Zd 1 Zestaw 7 (1)

a) zb. z def. lin. niez. wektorów.

$(2,0,6), (0,1,0), (1,1,1)$ w R^3

Ukł. wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$ jest liniowo niezależny jeżeli dla dow. liczb $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in R$ równość: $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = 0$ jest spełniona jedynie dla $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Jeżeli tak nie jest mówimy o wektorach liniowo zależnych

$$\alpha_1(2,0,6) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,1,1) = 0$$

$$\begin{array}{l} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 6\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ ukł. lin. niezależny

b) $\alpha_1(1+x^2) + \alpha_2(1-x^2) + \alpha_3(1+2x) = 0$

$(\alpha_1 - \alpha_2)x^2 + 2\alpha_3 x + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$+$

$2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$$\Downarrow$$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ ukł. liniowo niezal.

zd 1 c ②

$\alpha_1(1+x)+\alpha_2(2-x)+\alpha_3(3x-5)=0$

$\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=0$
$\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3=0$
$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -5\end{bmatrix}$

$r(A)=2$ ponieważ $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2+1=3\neq 0$
$r[A|B]=2$
$n=3$

układ ma nieskoń. wiele rozw. zależnych od $(3-2)=1$ parametrów. układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

zd 2 a) $V=\{(x-2y,\ x+y+3z,\ y-4z,\ 2x+z),\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$

Dowolny wektor $\vec{v}\in V$ możemy zapisać

$\vec{v}=(x-2y,\ x+y+3z,\ y-4z,\ 2x+z)=$
$=(x,x,0,2x)+(-2y,y,y,0)+$
$+(0,3z,-4z,z)=x(1,1,0,2)+$
$+y(-2,1,1,0)+z(0,3,-4,1)$
$V=\operatorname{lin}\{(1,1,0,2),(-2,1,1,0),(0,3,-4,1)\}$

zd 2b
$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}\}$
Niech $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}=t \wedge t\in\mathbb{R}$
$x=2t$
$y=3t \wedge z=-t$
$(x,y,z)=(2t,3t,-t)=t(2,3,-1)$
$V=\operatorname{lin}\{(2,3,-1)\}$

zd 3a $B=\{(1,0,1),(1,2,2)\}$ R^3 (3)

$B \subset V$ jest bazą jeśli B jest liniowo niezależny i generuje tę przestrzeń.

$$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,2,2)=0\equiv(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ 2\alpha_2=0\\ \alpha_1+2\alpha_2=0\end{cases} \Rightarrow \alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_2=0$$

układ jest liniowo niezależny. Czy generuje całą przestrzeń R^3

$$B_1(1,0,1)+B_2(1,2,2)=\text{dowolny wektor } R^3$$

$$B_1(1,0,1)+B_2(1,2,2)=(0,0,1)$$

$B_1+B_2=0$

$2B_2=0 \Rightarrow B_2=0 \Rightarrow B_1=0.$

$B_1+2B_2=1$ 3 równanie nie jest spełnione

Układ nie jest bazą ponieważ np wektor $(0,0,1)$ nie da się przedstawić jako kombinację wektorów B.

zd 3b $B=\{(1,0,1),(1,2,2),(0,1,1)\}$ R^3

$$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,2,2)+\alpha_3(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_1=-\alpha_2\\ 2\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases} \quad \begin{cases}2\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0 \mid (-1)\end{cases}$$

$+$

układ liniowo niezal. $\alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_1=0$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=x\\ 2\alpha_2+\alpha_3=y\\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=z\end{cases}$$ współrz. wektora $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\1&2&1\end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ wzgl. 1 kol.} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0$$

(4)

układ Cramera ma dokł 1 rozw.

B jest więc bazą przestrzeni.

zad 4a)

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 12 = -24 \neq 0$$

zad 4b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(4+2) - 2(8+1) = 18 - 18 = 0$$

ukł liniowo zależny

zad 5 Wskazać bazy i określić wymiar przestrz. lin.

a) $V = \{(2x, x+y, 3x-y, x-2y), x, y \in \mathbb{R}\}$ (5)

$(2x, x+y, 3x-y, x-3y) = (2x, x, 3x, x) +$
$+ (0, y, -y, -2y) = x(2,1,3,1) + y(0,1,-1,-2)$

Spr. liniową niez.

$\alpha_1(2,1,3,1) + \alpha_2(0,1,-1,-2) = (0,0,0,0)$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

ukł. liniowo niezal.

$V = lin\{(2,1,3,1), (0,1,-1,-2)\}$ → ukł. lin. niezal.

$\dim V = 2.$

b) $(r-2s-t, 2r+s-3t, 3r+4s-5t) =$
$= r(1,2,3) + s(-2,1,4) + t(-1,-3,-5)$

liniowa niez

$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(-2,1,4) + \alpha_3(-1,-3,-5) = (0,0,0)$

$\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$
$2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0$
$3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - 2w_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0$$

ukł. liniowo zależny nie jest bazą

zd 5b

6

układ wektorów $(1,2,3)$ $(-2,1,4)$ $(-1,-3,-5)$ nie jest bazą ale wektory $(1,2,3)$ oraz $(-2,1,4)$ są liniowo niezal.

$$\alpha_1(1,2,3)+\alpha_2(-2,1,4)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0\\ 2\alpha_1+\alpha_2=0 \quad /2\\ 3\alpha_1+4\alpha_2=0\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}\alpha_1-2\alpha_2=0\\ \underline{4\alpha_1+2\alpha_2=0}\\ 5\alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{array}$$

ukł. liniowo niezal.

$\dim V = 2$

c) $(x,y,z,t)\in R^4$ $x+y=z-y \Rightarrow x=z-2y$

$$(z-2y,\ y,\ z,\ t)=y(-2,1,0,0)+$$
$$+z(1,0,1,0)+t(0,0,0,1)$$

$$V=\text{lin}\{(-2,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

$$\alpha_1(-2,1,0,0)+\alpha_2(1,0,1,0)+\alpha_3(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{cases}-2\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}$$

ukł lin. niez.

$\dim V = 3$