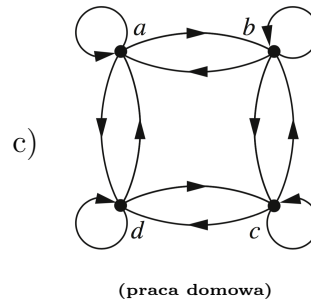
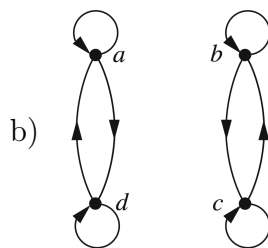
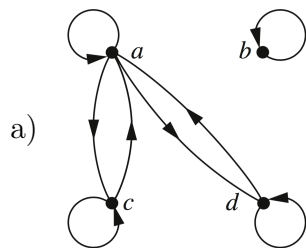


1. Który z poniższych grafów skierowanych (digrafów) reprezentuje relację równoważności w zbiorze $A = \{a, b, c, d\}$?



2. Która z poniższych relacji jest relacją równoważności?

a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Z}\}$

b) $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a \equiv b \pmod{2}\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ (praca domowa)

d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (praca domowa)

e) $R_5 = \{(a, b) \in \mathbb{A}^2 : a \equiv b \pmod{4}\}$, gdzie $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ (praca domowa)

3. Niech $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X)^2 : |A| = |B|\}$ będzie relacją binarną w zbiorze potęgowym $\mathcal{P}(X)$ zbioru $X = \{a, b, c\}$. Czy R jest relacją równoważności?

4. Niech

$$R = \{(s, t) \in A^2 : \text{dwie pierwsze litery słowa } s \text{ są takie same, jak dwie pierwsze litery słowa } t\}$$

będzie relacją binarną w zbiorze $A = \{w \in \Sigma^* : |w| = 4\}$, gdzie $\Sigma = \{a, b\}$. Czy R jest relacją równoważności? (praca domowa)

5. Wyznaczyć relacje równoważności w zbiorze $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ indukowane przez następujące podziały tego zbioru

a) $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$

b) $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$

6. Wyznaczyć relacje równoważności w zbiorze $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ indukowane przez następujące podziały tego zbioru

a) $\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f, g\}$ (praca domowa)

b) $\{a\}, \{b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g\}$ (praca domowa)

7. Wyznaczyć klasy równoważności (klasy abstrakcji) następującej relacji równoważności w zbiorze $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(0, 0), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 0), (4, 4)\}.$$

8. Wyznaczyć klasy równoważności następujących relacji równoważności

a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Z}\}$

b) $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a \equiv b \pmod{2}\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ (praca domowa)

d) $R_4 = \{(a, b) \in \mathbb{A}^2 : a \equiv b \pmod{4}\}$, gdzie $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ (praca domowa)

DEFINICJE

1. Relację binarną R w zbiorze A nazywamy relacją równoważności, jeśli R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.
2. Podziałem niepustego zbioru A nazywamy zbiór niepustych, rozłącznych podzbiorów tego zbioru, których sumą jest zbiór A .
3. Relacja R indukowana przez dany podział zbioru A zdefiniowana jest w następujący sposób

$$\forall x, y \in A \quad (x, y) \in R \iff \text{istnieje podzbiór } A_i \text{ danego podziału zbioru } A \text{ taki, że } x, y \in A_i.$$

4. Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze A . Klasą równoważności (abstrakcji) elementu $x \in A$ nazywamy zbiór

$$[x]_R = \{y \in A : (x, y) \in R\}.$$