Przestrzeń Euklidesowa i unitarna – iloczyn skalarny

Def. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ (ciałem $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$). Każdej parze wektorów x, y p.w. V przyporządkowujemy skalar <x, y>, taki że

(1) <x, y> = <y, x> ($< x, y > = \overline{< y, x >}$)

(2) <αx, y> = α <x, y> , dla dowolnego skalara α z ciała $\boldsymbol{K}$

(3) <x + x', y> = <x, y> + <x', y>

(4) <x, x> ≥ 0, przy czym <x, x> = 0 ⇔ x = **0**

Wówczas, przyporządkowanie V×V ∋ (x, y) → <x, y> ∈ $\boldsymbol{K}$ nazywamy iloczynem skalarnym wektorów x, y p.w. V, zaś przestrzenią Euklidesową (unitarną) nazywamy parę (V, <*, *>) nad ciałem skalarów $\boldsymbol{K}$, odpowiednio.

Uwaga. Przyporządkowanie wektorom x, y p.w. V skalara f(x, y) spełniające warunki (1)-(3) nazywamy formą dwuliniową symetryczną (hermitowską).
Jeśli y = x, to formę tę nazywamy formą kwadratową f(x, x), a dodatkowo warunek (4) pozwala nazywać ją formą kwadratową dodatnio określoną. Dlatego iloczynem skalarnym (ogólnie) nazywa się dowolną formą dwuliniową symetryczną lub hermitowską dodatnio określoną.

P1. (a) Dla V = $\boldsymbol{R}^n$ iloczynem skalarnym wektorów x, y∈V jest znane wyrażenie <x, y> = $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n \in \boldsymbol{R}$ (spełnione są aksjomaty (1)-(4));

(b) Dla V= $\boldsymbol{C}^n$ definiujemy $< x, y > = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n \in \boldsymbol{C}$, gdzie <x, x> ∈ $\boldsymbol{R}$;

(c) Ogólnie, dla V = $\boldsymbol{R}^n$ iloczynem skalarnym będzie wyrażenie <x, y> = xAy^T dla x = $[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$ i y = $[y_1, y_2, y_3 \ldots, y_n]$ ∈V, jeśli tylko macierz kwadratowa $A \in M_{nxn}(\boldsymbol{R})$ jest symetryczna i dodatnio określona, tzn. jej elementy spełniają warunek $< x, x > = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \geq 0$, przy czym <x, x> = 0 jedynie dla x = **0**.

W p.(a) mamy A = I, ale w p.w. $\boldsymbol{R}^2$ macierz symetryczna A = $[e_2^T, e_1^T]$ dla kolumn $e_1^T = [1, 0]^T$ i $e_2^T = [0, 1]^T$ nie definiuje poprawnie iloczynu skalarnego <x, y> = $x_1 y_2 + x_2 y_1$, gdyż w (4) mamy <x, x> = $2 x_1 x_2 < 0$ dla np. x = [-1, 1]!

(d) Sprawdź, że macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ definiuje 2-liniową formę dodatnio określoną na p.w. $\boldsymbol{R}^2$, a tym samym określa poprawnie iloczyn skalarny. W sprawdzeniu dodatniej określoności macierzy kwadratowej pomocne jest tzw.:

Tw. Sylwestera
Macierz kwadratowa A jest dodatnio określona, jeśli wszystkie jej minory główne ostatnich elementów głównej przekątnej są dodatnie.

(e) W p.w. trójmianów kwadratowych V = $\boldsymbol{R}_2[x]$ iloczyn skalarny określa:

(*i*) całka postaci: $\langle w, v\rangle = \int_{-1}^{1} w(x)v(x)dx$, ale także

(*ii*) wyrażenie <w, v> = w(a)v(a) + w(b)v(b) + w(c)v(c), dla a < b < c.

(f*) W p.w. V= $M_{mxn}(\boldsymbol{R})$ iloczyn skalarny dany jest przez ślad macierzy

$$<A, B> = Tr(AB^T),$$

gdzie ślad macierzy M, Tr(M), jest sumą jej elementów diagonalnych m_{ii}.

Def. Długość wektora x∈(V, <*,*>) określamy jako $|x| = \sqrt[2]{\langle x, x\rangle}$.

Def. Kątem dwóch wektorów x, y ∈E = (V, <*,*>) nazywamy liczbę

$$\varphi = \arccos\left(\frac{<x, y>}{|x||y|}\right)$$

Def. Wektory x, y∈(V, <*,*>) nazywamy ortogonalnymi, jeśli <x, y> = 0.

Wn. Wektor zerowy jest ortogonalny do dowolnego wektora przestrzeni E.

Def. Odległością wektorów x, y∈E = (V, <*,*>) nazywamy liczbę d=$|x-y|$

P2. (a) Odległość wektorów x=[1,1,1] i y=[1,-1,-1] w bazie kanonicznej wynosi

$$d(x, y) = |\,[0, 2, 2]\,| = 2\sqrt[2]{2}$$

(b) Odległość funkcji f(t) = sin(t) i g(t) = cos(t) w p.w. funkcji ciągłych dla t∈[0, 2π] wynosi $(2\pi)^{1/2}$, jeśli iloczyn skalarny dany jest przez całkę oznaczoną w przedziale [0, 2π].

Wn. Niezerowe wektory ortogonalne dowolnej przestrzeni Euklidesowej są liniowo niezależne. Ogólnie, układ wektorów parami prostopadłych jest układem liniowo niezależnym.
Istotnie, bo gdy wektory prostopadłe x i y byłyby współliniowe, x = s y dla s≠0, to 0 = <x, y> = <s y, y> = s <y, y>, czyli <y, y> = 0 więc y = **0** – sprzeczność.

P3. Wektorami ortogonalnymi w odpowiednich przestrzeniach Euklidesowych są np. wielomiany w = 1 i v = x (patrz P1.e) oraz funkcje f i g w P2.b. Sprawdź!

Def. Unormowaniem niezerowego wektora *x*∈E =(V, <*,*>) nazywamy operację prowadzącą do utworzenia wersora $\hat{x} = x/|x|$, dla którego $|\hat{x}|$ = 1.

Tw. Pitagorasa (*w ogólnych przestrzeniach wektorowych*)
Dla ortogonalnych parami wektorów x, y, z, ... $w \in E = (V, <*,*>)$ zachodzi

$$|x+y+z+...+w|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + ... + |w|^2 .$$

Dowód:

$$|x+y+z+...+w|^2 = <x+y+z+...+w, x+y+z+...+w> =$$
$$<x,x> + <x,y> + <x,z> + ... + <x,w> +$$
$$<y,x> + <y,y> + <y,z> + ... + <y,w> +$$
$$+ ... +$$
$$<w,x> + <w,y> + <w,z> + ... + <w,w> =$$
$$<x,x> + <y,y> + <z,z> + ... + <w,w> =$$
$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + ... + |w|^2$$

Tw. (nierówność Schwartza)
Dla dowolnych wektorów x, $y \in E = (V, <*,*>)$ zachodzi

$$\langle x, y\rangle^2 \le \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

Dowód: wynika z analizy wyróżnika ($\Delta \le 0$) nieujemnego trójmianu kwadratowego zmiennej $t \in \boldsymbol{R}$ postaci $<x - t\,y, x - t\,y> \ge 0$ (patrz aksjomat (4)).

Wn. (nierówność trójkąta)
Z nierówności Schwartza wynika tzw. nierówność trójkąta $|x+y| \le |x| + |y|$, bo $|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2$.

Ortogonalne bazy przestrzeni Euklidesa

Def. Niezerowe wektory $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ n - wymiarowej przestrzeni Euklidesa $E = (V, <*,*>)$ tworzą bazę zwaną bazą ortogonalną, jeśli są parami prostopadłe, zaś bazą orto-normalną, gdy dodatkowo są także wersorami. Wówczas, mamy

(*) $<b_k, b_p> = \delta_{kp}$ (k, p = 1, 2, ..., n).

Wn. W bazie ortogonalnej $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ współrzędne x_k wektora x są postaci:
$x_k = <x, b_k>/<b_k, b_k>$ i tworzą rzuty wektora x na kolejne wektory bazy.

Wn. W przestrzeni Euklidesa z bazą orto-normalną iloczyn skalarny jest postaci standardowej: $<x, y> = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + ... + x_n y_n$, gdzie n =dim V.
Istotnie, wektory x i y są liniowymi kombinacjami wektorów bazy i teza wynika z liniowości iloczynu skalarnego wobec relacji (*).

Tw. (algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta)

Każda n-wymiarowa p. Euklidesa posiada bazę ortogonalną.

Dowód – konstrukcja bazy ortogonalnej:
Niech układ $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ będzie dowolną bazą p.w. V (n =dim V).

Połóżmy: $b_1 = f_1$ oraz $b_2 = f_2 + s\, b_1$ tak, że $s = -\langle f_2, b_1\rangle / \langle b_1, b_1\rangle$, co wynika z warunku prostopadłości $\langle b_2, b_1\rangle = 0$.

Tak postępując dalej utworzymy każdy wektor nowej bazy ortogonalnej $\{b_1, b_2, \dots b_n\}$, gdzie $b_k = f_k + s_{k-1}\, b_{k-1} + s_{k-2}\, b_{k-2} + \dots + s_1\, b_1$ przy czym

$$s_j = -\langle f_k, b_j\rangle / \langle b_j, b_j\rangle$$

Wektory b_k nie redukują się do wektora zerowego, bo są ostatecznie liniowymi kombinacjami wektorów bazy $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$.

P4. Dla wektorów $f_1 = [1,1,0]$, $f_2 = [1,0,1]$, $f_3 = [0,1,1]$ otrzymamy drogą ortogonalizacji G-S bazę ortogonalną $b_1 = [1,1,0]$, $b_2 = [1,-1,2]$, $b_3 = [-1,1,1]$.
Po procesie normalizacji otrzymamy bazę orto-normalną $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$, która prowadzi do macierzy ortogonalnej A o wierszach złożonych z tych wektorów:

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$ Czy umiesz to wykazać?

Wn. Wiersze dowolnej macierzy ortogonalnej stopnia k stanowią bazę <u>ortonormalną</u> przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{R}^k$.

Wn. Wiersze macierzy kwadratowej stopnia k, która spełnia warunek $AA^T = D$, gdzie macierz D jest pewną macierzą diagonalną, stanowią bazę <u>ortogonalną</u> przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{R}^k$

P5. Ortogonalizacja w przestrzeni wielomianów o bazie $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ z iloczynem skalarnym jak w P1(e) prowadzi do bazy złożonej z tzw. wielomianów Legendre'a.