Metody numeryczne

Sprawozdanie 4

Macierzowy problem własny dla drgającej struny

Mateusz Górczany

Marzec 2020

1 Wstęp teoretyczny

Wyznaczanie wartości własnych polega na rozwiązaniu równania:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{1}$$

Dzięki wartościom własnym można znaleźć wektory własne macierzy, dzięki którym można rozwiązać zadane równanie postaci:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \tag{2}$$

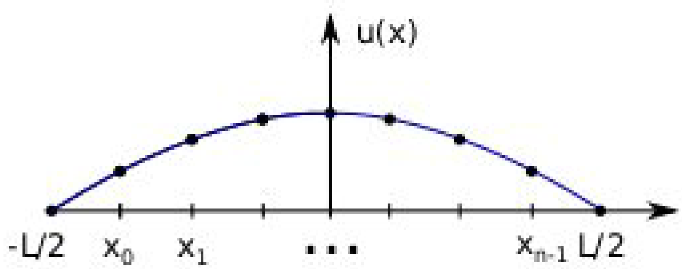
Do rozwiązania zadania użyto funkcji:

```
gsl_eigen_nonsymmv(),
```

żeby obliczyć wartośći λ, czyli wartości własne oraz macierz Schura - $\mathbf{T}$ i wektory Schura. Wyznaczone wektory własne zostały znormalizowane do długości jednostkowej. Na końcu operacji macierz $\mathbf{A}$ ma postać macierzy Schura - $\mathbf{T}$.

2 Opis rozwiązywanego zadania na laboratoriach

Zadanie, które zostało postawione na laboratoriach to wyznaczenie wartości własnych struny, które są zarazem kwadratami częstości własnych drgań struny. $\psi(x,t)$ - położenie struny w czasie i przestrzeni, N - naciąg struny, x - odległość od środka geometrycznego struny, $\rho(x)$ - funkcja opisująca gęstość struny w zależności od odległości od środka geometrycznego struny, *u(x)* - wychylenie punktu struny, L - długość struny.



Struna

Rozwiązano równanie różniczkowe:

$$\frac{N}{\rho(x)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad \psi(x,t) = u(x)\theta(t) \tag{3}$$

a następnie przekrztałcono:

$$\frac{N}{\rho(x)}\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \text{const} = -\lambda \quad \Big(\lambda = \omega^2, \omega - \text{ czestość własna drgań }\Big) \tag{4}$$

$$-\frac{N}{\rho(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u \tag{5}$$

$$\Delta x = \frac{L}{n+1} \tag{6}$$

$$x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1), \quad i = 0, 1, 2..., n-1 \tag{7}$$

Dokonując dyskretyzacji równania (5), otrzymano:

$$-\frac{N}{\rho_i}\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda u_i \tag{8}$$

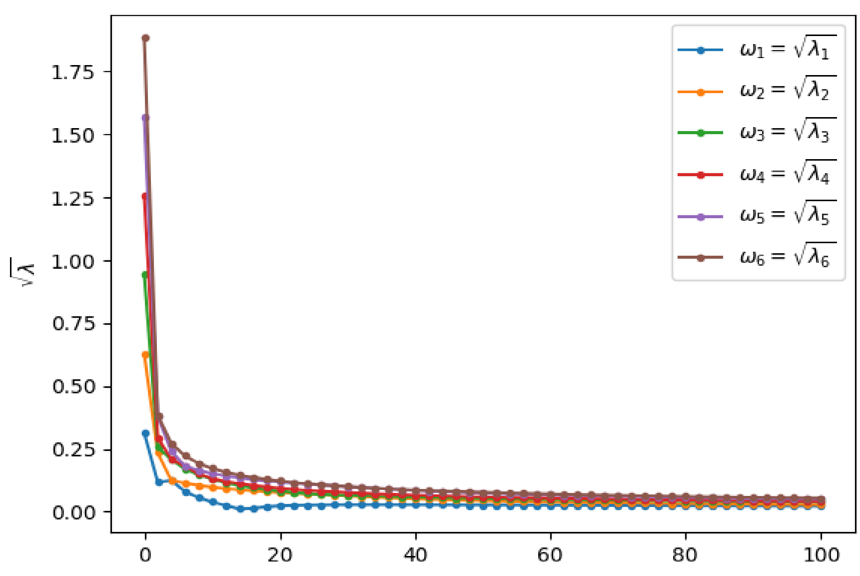
Wyznaczono wzór na częściową wartość komórki macierzy:

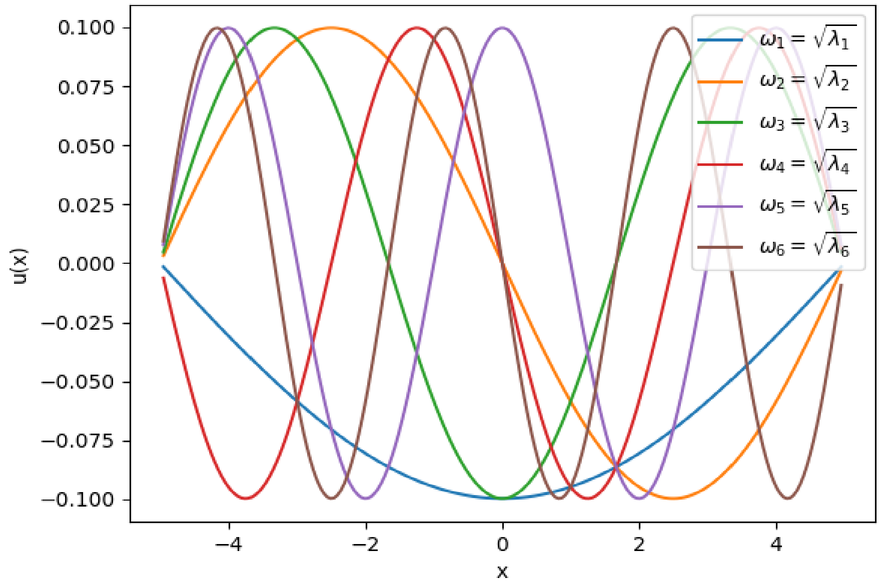
$$D = \frac{N}{\rho_i \Delta x^2}, \tag{9}$$

Gdzie otrzymana macierz **A** jest postaci (i - numer wiersza macierzy):

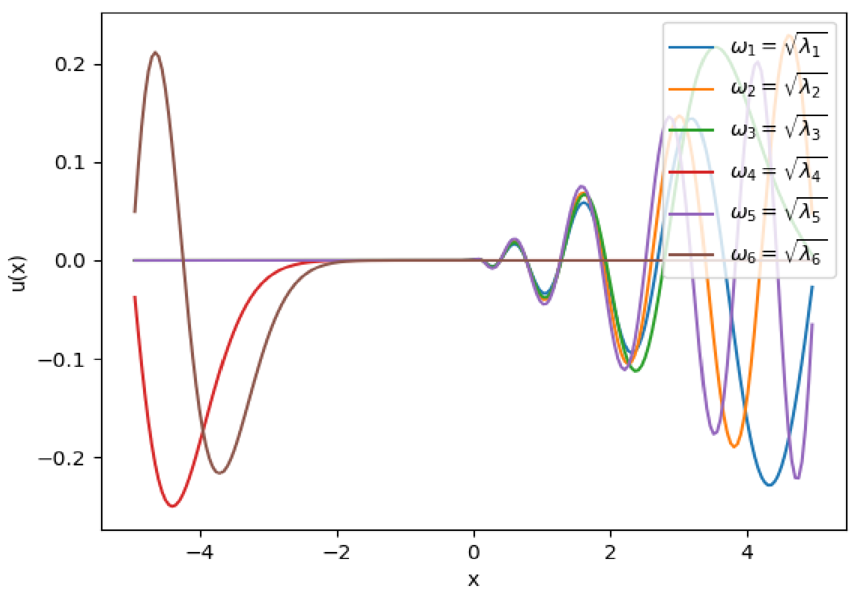
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2D_i & -D_i & 0 & ... & 0 & 0 \\ -D_i & 2D_i & -D_i & ... & 0 & 0 \\ 0 & -D_i & 2D_i & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_i & ... & -D_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2D_i & -D_i \\ 0 & 0 & 0 & ... & -D_i & 2D_i \end{pmatrix} \tag{10}$$

3 Wyniki





$\alpha = 0$



$\alpha = 100$

4 Wnioski

Wykonane obliczenia zgadzają się z oczekiwanym wynikiem dla wartości własnych oraz dla wektorów własnych, dla $\alpha = 0$.

W przypadku $\alpha = 100$ wkradł się najprawdopodobniej błąd, gdyż wykres nie przypomina kształtem oczekiwanego.

Z wykresu numer 2 ($\alpha = 0$) można wywywnioskować, że wraz ze wrostem częstości drgań struny, wzrasta też liczba punktów zgięcia tej struny (na wykresie ekstrema lokalne).

Natomiast z dobrego wykresu dla $\alpha = 100$ (oczekiwanego) wynika, iż jest ona mniej podatna na zginanie w punktach leżących blisko środka struny, co ma swoje fizyczne wytłumaczenie - jest tam gęstsza, gdyż na to wpływa współczynnik alfa.