Transformata Fouriera

Mateusz Kojro

1 Podstawa teoretyczna

1.1 Transformata Fouriera

Transformacje Fourierowskie to dziedzina transformacji pozwalających na przekształcanie funkcji z dziedziny czasu (np. przebiegi natężenia dźwięku w czasie) na funkcje w dziedzinie częstotliwości (np. natężenia dźwięku dla poszczególnych częstotliwości). Jednowymiarową transformatę możemy zapisać jako funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ za pomocą wzoru:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-2\pi i x \xi\right)\, dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \tag{1}$$

gdzie i oznacza jednostkę urojoną a jeżeli x oznacza wartości należące do dziedziny badanej funkcji (W przykładzie badania natężenia dźwięku od czasu będzie miał jednostkę czasu), $f(x)$ jest wartością badanej funkcji dla danego x a ξ oznacza częstotliwość (w przypadku gdy x jest czasem mierzonym w sekundach ξ będzie miało jednostkę Hz) q

1.2 Odwrotna transformata Fouriera

W niektórych sytuacjach możliwe jest odwrócenie transformaty w celu uzyskania oryginalnego sygnału za pomocą tzw. odwrotnej transformaty Fouriera opisanej wzorem:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \exp\left(2\pi i x \xi\right)\, d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

gdzie $\hat{f}$ oznacza wynik transformaty fouriera dla funkcji f

1.3 Transformaty wielowymiarowe

Transformata Fouriera może zostać uogólniona do n wymiarów korzystając z wzoru:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(r) \exp\left(-ikr\right) d^n r \tag{3}$$

w którym $k = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$

Dyskretne transformaty Fouriera

Dyskretyzacja transformaty Fouriera pozwala na zastosowanie tradycyjnej transformaty do analizy sygnałów mierzonych przez instrumenty (instrument pomiarowy generować będzie dyskretne próbki danych a nie ciągłą funkcje). Dyskretna transformatę możemy opisać za pomocą sumy przekształcającej ciąg próbek jakiegoś sygnału $[x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]$ gdzie $x_i \in \mathbb{R}$ w ciąg harmonicznych tego sygnału oznaczanych: $[X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}]$ gdzie $X_n \in \mathbb{C}$ danej wzorem:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(\frac{-ikn2\pi}{N}\right), \ 0 \leq k \leq N-1 \tag{4}$$

gdzie k to numer badanej harmonicznej a N to liczba próbek w sygnale.

2 Analiza sygnału za pomocą transformaty Fouriera

Jednowymiarowa sykretna transformata Fouriera moze zostac wykorzystana do analizy i modyfikacji funkcji przebiegu czasowego sygnalu. Dobry przykładem takiego zastosowania jest wykorzystanie DFT podczas analizy i obróbki sygnalu dźwiękowego. Umozliwia ona miedzy innymi na analize spektrum czestotliwosci w celu separacji sygnalow skladowych. Natomiast w polaczeniu z IDFT moze zostac wykorzytana w celu zmiany sygnalu wejsciowgo (np. w celu usuniecia szumu na danej czestotliwosci lub wzmocnienia sygnalu na innej)

2.1 Analiza sprawności implementacji DFT i IDFT

2.1.1 Wykorzystane narzędzia

W celu analizy sygnalu podanego w zadaniu zaimplementowane zostały DFT i IDFT. Wykorzystano język programowania C++ w standardzie 14 (ISO/IEC 14882) kompilowany za pomocą kompilatora MSVC w wersji 19.29.30136

2.1.2 Badanie sygnału o znanych składowych

W celu zbadania poprawnosci implementacji DFT wygenerowano 3 testowe sygnaly na przedziale od 0 do 10π kazdy z nich zawiera 1000 probek (ich przebiegi czasowe przedstawione zostaly na rysunku)

1. Funkcja określona wzorem $f(t) = \sin(t)$
2. Funkcja określona wzorem $f(t) = \sin(2t)$
3. Złożenie funkcji 1 i funkcji 2

powinnismy wiec otrzymac maxima transformaty sygnałów w $x = 5$ dla sygnalu 1 i $x = 10$ dla sygnalu 2 o wartości około $f(x) = 0.5$. Dla ich zlozenia transformata powinna natomiast wygladac jak sum tych wykresow. Wyniki przedstawione na rysunku: Z duza dokldanoscia zgadzaja sie z oczekiwanymi wynikami. Co argumentuje poprawnosc implementacji dft.

W celu sprawdzenia poprawnosci IDFT wyniki tej ww. transformacji zostana nastepnie poddane transfomacji odwrotnej a uzyskany sygnal powinien byc zblizony do sygnalu oryginalnego. Wyniki IDFT porownane z sygnalem orginlanym przedstawiono na

2.1.3 Porównanie wyników z implementacja biblioteki SciPy

2.2 Analiza zadanego sygnału

2.2.1 Sygnal 1 wymiarowy

2.2.2 Sygnal 2 wymiarowy

2.3 Wnioski i podsumowanie