Mateusz Kojro
zadanie 1
a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i^2 \\ 0 & -i^3 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} i^2 & 0 & 0 \\ 0 & i^4 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalna

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i^3 \\ 0 & -i^5 & 0 \\ i^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^6 = \begin{bmatrix} i^3 & 0 & 0 \\ 0 & i^6 & 0 \\ 0 & 0 & i^3 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i^4 \\ 0 & -i^7 & 0 \\ i^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wykonując zatem zauważyć że
dla potęg parzystych możemy zapisać wzór:

$$A^n = \begin{bmatrix} i^{\frac{n}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & i^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$ dla n parzystych

a dla potęg nieparzystych

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i^k \\ 0 & i^n & 0 \\ i^m & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ dla

$k = \frac{n}{2}$ zaokrąglone do całkowitych w górę

$m = \frac{n}{2}$ zaokrąglone w dół do liczb całkowitych

mamy więc
$$A^{100} = \begin{bmatrix} i^{50} & 0 & 0 \\ 0 & i^{100} & 0 \\ 0 & 0 & i^{50} \end{bmatrix}$$

zadanie 6

a) $[A \mid I] = [I \mid A^{-1}]$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\omega_3 \leftrightarrow \omega_4]{\omega_1 \leftrightarrow \omega_2,\ \omega_1 \leftrightarrow \omega_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&1&0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\omega_3 - \omega_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0&1&-1&0\\ 1&1&0&1&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\omega_1 - \omega_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&-1&-1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0&1&-1&0\\ 1&1&0&1&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\omega_2 - \omega_3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&-1&-1&0&0&1\\ 0&2&0&1&1&-1&1&0\\ 0&-1&1&0&0&1&-1&0\\ 1&1&0&1&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\omega_4 - \omega_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&-1&\\ 0&2&0&1&\\ 0&-1&1&0&\\ 0&1&0&2& \end{array}\right] \xrightarrow{\omega_4 - \frac{\omega_2}{2}}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&-1&-1&0&0&1\\ 0&2&0&1&1&-1&1&0\\ 0&-1&1&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1 \end{array}\right] \xrightarrow{\omega_4 - \frac{2}{3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&-1&-1&0&0&1\\ 0&2&0&1&1&-1&1&0\\ 0&-1&1&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{\omega_2}{2}]{\omega_2 - \omega_4}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&-1&-1&0&0&1\\ 0&1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&-1&1&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[\omega_3 + \omega_2]{\omega_1 + \omega_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3} \end{array}\right] =$$

$$= [I \mid A^{-1}] = A^{-1}$$

zadanie 7

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

I z tw. Laplace'a

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$$

$$D_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

metoda Sarrusa $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{matrix} =$

$$= (-3)(-1)(-1) + (-(-2)(-2)(-3)) - (-1)(-2) \cdot 2 =$$
$$= -3 + 12 - 4 = 5$$

$$\det A = 5$$

II Stosując metodę eliminacji Gaussa mamy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} a_{22}' & a_{23}' \\ a_{32}' & a_{33}' \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}' = a_{ij} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}$$

dlatego:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

liczymy ujęć:

$a_{22}' = 1 - 2\,\frac{2}{1} = -3$ $\quad a_{32}' = 2 \quad a_{42}' = 0$

$a_{23}' = 2$ $\quad a_{33}' = 1 \quad a_{43} = 2$

$a_{24}' = 0$ $\quad a_{34}' = 2 \quad a_{44} = 1$

metoda Sarrusa

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} = (-3) - 2\cdot 2\cdot(-3) - 2\cdot 2 = -3 + 12 - 4 = 5$$

$$\det A = 5$$