1) Obliczyć iloczyny skalarne podanych par wektorów

a) $\vec{a} = (-1, 5, 2)$ $\quad \vec{b} = (3, 0, 7)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1, 5, 2) \cdot (3, 0, 7) = (-1) \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 7 = 11$

b) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\quad \vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 2\vec{k}) = 3 - 2 = 1$

2) Policzyć iloczyny wektorowe $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ $\quad \vec{b} = (-1, 2, -5)$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -19\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k} = (-19, -7, 1)$

3) Obliczyć pola podanych powierzchni

a) trójkąt rozpięty na wektorach $\vec{a} = (1, -1, 1)$
$\vec{b} = (0, 3, -2)$

b) równoległobok o trzech kolejnych wierzchołkach w pkt $A = (1, 0, 1)$ $B(3, -1, 5)$ $C(-1, 5, 0)$

Ad a) $S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \right\| =$

$= \frac{1}{2}|-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}| = \frac{\sqrt{14}}{2}$

Ad b) równoległobok ABCD w pkt. $A(1, 0, 1)$ $B(3, -1, 5)$ $C(-1, 5, 0)$ jest rozpięty na wektorach $\vec{AB} = (2, -1, 4)$ $\quad \vec{AC} = (-2, 5, -1)$

$S_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \right| =$

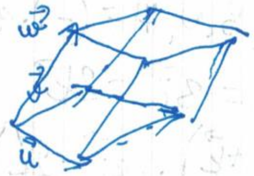
$= |-19\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}| = \sqrt{(-19)^2 + (-6)^2 + 8^2} = \sqrt{461} \approx$

$\approx 21{,}47$

Obliczyć objętości podanych wielościanów

a) równoległościanu rozpiętego na wektorach

$\vec{a} = (3, -2, 5)$ $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (-2, 2, 1)$



(x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3)

$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$ – iloczyn mieszany uporządkowanej trójki wektorów

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$V = \left| \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_1 - 3w_2 \\ \\ w_3 + 2w_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \right| = |-7| = 7$$

b) objętość czworościanu rozpiętego na wektorach

$\vec{a} = \cancel{(0, 2, -3)}$ $(1, 1, 1)$ $\vec{b} = \cancel{(2, 0, 1)}$ $\vec{c} = \cancel{(-1, -1, 0)}$

$\vec{b} = (1, -1, 0)$ $\vec{c} = (-1, 3, -2)$

$$|V| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{6} |6| = 1$$

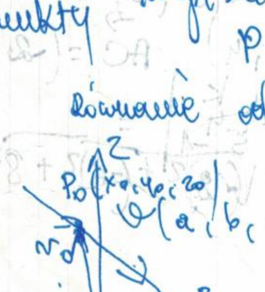
Równanie płaszczyzny przechodzącej przez 3 punkty

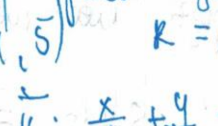
$P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $1 \le i \le 3$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Wypisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P = (0, 1, 2)$ $Q(-1, 4, 5)$ $R = (2, -2, 3)$

Równanie odcinkowe płaszczyzny $\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$





równanie parametryczne prostej $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$

postać wyznaczona przez punkt i wektor kierunkowy

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$

$x = x_0 + at$
$y = y_0 + bt$
$z = z_0 + ct$, $t \in R$.

Równanie ~~kierunkowe~~ prostej

$$l: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Tw. Kroneckera-Capellego (1)

Układ równań liniowych z n niewiadomymi postaci $AX = B$

a) nie posiada rozwiązań gdy $rz\,A \neq rz\,[A|B]$

b) $rz\,A = rz\,[A|B] = n$ ma dokładnie jedno rozwiązanie

c) $rz\,A = rz\,[A|B] = r < n$ — nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-r$ parametrów.

Zad 1)

W podanych układach równań liniowych określić liczbę rozwiązań oraz liczbę parametrów.

a) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 3x + y + z - t = 2 \\ 5x - y + 5z + t = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 1 \\ x - y - z + 3t = 2 \\ 3x + 5y - 4z - t = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ 5x - y - z = 2 \\ x - 10y + 4z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 2 \\ x - 2y + z + 2t = -1 \\ 2x + 3y + z + 3t = 1 \end{cases}$

a) Rozważmy następujące przekształcenie macierzy rozszerzonej

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 5w_1]{w_2 - 3w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

$rz\,A = 2 = rz\,[A|B] = r < n = 4$. Oznacza że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r = 2$ parametrów.

b) Zamieniamy dla wygody kolejność równań układu i przekształcamy jego macierz rozszerzoną do postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 8 & -1 & -10 & -6 \end{array}\right]$$

$rz\,A = 3 = rz\,[A|B] = r$. Mamy $n = 4$. Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań a liczba parametrów jest równa $n - r = 1$

W tym przykładzie mamy $n = 3$. stosując operacje (2) elementarne otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - w_1,\ w_5 - w_1]{w_2 - 2w_1,\ w_3 - 5w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 14 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 = 2w_2,\ w_4 = -w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$rzA = 3 = rz[A|B] = n$. Układ ma więc dokładnie jedno rozwiązanie

d) Równanie ze współczynnikiem 1 przy zmiennej x znów dla wygody dajemy na początek i przekształcamy macierz rozszerzoną układu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - 2w_1]{w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - 7w_2]{w_3 - 5w_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$rzA = 3 < 4 = rz[A|B]$ Więc rozważany układ nie ma rozwiązań