Notatki Algebra i Geometria Liniowa

Mateusz Kojro

August 22, 2020

1 Wiadomosci wstepne

1.1 Zbiory

Def Zbior pusty: zbior ktory nie zawiera zadnego elementu oznaczamy

$$A = \emptyset \tag{1}$$

Def Podzbior: Mowimy ze A jest podzbiorem B jezeli:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow \forall a (a \in A \Rightarrow a \in B) \tag{2}$$

Def Zbiory rowne Zbiory sa rowne jezeli:

$$(A = B) \Leftrightarrow \forall a (a \in A \Leftrightarrow a \in B) \tag{3}$$

Def Suma Zbiorow Suma zbiorow A i B nazywamy

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \tag{4}$$

Def Iloczyn zbiorow Iloczyn zbiorow A i B nazywamy:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \tag{5}$$

Def Roznica zbiorow Roznica zbiorow nazywamy:

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \tag{6}$$

Def Alternatywa rozlaczna (XOR) chyba

$$A \div B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)\} \tag{7}$$

Def Iloczyn Kartezjanski Iloczynem Kartezjanskim zbiorow nazywamy

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{8}$$

1.2 Odwzorowania

Def Odwzorowanie zbioru A w zbior B kazdemu elemntowi a z zbioru A przyporzadkujemy dokladnie jeden element b z B oznaczamy:

$$h : A \to B \tag{9}$$

Gdzie:

- Dziedzina : A
- Przeciwdziedzina odwzorowania A (obraz zbioru A) : $h(A) \subset B$
- Przeciwobraz zbioru B_1 : $A_1 = h^{-1}(B_1)$ taki ze $h(A_1) \subset B_1$

Def Superpozycja (zlozenie) zlozeniem odwzorowan $h : A \to B$ i $g : B \to C$ nazywamy

$$g \circ h : A \to C \tag{10}$$

takie ze

$$(g \circ h)(a) = g(h(a)) \ \forall_{a \in A} \tag{11}$$

Def Iniekcja (odwzorowanie roznowartosciowe) $h : A \to B$ jest Iniekcja gdy:

$$\forall_{a_1, a_2 \in A} \ h(a_1) = h(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \tag{12}$$

Def Surjekcja (odwzorowanie na) $h : A \to B$ jest Surjekcja gdy:

$$\forall_{b \in B} \exists_{a \in A} \ h(a) = b \tag{13}$$

Def Bijekcja (odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne) Odwzorowanie jest Bijekcja jezeli jest Iniekcja i Surjekcja

Def Odwzorowanie odwrotne jezeli $h : A \to B$ jest Bijekcja to Odwzorowaniem odwrotnym nazywamy $h^{-1} : B \to A$ takie ze

$$\forall_{a \in A} (h^{-1} \circ h)(a) = a \tag{14}$$

inaczej

$$h^{-1} \circ h = Id_A \tag{15}$$

Def Identycznosc Odwzorowanie zbioru A w siebie w postaci $Id_A(a) = a$

2 Struktury Algebraiczne

2.1 Grupy

Def Zamknietosc wzoru wzgledem dzialania $\oplus$ Zbior A jest zamkniety wzgledem $\oplus$ (dzialanie $\oplus$ jest wykonalne w zbiorze A) jezeli:

$$\forall_{a,b\in A}\exists_{c\in A} c = a \oplus b \tag{16}$$

Przyklady:

- Zbior N nie jest jest zamkniety wzgledem odejmowania
- Zbior liczb calkowitych Z jest zamkniety wzgledem + i * ale nie jest zamkniety wzgledem $\div$ bo wynik dzielenia liczb calkowitych moze nie byc liczba calkowita

Grupa Grupa nazywamy pare zbioru G z dzialaniem $\circ$ wzgledem ktorego zbior jest zamkniety jezeli spelnione sa aksjomaty grupy:

- Prawo lacznosci: $\forall_{a,b,c\in G} \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Istnienie elementu neutralnego: $\exists_{e\in G}\forall_{a\in G} \quad a \circ e = e \circ a = a$
- Istnienie element odwrotnego: $\forall_{a\in G} \quad \exists_{a^{-1}\in G} \quad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Grupa Abelowa (przemienna) Grupe nazywamy Abelowa jezeli jej dzialanie jest przemiene:

$$\forall_{a,b\in G}\ a \circ b = b \circ a \tag{17}$$

Przyklady ...

2.2 Ciała

Ciało Cialem nazywamy zbior K zawierajacy wiecej niz jeden element i niech bedzie zamkniety wzgledem dwoch dzialan $(\oplus, \circ)$ jezeli zachodza relacje:

- Przemiennosc dodawania: $a \oplus b = b \oplus a$
- Przemiennosc mnozenia: $a \circ b = b \circ a$
- Lacznosc dodawania: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
- Lacznosc mnozenia: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Rozdzielnosc $\circ$ wzgledem $\oplus$: $a \circ (b \oplus c) = a \circ b \oplus a \circ c$
- Istnienie zera: $\exists!_{\theta\in K}\forall_{a\in K}\ a \oplus \theta =$ a
- Wykonalnosc odejmowania: $\forall_{a,b\in K}\exists!_{c\in K} \quad a \oplus c = b$
- Wykonalnosc dzielenia: $\forall_{a,b\in K \text{ i } a\neq\theta}\ \exists!_{c\in K}\ a \circ c = b$

W zwiazku z tym struktura $(K, \oplus, \circ)$ jest cialem wzgledem dzialan $(\oplus, \circ)$ $\Leftrightarrow$ struktury $(K, \oplus)$ i $(K, \circ)$ sa grupami abelowymi z rodzielnoscia $\circ$ wzgledem $\oplus$

2.3 Pierścienie

Def Pierscien (nieprzemienny) Pierścieniem nieprzemiennym nazywamy zbior P bedacy grupa Abelowa wzgledem dzialania dodawania $\oplus$ o elemencie neutralnym θ w którym spelnione jest Prawo lacznosci mnozenia $\circ$ przy czym zachodza oba prawa rodzielnosci

$$a \circ (b \oplus c) = a \circ b \oplus a \circ\ c \text{ oraz } (a \oplus b) \circ c = a \circ c \oplus b \circ c \tag{18}$$

Def Pierscien (przemienny) jezeli w zbiorze P zachodzi takze prawo przemiennosci to pierscien jest przemienny

3 Cialo liczb zespoloncyh

3.1 Definicja

Cialo liczb zespoloncyh:

$$C = (R \times R, +', *) \tag{19}$$

3.2 Postac algebraiczna

Kazda liczbe zespolona $z = (a, b) \in C$ mozemy przedstawic w postacialgebraicznej

$$z = a + b * i,\ i = \sqrt{-1} \tag{20}$$

3.3 Wlasnosci

- jezeli $z = a + bi$ to $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- jezeli $z = a + bi$ to $\phi = arg(z)$ jezeli
  - $cos\phi = \frac{a}{|z|}$
  - $sin\phi = \frac{b}{|z|}$
  - jezeli $\phi < 2\pi$ to argument glowny ozn $Arg(z)$

3.4 Postac trygonometryczna

Licze zespolona $z = a + bi \neq 0$ moze byc zapisana w postaci geometrycznej:

$$z = |z|(cos(\phi_0) + i\sin(\phi_0)) \text{ gdzie } \phi_0 = \mathrm{Arg}(z) \tag{21}$$

Wzor de Moivre'a jezeli $z = |z|(cos(\phi_0) + i\sin(\phi_0))$ to:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))\ \forall_{n \in N} \tag{22}$$

Pierwiastki Zespolone jezeli $z = |z|(cos(\phi_0) + i\sin(\phi_0))$ oraz $w \in C$, to rownanie $w^n = z$ ma dokladnie n rozwiazan:

$$w = z_k\ (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{23}$$

pierwiastkow zespoloncyh stopnia n z liczby zespolonej z gdzie:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos((\phi + 2k\pi)/n) + isin((\phi + 2k\pi)/n)) \tag{24}$$

3.5 Interpretacja geometryczna

Do zrobienia ...

3.6 Postac Eulera liczby zespolonej

$$z = |z|e^{i\phi}, \text{gdzie } \phi = \arg(z) \tag{25}$$

4 Iloczyn Skalarny

4.1 Iloczyn Skalarny

Przyporzadkowanie $V \times V \ni \to < x, y > \in K$ nazywamy Iloczynem Skalarnym wektorow x , y

Przestrzen Euklidesowa (Unitarna) natomiast to para $(V, < *, * >)$ nad cialem skalarow K

jezeli: V bedzie przestrzenia wektorowa nad cialem K ($K \in R, K \in C \dots$) kazdej parze wektorow x, y przyporzadkujemy skalar $< x, y >$ taki ze:

- $< x, y >=< y, x >$
- $< \alpha x, y >= \alpha$, $\forall_{\alpha \in K}$
- $< x + x', y >=< x, y > + < x', y >$
- $< x, x >\geq 0$, przy czym $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Przy czym wyrozniamy formy: - uzupelnic warunki form

- Forma dwuliniowa symetryczna (hermitowska)
- Forma kwadratowa
- Forma kwadratowa dodatnio okreslona

Dlatego iloczynem Skalarnym nazywa sie dowolna forme dwuliniowa symetryczna lub hermitowska dodatnio okreslona

4.2 Twierdzenia

Tweirdzenie Sylwestra: Macierz kwadratowa A jest dodatnio okreslona jezeli wszystkie jej minory glownwe ostatnich elemntow glownej przekatnej sa dodatnie

Def Slad Macierzy M ($Tr(M)$) jest suma jej elementow diagonalnych m_{ii}

Def Długosc wektora jezeli $x \in (V, < *, * >)$ to dlugosc wektora to:

$$|x| = \sqrt{< x, x >} \tag{26}$$

Def Kat dwoch wektorow jezeli wektory $x, y \in E = (V, < *, * >)$ to ϕ jest katem okreslonym:

$$\phi = \arccos(\frac{< x, x >}{|x||x|}) \tag{27}$$

Def Wektory ortagonalne wektory $x, y \in (V, < *, * >)$ nazywamy ortagonalnymi jezeli:

$$< x, y >= 0 \tag{28}$$

jezeli wektor jest zerowy to jest ortagonalny do kazdego w E

Def Odleglosc wektorow Odlegloscia wektorow $x, y \in E = (V, < *, * >)$ nazywamy liczbe d:

$$d = |x - y| \tag{29}$$

Def jakis dziwny wniosek o wektorach

Def Unormowanie niezerowgo wektora to operacja na $x \in E = (V, < *, * >)$ nazywamy operacje dazaca do utworzenia wersora:

$$\hat{x} = \frac{x}{|x|} \text{ ,taki ze } |\hat{x}| = 1 \tag{30}$$

Twierdzenie Pitagorasa (w ogolnych przestrzeniach wektorowych) dla ortagonalnych parami wektorow $x, y, z, \ldots, w \in E = (V, <*, *>)$ zachodzi:

$$|x + y + z + \ldots + w|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \ldots + |w|^2 \tag{31}$$

Nierownosc Schwartza dla dowolnych wektorow $x, y \in E = (V, <*, *>)$ zachodzi:

$$< x, y >^2 \leq < x, x >< y, y > \tag{32}$$

Z nierownosci Schwartza wynika nierownosc trojkata

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{33}$$

Ortagonalne bazy przestrzeni Euklidesa Niezerowe wektory $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ n wymiarowej przestrzeni Euklidesowej $E = (V, <*, *>)$ tworza baze zwana:

- Ortagonalna: jezeli sa parami prostopadle
- Orto-normalna: gdy sa parai prostopadle i sa wersorami

mamy wtedy:

$$< b_k, b_p >= \delta_{kp} \ (k, p = 1, 2, \ldots, n) \tag{34}$$

Wnioski:

- W bazie ortagonalnej $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ wspolrzedne wektora x_k wektora x sa w postaci:

  $$(*) \quad x_k =< x, b_k > / < b_k, b_k > \tag{35}$$

  i tworza rzuty wektora x na kolejne wektory bazy

- W przestrzeni Euklidesowej z baza orto-normalna Iloczyn Skalarnyjest w postaci standardowej:

  $$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n \tag{36}$$

  gdzie

  $$n = dimV$$

  Istotnie Wektory x i y sa liniowymi kombinacjami wektorow bazy i teza wynika z liniowosci iloczynu skalarnego wobec relacji $(*)$

Algorytm ortagonalizacji Grama-Schmidta Kazda n wymiarowa przestrzen Euklidesowa posiada baze Ortagonalna

Wnioski:

- Wiersze dowolnej macierzy ortagonalnej stopnia k stanowia baze ortonormalna przestrzeni wektorowej R^k
- Wiersze macierzy kwadratowej stopnia k ktora spelnia $AA^T = D$ gdzie macierz D jest pewna macierza diagonalna stanowia baze ortagonalna przestrzeni wektorowej R^k

5 Przestrzen Euklidesowa

Wektor ortagonalny do p.p.w. Jezeli $E = (V, < *, * >)$ bedzie przestrzenia euklidesowa, a V_1 podprzestrzenia wektorowa przestrzeni V to wektor $h \in V$ nazywamy wektorem ortogonalnym do podprzestrzeni przestrzeni wektorowej V_1, jeśli jest on ortogonalny do każdego wektora

$$y \subset V1 :< h, y >= 0 \tag{37}$$

Wnioski Aby wektor $h \in V$ byl ortagonalny do podprzestrzeni przestrzeni wektorowej V_1 wystarczy zeby byl ortagonalny do wszystkich wektorow dowolnej bazy przestrzeni wektorowej V_1 – kompletnie tego nie ogarniam (wyklad 2b str 1)

Def Podprzestrzenie ortagonalne V_1 i V_2 w przestrzeni Euklidesowej $E = (V, < *, * >)$ nazywamy ortagonalnymi jezeli dowolne:

$$x\ inV_1\ ,\ y \in V_2 \tag{38}$$

sa Ortagonalne

Def Dopelnienie ortagonalne podprzestrzeni przestrzeni wektorowej to zbior wszystkich wektorow przestrzeni wektorowej V ortagonalnych do podprzestrzeni przestrzeni wektorowej $V_1 \subset V$ oznaczamy:

$$V_1^{\perp} \tag{39}$$

Def Rzut wektora na podprzestrzen przetrzedni wektorowej jezeli V_1 jest p.p.w przestrzeni Euklidesowej E = (V, ¡*,*¿) i dla kazdego wektora $y \notin V_1$ wektor $y_0 \in V_1$ taki ze wektor $h = y - y_0$ jest ortagonalny do V_1 to wektor y_0 jest rzutem wektora y na V_1

6 Wektory

7 Macierze

7.1 Dodawanie (odejmowanie)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \\ q & r & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+q & e+r & f+t \end{bmatrix} \tag{40}$$

7.2 Mnozenie (dzieleine)

Mozliwe tylko wtedy kiedy $Kolumny(1) = Wiersze(2)$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & q \\ r & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a*x+b*z+c*r & a*y+b*q+c*f \\ d*x+e*z+f*r & d*y+e*q+f*t \end{bmatrix}$$

7.3 Wyznacznik Macierzy

oznaczamy:

$$detA \text{ lub } |A| \tag{41}$$

obliczamy:

- $n = 2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{42}$$

- $n = 3$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{43}$$

- $n > 3$ Rozwiniecie Laplacea: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ wybieramy rzad w ktorym najwiecej $(0, 1, -1)$

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times detA_{ij} \tag{44}$$

gdzie i jest wybranym przez nas rzedem i potem liczymy wyznaczniki mniejszych macierzy wynikowych a kazdy z nich mnozymy przez $a_{ij} * (-1)^{j+j}$

Macierz kwadratowa ktorej wyznacznik jest rowny 0 nazywamy *Osobliwa*

7.4 Rzad macierzy

Rzad macierzy to najwyzszy stopien dla ktorego wyznacznik jest rozny od zera
np jezeli wyznacznik macierzy 4×4 nie jest rowy 0 to liczymy wszystkie wyznaczniki podmacierzy 3×3 poki nie znajdziemy takiego roznego od 0 jezeli dalej takiego nie bedzie robimy tak samo dla 2×2 itd.

7.5 Rozwiazywanie rownan macierzowych