Metody numeryczne

Sprawozdanie 7

Interpolacja Newtona

Mateusz Górczany

Kwiecień 2020

1 Wstęp teoretyczny

Interpolacja Newtona to proces, w którym można odtworzyć pierwotny wygląd funkcji za pomocą poszczególnych wartości oryginalnej funkcji.
węzły - wybrane punkty z dziedziny, dla których znana jest wartość oryginalnej funkcji.
Wybór sposobu wyznaczania węzłów determinuje późniejszy wygląd funkcji.

Przykładowe metody:

1. węzły równoodległe
2. węzły Czebyszewa

Metoda (1) polega na podzieleniu przedziału na równe części, np. $x \in [-5, 5]$, n = 5,

$$x_k = -5, -3, -1, 1, 3, 5 \quad k = 0, 1 \ldots n. \tag{1}$$

Metoda (2) polega na wyznaczeniu węzłów, które są najbardziej skupione na brzegach przedziału. Służy do tego funkcja zwana wielomianem Czebyszewa.

$$x_k = \frac{1}{2}(x_{min} + x_{max}) + \frac{1}{2}(x_{min} - x_{max}) \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0, 1 \ldots, n. \tag{2}$$

k - numer węzła, x_{min} - lewy kraniec przedziału, x_{max} - prawy kraniec przedziału, n - liczba węzłów

Funkcja przybliżająca określona jest wzorem:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n}(f^{(j)} \cdot \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)) \tag{3}$$

x - argument funkcji, x_i - i-ty węzęł,
$f^{(j)}$ - wartość wyznaczona za pomocą następującego algorytmu:

$$\begin{array}{cccc}
x_0 & f(x_0) & & \\
 & & \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} & \\
x_1 & f(x_1) & & \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} \\
 & & \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & \\
x_2 & f(x_2) & & \vdots \\
 & & \vdots & \\
\vdots & & & \vdots \\
 & & \vdots & \\
x_n & f(x_n) & &
\end{array} \tag{4}$$

$x_0, x_1 \dots x_n$ - kolejne węzły, $f(x_0), f(x_1) \dots f(x_n)$ - wartości oryginału w węzłach.

$f^{(j)}$ jest **pierwszą** wartością j-tej kolumny (bez kolumny węzłów).

Przedstawiając algorytm (4) w postaci macierzowej, $f^{(j)}$ jest wartością macierzy na przekątnej (macierz nie zawiera kolumny węzłów).

Przykład$^{(*1)}$:

$x_0 = -\frac{3}{2} \quad x_1 = -\frac{3}{4} \quad x_2 = 0 \quad x_3 = \frac{3}{4} \quad x_4 = \frac{3}{2}$

$f(x_0) = -14.1014 \quad f(x_1) = -0.931596 \quad f(x_2) = 0 \quad f(x_3) = 0.931596 \quad f(x_4) = 14.1014$

$$
\begin{array}{cccccc}
-\frac{3}{2} & -14.1014 & & & & \\
 & & 17.5597 & & & \\
-\frac{3}{4} & -0.931596 & & -10.8784 & & \\
 & & 1.24213 & & 4.83484 & \\
0 & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & 1.24213 & & 4.83484 & \\
\frac{3}{4} & 0.931596 & & 10.8784 & & \\
 & & 17.5597 & & & \\
\frac{3}{2} & 14.1014 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W_n(x)} &= -14.1014 + 17.5597(x+\tfrac{3}{2}) - 10.8784(x+\tfrac{3}{2})(x+\tfrac{3}{4}) + 4.83484(x+\tfrac{3}{2})(x+\tfrac{3}{4})(x) \\
&= -0.00005 - 1.4775x - 0.00001x^2 + 4.83484x^3
\end{aligned}
$$

2 Opis rozwiązywanego zadania na laboratoriach

Zadanie polegało na wykonaniu interpolacji Newtona dla fukcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{5}$$

w przedziale: $x \in [-5, 5]$. Węzły wyznaczono dwoma sposobami:

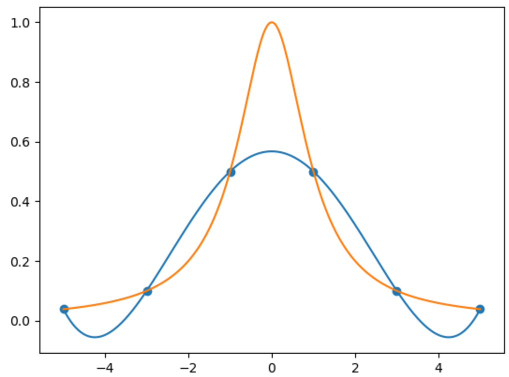
- równoodlegle
- wielomianem Czebyszewa

dla n = 5, 10, 15, 20 (liczba węzłów - początkowych wartości).

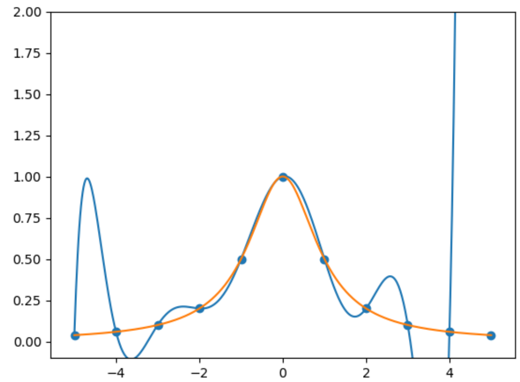
Na poczatku utworzono wektor węzłów i wektor wartości w nich, a następnie wyliczono macierz zawierającą na przekątnej wartości $f^{(j)}$. Na końcu wyznaczono wielomian $W_n(x)$ i użyto go do wykonania obliczeń.

3 Wyniki

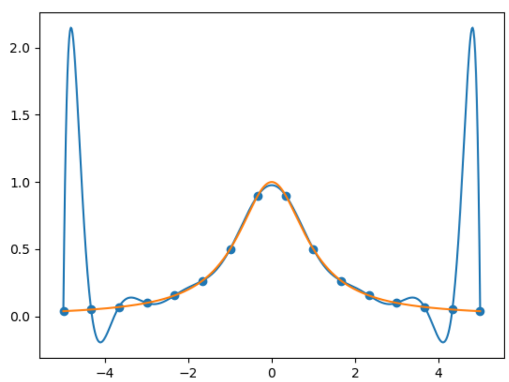
kolor żółty - oryginalna funkcja, kolor niebieski - interpolacja



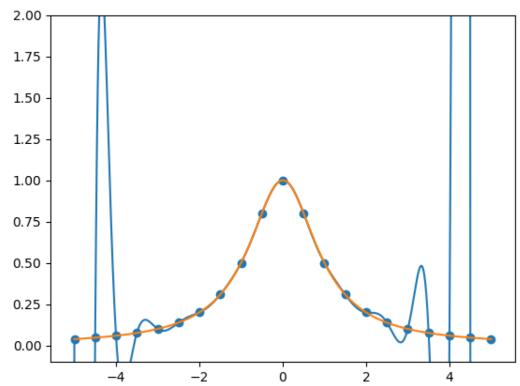
(a) n = 5



(b) n = 10

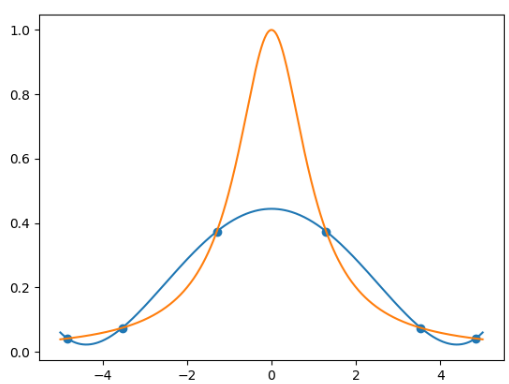


(c) n = 15

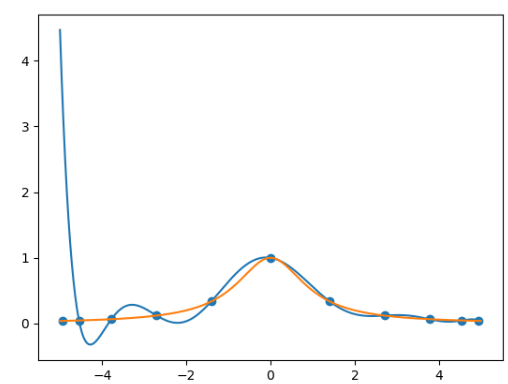


(d) n = 20

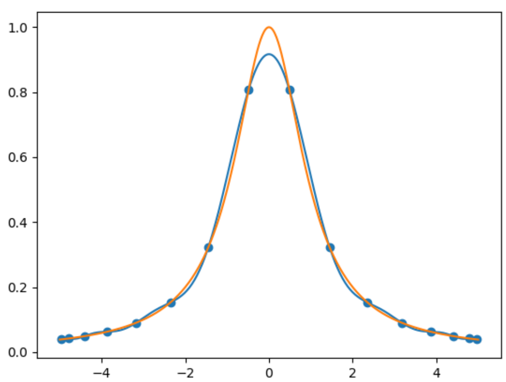
Węzły równoodległe - a, b, c, d



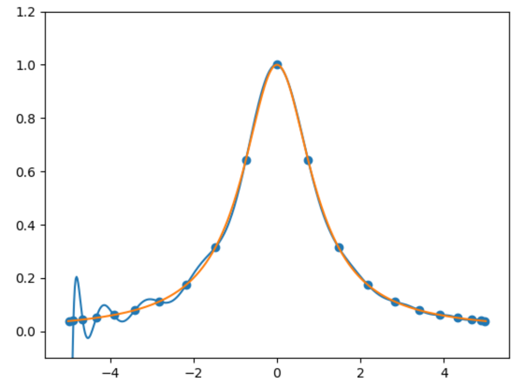
(e) n = 5



(f) n = 10



(g) n = 15



(h) n = 20

Węzły Czebyszewa (optymalna wersja) - e, f, g, h

4 Wnioski

Początkowe zwiększenie liczby równoodległych węzłów zadziała korzystnie na przybliżenie funkcji. Krzywa wtedy lepiej odzwierciedla oryginał.

Wybór węzłów za pomocą sposobu Czebyszewa wpływa na kształt krzywej na jej krańcach. Wyraźnie widać różnicę pomiędzy wykresem (d) a (h). Skoki wartości funkcji w drugiej wersji są wyraźnie łagodniejsze niż w pierwszej. Wynika to z tzw. efektu Rungego, który opisuje następującą zależność: początkowo wraz ze wzrostem liczby n równoodległych węzłów, przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n przybliżenie się pogarsza. Z tego powodu węzły Czebyszewa są lepszym wyborem, gdyż więcej z nich znajduje się na krańcach krzywej niż w jej środku.

Przypisy:
(*1) - przykład zaczerpnięty z wikipedii:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_polynomial`