* Przestrzeń wektorowa (struktury algebraiczne III)

Def. Niech V będzie niepustym zbiorem, zaś ***K*** – ciałem.

Określamy dwa działania na zbiorze V:

(a) dodawanie elementów zbioru V, tzn. $+: V \times V \to V$, oraz

(b) mnożenie elementów zbioru V przez elementy ciała ***K***, tzn. $*: \boldsymbol{K} \times V \to V$,

takie że dla dowolnych u, w $\in$V oraz $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ zachodzą następujące reguły:

(1) (V, +) jest grupą abelową,

(2) $\alpha * (u + w) = \alpha * u + \alpha * w$, (rozdzielczość $*$ względem + wektorów)

(2') $(\alpha + \beta) * w = \alpha * w + \beta * w$, (rozdzielczość $*$ względem + skalarów)

(3) $\alpha * (\beta * w) = (\alpha * \beta) * w$, (łączność mnożenia $*$)

(4) $\mathbf{1} * w = w$, dla $\mathbf{1} \in \boldsymbol{K}$,

Strukturę algebraiczną (V, +, $*$) nazywamy przestrzenią wektorową nad ciałem ***K***.

Elementy zbioru V nazywamy wektorami, zaś elementy ciała ***K*** – skalarami.

Zero grupy (V, +) tworzy wektor zerowy **0** przestrzeni wektorowej (oznacz. p.w.).

* Przykłady

P1. Niech $V=\boldsymbol{R}^3$, zaś $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$. Dla wektorów $u = [u_1,u_2,u_3]$ i $w = [w_1,w_2, w_3] \in V$ dodawanie wektorów i mnożenie przez skalary określone jest tak jak w rachunku macierzowym. Struktura $(V=\boldsymbol{R}^3, +, *)$ jest przestrzenią wektorową.

Podzbiór $U = \{u \in V: u_3 = 0\}$ tworzy również przestrzeń wektorową, bo dla dowolnych wektorów należących do U, np. $u = [u_1, u_2, 0]$ i $w= [w_1, w_2, 0]$ ich suma i iloczyn przez skalary spełniają wszystkie aksjomaty z definicji.

P2. Rozważmy zbiór wielomianów $W_k = \{w \in \boldsymbol{R}[x]: \text{st}(w) \leq k\}$ wraz ze standardowymi działaniami dodawania (+) wielomianów i mnożenia (*) ich przez dowolny skalar $\alpha \in \boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$. Struktura algebraiczna $(V = W_k, +, *)$ jest przestrzenią wektorową, gdyż spełnione są wszystkie aksjomaty (1) - (4) definicji. Wektorem zerowym jest wielomian stały $w = 0$.

P3*****. Zbiór $V = C([0, 1])$ rzeczywistych funkcji ciągłych na przedziale [0,1] stanowi p.w. nad ciałem $\boldsymbol{R}$ z działaniami dodawania funkcji: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ i mnożenia funkcji przez skalar $(\alpha * f)(x) = \alpha(f(x))$, dla $f \in V$ i $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Podzbiór $W \subset V$ funkcji tej klasy spełniających warunek $f(x_0) = 0$, dla $x_0 \in [0,1]$ jest również przestrzenią wektorową .

* Liniowa kombinacja wektorów - podprzestrzeń wektorowa

Def. Liniową kombinacją wektorów **u** i **w** p.w. V nazywamy każdy wektor **v** $\in$V postaci:

v = α * **u** + β * **w**, gdzie $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ – dowolne skalary z ciała.

Np. dla **u** = [2,-1] i **w** = [-3,5] $\in \boldsymbol{R}^2$ wektory **v** = [7,0] i **v'**= [-5,6] są ich liniowymi kombinacjami, bo **v** = 5**u** + **w**, zaś **v'**= **w** – **u**.

Pyt.: Czy wektor **z** = [1,1] jest liniową kombinacją wektorów **v** i **w**?

Pyt.: Czy wektor **z** = [1,1] jest też liniową kombinacją 3 wektorów **v, w** i **v'**?

Def. Podprzestrzenią wektorową (p.p.w.) nazywamy niepusty podzbiór U p. w. V, jeśli każda liniowa kombinacja dowolnej pary wektorów ze zbioru U należy do tego zbioru, tj.: jeśli

α * u + β * w $\in$ U dla dowolnych skalarów $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ i wektorów u, w $\in$U.

P4. W p.w. V=$\boldsymbol{R}^3$ każda prosta i płaszczyzna zawierająca wektor zerowy jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V, np. U = {**u** $\in$V: $u_1 - u_2 + u_3 = 0$}.

P5. W p.w. wielomianów V=$\boldsymbol{R}$[x] każdy podzbiór $W_k \subset$V z P2 jest p.p.w.!!!

* Wektory liniowo niezależne i zależne

Def. Układ wektorów $\{u_1, u_2, u_3,..., u_n\}$ p.w. V nazywamy układem liniowo niezależnym, jeśli liniowa kombinacja tych wektorów jest wektorem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki tej kombinacji są równe zeru ciała ***K***:

$$\alpha * u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + ... + \zeta u_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma, ..., \zeta = 0$$

Np. wektory u = [1, 0, 1], w = [1, 1, 0] i v = [0, 1, 1] są liniowo niezależne, ale wektory u = [1, 0, -1], w = [1, -1, 0] i v = [0, 1, -1] nie są już liniowo niezależne!!!

Def. Układ wektorów $\{u_1, u_2, u_3,..., u_n\}$ p.w. V nazywamy układem liniowo zależnym, jeśli **nie** jest on układem liniowo niezależnym, tj. gdy liniowa kombinacja tych wektorów jest wektorem zerowym i co najmniej jeden ze współczynników tej kombinacji jest różny od zera:

$$\alpha * u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + ... + \zeta u_n = \mathbf{0} \text{ oraz } \alpha \neq 0 \text{ lub } \beta \neq 0 \text{ lub } \gamma \neq 0 \text{ ... lub } \zeta \neq 0.$$

Np. wektory $w_1 = x^2 - 1$, $w_2 = x^2 - x$, $w_3 = x - 1 \in V = \boldsymbol{R}[x]$ są liniowo zależne.

* Wnioski i kryteria liniowej niezależności

Wn.1 Każdy układ wektorów p.w. jest układem liniowo zależnym lub niezależnym.

Wn.2 Każdy układ wektorów p.w. zawierający wektor zerowy **0** jest układem liniowo zależnym (*wówczas współczynnik przy tym wektorze w liniowej kombinacji jest dowolny, a więc również niezerowy*).

Wn.3 Jeśli w układzie wektorów jeden wektor jest liniową kombinacją pozostałych wektorów tego układu to cały taki układ jest liniowo zależny i odwrotnie.

Tw. (warunek liniowej niezależności n wektorów w p.w. $V = \boldsymbol{R}^n$)

Układ n wektorów $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ p.w. $V = \boldsymbol{R}^n$ jest liniowo niezależny, jeśli macierz utworzona przez te wektory jest nieosobliwa:

$$\det[u_{jk}] \neq 0, \text{ gdzie } u_j = [u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}, \ldots, u_{jn}].$$

Pyt.: Wektory $u_1 = [a, 1, 1]$, $u_2 = [1, -1, a]$ i $u_3 = [-1, a, 1]$ są liniowo zależne w p.w. $\boldsymbol{R}^3$ tylko wtedy, gdy parametr $a = -1$. W każdym innym przypadku są one liniowo niezależne. Dlaczego?

* Kryterium liniowej niezależności funkcji

Tw. (kryterium liniowej niezależności funkcji różniczkowalnych wielokrotnie)

Układ funkcji *n*-krotnie różniczkowalnych $\{f_1, f_2, f_3,..., f_n\}$ jest układem liniowo niezależnym, jeśli wyznacznik (zwany wrońskianem układu tych funkcji) nie znika tożsamościowo na ***R*** :

$$\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \dots & f_n''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \neq 0$$

Uwaga:
Tw.odwrotne nie jest prawdziwe.

P6. Wielomiany B = $\{x^4, x^3, x^2, x, 1\}$ stanowią układ liniowo niezależny p.w. W_5. Dołączenie do tego układu dowolnego innego wielomianu *w* ze zbioru W_5 czyni taki układ już liniowo zależnym. Powodem jest fakt, że ten dowolny inny wektor *w* daje się wyrazić, jako pewna liniowa kombinacja wektorów układu B (patrz Wn. 3). Dlaczego (i jak) ta własność wynika także z powyższego kryterium?

* Liniowa niezależność wektorów a rząd macierzy

Tw. Macierz utworzona z ***p*** liniowo niezależnych wektorów p.w. $\boldsymbol{R}^n$ jest rzędu ***p***.

P7. Wektory $u = [1, u_2, u_3, u_4]$, $v = [0, 2, v_3, v_4]$ i $w= [0, 0, 3, w_4]$ są liniowo niezależne dla dowolnych u_i, v_j, w_k, gdyż rząd ich macierzy rz[u, v, w] = 3 (?).

Sprawdź ten wynik używając definicji układu wektorów liniowo niezależnych!

Pyt. Ile wektorów mogą posiadać układy wektorów liniowo niezależnych w p.w. $\boldsymbol{R}^n$ dla n = 1, 2, 3, itd.? Ile jest ich maksymalnie w każdej takiej przestrzeni?

P8. Układem liniowo niezależnych wektorów p.w. funkcji ciągłych jest układ postaci W=(1, {cos(kt)}, {sin(kt)}) prowadzący przez liniowe kombinacje do tzw. wielomianów trygonometrycznych.

Przestrzeń generowana przez wektory - generatory

Def. Dla każdego układu wektorów $\{u_1, u_2,..., u_k\}$ w p.w. V **zbiór ich wszystkich kombinacji liniowych** tworzy przestrzeń wektorową W (a dokładniej, tworzy podprzestrzeń wektorową W zawartą w przestrzeni V, ozn. p.p.w. W).

Mówimy, że wektory $\{u_1, u_2,..., u_k\}$ **generują**, inaczej rozpinają, p.p.w. W, co oznaczamy:

$$W = E(u_1, u_2,..., u_k) \quad \text{lub} \quad W = \mathrm{lin}(u_1, u_2,..., u_k)$$

i dlatego wektory u_k tego układu nazywamy **generatorami** p.p.w. W.

Wn. Wektor $w \in W = E(u_1, u_2,..., u_k) \Leftrightarrow \quad w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$ dla $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$

ale przedstawienie to **może nie być jednoznaczne** (tzn. różne współczynniki skalarne mogą w tej liniowej kombinacji prowadzić do tego samego wektora w).

* Przestrzeń generowana przez wektory - przykłady

P9. Rozważmy p.p.w. wielomianów W = E(1, x + 1, x^2 + x - 1, x^2 + 1). Jest to p.w. $\boldsymbol{R}_2[x]$ – wszystkich trójmianów kwadratowych, ale wektor w = 1 jest równy

$1*1 + 0(x+1) + 0(x^2+x-1) + 0(x^2+1) = (-2)*1 + 1(x+1) + (-1)(x^2+x-1) + 1(x^2+1)$

P10. P.w. W = lin([1,0,1], [1,1,1], [1,4,1]) $\subset \boldsymbol{R}^3$ zawiera *w* = [0,1,0] generowany przez różne liniowe kombinacje o kolejnych współczynnikach:

(a) {-1,1,0} lub (b) {11,-15,4} lub {2,-3,1}, w ogólności {-1+3t, 1- 4t, t} dla t $\in \boldsymbol{R}$.

Zauważmy, że 3 wektory generujące p.p.w. W, zwane generatorami p.w. W, są liniowo zależne, a jedynie każde dwa spośród nich są wektorami liniowo niezależnymi. Łatwo pokazać, że również (umiesz uzasadnić dlaczego?)

W = lin([1,0,1], [1,1,1]) = lin([1,0,1], [1,4,1]) = lin([1,1,1], [1,4,1])

P11. Macierze $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ generują p.w. $\mathbf{M}_{2x2}(\boldsymbol{R})$

i tworzą, co więcej, układ wektorów liniowo niezależnych w tej p.w.. Dlaczego?

* Tw. Steinitza o wymianie

Tw. (*Steinitza o wymianie*)

Dla dowolnego układu k wektorów $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ p.w. V i układu p liniowo niezależnych wektorów $\{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$, takich że

$$b_i \in E(u_1, u_2, \ldots, u_k) \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, p, \text{ mamy } \quad p \leq k.$$

dowód: z uzasadnieniem nazwy = 5 na egzaminie.

Wn. Liczba liniowo niezależnych wektorów w danej p.w. jest **niewiększa** niż liczba generatorów tej przestrzeni.

Wn. Przeciwnie, układ zawierający więcej wektorów niż dowolny układ generatorów tej p.w. jest układem liniowo zależnym.

Wn. Każdy podukład układu wektorów liniowo niezależnych jest również układem wektorów liniowo niezależnych.

Wn. Każdy układ wektorów zawierający podukładu wektorów liniowo zależnych jest również układem wektorów liniowo zależnych.

* Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Def. Bazą p.w. V nazywamy taki układ wektorów należących do V, który jest

(i) liniowo niezależny,

(ii) generuje przestrzeń wektorową V.

Def. Wymiarem p.w. V nad ciałem ***K*** nazywamy liczbę elementów dowolnej bazy, jeśli jest to układ skończony. Gdy baza zawiera nieskończenie wiele wektorów, to p.w. nazywamy nieskończenie wymiarową: ozn. $n = \dim_{\boldsymbol{K}} V$.

Wn.1 Każda p.w. $V = \boldsymbol{R}^n$ jest wymiaru n, ale $\dim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}_k[x] = k+1$.

Wn.2 Każda p.w. zawiera nieskończenie wiele układów bazowych.

Wn.3 Bazą p.w. $\boldsymbol{R}^n$ jest każdy układ liniowo niezależny zawierający n wektorów, np. $B = \{e_1, e_2, e_3, \dots , e_n\}$ – baza kanoniczna wersorów, ale również układ

$B = \{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4, \dots , e_1+e_2+e_3+ \dots +e_n\}$. Uzasadnij własność (i).

* Współrzędne wektora w bazie

Wn. Każdy wektor p.w. jest jednoznaczną liniową kombinacją wektorów bazy.

Def. Współczynniki liniowej kombinacji wektorów bazy nazywamy współrzędnymi odpowiadającego im wektora w tej bazie.

P12. Współrzędnymi wektora w = [1,1] = $1e_1+1e_2$ w bazie kanonicznej p.w. $\boldsymbol{R}^2$ są współczynniki $[1,1]_e$; analogicznie

w bazie B_1 z P13: w = $[1, 0]_{B1}$, a w bazie B_2: w = $[-4, 1]_{B2}$ = (-4)[0, 1]+1[1, 5].

P13. Bazą przestrzeni V= $\boldsymbol{R}^2$ jest każdy układ dwóch niewspółliniowych wektorów: $B_1 = \{b_1=[1,1], b_2=[-1,2]\}$ lub $B_2 = \{[0,1], [1,5]\}$ ale nie układ {[-1,3], [2,-6]}.

Standardowa baza (tzw. baza kanoniczna) p.w. $\boldsymbol{R_2}[x]$: $B = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$.

Baza kanoniczna p.w. macierzy st. 2 $\mathbf{M}_{2x2}(\boldsymbol{R})$: $B = \{e_1 = A, e_2 = B, e_3 = C, e_4 = D\}$

dla macierzy A, B, C i D z przykładu P11.

* p.p.w. jednorodnego układu równań liniowych

Tw. Rozwiązania jednorodnego układu równań liniowych n zmiennych tworzą podprzestrzeń wektorową W w przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$, przy czym $k = \dim_R W = n - \mathrm{rz}(A)$, gdzie A jest macierzą tego układu równań. Wówczas,

$$W = E(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k),$$

gdzie wektory $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k\}$ są fundamentalnym układem rozwiązań (baza W): $Ab_i = 0$ znalezionym w drodze poszukiwania rozwiązania parametrycznego.

Istotnie, dla równania macierzowego $Aw = 0$, każda liniowa kombinacja dwóch rozwiązań ($Aw_1 = 0$ i $Aw_2 = 0$) jest również rozwiązaniem tego równania:

$$A(a\, w_1 + b\, w_2) = a\, Aw_1 + b\, Aw_2 = a\, 0 + b\, 0 = 0.$$

P14. Równanie $x + 2y - 5z = 0$ określa p.p.w. (płaszczyznę) w $\boldsymbol{R}^3$ o bazie wektorów $\mathbf{b}_1 = [-2, 1, 0]$ i $\mathbf{b}_2 = [5, 0, 1]$ wyznaczonych z równań: $x = -2c_1 + 5c_2$, $y = c_1$ i $z = c_2$, czyli że każdy wektor tej płaszczyzny jest postaci $\mathbf{w} = c_1\, \mathbf{b}_1 + c_2\, \mathbf{b}_2$.

* Hiperpłaszczyzna w przestrzeni wektorowej

Def. Podprzestrzeń wektorową H p.w. V nazywamy hiperpłaszczyzną, jeśli dim H = dim V – 1.

Wn. Każda podprzestrzeń wektorowa wymiaru *k* jest częścią wspólną (przecięciem) $(n-k)$ hiperpłaszczyzn.

Wn. W p.w. V = $\boldsymbol{R}^n$ każde równanie liniowe jednorodne określa pewną hiperpłaszczyznę.

Wn. Każdy układ *m* równań liniowych określa pewną podprzestrzeń będącą wspólną częścią hiperpłaszczyzn opisanych kolejnymi równaniami tego układu. Np. x+y+z+u = 0; x-y+z = 0; y-z+u = 0 – trzy hiperpłaszczyzny w $\boldsymbol{R}^4$ w przecięciu dają podprzestrzeń 1-wymiarową W = E([-2,-1,1,2]), czyli x= -2t, y = -t, z = t, u = 2t, co nazywamy parametrycznym równaniem (w tym przypadku) prostej w $\boldsymbol{R}^4$.

Parametryczne równanie płaszczyzny w $\boldsymbol{R}^4$ otrzymamy rozwiązując każde dwa spośród powyższych trzech równań – jaka będzie baza tej podprzestrzeni?