Metody numeryczne

Sprawozdanie 13

Generowanie ciągu liczb pseudolosowych o rozkładzie jednorodnym w kuli 3D

Mateusz Górczany

Czerwiec 2020

1 Wstęp teoretyczny

Generatory liczb pseudolosowych są narzędziami, które są wykorzystywane do pozyskiwania liczb, pod pewnymi względami nieodróżnialnymi od prawdziwie losowych. Niektóre typy:

Generatory multiplikatywny, który wytwarza liczby o rozkładzie jednostajnym:

$$X_i = aX_{i-1} mod\ m \tag{1}$$

Ich wadą jest widoczna zależność kolejnych liczb od poprzednich, które układają się na hiperpłaszczyznach.

Metoda Boxa-Mullera - służy do generowania liczb losowych o rozkładzie normalnym, na podstawie dwóch wartości zmiennej o rozkładzie jednostajnym.

Jeśli zmienna losowa U ma rozkład jednostajny na odcinku [0,1], *to zmienna losowa* $X = F^-1(U)$ *ma rozkład o dystrybuancie F(x)*

Aby przekształcić liczby z rozkładu jednostajnego na normalny, definiuje się funkcję:

$$f(x,y) \ = \ f(x)f(y) \ = \ e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \tag{2}$$

Prawdopodobieństwo określone jest przez

$$p = f(x,y)dxdy = f(r,\theta)rdrd\theta.$$

podstawienie:

$$\begin{aligned} &x = rcos(\theta) && y = rsin(\theta) \\ &r \in [0,\infty] && \theta \in [0,2\pi], \end{aligned}$$

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$p(r,\theta) = re^{\frac{-r^2}{2}} drd\theta.$$

Wprowadzając nową zmienną $z = \frac{r^2}{2} \rightarrow dz = rdr, \quad z \in [0,\infty)$, określa się

$$f(z) = e^{-z} \rightarrow z = -ln(1-U_1), \quad U_1 \in (0,1)$$

$$\theta = U_2 \cdot 2\pi, \quad U_2 \in (0,1)$$

Dla pary U_1, U_2, wygenerowane zostają liczby x,y należące do rozkładu normalnego N(0,1)

$$x = rcos(\theta = \sqrt{-2ln(1-U_1)}cos(2\pi U_2) \tag{3}$$

$$y = rsin(\theta) = \sqrt{-2ln(1-U_1)}sin(2\pi U_2) \tag{4}$$

2 Opis rozwiązywanego zadania na laboratoriach

Pierwsze z zadań polegało na wygenerowaniu N = 2000 liczb pseudolosowych z generatora multiplikatywnego, trzema sposobami.

Uzyskiwane liczby normowano za pomocą poniższego wzoru:

$$x_i = \frac{X_i}{m + 1.0} \tag{5}$$

W pierwszych dwóch przypadkach, współczynniki wzoru (1) przyjęły wartości:

$$U_1(0,1): \ a \ = \ 18, \ m = 2^{13} - 1, \ X_0 = 10, \tag{6}$$

$$U_2(0,1): \ a \ = \ 85, \ m = 2^{13} - 1, \ X_0 = 10. \tag{7}$$

W trzecim

$$X_i = (1176 \cdot X_{i-1} + 1476 \cdot X_{i-2} + 1776 \cdot X_{i-3}) \bmod \left(2^{32} - 5\right) \tag{8}$$

Dla każdego z nich sporządzono wykresy $x_{i+1}(x_i)$, $x_{i+2}(x_i)$, $x_{i+3}(x_i)$.

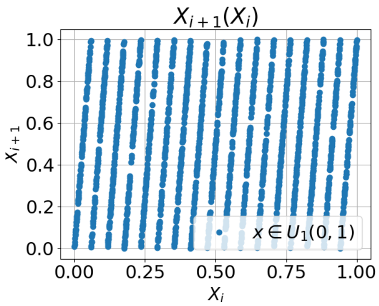
Trzecie zadanie polegało na wygenerowaniu N wektorów metodą Boxa-Mullera. Do tego celu użyto:

$$\begin{aligned}
&u_1 \in U_3(0,1)\\
&u_2 \in U_3(0,1)\\
&x_i = \sqrt{-2\ln(1-u_1)}\cos(2\pi u_2)\\
&y_i = \sqrt{-2\ln(1-u_1)}\sin(2\pi u_2)\\
&u_3 \in U_3(0,1)\\
&u_4 \in U_3(0,1)\\
&z_i = \sqrt{-2\ln(1-u_3)}\cos(2\pi u_4)
\end{aligned}$$

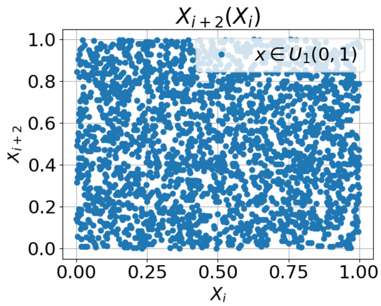
$$\vec{r}_i \leftarrow \frac{\vec{r}_i}{\|\vec{r}_i\|_2}$$

Następnie wygenerowano zmienną o rozkładzie jednomianowym $h_d(s) = ds^{d-1}, d = 3$. Sprawdzono, czy uzyskane liczby są równomiernie rozłożone na kuli. Na końcu wygenerowano histogramy, opisujące rozkład otrzymanych liczb.

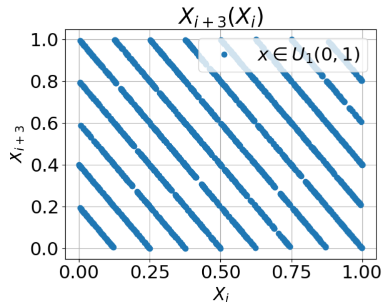
3 Wyniki



(a)

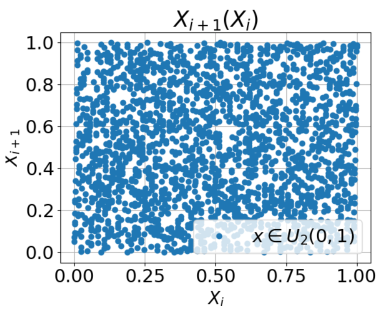


(b)

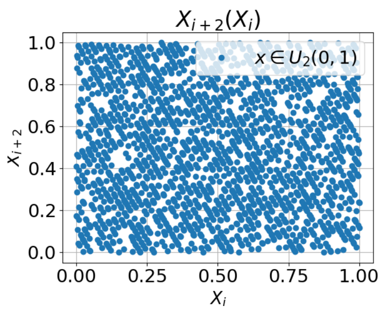


(c)

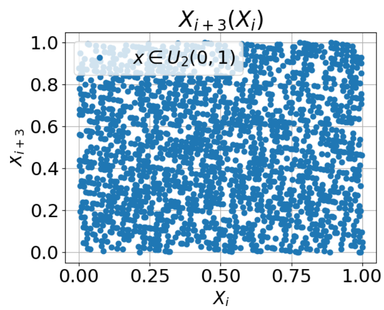
Rysunek 1: U_1



(d)

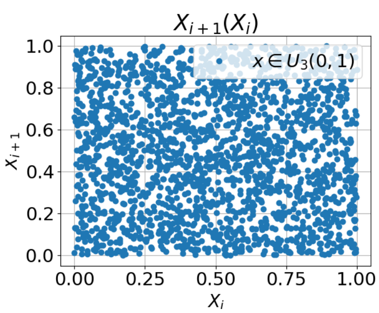


(e)

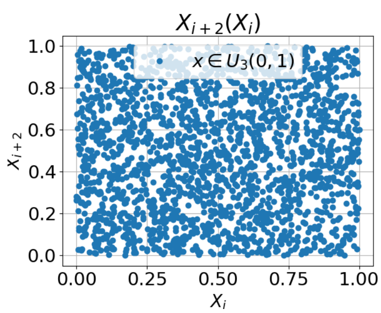


(f)

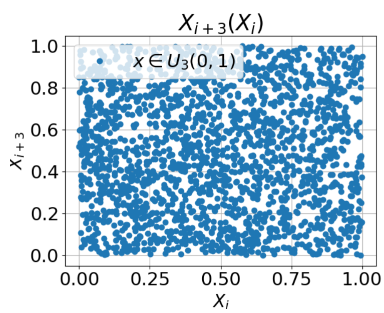
Rysunek 2: U_2



(g)

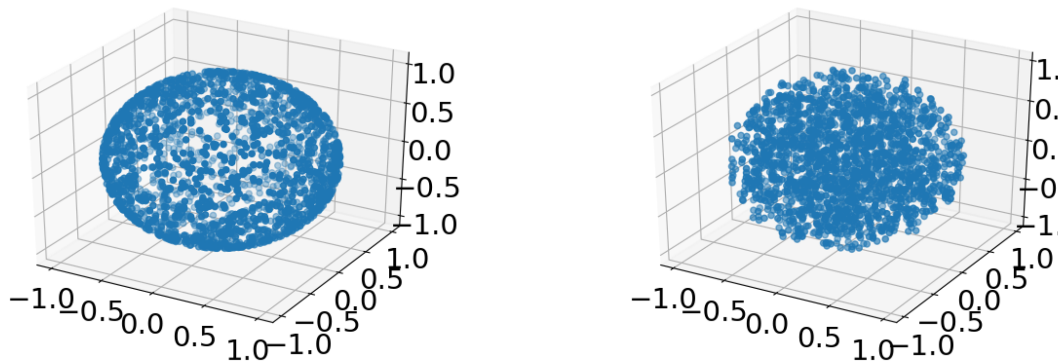


(h)



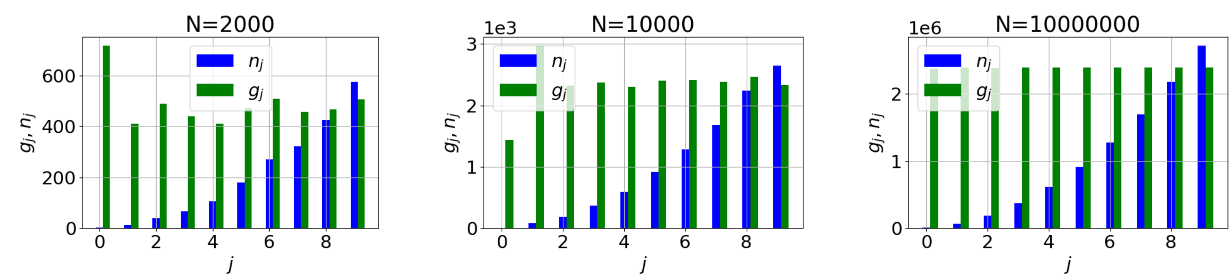
(i)

Rysunek 3: U_3



(j) (k)

Rysunek 4: U_3



(l) (m) (n)

Rysunek 5: U_3

4 Wnioski

W przypadku generatorów multiplikatywnych, dwa pierwsze cechują się widoczną zależnością kolejnych liczb od poprzednich. Takie zjawisko jest nieporządane. W trzecim generatorze nie da się zauważyć zależności między kolejnymi liczbami, co może wskazywać na dobre dobranie parametrów.

Dla niskich wartości N, słupki histogramów g_j, gdzie każdy słupek określa ilość liczb każdej z 10 warstw kuli, ich wysokość jest zauważalnie różna. Wraz ze wzrostem liczby wektorów, przyjmuje jednak rozkład coraz bardziej podobny do jednorodnego, a n_j do normalnego. Oznacza to, że zadanie przprowadzono zgodnie z założeniami metody Boxa-Mullera.