Zadania 2021Z - Zestaw 2 (II stopień)

Dokument zawiera listę 5 zadań, których rozwiązania należy dostarczyć w 2-gim kamieniu milowym z datami określonymi na stronie kursu.

Jako wynik należy załączyć archiwum zip zawierające za każdym razem po pięć katalogów nazwami: zad6, zad7, zad8, zad9, zad10, itp. W każdym podkatalogu powinny znajdować się oczekiwane wyniki, które zostały opisane pod zadaniami. Zeskanowane dokumenty muszą być w formacie PDF!

Zadanie 6

Wyznacz wartości współczynników aproksymacji trygonometrycznej, zakładając postać funkcji aproksymującej:

$$T_m(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x) + a_3 \cos(2x) + a_4 \sin(2x) + a_5 cos(3x) + +a_6 sin(3x)$$

dla następującego zbioru danych:

x_i	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1.0**	**1.1**
y_i	0	0	1	1	0	0	0.5	1	1.5	0.5

Oczekiwany wynik:

- ręczne / na kartce przekształcenia wzoru $T_m(x)$ po zastosowaniu metody najmniejszych (chodzi o wyznaczeni pochodnych cząstkowych względem parametrów a_i), w wyniku oczekuję algebraicznego układu równań, którego rozwiązanie pozwoli znaleźć zbiór współczynników;
- skrypt w MATLABie (lub Python) z obliczeniami arytmetycznymi oraz kodem generującym wizualizację wyniku,
- jeden rysunek z wykresem w formacie PNG zawierającym wszystkie przebiegi.

Zadanie 7

Oblicz średni błąd aproksymacji funkcji $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ przy zastosowaniu aproksymacji wielomianowej 3-go stopnia (wielomian: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + a_4 x^4$) w przedziale $\langle -5, 5 \rangle$, zakładając, że aproksymowana funkcja $f(x)$ obliczona jest dla punktów $x_i = -5, -4, -3, \ldots, 4, 5$. Aby obliczyć średni błąd aproksymacji, wykonaj próbkowanie przedziału dla 1000 punktów. Dla każdej próbki oblicz wartość funkcji $f(x)$ oraz wartość wielomianu aproksymującego.

Uwaga! W wielomianie specjalnie brakuje składnika a_2x^2.

Oczekiwany wynik:

- skrypt w MATLABie (lub Python) z obliczeniami arytmetycznymi oraz kodem generującym wizualizację wyniku,
- jeden rysunek z wykresem w formacie PNG zawierającym przebieg oryginalnej funkcji oraz funkcji aproksymującej.

Podpowiedź: patrz podrozdział 7.2 podręcznika. Kroki postępowania:

1. Wyznacz zbiór punktów x_i, y_i na podstawie funkcji $f(x)$
2. Oblicz współczynniki wielomianu aproksymującego a_0, a_1, a_3, a_4.
3. Oblicz wartości wielomianu aproksymującego dla próbek x_j gdzie $j = 1, 2, 3, \ldots, 1000$, oraz wartość funkcji aproksymowanej $y_j = f(x_j)$
4. Oblicz wektor różnic $y_j - p(x_j)$
5. Zsumuj wektor różnic i podziel przez liczbę punktów x_j.

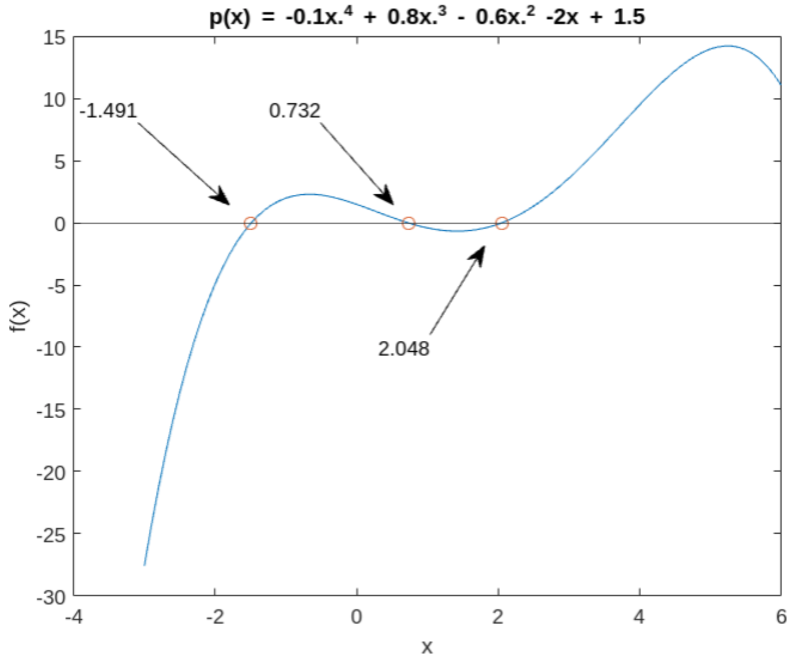
Należy zaznaczyć, że określony w niniejszym zadaniu średni błąd aproksymacji zakłada, że znamy rzeczywisty przebieg funkcji i chcemy poznać zgodność aproksymacji w całym przedziale, a nie tylko w węzłach aproksymacji x_i. Bardzo często jako błąd aproksymacji określa się sumę różnic wartości wielomianu aproksymującego oraz zadanych wartości dyskretnych ($x_i = -5, -4, -3, \ldots, 4, 5$). Tutaj chodzi o inny błąd, który liczymy wykonując dodatkowe, bardzo gęste próbkowanie.

Zadanie 8

Stosując metodę Regula Falsi znajdź wszystkie pierwiastki poniższego wielomianu w przedziale $x \in \langle -3, 6 \rangle$. W przedziale tym znajdują się aż trzy różne pierwiastki. Zastosuj dowolnie wybraną metodę izolacji pierwiastków (pokaż obliczenia, a nie odczytuj tylko z wykresu!) w celu wyspecyfikowania 3 przedziałów do poszukiwań metodą Regula Falsi.

$$p(x) = -0.1x.^4 + 0.8x.^3 - 0.6x.^2 - 2x + 1.5$$

Powtórz obliczenia stosując metodę Newtona. Możesz wykorzystać wyniki izolacji pierwiastków.



Rysunek 2. Przebieg rozwiązywanej funkcji.

Oczekiwany wynik:

- ręczne pełne obliczenia na kartce zgodnie z wzorami i metodyką przedstawioną w podręczniku dla obydwu przypadków: Newtona i Regula Falsi,
- 2 skrypty w MATLABie (lub Python) z obliczeniami arytmetycznymi oraz kodem generującym wizualizację wyniku zgodną z rysunkiem 2.
- jeden rysunek z wykresem w formacie PNG zawierającym przebieg z zaznaczonymi punktami.

Podpowiedzi: zastosuj w MATLABie funkcje: `plot, title, xlabel, ylabel, yline, annotation, sprintf('%.3f', x0)`

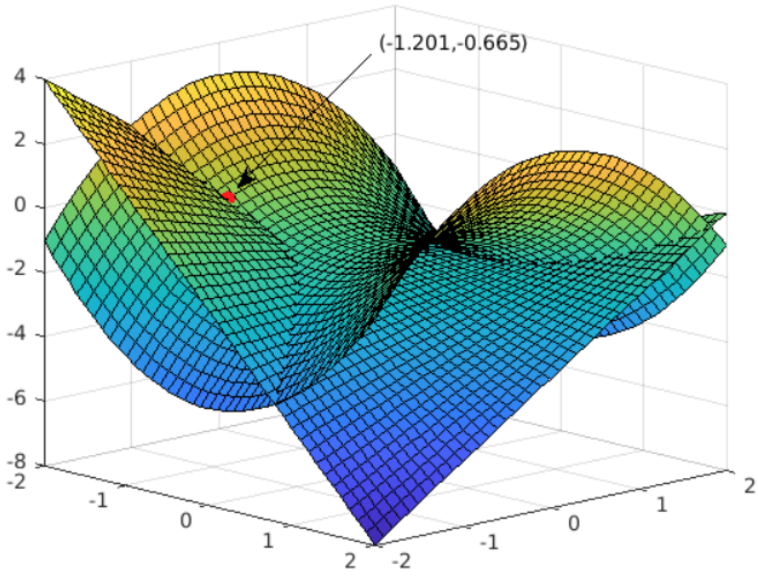
Zadanie 9

Znajdź rozwiązanie poniższego układu nieliniowego:

$$\begin{cases} x_1 x_2 - x_1 = 2 \\ x_1^2 - x_2^2 = 1 \end{cases}$$

stosując metodę Newtona dla układów równań. Przyjmij jako punkt startowy: $x_1 = -0.6, x_2 = -0.65.$

Przykładowa wizualizacja:



Rysunek 3.

Oczekiwany wynik:

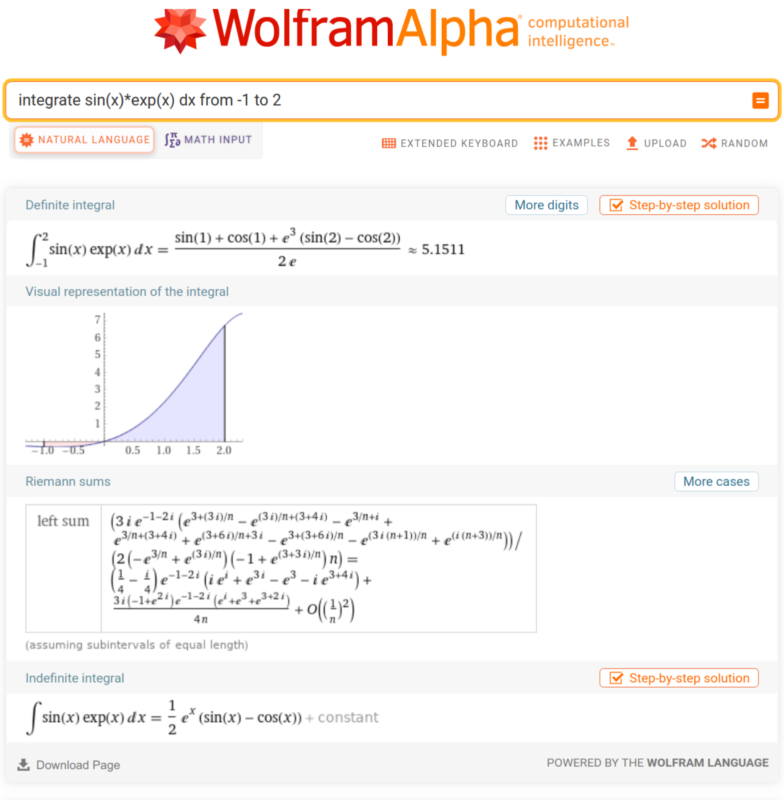
- ręczne pełne obliczenia na kartce zgodnie z wzorami i metodyką przedstawioną w podręczniku,
- skrypt w MATLABie (lub Python) z obliczeniami arytmetycznymi oraz kodem generującym wizualizację wyniku (wykorzystaj funkcje `meshgrid, surf, scatter3, annotation`),
- jeden rysunek z wykresem w formacie PNG zawierającym wszystkie przebiegi.

Zadanie 10

Porównaj wartości całki obliczone za pomocą metod złożonych prostokątów i parabol (Simpsona) dla 6 przedziałów z wynikiem uzyskanym dla rozwiązania analitycznego w serwisie Wolfram Alpha:

$$I = \int_{-1}^{2} \sin(x) e^{x} dx$$

Porównaj wynik z rozwiązaniem analitycznym wyznaczonym za pomocą [Wolfram Alpha]?



Rysunek 4.

Oczekiwany wynik:

- ręczne pełne obliczenia na kartce zgodnie z wzorami i metodyką przedstawioną w podręczniku dla obydwu metod,
- skrypt w MATLABie (lub Python) z obliczeniami arytmetycznymi oraz kodem generującym przebieg funkcji podcałkowej (wykorzystaj funkcje `plot`),