Metody numeryczne

Sprawozdanie 13

Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur Gaussa

Mateusz Górczany

Czerwiec 2020

1 Wstęp teoretyczny

Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur Gaussa polega na określeniu następującej sumy:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} w_i g(x_i), \tag{1}$$

w taki sposób, aby najlepiej przybliżała całkę :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \rho(x)g(x)dx. \tag{2}$$

Istnieje wiele wersji powyższych kwadratur. Oto przykładowe:

kwadratura Gaussa-Legendre'a, $w(x) = 1$:

$$I(f) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i), \tag{3}$$

kwadratura Gaussa-Laguerre'a, $w(x) = e^{-x}$:

$$I(f) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i), \tag{4}$$

kwadratura Gaussa-Hermite'a, $w(x) = e^{-x^2}$:

$$I(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i). \tag{5}$$

Powyższe metody zaimplementowano w bibliotece *Numerical Recipes*, którą wykorzystano do wykonania ćwiczeń.

2 Opis zadania rozwiązywanego na laboratoriach

Przeprowadzono całkowanie numeryczne, dla każdej metody obliczono różnicę od wartości teoretycznej i przedstawiono na wykresach.
Obliczone całki:

2.1 Całka c_1

$$c_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \tag{6}$$

Wartość teoretyczna: $c_1 = \frac{\pi}{3}$
Do obliczeń wykorzystano: Kwadraturę Gaussa-Legendre'a
Zakres iteracji: n = 2,3...100, wykres (a)

2.2 Całka c_2

$$c_2 = \int_0^\infty ln(x)e^{-x^2}dx \tag{7}$$

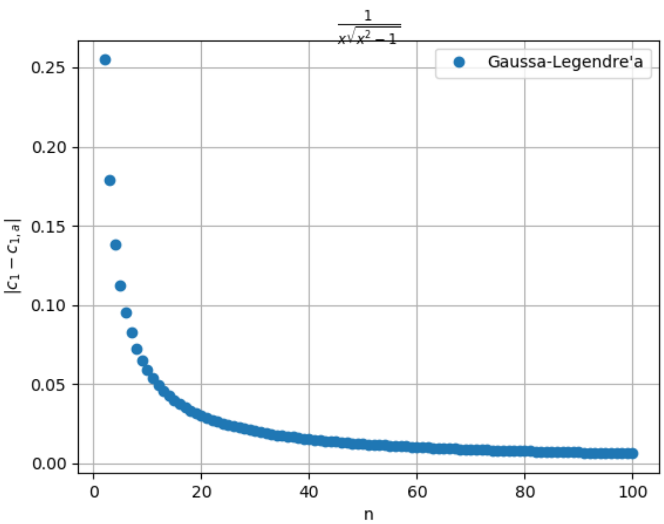
Wartość teoretyczna: $c_2 = -0.8700577$
Do obliczeń wykorzystano: Kwadraturę Gaussa-Legendre'a oraz kwadraturę Gaussa-Hermite'a
Zakres iteracji: n = 2,3...100 dla Gaussa-Legendre'a,
n = 2,4,6...100 dla Gaussa-Hermite'a, wykres (b)

2.3 Całka c_3

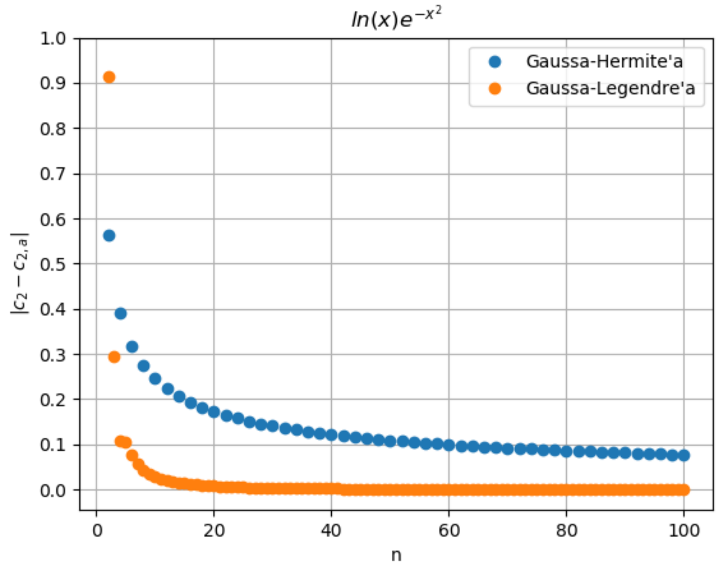
$$c_3 = \int_0^\infty sin(2x)e^{-3x}dx \tag{8}$$

Wartość teoretyczna: $c_3 = \frac{2}{13}$
Do obliczeń wykorzystano: Kwadraturę kwadraturę Gaussa-Laguere'a
Zakres iteracji: n = 2,3...10,
Przyjęto pierwszą metodę obliczenia całki, tj. podzielono funkcję podcałkową $f_3(x)$ przez e^{-x}, a następnie wyznaczono węzły i obliczono sumę. Wyniki różnicy z wartością teoretyczną można zobaczyć na wykresie (c).

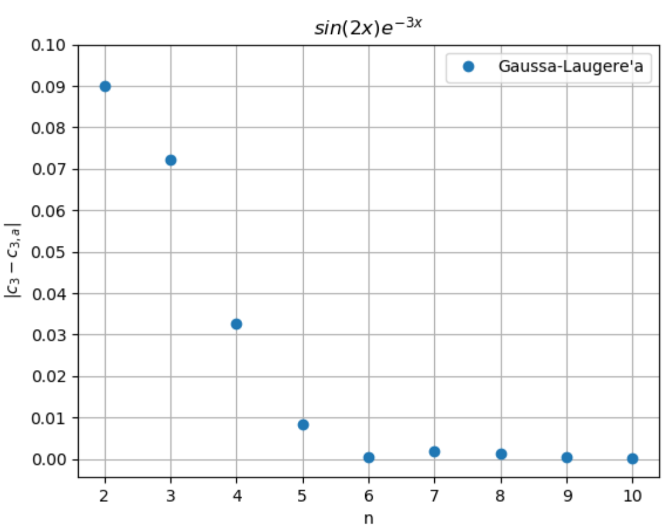
3 Wyniki



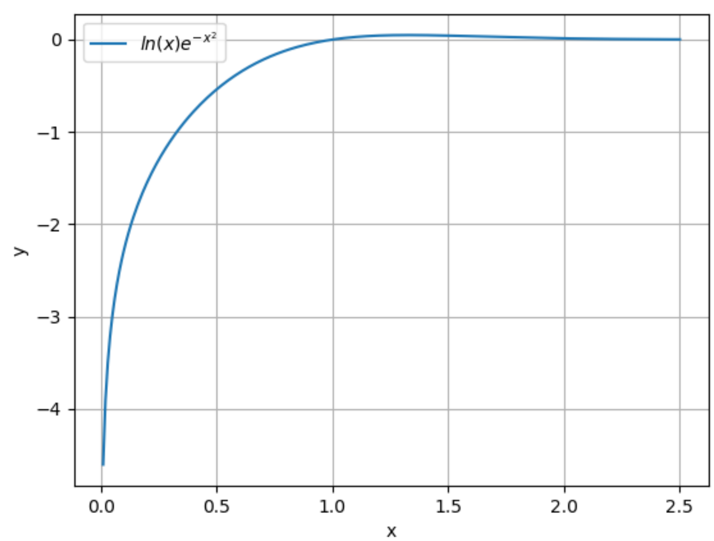
(a)



(b)



(c)



(d)

4 Wnioski

W przypadku całki c_2, kwadratura Gaussa-Legendre'a okazała się lepsza w przybliżaniu wartości. Ma to związek ze sposobem liczenia, który wykorzystują testowane kwadratury. Pierwszy sposób zakładał liczenie na całym przedziale $[0, \infty]$ co wiązało się z ułożeniem odpowiedniego wielomianu interpolującego na całej tej długości, a więc węzły interpolacyjne zostały rzadko ułożone. Należy także zwrócić uwagę, że funkcja $ln(x)e^{-x^2}$ przyjmuje wartości bliskie 0 powyżej agrumentu $x = 1$, co widać na wykresie (d). Taki kształt mógł się okazać trudny do odwzorowania dla tego sposobu. W drugiej metodzie wystarczyło policzenie całki w zakresie [0, 5], więc węzły interpolacyjne zostały uplasowane gęściej, co zwiększyło dokładność wyliczeń.

W przypadku pozostałych metod, najbardziej wyróżnia się kwadratura Gaussa-Laugerre'a, która już dla n=6, dała komparatywnie dobry rezultat (wykres c), patrząc na pozostałe wyniki.