Zadania do samodzielnego rozwiązanie celem weryfikacji osiągnięcia efektów uczenia się w ramach materiału z cz. 3 wykładu – Algebra liniowa z geometrią analityczną (przestrzenie i podprzestrzenie wektorowe – ogólne układy równań liniowych).

Zad.1 (a) Wyznacz **wektorowe parametryczne równanie płaszczyzny** $\pi \subset \boldsymbol{R}^3$ przechodzącej przez 3 punkty: $P_1(5, -5, 1)$, $P_2(1, 5, 5)$, $P_3(3, 3, -3)$. Redukując parametry z postaci skalarnej tego równania wyznacz **postać ogólną** równania tej samej płaszczyzny π.

(b) Wyznacz **wektorowe parametryczne równanie prostej** $l \subset \boldsymbol{R}^3$ przechodzącej przez 2 punkty: $P_1(5, -5, 1)$ i $P_2(1, 5, 5)$. Redukując parametr z postaci skalarnej tego równania wyznacz **postać kierunkową** równania tej samej prostej.

Zad.2 (a) Wyznacz liniową kombinację wektorów $\boldsymbol{v}_1 = [3, 5 ,-2]$ i $\boldsymbol{v}_2 = [1, -1, 1]$ równą wektorowi $\boldsymbol{w} = [17, 55 ,-28]$. Czy układ $\{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ jest liniowo niezależny - uzasadnij?

(b) Wyznacz liniową kombinację wektorów $\boldsymbol{v}_1 = [3, 5 ,-2]$, $\boldsymbol{v}_2 = [1, -1, 1]$ i $\boldsymbol{v}_3 = [1, 1, 1]$ równą wektorowi $\boldsymbol{w} = [5, 10 , 20]$. Czy układ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ jest liniowo niezależny - uzasadnij?

Zad.3 (a) Uzasadnij dla zbioru macierzy symetrycznych wymiaru 3x3 fakt, że dowolna liniowa kombinacja dwóch takich macierzy jest również macierzą symetryczną (co dowodzi tworzenia przez takie macierze struktury podprzestrzeni wektorowej.
Wyznacz bazę i wymiar takiej podprzestrzeni wektorowej.

(b) Uzasadnij dla zbioru wielomianów $\boldsymbol{U} = \{ \boldsymbol{w} = a x^2 + b x + c\text{: } \boldsymbol{w}(1) = 0\}$, fakt, że dowolna liniowa kombinacja dwóch wielomianów z tego zbioru $\boldsymbol{U}$ jest również wielomianem z $\boldsymbol{U}$ (co dowodzi, że zbiór $\boldsymbol{U}$ ma strukturę podprzestrzeni wektorowej.
Wyznacz bazę i wymiar takiej podprzestrzeni wektorowej.

Zad.4 Wyznacz w przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^5$ wektorowe rozwiązanie parametryczne równania postaci: (a) $3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 15$; (b) $x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 15$.

4*) Rozwiąż układ obu tych równań, które zmienne można przyjąć za parametry konstruując parametryczne rozwiązanie takiego układu?

Zad.5 Czy zgodnie z definicją dany podzbiór przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^2$ tworzy podprzestrzeń wektorową (odpowiedź uzasadnij):

(a) $\boldsymbol{U}_1 =\{\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]\text{: } x_1 \geq 0\}\subset\boldsymbol{R}^2$; (b) $\boldsymbol{U}_2 =\{\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]\text{: } x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}\subset\boldsymbol{R}^2$;

(c) $\boldsymbol{U}_3 =\{\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]\text{: } x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0\}\subset\boldsymbol{R}^2$; (d) $\boldsymbol{U}_4 =\{\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]\text{: } x_1 \cdot x_2 \geq 0\}\subset\boldsymbol{R}^2$?

Zad.6 Sprawdź (z definicji!!!) liniową niezależność układu wektorów:

(a) $\{\boldsymbol{v}_1 = [1, 1, -1, -1], \boldsymbol{v}_2 = [2, 1, -2, 1], \boldsymbol{v}_3 = [1, 2, 1, a]$;

(a) $\{\boldsymbol{v}_1 = [1, 1, 1, -1], \boldsymbol{v}_2 = [2, 1, 2, 1], \boldsymbol{v}_3 = [1, 2, 1, a]$,

a – parametr rzeczywisty. Jak powyższa liniowa niezależność zależy od parametru a?

Zadanie 7 (przykład z odniesieniem do poziomu oceny: (a) DST; (b) DB; (c) BDB)

(a) Wyznacz wektor $\boldsymbol{w}_0 = x^2 - 1 \in \boldsymbol{R}_2[x]$, w przestrzeni wektorowej trójmianów kwadratowych, jako liniową kombinację wektorów $\boldsymbol{w}_1 = x^2 + 3x - 2$, $\boldsymbol{w}_2 = 5x^2 - 15x + 2$, $\boldsymbol{w}_3 = x + 3$.

(b) Wyznacz wartość parametru $a \in \boldsymbol{R}$, tak żeby zachodził warunek:

$$\boldsymbol{w}_0 = x^2 - 1 \in \mathrm{E}(x^2 + 3x - 2,\ x + a).$$

Wtedy, określ współrzędne wektora $\boldsymbol{w}_0$ w bazie podprzestrzeni wektorowej rozpiętej przez te wymienione wyżej dwa wektory.

(c) Wyznacz bazę i wymiar podprzestrzeni wektorowej $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}_3[x]: \boldsymbol{w}'(1) = 0\}$.

Wskaż parametr a i b, tak żeby wektory $\boldsymbol{u}_1 = a\,x^3 + x^2 - 2x - 1$ oraz $\boldsymbol{u}_2 = x^3 + b\,x^2 - 3x$ należały do podprzestrzeni wektorowej $\boldsymbol{U}$ .Wyznacz współrzędne wektorów $\boldsymbol{u}_1$ i $\boldsymbol{u}_2$ w tak wyznaczonej bazie podprzestrzeni $\boldsymbol{U}$.