Metody numeryczne

Sprawozdanie 1

Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą eliminacji Gaussa-Jordana

Mateusz Górczany

Luty 2020

1 Wstęp teoretyczny

Metoda Gaussa-Jordana - metoda rozwiązywania układu równań liniowych. Polega ona na redukowaniu wyrazów w każdym wierszu, by ostatecznie dostać układ równań opisujący każdą ze zmiennych osobno.

Przykład:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 6x + 8y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 6 & 8 & 14 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -6 \\ + \end{array} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -4 & -34 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \big| \cdot -\frac{1}{4} \end{array} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{17}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ -2 \end{array} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{17}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = \frac{17}{2} \end{cases}$$

2 Opis rozwiązywanego zadania na laboratoriach

Przykładowy układ równań na laboratoriach uzyskano z równania rózniczkowego dla oscylatora harmonicznego (1):

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t) \tag{1}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} \tag{2}$$

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x(t) = Acos(\omega t + \phi)} \tag{4}$$

(1) - równanie opisujące wychylenie końcówki oscylatora harmonicznego, w zależności od czasu

(2) - przybliżenie równania (1)

(3) - iteracyjny przepis wynikający z równania (2)

(4) - teoretyczne rozwiązanie równania (1)

Δt - odcinek czasu (w sekundach), h - krok, x_i - wychylenie końcówki oscylatora, A - amplituda drgań, v_0 - prędkość początkowa, i - numer pomiaru, ϕ - przesunięcie w fazie, k - stała sprężystości, m - masa drgająca

$$Dane: \begin{cases} \Delta t = h \\ x_0 = A \\ x_i = x(ih) \\ \frac{x_1 - x_0}{h} = v_0 \\ \frac{k}{m} = 1 = \omega^2 \\ v_0 = 0 \\ A = 1 \\ h = 0.1 \end{cases}$$

Przykładowa macierz **P** i wektor $\vec{u}$ dla 6 pomiarów położena końcówki oscylatora harmonicznego.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} x0 \\ x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Za pomocą biblioteki *nrutil.c* stworzono macierz kwadratową **A** $n \times n$ oraz wektor $\vec{b}$ $n \times 1$. Macierz **A** i wektor $\vec{b}$ wypełniono liczbami, analogicznie jak macierz **P** i wektor $\vec{u}$. Używając funkcji *gaussj()* z biblioteki *gaussj.c* rozwiązanio układ równań:

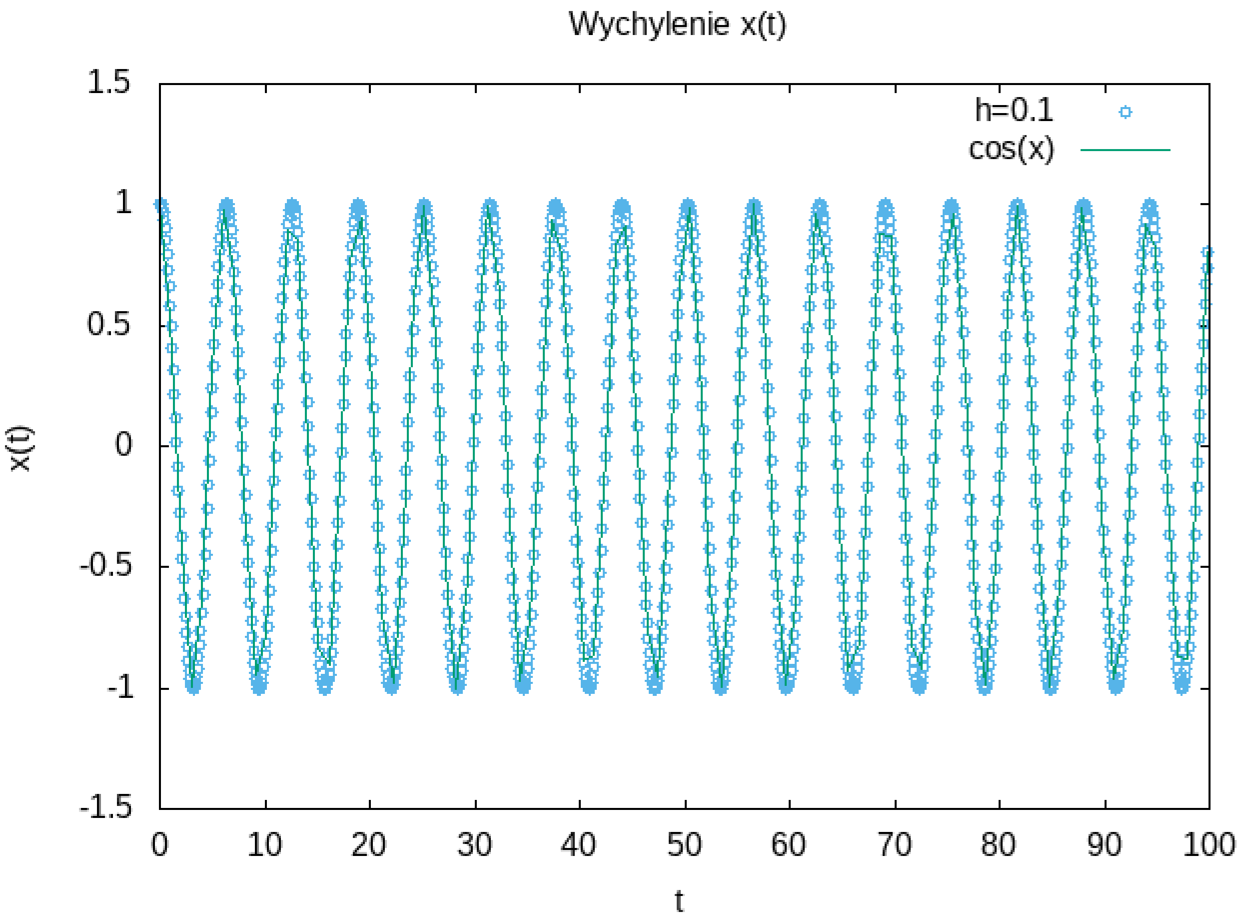
$$\mathbf{A} \times \vec{x} = \vec{b} \tag{5}$$

gaussj(A,n,b,1);

Wektor $\vec{x}$ (nadpisany wektor $\vec{b}$) posłużył do wykonania wykresu, opisującego położenie końcówki oscylatora harmonicznego.

3 Wyniki

Dla n = 1000 pomiarów, funkcja *x(t)* przyjęła wartości:



t - czas w sekundach $[s]$, interwał czasowy - $100[s]$

4 Wnioski

Otrzymano krzywą, która wyglądem przypomina *cosinusa*. Zgodne jest to z teoretycznym rozwiązaniem, czyli równaniem (4).

Dzięki sprowadzeniu równania różniczkowego do postaci macierzowej oraz rozwiązując je eliminacją *Gaussa-Jordana* można dojść do wyników zgodnych z teoretycznymi oczekiwaniami. Sposób ten sprawia, że ze skomplikowanych równań różniczkowych da się uzyskać poprawne wyniki za pomocą komputera, bez konieczności posiadania teoretycznego rozwiązania. Korzyści z zastosowania eliminacji Gaussa-Jordana:

1. złożoność obliczeniowa $O(n^3)$

2. mniej skomplikowana dla komputera niż metoda wyznaczników