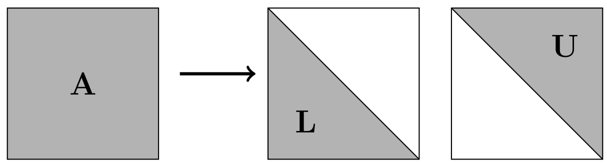
Rozkład macierzy LU

Mateusz Górczany

Marzec 2020

1 Wstęp teoretyczny

Rozkład **LU** polega na rozłożeniu macierzy **A** na macierz **LU**; $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Dzięki temu proces wyznaczania wyznacznika macierzy **A** jest znacznie szybszy, gdyż $\det(\mathbf{L}) = 1$ (iloczyn wyrazów na diagonali) oraz $\det(\mathbf{U}) =$ iloczyn wyrazów na diagonali (własność macierzy trójkątnych).



1. **L** (**L**ower) – macierz trójkątna dolna, każdy wyraz na diagonali, czyli przekątnej = 1
2. **U** (**U**pper) – macierz trójkątna górna

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L})\times\det(\mathbf{U})$$

$$\mathbf{A} \times \vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

$$\mathbf{L}\,\underbrace{\mathbf{U} \times \vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b} \tag{2}$$

$$\mathbf{L} \times \vec{y} = \vec{b} \tag{3}$$

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{11}l_{21} & u_{12}l_{21} + u_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 & = 1 \\ 1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} & = 2 \\ l_{21} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 & = 3 \\ l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot u_{22} & = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{21} & = 3 \\ u_{11} & = 1 \\ u_{12} & = 2 \\ u_{22} & = -2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2 Opis rozwiązywanego zadania na laboratoriach

Utworzono macierz n×n, której elementy spełniały równanie:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i + j + \delta} \tag{4}$$

Następnie używając funkcji:

```
gsl_linalg_LU_decomp(gsl_matrix* a, gsl_permutation* p, int* signum);
```

dokonano dekompozycji macierzy **A** na macierze **L** i **U**, które zapisane zostały w macierzy **A**. W wyniku operacji powstał też wektor $\vec{p}$ - wektor permutacji oraz liczba *signum* - określająca parzystość liczby permutacji.

W kolejnym kroku odwrócono macierz, rozwiązując następujące układy równań:

$$\mathbf{A} \times k_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \times k_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad ... \quad \mathbf{A} \times k_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

funkcją:

```
int gsl_linalg_LU_solve(const gsl_matrix * LU, const gsl_permutation * p,
                        const gsl_vector * b, gsl_vector * x);
```

gdzie macierz odwrotna to:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

Ostatecznie policzono wskaźnik *uwarunkowania macierzy*, używając normy:

$$\|\mathbf{A}\|_{1,\infty} = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$$

3 Wyniki

Wyznacznik macierzy $\mathbf{A} = -2.362056e - 09$

Macierz $\mathbf{A}^{-1}$ =

x1	x2	x3	x4
200.0	-1200.0	2100.0	-1120.0
-1200.0	8100.0	-15120.0	8400.0
2100.0	-15120.0	29400.0	-16800.0
-1120.0	8400.0	-16800.0	9800.0

Diagonala **U** =

x1	x2	x3	x4
0.5	0.033333	-0.001389	0.000102

$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} =$

x1	x2	x3	x4
1.000000e+00	-9.094947e-13	4.547474e-13	4.547474e-13
2.557954e-13	1.000000e+00	4.547474e-13	0.000000e+00
1.989520e-13	-4.547474e-13	1.000000e+00	2.273737e-13
1.989520e-13	-4.547474e-13	0.000000e+00	1.000000e+00

$\approx \mathbf{I}$

Uwarunkowanie: 14700.000000

4 Wnioski

Macierz została rozłożona poprawnie, gdyż iloczyn macierzy $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} \approx \mathbf{I}$
Wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$ wyniósł tyle samo, ile iloczyn wyznaczników $\det(\mathbf{L}) \times \det(\mathbf{U})$, co zgadza się z teorią. Uzyskany współczynnik uwarunkowania macierzy informuje, iż zadanie to jest niestabline.