

Transformata Fouriera

Mateusz Kojro

1 Podstawa teoretyczna

1.1 Transformata Fouriera

Transformacje Fourierowskie to dziedzina transformacji pozwalających na przekształcanie funkcji z dziedziny czasu (np. przebiegi natężenia dźwięku w czasie) na funkcje w dziedzinie częstotliwości (np. natężenia dźwięku dla poszczególnych częstotliwości). Jednowymiarową transformatę możemy zapisać jako funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ za pomocą wzoru:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi i x \xi) dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (1)$$

gdzie i oznacza jednostkę urojoną a jeżeli x oznacza wartości należące do dziedziny badanej funkcji (W przykładzie badania natężenia dźwięku od czasu będzie miał jednostkę czasu), $f(x)$ jest wartością badanej funkcji dla danego x a ξ oznacza częstotliwość (w przypadku gdy x jest czasem mierzonym w sekundach ξ będzie miało jednostkę Hz) q

1.2 Odwrotna transformata Fouriera

W niektórych sytuacjach możliwe jest odwrócenie transformaty w celu uzyskania oryginalnego sygnału za pomocą tzw. odwrotnej transformaty Fouriera opisanej wzorem:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \exp(2\pi i x \xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

gdzie \hat{f} oznacza wynik transformaty fouriera dla funkcji f

1.3 Transformaty wielowymiarowe

Transformata Fouriera może zostać uogólniona do n wymiarów korzystając z wzoru:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(r) \exp(-ikr) d^n r \quad (3)$$

w którym $k = [k_1, k_2, \dots, k_n]$

Dyskretne transformaty Fouriera

Dyskretyzacja transformaty Fouriera pozwala na zastosowanie tradycyjnej transformaty do analizy sygnałów mierzonych przez instrumenty (instrument pomiarowy generować będzie dyskretne próbki danych a nie ciągłą funkcję). Dyskretna transformatę możemy opisać za pomocą sumy przekształcającej ciąg próbek jakiegoś sygnału $[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$ gdzie $x_i \in \mathbb{R}$ w ciąg harmonicznych tego sygnału oznaczanych: $[X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]$ gdzie $X_n \in \mathbb{C}$ danej wzorem:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(\frac{-ikn2\pi}{N}\right), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4)$$

gdzie k to numer badanej harmonicznej a N to liczba próbek w sygnale.

2 Analiza sygnału za pomocą transformaty Fouriera

Jednowymiarowa sykretna transformata Fouriera może zostać wykorzystana do analizy i modyfikacji funkcji przebiegu czasowego sygnału. Dobry przykładem takiego zastosowania jest wykorzystanie DFT podczas analizy i obróbki sygnału dźwiękowego. Umożliwia ona między innymi na analizie spektrum częstotliwości w celu separacji sygnałów składowych. Natomiast w połączeniu z IDFT może zostać wykorzystana w celu zmiany sygnału wejściowego (np. w celu usunięcia szumu na danej częstotliwości lub wzmocnienia sygnału na innej)

2.1 Analiza sprawności implementacji DFT i IDFT

2.1.1 Wykorzystane narzędzia

W celu analizy sygnału podanego w zadaniu zaimplementowane zostały DFT i IDFT. Wykorzystano język programowania C++ w standardzie 14 (ISO/IEC 14882) kompilowany za pomocą kompilatora MSVC w wersji 19.29.30136

2.1.2 Badanie sygnału o znanych składowych

W celu zbadania poprawności implementacji DFT wygenerowano 3 testowe sygnały na przedziale od 0 do 10π każdy z nich zawiera 1000 próbek (ich przebiegi czasowe przedstawione zostały na rysunku)

1. Funkcja określona wzorem $f(t) = \sin(t)$
2. Funkcja określona wzorem $f(t) = \sin(2t)$
3. Złożenie funkcji 1 i funkcji 2

powinnismy więc otrzymać maxima transformaty sygnałów w $x = 5$ dla sygnału 1 i $x = 10$ dla sygnału 2 o wartości około $f(x) = 0.5$. Dla ich złożenia transformata powinna natomiast wyglądać jak suma tych wykresów. Wyniki przedstawione na rysunku: Z dużą dokładnością

zgadza się z oczekiwanymi wynikami. Co argumentuje poprawność implementacji dft.

W celu sprawdzenia poprawności IDFT wyniki tej ww. transformacji zostaną następnie poddane transformacji odwrotnej a uzyskany sygnał powinien być zbliżony do sygnału oryginalnego. Wyniki IDFT porównane z sygnałem oryginalnym przedstawiono na

2.1.3 Porównanie wyników z implementacją biblioteki SciPy

Droga zastosowana metoda badania poprawności implementacji jest porównanie wyników wygenerowanych dla danego zestawu danych z wynikami otrzymanymi po aplikowaniu implementacji dft i idft znajdujących się w bibliotece SciPy. Wykorzystany do tego zostanie plik dane_10.in.

Rysunki ? jasno obrazują bardzo wysoki stopień podobieństwa pomiędzy wynikami testowanej implementacji i implementacji w bibliotece python (wyniki fft w pythonie poddane zostały normalizacji poprzez podzielenie wszystkich wartości przez ilość próbek ponieważ testowana implementacja stosuje taki zabieg)

2.2 Analiza zadanego sygnału

2.2.1 Sygnał 1 wymiarowy

2.2.2 Sygnał 2 wymiarowy

2.3 Wnioski i podsumowanie