Algebra liniowa z geometrią analityczną

Literatura (*podstawowa*):

1. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1* – cz.1 i cz.2, GiS, Wrocław 2002 !!!
2. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 2* – cz.1 i cz.2, GiS, Wrocław 2002
3. A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, Biblioteka Matematyczna 16, PWN
4. G. Wiatrowski, *Notatki do wykładu*

Literatura (*uzupełniająca*):

1. A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, Biblioteka Matematyczna 48, PWN
2. W. Janowski, *Matematyka*, T.1, PWN
3. J. M. Gel'fand, W*ykłady z algebry liniowej*, W-wa, 1974

Wiadomości wstępne

ZBIORY

Def. Zbiorem pustym nazywamy zbiór A, który nie zawiera żadnego elementu,

ozn. $A = \emptyset$.

Def. Zbiór A jest **podzbiorem** w B : $\quad (A \subset B) \Leftrightarrow \forall a (a \in A \Rightarrow a \in B)$

Def. Zbiory A i B są **równe :** $\quad (A = B) \Leftrightarrow \forall a (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$

Def. **Sumą zbiorów** A i B nazywamy zbiór: $\quad A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Def. **Iloczynem zbiorów** A i B nazywamy zbiór: $\quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Def. **Różnicą zbiorów** A i B nazywamy zbiór: $\quad A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

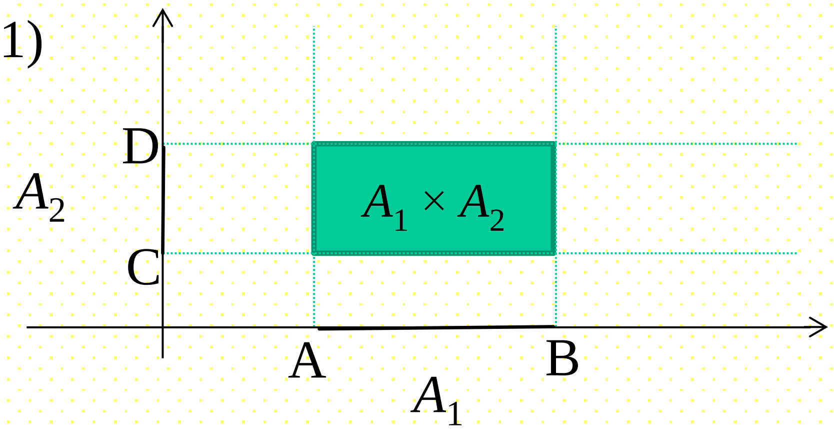
Jak nazywamy zbiór postaci: $\quad A \div B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$?

Def. **Iloczynem kartezjańskim** zbiorów A_1, A_2, ..., A_n nazywamy zbiór:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n\}$$

Iloczyn kartezjański zbiorów $A_1 \times A_2$ – przykład interpretacji geometrycznej

1)



$A_1 \times A_2 = [A, B] \times [C, D]$

Prostokąt z brzegiem (domknięty)

2)

$\boldsymbol{S} = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\ \}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{N}$ => $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}$?

Zad.1 Narysuj i opisz zbiór $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{N}$, czym się różni od $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{S}$?

Zad.2 Narysuj i opisz zbiór $(0, 1) \times \boldsymbol{S}$, czym się różni od $\{0,1\} \times \boldsymbol{S}$?

Odwzorowania

Def. Jeżeli każdemu elementowi *a* zbioru *A* przyporządkowano

dokładnie jeden element $b \in B$, to mówimy, że określone jest **odwzorowanie zbioru *A* w zbiór *B***, co oznaczamy przez $h : A \to B$.

Zbiór *A* nazywamy dziedziną, natomiast zbiór $h(A) \subset B$ - przeciwdziedziną odwzorowania *h* (lub obrazem zbioru *A*).

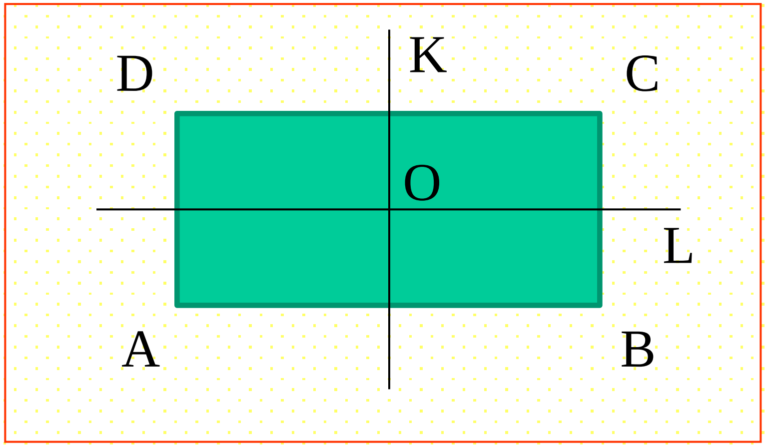
Przeciwobrazem zbioru B_1 nazywamy podzbiór $A_1 = h^{-1}(B_1)$ z dziedziny *A*, taki że $h(A_1) \subset B_1$.

Def. **Superpozycją (złożeniem)** odwzorowań $h : A \to B$ i $g : B \to C$ nazywamy odwzorowanie $g \circ h : A \to C$ określone przez relację:

$$(g \circ h)(a) = g(h(a))$$

dla każdego elementu *a* zbioru *A*.

Przykład: złożenie symetrii osiowych K i L prostokąta jest symetrią środkową względem O



$K(A) = B$
$K(B) = A$
$K(C) = D$
$K(D) = C$

$L(A) = D$
$L(B) = C$
$L(C) = B$
$L(D) = A$

$O(A) = C$
$O(B) = D$
$O(C) = A$
$O(D) = B$

$I(A) = A$
$I(B) = B$
$I(C) = C$
$I(D) = D$

złożenie symetrii $K \circ L = O$, bo

$(K \circ L)(A) = K(L(A)) = K(D) = C = O(A)$
$(K \circ L)(B) = K(L(B)) = K(C) = D = O(B)$
$(K \circ L)(C) = K(L(C)) = K(B) = A = O(C)$
$(K \circ L)(D) = K(L(D)) = K(A) = B = O(D)$

$\leftrightarrow$

Pokaż, że również $L \circ K = O$, ale i: $L \circ O = O \circ L = K$ oraz $K \circ O = O \circ K = L$, natomiast $L \circ L = K \circ K = O \circ O = ?$

Zadanie**: zanalizuj podobnie symetrie osiowe dla trójkąta równobocznego!!!

Odwzorowania (cd.)

Def. Odwzorowanie $h: A \to B$ nazywamy **różnowartościowym (injekcją)**

wtedy, gdy: $\forall(a_1, a_2 \in A)\ h(a_1) = h(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Def. Odwzorowanie $h: A \to B$ nazywamy **odwzorowaniem na (surjekcją)**

wtedy, gdy: $\forall(b \in B) \exists(a \in A)\ \ h(a) = b$.

Def. Odwzorowanie $h: A \to B$ nazywamy **wzajemnie jednoznacznym (bijekcją)** wtedy, gdy *h* jest injekcją i surjekcją.

Def. Jeżeli odwzorowanie $h: A \to B$ jest bijekcją, to odwzorowanie $h^{-1}: B \to A$ nazywamy **odwrotnym** do *h* wtedy, gdy

$\forall(a \in A)\left(h^{-1} \circ h\right)(a) = a$, a inaczej $h^{-1} \circ h = Id_A$.

Odwzorowanie zbioru *A* w siebie postaci $Id_A(a) = a$ nazywamy identycznością.

Grupy i ciała - struktury algebraiczne (I)

Mówimy, że **w zbiorze A wykonalne jest działanie** $\oplus$ (inaczej, zbiór A jest zamknięty względem działania $\oplus$), jeśli wynik tego działania dla dowolnych elementów zbioru A należy również do zbioru A, tzn.:

$$\forall(a, b \in A)\ \exists(c \in A)\ \ c = a \oplus b$$

P1. Zbiór liczb naturalnych ***N*** nie jest zamknięty względem działania odejmowania.

P2. Zbiór liczb całkowitych ***Z*** jest zamknięty względem działania + i *, ale nie jest zamknięty względem dzielenia, bo wynik dzielenie liczb całkowitych nie jest zwykle liczbą całkowitą.

Pyt.: Względem jakich działań zamknięty jest zbiór liczb wymiernych ***W***?

Pyt.: Względem jakich działań zamknięty jest zbiór liczb niewymiernych ***NW***?

Def. Grupą nazywamy parę zbiór G wraz z działaniem ”o” względem którego zbiór ten jest zamknięty , jeśli spełnione są aksjomaty grupy

$\forall(a, b, c \in G)$ $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (prawo łączności)

$\exists(e \in G)$ $\forall(a \in G)$ $a \circ e = e \circ a = a$ (istnienie elementu neutralnego)

$\forall(a \in G)$ $\exists(a^{-1} \in G)$ $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ (istnienie elementu odwrotnego)

Def. Grupę (G, o) nazywamy **przemienną** (lub **abelową**), jeśli

jej działanie grupowe ”o” jest przemienne, tzn.:

$\forall(a, b \in G)$ $a \circ b = b \circ a$

UWAGA-1.

Kwantyfikator ogólny $\forall(a \in A)$ czytamy: “dla **każdego** elementu a ze zbioru A”

Kwantyfikator szczegółowy $\exists(a \in A)$ czytamy: “**istnieje** taki element a w zbiorze A”

Kwantyfikator szczegółowy $\exists!(a \in A)$ czytamy: “istnieje **dokładnie jeden** element a w A”

Przykłady

P3. Czy zbiór ***N*** lub ***Z*** tworzy grupę względem któregoś z działań: (+, *, /)?

Odp.: Tylko (***Z***, +) jest grupą: łączność dodawania jest oczywista, elementem neutralnym e jest zero (e = 0, bo oczywiście a + 0 = a), a elementem odwrotnym jest liczba przeciwna ($a^{-1} = -a$), bo a + (-a) = e. Sprawdź aksjomaty grupy!

P4. Grupa homotetii (inaczej: jednokładności) - zbiór przekształceń płaszczyzny $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$ zamknięty względem składania przekształceń postaci (dla $a \neq 0$):

$$J_a(x_1, x_2) = (a\,x_1, a\,x_2) \text{ lub inaczej } J_a: (y_1 = a\,x_1 \text{ i } y_2 = a\,x_2).$$

P5. Grupa przekształceń liniowych płaszczyzny $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$ postaci (dla $a*b \neq 0$):

$$L_{(a,\,b)}(x_1, x_2) = (a\,x_1, b\,x_2) \text{ lub inaczej } L_{(a,\,b)} :(y_1 = a\,x_1 \text{ i } y_2 = b\,x_2)$$

względem składania tych przekształceń: $L_{(a,\,b)} \circ L_{(c,\,d)} = L_{(a*c,\,b*d)}$ (dlaczego?).

P6. Grupa obrotów płaszczyzny: $y_1 = x_1 \cos(\alpha) + x_2 \sin(\alpha)$ i $y_2 = -x_1 \sin(\alpha) + x_2 \cos(\alpha)$.

P7. Grupy symetrii kwadratu, prostokąta i trójkąta równobocznego względem składania przekształceń (ćw. + praca własna)

Def. Niech zbiór K zawiera więcej niż jeden element i niech będzie zamknięty względem dwóch działań ($\oplus$, o). Wówczas, zbiór K nazywamy **ciałem** względem działań ($\oplus$, o), jeśli zachodzą następujące relacje:

a) przemienności dodawania: $a \oplus b = b \oplus a$

b) przemienności mnożenia: $a \circ b = b \circ a$

c) łączności dodawania: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

d) łączności mnożenia: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

e) rozdzielczości o względem $\oplus$: $a \circ (b \oplus c) = a \circ b \oplus a \circ c$

f) istnienie zera: $\exists! (\theta \in K)\ \forall (a \in K)\ a \oplus \theta = a$

g) wykonalność odejmowania: $\forall (a, b \in K)\ \exists! (c \in K)\ a \oplus c = b$

h) wykonalność dzielenia: $\forall (a, b \in K \text{ i } a \neq \theta)\ \exists! (c \in K)\ a \circ c = b$

Wn. Struktura (K, $\oplus$, o) jest ciałem względem działań ($\oplus$, o) $\Leftrightarrow$ struktury (K, $\oplus$) i (K, o) są grupami abelowymi z rozdzielczością „o” względem $\oplus$ - jak (e).

Przykłady

P8. Zbiór liczb wymiernych ***W*** jest ciałem względem zwykłego + i *. Dlaczego?

P9. Czy zbiór liczb rzeczywistych ***R*** jest ciałem względem + i * ? – Tak.

P10. Ciała o skończonej liczbie elementów z działaniami określonymi przez tabliczki działań: np. w zbiorze skończonym $K = \{0, 1\}$ określamy dwa działania:

np. 1 + 1 = 0,

ale 1 * 1 = 1.

e →

+	0	1
0	0	1
1	1	0

e →

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Jest to tzw. ciało reszt z dzielenia w zbiorze ***Z*** przez 2 (z działaniami modulo 2),

ozn. ***Z***/mod(2)

Pyt.: Czy ***Z***/mod(3) i ***Z***/mod(4) z działaniami modulo są również ciałami?

>>> Sprawdź aksjomaty definicji grupy analizując kolejne tabele działań:
dodawania i mnożenia w sensie mod(3) i mod(4) – jak w P10.

Def. **Pierścieniem (nieprzemiennym)** nazywamy zbiór P będący grupą abelową względem działania dodawania $\oplus$ o elemencie neutralnym θ, w którym spełnione jest prawo łączności mnożenia „o”, przy czym zachodzą oba prawa rozdzielczości:

$$a \circ (b \oplus c) = a \circ b \oplus a \circ c \quad \text{oraz} \quad (a \oplus b) \circ c = a \circ c \oplus b \circ c.$$

UWAGA-2. Jeśli w zbiorze P dodatkowo zachodzi prawo przemienności mnożenia, to pierścień P zwiemy przemiennym. Pierścień ten nazywamy pierścieniem z jedynką 1, jeśli istnieje element neutralny mnożenia.

Pyt.: kiedy pierścień będzie ciałem?

Wn. Pierścień przemienny z 1 (P, $\oplus$, o) będzie ciałem, jeśli spełniony będzie w nim dodatkowo warunek wykonalności dzielenia (tzn. gdy istnieją w zbiorze P elementy odwrotne względem mnożenia –> pkt. h w def. ciała).

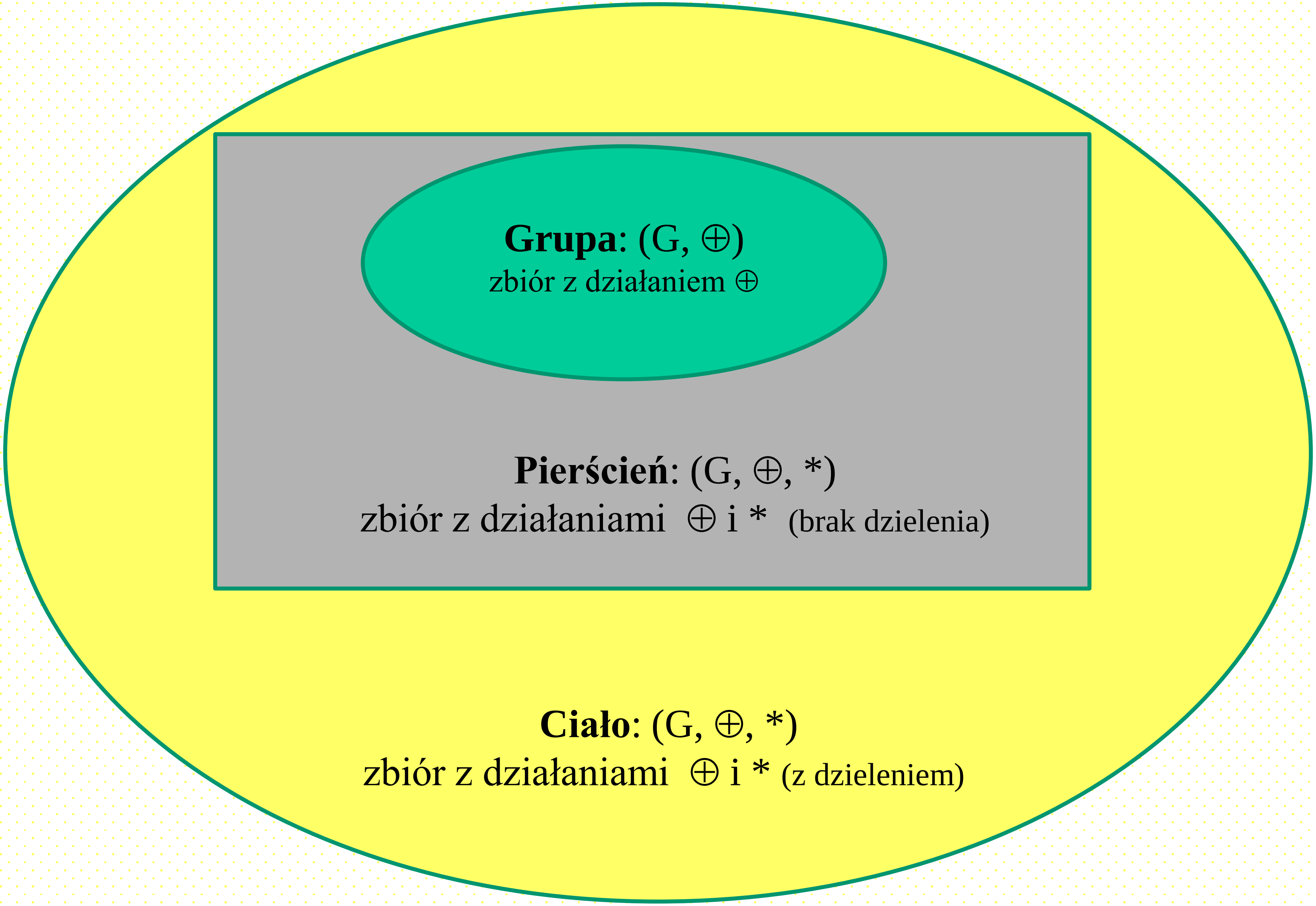
Przykłady

P11. Zbiór rzeczywistych wielomianów jednej zmiennej, ozn. ***R***[x], jest zamknięty względem zwykłego dodawania ($w_1 \oplus w_2 = w_1 + w_2$) i mnożenia odwzorowań ($w_1 \circ w_2 = w_1 w_2$). Struktura (***R***[x], $\oplus$, o) nie jest jednak ciałem, bo nie jest spełniony warunek (h) definicji ciała, ale jest to pierścień (wielomianów).

P12. Zbiór liczb całkowitych ***Z*** względem dodawania i mnożenia liczb tworzy pierścień przemienny z jedynką (***Z*** , +, *), ale nie jest to struktura ciała !

Wn. **Pierścienie liczb całkowitych i wielomianów mają identyczną arytmetykę**, czyli spełniają wspólne prawa podzielności, jak reguły NWD, NWW, rozkłady na iloczyn elementów pierwszych, etc.
(szukaj w materiałach do pracy własnej)

Podsumowanie struktur algebraicznych: **grupa – pierścień – ciało** (cz. 1)



Ciało liczb zespolonych

Tw.1 Zbiór $\boldsymbol{R}$ x $\boldsymbol{R}$ zamknięty względem działań +' i * : (tu ($\boldsymbol{R}$, +, $\cdot$) jest ciałem liczb rzeczywistych z działaniami dodawania + i mnożenia $\cdot$ w zwykłym sensie)

$(x, y) +' (x', y') = (x + x', y + y') \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ – analogia z dodawaniem wektorów!

oraz $(x, y) * (x', y') = (x\cdot x' - y\cdot y',\ x\cdot y' + x'\cdot y)$ **jest ciałem**.

Dowód: sprawdź czy umiesz tak dodawać/mnożyć, wyznacz $(x, y)^{-1}$).

Def. Ciało $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}, +', *)$ nazywamy **ciałem liczb zespolonych**.

Liczbę zespoloną $(a, 0)$ oznaczamy przez a oraz liczbę zespoloną $(0, 1)$ przez i, stąd każdą liczbę zespoloną $z = (a, b) \in \boldsymbol{C}$ możemy przedstawić w wygodnej postaci **algebraicznej**, tzn.:

$z = (a, 0)+'(0, b) = (a, 0) * (1, 0) + (b, 0) * (0, 1) = a * 1 + b * (0, 1) = a + b * i$

Z. Policz: $(2+3i)*(2-3i) = 13$ oraz $i * i = -1$ (?)

Rozwiąż: $(x + iy)*(3+4i) = 1$ oraz $x^2 + 2 = 0$ (?)

Ciało liczb zespolonych – pojęcia podstawowe

Def. Jeżeli $z = a + bi$, to: Re $z = a$ nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z,

Im $z = b$ nazywamy **częścią urojoną** liczby z,

$\bar{z} = a - bi$ nazywamy **liczbą sprzężoną** z liczbą zespoloną $z = a + bi$,

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z * \bar{z}}$ nazywamy **modułem** liczby zespolonej z

Def. . Jeżeli $z = a + bi \neq 0$, to istnieje liczba rzeczywista φ taka, że

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{oraz} \quad \sin(\varphi) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Liczbę φ nazywamy **argumentem** liczby zespolonej z (ozn. $\varphi = \arg z$).

Jeśli $0 \leq \varphi_o < 2\pi$ to argument ten nazywamy **głównym** (ozn. $\varphi_o = \operatorname{Arg} z$).

Z. Oblicz: Arg(1), Arg(i), Arg(-i), Arg(1 + i), arg(1), arg(i), arg(-i), Arg(1 - i)?

Czy wynik należy do zbioru: $\left\{2\pi, \frac{9\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right\}$?

Równanie kwadratowe posiada zawsze pierwiastki zespolone !!!

$\boldsymbol{x^2 + x + 1 = 0}$ <=> $x_1, x_2 \in \boldsymbol{C}$ (wyznacz te pierwiastki: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$)

$x_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
położenie wzajemne:	położenie wzajemne:
$\overline{x_1} = x_2$	$\overline{x_2} = x_1$
wzory Viete'a:	wzory Viete'a:
$x_1 * x_2 = \lvert x_1 \rvert^2 = 1$	$x_1 * x_2 = \lvert x_2 \rvert^2 = 1$
$x_1 + x_2 = 2Re(x_1) = -1$	$x_1 + x_2 = 2\,Re(x_2) = -1$
Rozkład wielomianu:	Rozkład wielomianu:
$(x - x_1) * (x - x_2) =$	$(x - x_1) * (x - x_2) =$
$= x^2 - 2xRe(x_1) + \lvert x_1 \rvert^2$	$= x^2 - 2xRe(x_2) + \lvert x_2 \rvert^2$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej – pkt. (a)

(wzór de Moivre'a pkt. (b) i pierwiastki zespolone pkt. (c))

Tw. (a) Jeżeli $z = a + bi \neq 0$, to $z = |z|(\cos(\varphi_0) + i\sin(\varphi_0))$ gdzie $\varphi_o = \mathrm{Arg}(z)$,

(b) Jeżeli $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ to $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ dla $n \in \boldsymbol{N}$,

(c) Jeżeli $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ oraz $w \in \boldsymbol{C}$, to równanie $w^n = z$ ma dokładnie n rozwiązań $w = z_k$ ($k = 0, 1, n - 1$) - pierwiastków zespolonych stopnia n z liczby zespolonej z, gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\sin((\varphi + 2k\pi)/n))$$

Dowód: (a) z def. Arg(z), (b) z trygonometrii, (c) z p.(b) przez podstawienie.

P1. Gdy $z = -1 + i$, to $\mathrm{Arg}(z) = 3\pi/4$ oraz $|z| = \sqrt{2}$ więc $z = \sqrt{2}\left(\cos{}^{3\pi}\!/_4 + i\sin{}^{3\pi}\!/_4\right)$

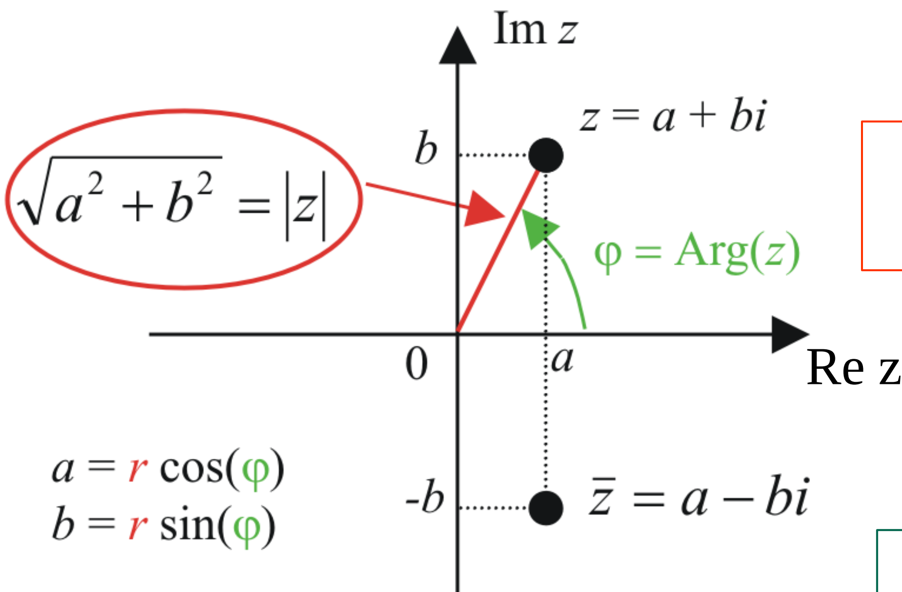
Wtedy $z^8 = (\sqrt{2})^8(\cos 6\pi + i\sin 6\pi) = 2^4$, natomiast $z^2 = 2\left(\cos{}^{3\pi}\!/_2 + i\sin{}^{3\pi}\!/_2\right) = -2i$.

P2. Pierwiastki 4 stopnia $z_k = \sqrt[4]{-1}$ są 4 liczbami zespolonym ($k = 0, 1, 2, 3$) postaci $z_k = \sqrt[4]{|-1|}(\cos((\pi + 2k\pi)/4) + i\sin((\pi + 2k\pi)/4)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)$

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych **(punkty płaszczyzny)**

Ustalając bijektywne przyporządkowanie liczb zespolonych z = (a, b) i punktów płaszczyzny kartezjańskiej $P(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$, jako x = a i y = b, mamy wobec trygonometrycznej postaci liczby zespolonej z = r (cos (φ) + *i* sin (φ)), (r = |z|) następujące związki:

moduł:
$z \longrightarrow |z|$



argument:
$z \longrightarrow \mathrm{Arg}(z)$

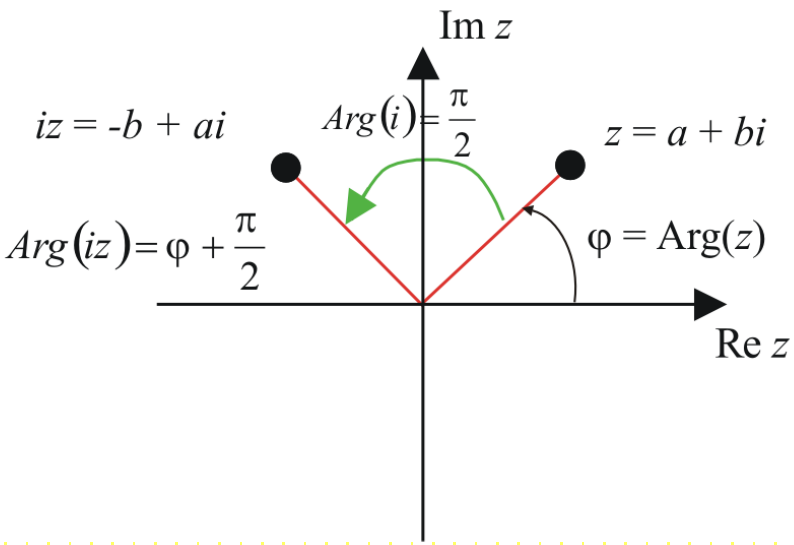
$|z| = |\bar{z}|$

sprzężenie:
$z \longrightarrow \bar{z}$

$\mathrm{Arg}(\bar{z}) =$
$= 2\pi - \mathrm{Arg}(z)$

Interpretacja geometryczna mnożenia liczb zespolonych

Wn. Mnożenie przez jednostkę urojoną jest równoważne z obrotem o kąt $\pi/2$



Wn. Mnożenie przez liczbę $z = a + bi$ jest równoważne z przekształceniem płaszczyzny zespolonej będącym złożeniem obrotu o kąt $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ oraz jednokładności o skali $r = |z|$. Dlaczego?

Miejsce geometryczne punktów na płaszczyźnie zespolonej

Liczby zespolone z spełniające relacje < lub = tworzą na płaszczyźnie $\boldsymbol{R^2}$ zbiory:

(1) $|z| = 1$ - okrąg jednostkowy $S(0, 1) = \{(x, y)\in \boldsymbol{R^2}: x^2 + y^2 = 1\}$;

(2) $|z - i| \leq 1$ - koło jednostkowe z brzegiem o środku w punkcie $z_0 = (0, i)$: $K(i, 1)$;

(3) $|z| = i$ - zbiór pusty; natomiast $a < \mathrm{Re}\, z < b$ – pas: $(a, b) \times \boldsymbol{R}$;

(4) $|z - z_1| = |z - z_2|$ – symetralna odcinka (z_1, z_2) – sprawdź!;

(5) $\pi \leq \mathrm{Arg}(z) \leq 3\pi/2$ – trzecia ćwiartka układu współrzędnych z półosiami układu.

Pyt.: Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz obszary: (a) $z\bar{z} \geq 2$, (b) $1 < |z - i| \leq 2$?

Z1*. Jaki to obszar: $\mathrm{Re}(z^4) < 0$? Jaki ma on związek z nierównością: $\cos(4\varphi) < 0$?

Z2. Rozwiąż: $z^2 + z + 1 = 0$ oraz $z^2 - iz + 1 = 0$ – jak zwykle, przy czym $-1 = i^2$.

Z3*. Jaki to obszar: $0 < \mathrm{Arg}(z^4) \leq \pi$ na płaszczyźnie zespolonej $\boldsymbol{C}$?

Tw. (O własnościach liczb zespolonych)

Niech z i z’ będą liczbami zespolonymi (różnymi od zera). Wówczas

(1) $|z * z'| = |z|\,|z'|$, ogólnie $|z^n| = |z|^n$,

(2) arg(z * z’) = arg(z) + arg(z’), ogólnie $\arg(z^n) = n \arg(z)$ (wzór de Moivre’a),

(3) $|z + z'| < |z| + |z'|$,

(4) Re(z + z’) = Re(z) + Re(z’),

(5) Im(z + z’) = Im(z) + Im(z’),

(6) Re z < $|z|$,

(7) Im z < $|z|$.

Uwaga 1:

$$\mathrm{Arg}(z^n) = n\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Uwaga 2: $$|z|^2 = z * \bar{z}$$

Dowód: (1) i (2) wynika z mnożenia liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej oraz wzorów dla cos(φ + φ’) i sin(φ + φ’);

(3) wynika z własności metrycznych długości boków trójkąta;

(4) i (5) jest oczywiste wobec algebraicznej postaci liczby zespolonej;

(6) i (7) wynika z nierówności: $x^2 < x^2 + y^2$.

Tw. (**o postaci pierwiastków z jedności**)

Każdy pierwiastek z jedności stopnia n jest postaci (dla k = 0, 1, 2, ..., n - 1):

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad ,$$

a ponadto zachodzi związek $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$ dla dowolnego k.

Dowód: wynika ze wzoru de Moivre'a oraz relacji Arg(1) = 0. Sprawdź!

Wn. (**miejsce geometryczne pierwiastków z jedności**)
Wszystkie pierwiastki zespolone z jedności dowolnego stopnia n leżą w płaszczyźnie zespolonej $\boldsymbol{C}$ na okręgu jednostkowym $|z| = 1$ i połączone kolejno odcinkami tworzą n-kąt foremny wpisany w ten okrąg (sprawdź!).

Z1. Znajdź pozostałe wierzchołki z_k kwadratu o środku w $z_0 = 0$, gdy $z_1 = 1$.

Z2. Znajdź pozostałe wierzchołki z_k kwadratu o środku w $z_0 = i$, gdy $z_1 = 1 - 2i$.

Z3*. Znajdź pozostałe wierzchołki z_k sześciokąta o środku w $z_0 = 0$, gdy $z_1 = 1$.

Czy zaznaczone liczby stanowią pewne pierwiastki zespolone z 1?

Tw. (**o grupie pierwiastków z jedności**)

Zbiór zespolonych pierwiastków z jedności stopnia n: $E_n = \{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1}\}$

tworzy grupę względem zwykłego mnożenia liczb zespolonych.

Dowód: Wykażemy kolejno, że

(a) zbiór E_n jest zamknięty względem mnożenia liczb zespolonych, bo dla dwóch dowolnych elementów z E_n mamy: $(\varepsilon_k \cdot \varepsilon_p)^n = (\varepsilon_k)^n \cdot (\varepsilon_p)^n = 1 \cdot 1 = 1$, stąd $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_p \in E_n$;

(b) łączność mnożenia w zbiorze E_n wynika z łączności mnożenia w ciele ***C*** wobec definicji E_n;

(c) elementem neutralnym w E_n jest zespolona jedynka 1, bo $1^n = 1$ i $\varepsilon_0 = 1 \in E_n$;

(d) elementem odwrotnym do ε_p w E_n jest liczba $(\varepsilon_p)^{-1} = 1/\varepsilon_p = \varepsilon_{n-p}$ (dlaczego?) będąca również zespolonym pierwiastkiem z jedności należącym do E_n.

Pierścień wielomianów zespolonych - *C*[x]

Tw. (**zasadnicze tw. algebry** - udowodnione przez Gaussa)

Każdy wielomian φ z ***C*** [x] stopnia dodatniego ma w ciele ***C*** co najmniej jeden pierwiastek.

dowód: pomijamy.

Wn. (z zasadniczego tw. algebry)

(a) Każdy wielomian pierwszy z ***C***[x] jest stopnia pierwszego.

(b) Każdy wielomian zespolony stopnia $n > 1$ jest wielomianem złożonym.

Istotnie, z tw. Gaussa każdy wielomian nad ciałem ***C*** stopnia $n > 1$ ma pierwiastek x_0, więc z tw. Bezout jest podzielny przez $x - x_0$ i tym samym jest rozkładalny na czynniki stopnia niższego ($< n$). Jedynie dla wielomianów stopnia 1 rozkład taki nie istnieje.

(c) Każdy wielomian z ***C***[x] stopnia *n* ma *n* pierwiastków (włączając wielokrotne!).

Rozkład wielomianów na iloczyn wielomianów pierwszych nad ciałem liczb zespolonych (czyli w pierścieniu $\boldsymbol{C}$[x])

Dla każdego wielomianu φ z $\boldsymbol{C}$[x] istnieje rozkład na wielomiany stopnia jeden, przy czym włączając pierwiastki wielokrotne x_i rozkład taki jest ogólnie postaci:

$$\varphi(x) = a_0(x - x_1)^{k1}(x - x_2)^{k2}(x - x_3)^{k3}....(x - x_s)^{ks},$$

gdzie stopień wielomianu wyznacza sumę krotności wszystkich jego pierwiastków:

$$k_1 + k_2 + ... + k_s = \text{st } \varphi = n.$$

Wn. Liczba zespolona x_0 jest wspólnym pierwiastkiem dwóch wielomianów:

$$\varphi(x_0) = 0 \text{ i } \psi(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \text{ jest pierwiastkiem wielomianu } (\varphi, \psi) \text{ - NWD.}$$

Dlatego, wielomiany względnie pierwsze nie mają wspólnych pierwiastków.

Zad. Pokaż, że wielomian $\varphi(x) = x^2 + x + 1$ jest dzielnikiem wielomianu

$$\psi(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} \text{ dla dowolnych } m, n, p \text{ z } \boldsymbol{N}, \text{ bo } \varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0.$$

Pierścień wielomianów rzeczywistych - $\boldsymbol{R}[x]$

Tw. (**o pierwiastkach sprzężonych**)

(a) Jeśli $x_0 \in \boldsymbol{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu φ z $\boldsymbol{R}[x]$, to również liczba sprzężona $\overline{x_0}$ jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Dowód wynika łatwo z równości $\overline{\varphi(x_0)} = \sum a_k \overline{x_0}^k = 0$, bo współczynniki $a_k \in \boldsymbol{R}$.

(b) Jeśli x_0 jest pierwiastkiem nierzeczywistym wielomianu φ z $\boldsymbol{R}[x]$, to krotności pierwiastków x_0 i $\overline{x_0}$ są równe.

Wn. (**o wielomianach stopnia nieparzystego**)

Każdy wielomian $\varphi \in \boldsymbol{R}[x]$ stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty.

Istotnie, wystarczy zauważyć, że w rozkładzie (*) – patrz tw. poniżej - wielomian o pierwiastkach nierzeczywistych jest stopnia parzystego $2(s_1 + \ldots + s_r)$, a więc jego stopień jest < st φ, bo to jest z założenia liczba nieparzysta. Stąd, w (*) choć jedna z krotności $t_k = 1$.

Tw. (o rozkładzie na wielomiany pierwsze w ciele $\boldsymbol{R}$)

W pierścieniu $\boldsymbol{R}[x]$ wielomianami pierwszymi są tylko wielomiany stopnia pierwszego i wielomiany postaci $\varphi_1(x) = x^2 + px + q$, dla których $p^2 - 4q < 0$.

Inaczej, każdy wielomian $\varphi \in \boldsymbol{R}[x]$ ma rozkład postaci

$$\varphi(x) = a_0(x^2 + p_1x + q_1x)^{s1}\ldots(x^2 + p_rx + q_r)^{sr}\,(x - x_{2r+1})^{t1}\ldots.(x - x_k)^{tk}, \quad (*)$$

gdzie każde s_i oznacza krotność (sprzężonych) pierwiastków zespolonych.

Stopień wielomianu wyznacza sumę krotności wszystkich czynników w (*):

$$2(s_1 + s_2 + \ldots + s_r) + t_1 + t_2 + \ldots + t_k = \mathrm{st}\,\varphi = n.$$

Dowód: wynika z zasadniczego tw. algebry, a wobec tw. o pierwiastkach sprzężonych mamy wielomiany $\varphi_1(x) = (x - x_0)(x - \overline{x_0}) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$, dla $x_0 = a + bi$, przy czym oczywiście zachodzi $p^2 - 4q = -2b^2 < 0$. Grupując czynniki odpowiednich pierwiastków sprzężonych z potęgą ich wspólnej krotności s_r dostajemy szukany rozkład (*).

Ciało kwaternionów i postać Eulera liczby zespolonej

Zadanie*. Wykazać, że struktura (***C*** x ***C***, $\oplus$, o), gdzie

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \qquad \text{oraz}$$

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, a\bar{d} - b\bar{c})$$

jest ciałem nieprzemiennym (tzw. ciałem kwaternionów).

Zadanie**. Stosując wzór Eulera, jako kolejną postać liczby zespolonej z:

$$z = |z|e^{i\varphi}, \text{ gdzie } \varphi = \arg(z),$$

opisz wszystkie poznane własności liczb zespolonych.