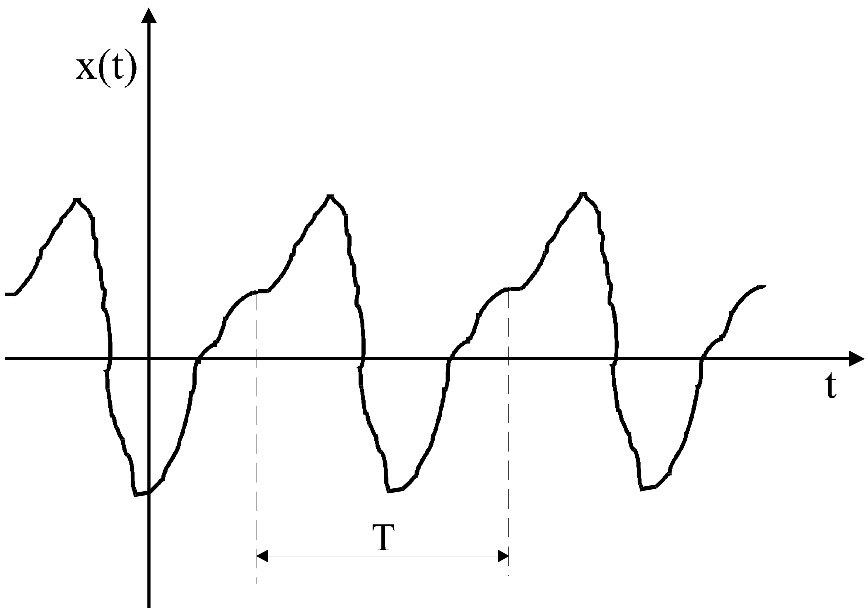
Rozdział 4

ANALIZA WIDMOWA

4.1. SZEREG FOURIERA

Rozważmy zmienną losową o charakterze ciągłym



spełniającą warunek okresowości

$$x(t) = x(t + k \cdot T) \tag{4.1}$$

dla dowolnego *t* oraz *k* całkowitego

okresowy przebieg czasowy *x(t)* zawsze może być wyrażony w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego (*szeregu Fouriera*)

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \tag{4.2}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta f \qquad (4.3)$$

$\Delta\omega$ - podstawowa częstość kołowa lub rozdzielczość widmowa (odległość pomiędzy sąsiednimi harmonicznymi)

Δf - częstotliwość podstawowa

składowe szeregu Fouriera (funkcje *sin* i *cos*) zwane są *harmonicznymi* lub rzadziej *harmonikami*

współczynniki Fouriera

> celem analizy Fouriera (spektralnej) jest wyznaczenie współczynników Fouriera

- wartość średnia

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \qquad (4.4)$$

- amplitudy funkcji *cos*

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}\right)dt \qquad (4.5)$$

- amplitudy funkcji *sin*

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}\right)dt \qquad (4.6)$$

Okresowy przebieg czasowy może być również wyrażony za pomocą szeregu składającego się z funkcji trygonometrycznych jednego typu (tj. **sin** lub **cos**) przesuniętych w fazie o wartości **kątów fazowych** φ_k lub Θ_k

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T} - \varphi_k\right) \qquad (4.2b)$$

lub

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T} - \Theta_k\right) \qquad (4.2c)$$

związki pomiędzy poszczególnymi współczynnikami Fouriera

$$A_k = B_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad (4.7)$$

$$\varphi_k = arc\ tg(b_k / a_k) \qquad (4.8a)$$

$$\Theta_k = arc\ tg(a_k / b_k) \qquad (4.8b)$$

proces wyznaczania współczynników Fouriera nazywany jest ***(prostym) przekształceniem Fouriera*** natomiast sumowanie harmoników w celu rekonstrukcji przebiegu czasowego x(t) – ***odwrotnym przekształceniem Fouriera***

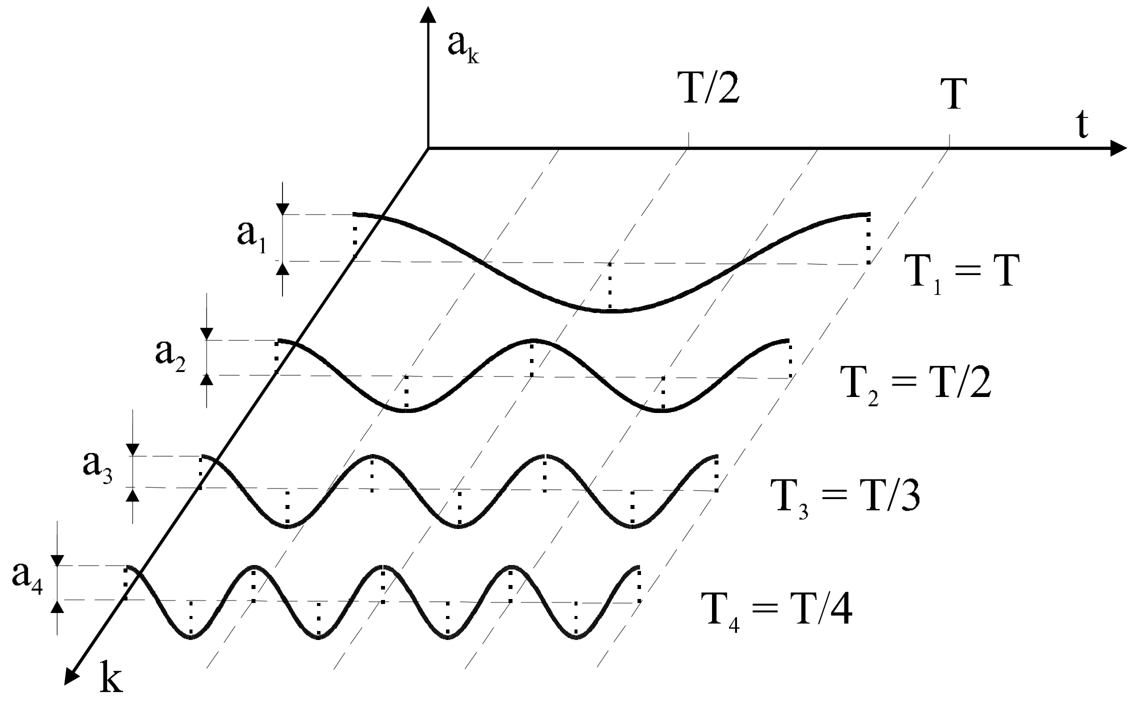
<u>(proste) przekształcenie Fouriera</u>

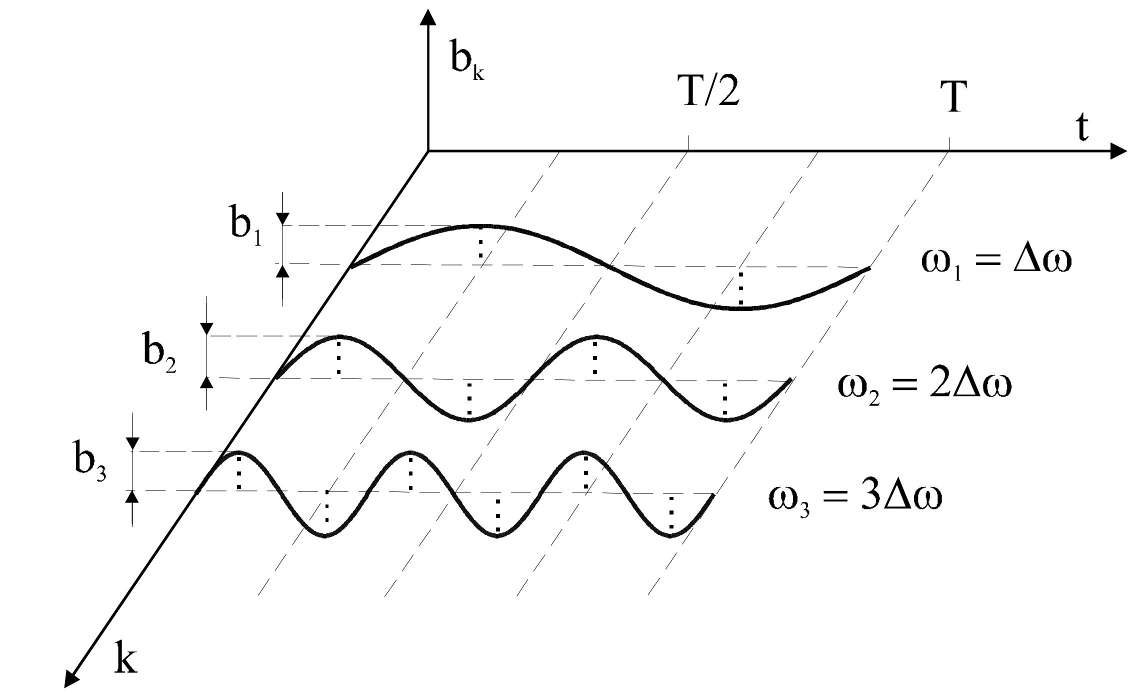
dziedzina czasu → dziedzina częstotliwości

<u>odwrotne przekształcenie Fouriera</u>

dziedzina częstotliwości → dziedzina czasu

<u>interpretacja graficzna szeregu Fouriera</u>

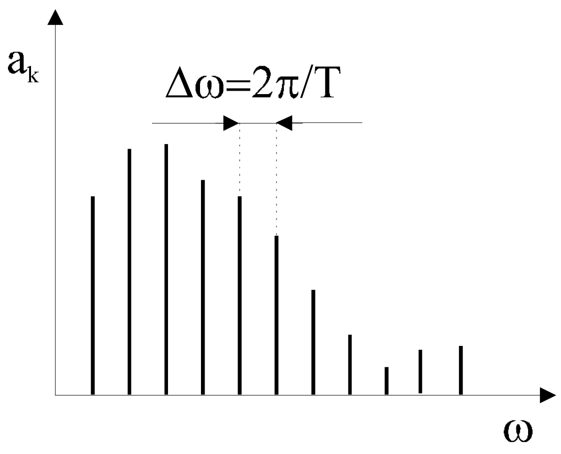


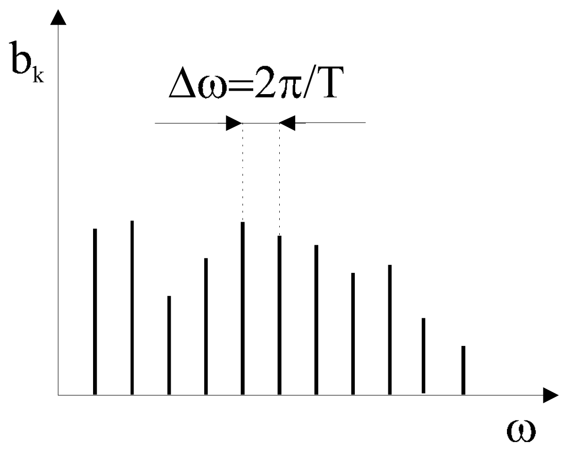


wynik analizy widmowej (tj. współczynniki Fouriera) są zwykle przedstawiane w postaci tzw. **spektrum** lub **funkcji spektralnych**

spektrum amplitudowe

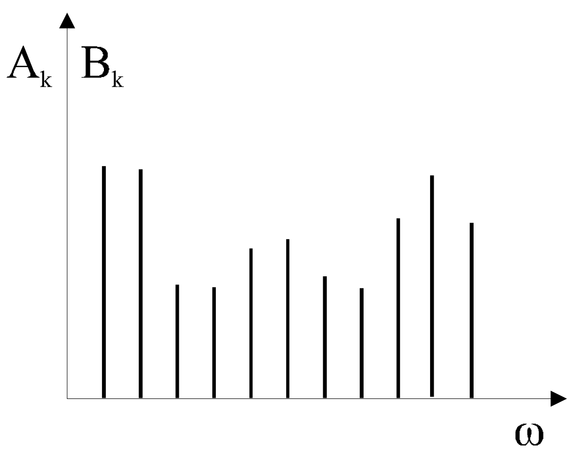
dla funkcji *sin* i *cos*

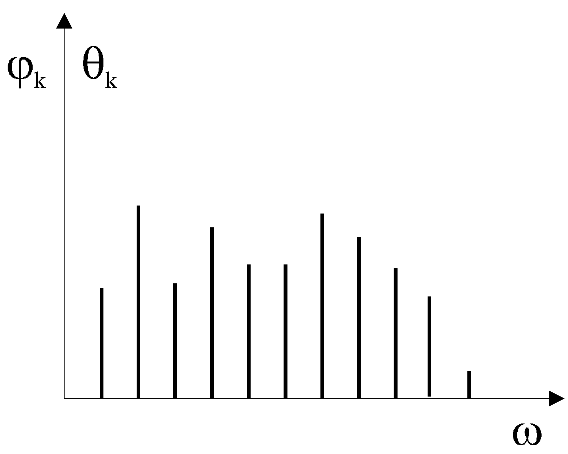




spektrum amplitudowo-fazowe

dla funkcji *sin* (lub *cos*) oraz *kątów fazowych*





4.2. ZESPOLONY SZEREG FOURIERA

Zdefiniujmy współczynniki Fouriera w następujący sposób

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt \tag{4.4}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}\right) dt \tag{4.5a}$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}\right) dt \tag{4.6a}$$

<u>uwaga:</u> $a_k(eq.\ 4.5) = 2a_k(eq.\ 4.5a) \;\wedge\; b_k(eq.\ 4.6) = 2b_k(eq.\ 4.6a)$

Szereg Fouriera przyjmuje postać

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kt}{T}\right) \tag{4.9}$$

współczynnik a_0 może być wyrażony jako

$$a_0 = a_0 \cos(0) + b_0 \sin(0) \tag{4.10}$$

a pozostałą część zależności (4.9) można rozpisać

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=-1}^{k=-\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

ponieważ wyrażenia

$$a_k \cos\frac{2\pi kt}{T} \quad and \quad b_k \sin\frac{2\pi kt}{T}$$

są <u>parzystymi</u> funkcjami k

Powyższe pozwala zapisać szereg Fouriera w postaci

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi kt}{T}+b_k\sin\frac{2\pi kt}{T}\right) \tag{4.11}$$

Rozważmy następujące wyrażenie

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\left(i\cdot a_k\sin\frac{2\pi kt}{T}-i\cdot b_k\cos\frac{2\pi kt}{T}\right) \tag{4.12}$$

jego wartość jest zawsze <u>równa zeru</u> ponieważ

$$a_k\sin\frac{2\pi kt}{T}\quad and\quad b_k\cos\frac{2\pi kt}{T}$$

są <u>nieparzystymi</u> funkcjami *k*, zatem

$$\sum_{k=-\infty}^{k=0}\left(a_k\sin\frac{2\pi kt}{T}\right)=-\sum_{k=0}^{k=\infty}\left(a_k\sin\frac{2\pi kt}{T}\right) \tag{4.13a}$$

oraz

$$\sum_{k=-\infty}^{k=0}\left(b_k\cos\frac{2\pi kt}{T}\right)=-\sum_{k=0}^{k=\infty}\left(b_k\cos\frac{2\pi kt}{T}\right) \tag{4.13b}$$

Zsumowanie równości (4.11) i (4.12) prowadzi do

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi kt}{T}+b_k\sin\frac{2\pi kt}{T}\right)+$$
$$+\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\left(i\cdot a_k\sin\frac{2\pi kt}{T}-i\cdot b_k\cos\frac{2\pi kt}{T}\right)=$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \left[a_k \left(cos\frac{2\pi kt}{T} + i \cdot sin\frac{2\pi kt}{T} \right) - i \cdot b_k \left(cos\frac{2\pi kt}{T} + i \cdot sin\frac{2\pi kt}{T} \right) \right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \left[(a_k - i \cdot b_k) \left(cos\frac{2\pi kt}{T} + i \cdot sin\frac{2\pi kt}{T} \right) \right]$$

i ostatecznie

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X_k \, exp\left(i\frac{2\pi kt}{T} \right)} \tag{4.14}$$

gdzie

$$\boxed{X_k = a_k - i \cdot b_k} \tag{4.15}$$

jest **zespoloną transformatą Fouriera**

Wykorzystując zależności (4.5a) i (4.6a) można wyrazić *transformatę Fouriera* w funkcji przebiegu czasowego *x(t)*

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) cos\left(\frac{2\pi kt}{T} \right) dt - i\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) sin\left(\frac{2\pi kt}{T} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[cos\left(\frac{2\pi kt}{T} \right) - i\, sin\left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \right] dt =$$

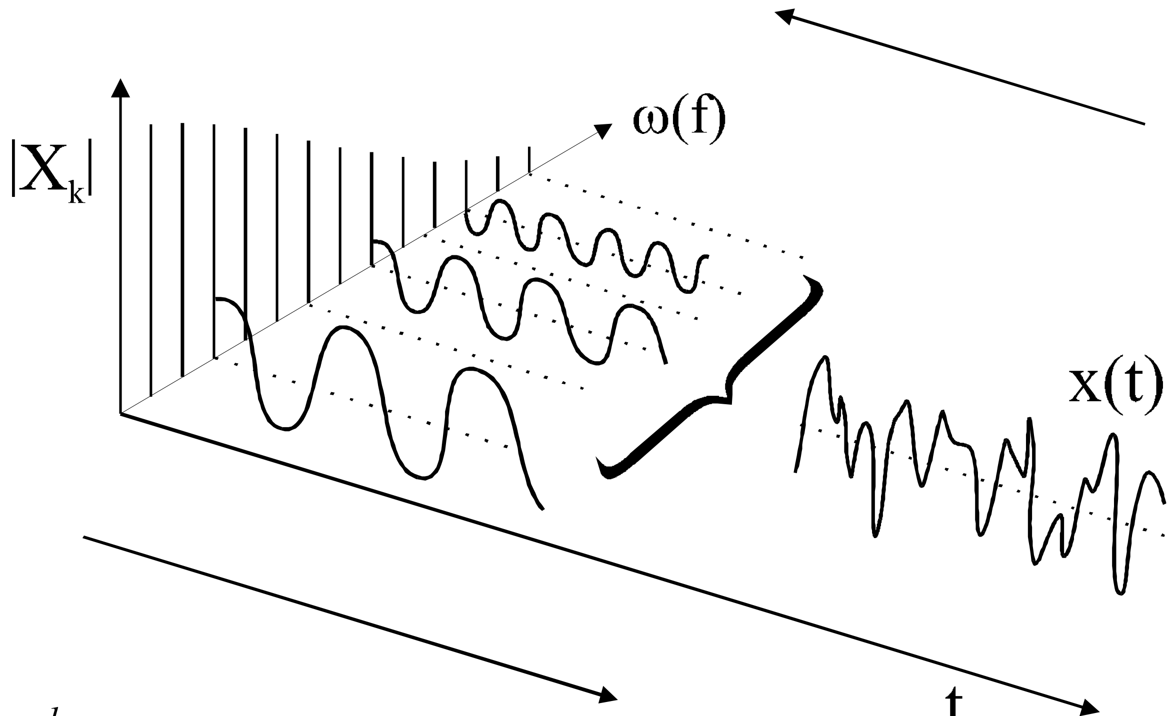
$$\boxed{X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) exp\left(-i\frac{2\pi kt}{T} \right) dt} \tag{4.16}$$

para zespolonych przekształceń Fouriera
(dla okresowych sygnałów)

ODWROTNE: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X_k \exp\left(i\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad \rightarrow F^{-1}[X(\omega)]$

PROSTE: $X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp\left(-i\frac{2\pi kt}{T}\right)dt \quad \rightarrow F[x(t)]$

(proste) przekształcenie Fouriera
F[x(t)]



$F^{-1}[X(\omega)]$
odwrotne przekształcenie Fouriera

4.3. WIDMO MOCY SYGNAŁU

stacjonarne sygnały okresowe → nieskończona energia

⇓

moc przebiegu czasowego *x(t)* – wartość średniokwadratowa

$$N = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt \tag{4.17}$$

x(t) może być zastąpiony szeregiem Fouriera

$$N = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\left\{a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}\left[a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)\right]\right\} dt =$$

$$= \frac{a_0}{T}\int_0^T x(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{a_k}{2}\left[\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(\omega_k t)dt\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{b_k}{2}\left[\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(\omega_k t)dt\right]\right\}$$

moc sygnału *x(t)* może być wyrażona w funkcji współczynników Fouriera

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} N_k = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \tag{4.18}$$

N_k – moc *k-tej* harmonicznej

$$N = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 = \left|X_0\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|X_k\right|^2 \tag{4.18a}$$

$$\boxed{N = \sum_k (\ mean\ square\ value\ )_k = \sum_k (\ RMS\ )_k^2} \qquad (4.19)$$

twierdzenie PARSEVALA

dziedzina czasu

$$N_t = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\, dt \qquad (4.20a)$$

dziedzina częstotliwości (spektralna)

$$N_\omega = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \left|X_0\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|X_k\right|^2 \qquad (4.20b)$$

moc wyznaczona w obydwu domenach jest identyczna

$$\boxed{N_t = N_\omega} \qquad (4.21)$$

przekształcenia Fouriera

$F[x(t)]$ oraz $F^{-1}[X(\omega)]$

nie zmieniają mocy sygnału

4.4. WIDMO FALI MONOHARMONICZNEJ

Rozważmy sygnał o postaci

$$x(t) = M + C\sin(\omega_s t - \alpha) \qquad (4.22)$$

Stosując zależności (4.4), (4.5) oraz (4.6) otrzymujemy

- *wartość średnią*

$$a_0 = M$$

- *amplitudę funkcji cos dla k = 1*

$$a_1 = \sqrt{C^2\left(1 - \frac{1}{tg^2\alpha + 1}\right)}$$

- *amplitudę funkcji sin dla k = 1*

$$b_1 = \sqrt{\frac{C^2}{tg^2\alpha + 1}}$$

$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$ i $b_1 = C$

$\alpha = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = C$ i $b_1 = 0$

- *amplitudy funkcji cos oraz sin dla k = 2,...,∞*

$$a_k = 0 \quad oraz \quad b_k = 0$$

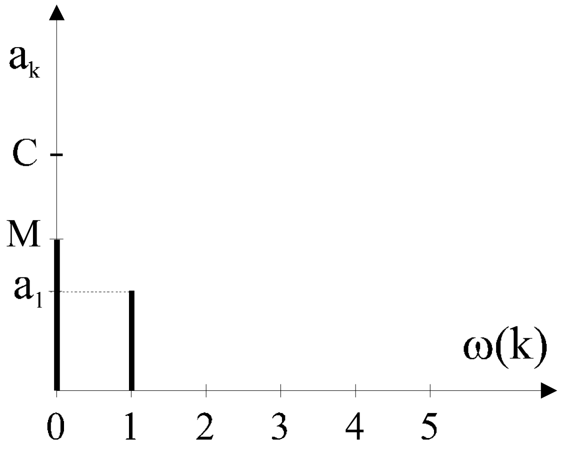
- *współczynniki "cosinusowego" i "sinusowego" szeregu Fouriera*

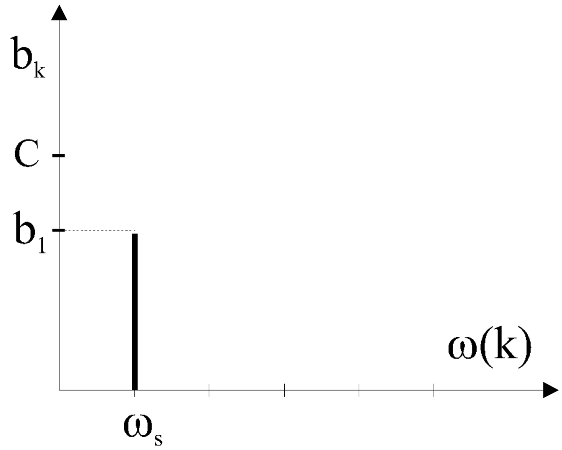
$$A_0 = B_0 = M \quad oraz \quad A_1 = B_1 = C$$

$$\varphi_1 = arctg(b_1 / a_1) = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

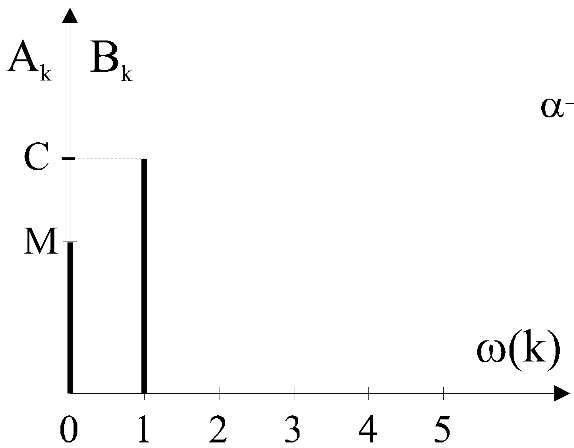
$$\Theta_1 = arctg(a_1 / b_1) = \alpha$$

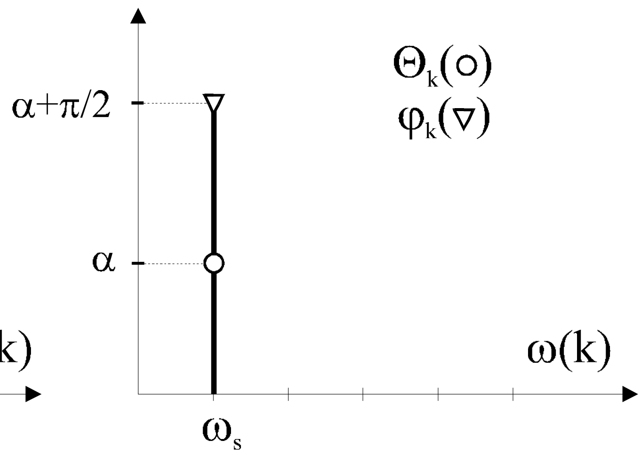
- *widmo amplitudowe*



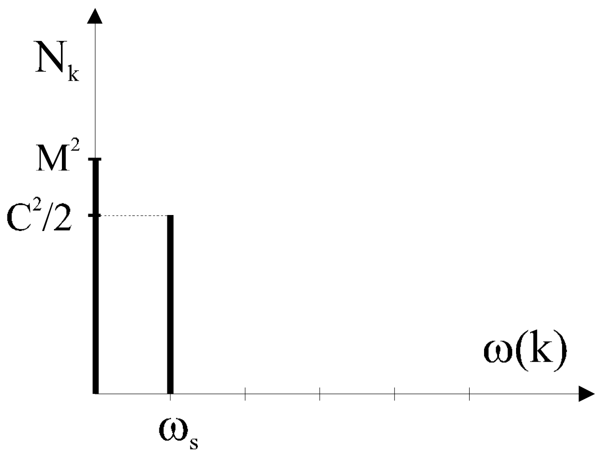


- *widmo amplitudowo-fazowe*



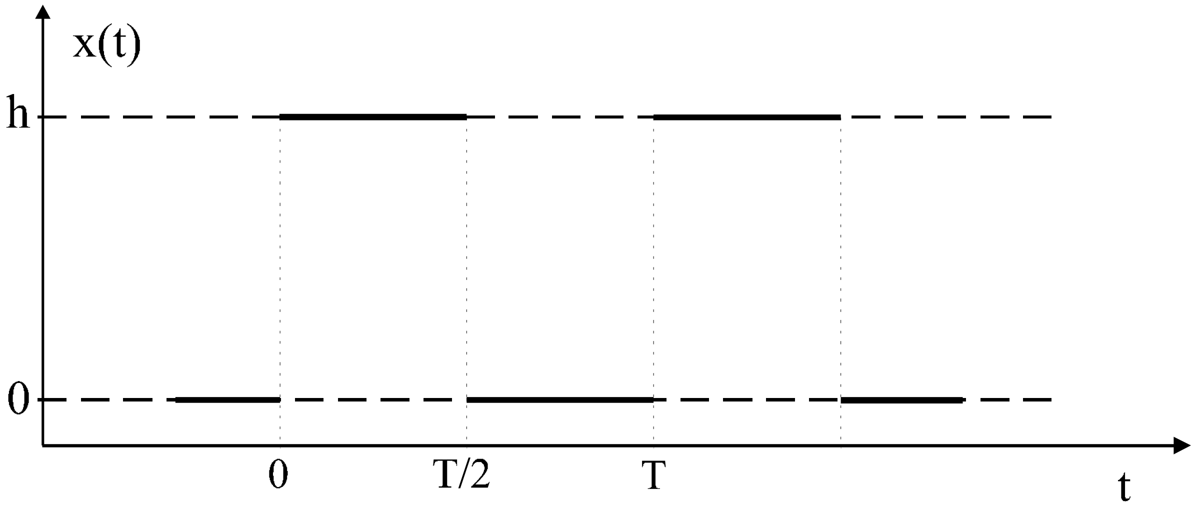


- *widmo mocy*



4.5. WIDMO FALI PROSTOKĄTNEJ

Rozważmy symetryczną falę prostokątną



$$x(t)=\begin{cases} h & for \quad 0+kT \le t \le T/2+kT \\ 0 & for \quad T/2+kT \le t \le T+kT \end{cases} \tag{4.23}$$

k – liczba całkowita

<u>wartość średnia</u>

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^{T/2} h\,dt+\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 0\,dt=\frac{1}{T}\left[ht\right]_0^{T/2}+0=\frac{h}{2}$$

<u>amplitudy cosinusów</u>

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} h\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt+\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} 0\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt$$

$$a_k = \frac{2h}{T}\left[\frac{sin(2\pi kt/T)}{2\pi k/T}\right]_0^{T/2} = \frac{h}{k\pi}\left[sin(k\pi) - sin(0)\right] = 0$$

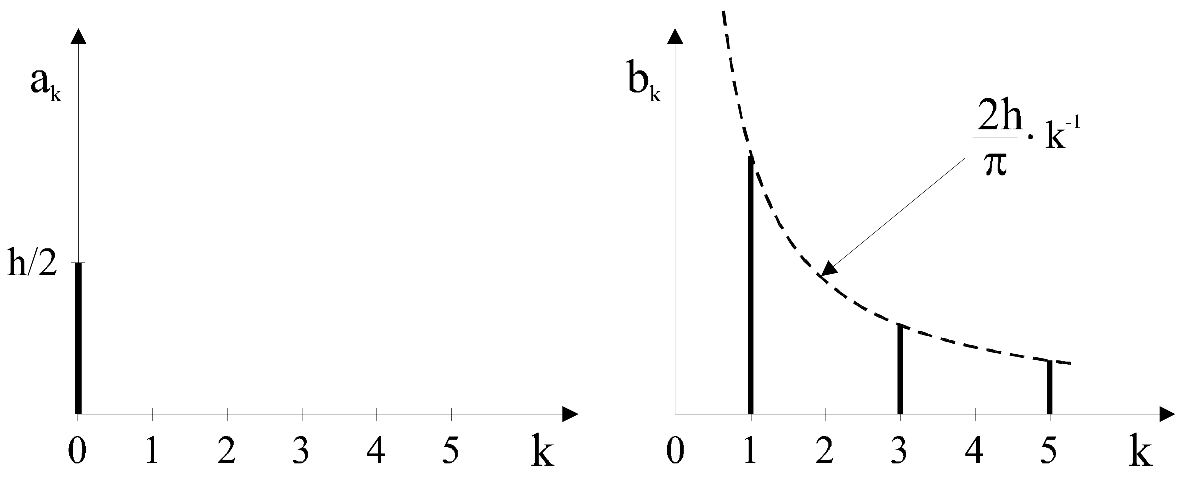
<u>amplitudy sinusów</u>

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x(t)\,sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt = \frac{2h}{T}\left[-\frac{cos(2\pi kt/T)}{2\pi k/T}\right]_0^{T/2} =$$

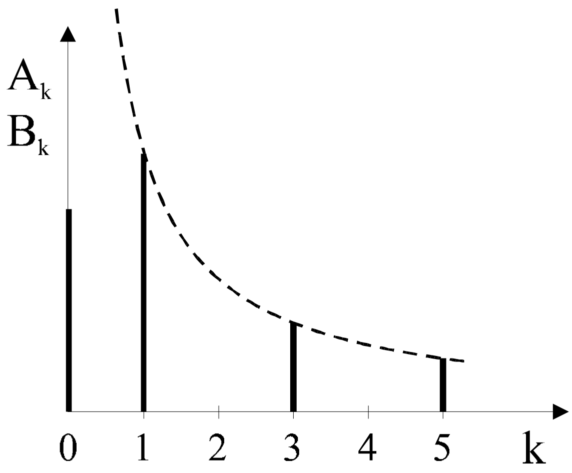
$$= \frac{h}{k\pi}\left[-cos(k\pi) + cos(0)\right] = \frac{h}{k\pi}\left[1 - cos(k\pi)\right]$$

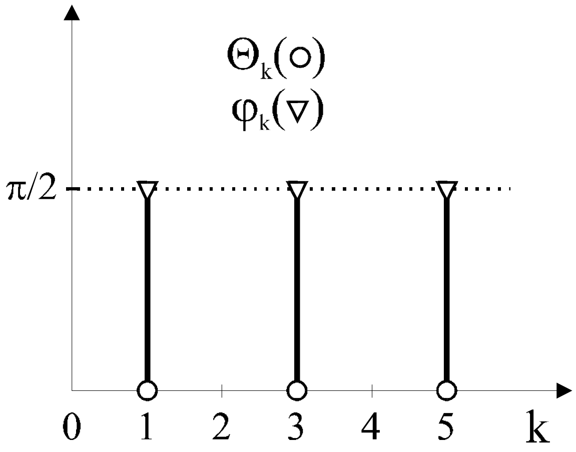
$$\boxed{\begin{array}{ll} dla\ nieparzystych\ k: & b_k = \dfrac{2h}{k\pi} \\ dla\ parzystych\ k: & b_k = 0 \end{array}} \qquad (4.24)$$

<u>widmo amplitudowe</u>



widmo amplitudowo-fazowe





Fala prostokątna może być wyrażona za pomocą szeregu trygonometrycznego o postaci

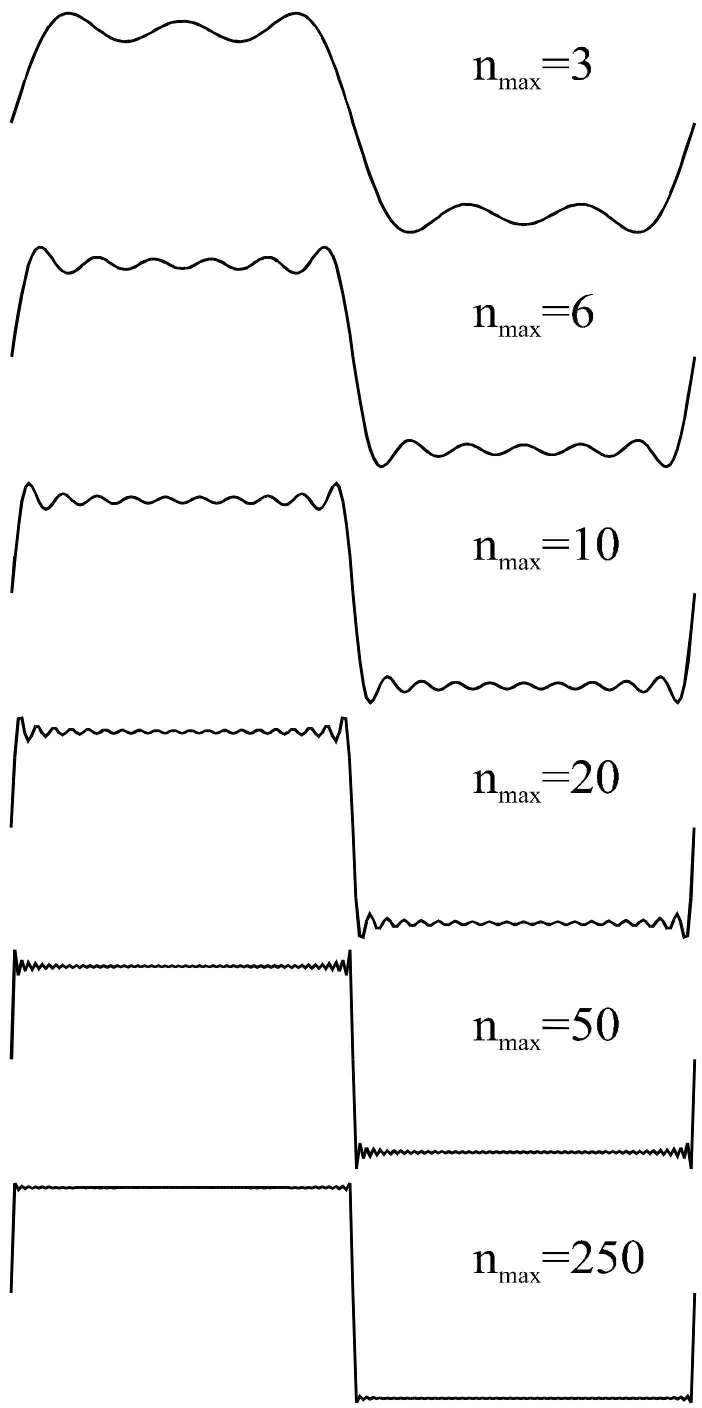
$$x(t)=\frac{h}{2}+\frac{2h}{\pi}sin(\omega_0 t)+\frac{2h}{3\pi}sin(3\omega_0 t)+...+$$

lub

$$\boxed{x(t)=\frac{h}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2h}{(2n-1)\pi}sin\left[(2n-1)\omega_0 t\right]} \qquad (4.25)$$

W praktyce pod uwagę bierze się *ograniczony zakres częstotliwości*, tzn. skończoną liczbę harmonicznych (aż do n_{max})

$$x(t)=\frac{h}{2}+\sum_{n=1}^{n_{max}}\frac{2h}{(2n-1)\pi}sin\left[(2n-1)\omega_0 t\right] \qquad (4.25b)$$



Odtworzenie oryginalnego przebiegu czasowego *z odpowiednią wiernością* wymaga bardzo dużej liczby harmonicznych (szerokiego spektrum częstotliwości)