Zadania do samodzielnego rozwiązanie celem weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się w ramach materiału z cz. 2 wykładu – Algebra liniowa z geometrią analityczną (macierze, rachunek macierzowy i wyznaczniki).

Zad.1 (a) Wyznacz wszystkie potęgi n danej macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ (w sensie mnożenia macierzowego); (b) uzasadnij, czy zbiór tych potęg macierzy danej tworzy grupę, w szczególności grupę abelową, względem mnożenia macierzy; (c) znajdź macierz $\boldsymbol{A}^{100}$:

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Zad.2 Rozłóż daną macierz $\boldsymbol{A}$ na sumę macierzy symetrycznej $\boldsymbol{X}$ i skośnie-symetrycznej $\boldsymbol{Y}$ wykorzystując odpowiednie tw. z wykładu, czyli postać tych składowych macierzy.

Macierz $\boldsymbol{A}$ dana jest poniżej po elementach a_{ij} dla i, j = 1, 2, 3,… (uwaga: jej wymiar jest nieskończony), szukane macierze $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ przedstaw ustalając ich elementy x_{ij} i y_{ij}, odpowiednio dla i, j = 1, 2, 3,…, jak również w jawnej postaci macierzowej (podaj pierwsze 5 elementów w każdym z pierwszych 3 wierszy, dalej …. – jak dla ciągów liczbowych):

(a) $\boldsymbol{A} = [3i - j]$ (b) $\boldsymbol{A} = [i + 2j - 1]$.

Zad.3 Wyznacz macierz ortogonalną $\boldsymbol{A}$, wg. konstrukcji jak na wykładzie, wykorzystując jej własności wierszy i kolumn jako wektorów – rozpocznij od danego wektora $\boldsymbol{w}_1$ – kandydata na pierwszy wiersz konstruowanej macierzy.

Rozwiązanie rozpocznij od wypisania koniecznych wykorzystywanych własności wierszowych wektorów macierzy $\boldsymbol{A}$. Wektor – kandydat na pierwszy wiersz macierzy $\boldsymbol{A}$:

(a) $\boldsymbol{w}_1$ = [2, 0, 1] (b) $\boldsymbol{w}_1$ = [3, -1, 0].

Zad.4 Rozwiąż równanie macierzowe postaci $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$ względem macierzy $\boldsymbol{X}$ stosując rachunek macierzowy (**bez** przechodzenia do rozwiązywania układu równań dla niewiadomych elementów macierzy $\boldsymbol{X}$!!!). Wykorzystaj pojęcie macierzy odwrotnej i wyznacz konieczne macierze z pomocą konstrukcji macierzy odwrotnej z macierzy dołączonej. Dane:

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Wynik sprawdź przez podstawienie uzyskanej macierzy $\boldsymbol{X}$ do wyjściowego równania.

Zad.5 Oblicz pole powierzchni P($\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$) trójkąta rozpiętego przez dwa dane wektory – użyj relacji z wykładu wg. interpretacji geometrycznej długości wektora iloczynu wektorowego:

(a) $\boldsymbol{w}_1$ = [0, 1, -2], $\boldsymbol{w}_2$ = [2, 0, 1]; (b) $\boldsymbol{w}_1$ = [0, 1, -2], $\boldsymbol{w}_2$ = [2, 0, 1];

Zad.6 Oblicz macierz odwrotną $\boldsymbol{A}^{-1}$ stosując algorytm Gaussa dla macierzy danej:

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zad.7 Oblicz wyznacznik używając tw. Laplace'a oraz ponownie stosując metodę eliminacji Gaussa dla macierzy postaci:

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$.