ZESTAW 6

1. Znaleźć wszystkie funkcje z $X = \{a, b\}$ w $Y = \{c, d\}$.

2. Czy odwzorowanie $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ określone wzorem $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = m - n$ jest funkcją?

3. Niech $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ i $C = \{0, 1, 2, 3\}$. Rozważmy następujące funkcje $f\colon A \to B$, $g\colon A \to C$, $h\colon A \to C$ określone odpowiednio wzorami

$$f(x) = x + 4, \quad g(x) = x, \quad h(x) = (2 - x)^2.$$

a) Które z powyższych funkcji są odwzorowaniami różnowartościowymi (iniekcjami)?

b) Które z powyższych funkcji są odwzorowaniami „na” (suriekcjami)?

c) Które z powyższych funkcji są odwzorowaniami wzajemnie jednoznacznymi (bijekcjami)?

4. Niech $|X| = m$ i $|Y| = n$, gdzie $m < n$. Ile jest funkcji z X w Y? Ile jest funkcji różnowartościowych (iniekcji) z X w Y oraz z Y w X?

5. Czy funkcja $f\colon \mathcal{P}(\{a, b\}) \to \mathbb{Z}$ określona wzorem $f(A) = |A|$ jest iniekcją?

6. Które z poniższych funkcji są suriekcjami?

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 1$

b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = 4x - 1$

7. Niech $x \in S_5$. Rozwiązać równanie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Która z poniższych permutacji jest cyklem?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

9. Poniższe permutacje zapisać (i) jako iloczyn cykli rozłącznych, (ii) jako złożenie transpozycji

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 3 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ **(praca domowa)**

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(praca domowa)**

Która z powyższych permutacji jest parzysta?

10. Rozważmy permutacje

$$\pi = (12)(345), \quad \sigma = (1)(2453).$$

Wyznaczyć

a) π^{-1}

b) σ^{-1} **(praca domowa)**

c) $\pi \circ \sigma$

d) $\sigma \circ \pi$ **(praca domowa)**

11. Niech

$$\pi = (1235)(467)$$

będzie elementem grupy S_7. Wyznaczyć rząd permutacji π i obliczyć π^{24217}.

DEFINICJE I TWIERDZENIE

1. Relację $f \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy relacja f ze zbioru X w zbiór Y spełnia następujące warunki

   a) $\forall\, x \in X \quad \exists\, y \in Y \quad (x, y) \in f$

   b) $\forall\, x \in X \quad \forall\, y_1, y_2 \in Y \quad (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$

2. Funkcja $f \colon X \to Y$

   a) jest iniekcją $\iff \forall\, x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$,

   b) nie jest iniekcją $\iff \exists\, x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$,

   c) jest suriekcją $\iff \forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X \quad f(x) = y$,

   d) nie jest suriekcją $\iff \exists\, y \in Y \quad \forall\, x \in X \quad f(x) \neq y$.

3. Rzędem cyklu jest jego długość.

4. Jeśli permutacja jest iloczynem cykli rozłącznych, to jej rzędem jest najmniejsza wspólna wielokrotność długości cykli wchodzących w jej zapis.