Zadanie 1 L

$M(A)=C$	$N(A)=A$	$R_1(A)=B$	$R_3(A)=D$
$M(B)=B$	$N(B)=D$	$R_1(B)=C$	$R_3(B)=A$
$M(C)=A$	$N(C)=C$	$R_1(C)=D$	$R_3(C)=B$
$M(D)=D$	$N(D)=B$	$R_1(D)=A$	$R_3(D)=C$

$$(R_1 \circ L)(A) = R_1(L(A)) = R_1(D) = A = N(A)$$
$$(R_1 \circ L)(B) = R_1(L(B)) = R_1(C) = D = N(B) \neq$$
$$(R_1 \circ L)(C) = R_1(L(C)) = R_1(B) = C = N(C)$$
$$(R_1 \circ L)(D) = R_1(L(D)) = R_1(A) = B = N(D) \neq$$

$$(L \circ R_1)(A) = L(R_1(A)) = L(B) = C = M(A)$$
$$(L \circ R_1)(B) = L(R_1(B)) = L(C) = B = M(B)$$
$$(L \circ R_1)(C) = L(R_1(C)) = L(D) = A = M(C)$$
$$(L \circ R_1)(D) = L(R_1(D)) = L(A) = D = M(D)$$

Złożenia $L \circ R_1$ i $R_1 \circ L$ są symetriami środkowymi względem punktu O. Złożenie $L \circ R_1$ odpowiada symetrii M a $R_1 \circ L$ symetrii N

Grupę $(G, \circ)$ nazywamy abelową gdy:

$$\forall (R_1, L \in G) \quad R_1 \circ L = L \circ R_1$$

Grupa $(G, \circ)$, (gdzie $R_1, L \in G$) nie jest grupą abelową, ponieważ

$$\exists (R_1, L \in G) \quad R_1 \circ L \neq L \circ R_1$$

Zadanie 4

Rozważany wielomian drugiego stopnia:

$$z^2+\sqrt{7}z+2$$

a)

Pierwiastki rozważanego trójmianu można wyznaczyć obliczając wyróżnik trójmianu kwadratowego (Δ):

$$z^2+\sqrt{7}z+2=0\,,\quad \Delta=b^2-4ac$$

$$a=1,\ b=\sqrt{7}\,,\ c=2$$

$$\Delta=\sqrt{7}^2-4\cdot1\cdot2=-1$$

Pierwiastki trójmianu kwadratowego o wyróżniku Δ mają postać:

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad,\ z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Pierwiastek z otrzymanego wcześniej wyróżnika Δ wynosi:

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{-1}=i$$

Pierwiastki trójmianu mają więc postać:

$$z_1=\frac{-\sqrt{7}-i}{2}\quad,\ z_2=\frac{-\sqrt{7}+i}{2}$$

b)

Rozkład na czynniki wielomianu $z^2+\sqrt{7}z+2$:

$$z^2+\sqrt{7}z+2=a\,(z-z_1)(z-z_2)$$

$$z^2+\sqrt{7}z+2=\left(z+\frac{\sqrt{7}+i}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{7}-i}{2}\right)$$

c)

Mając obliczone pierwiastki wielomianu, można sprawdzić czy zachodzą wzory Viete'a:

$$(1)\quad x_1\cdot x_2=|x_1|^2 \qquad (3)\ x_1\cdot x_2=|x_2|^2$$

$$(2)\quad x_1+x_2=2\,\mathrm{Re}(x_1)\quad (4)\ x_1+x_2=2\,\mathrm{Re}(x_2)$$

(1) Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{7}{4}+\frac{1}{4}=2$$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ gdzie $a = Re(z)$, $b = Im(z)$

$$|z_1|^2 = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}i\right)^2}^2 = 2$$

(2)

$$z_1+z_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}i = -\sqrt{7}$$

$$2\,Re(z_1) = 2\cdot -\frac{\sqrt{7}}{2} = -\sqrt{7}$$

(3)

$$z_1 \cdot z_2 = 2$$

$$|z_2|^2 = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}i\right)^2}^2 = \frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

(4)

$$z_1+z_2 = -\sqrt{7}$$

$$2\,Re(z_2) = -\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot 2 = -\sqrt{7}$$

Zachodzą wzory Viete'a (1), (2), (3), nie zachodzi wzór (4)

Zadanie 5, b)

Rozkład na iloczyn wielomianów pierwszych nad ciałem liczb zespolonych:

$x^8 + 16$ - rozważany wielomian

Pierwiastkiem zespolonym (w postaci algebraicznej) wielomianu jest $\cancel{x} z = \sqrt[8]{-16}$

Można zauważyć że dla $z = -16$, $Re(z) = -16$, $Im(z) = 0$

Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ gdzie } \cos\varphi = Re(z), \sin\varphi = Im(z)$$

$$z = 16(-1 + i \cdot 0)$$

$$z = 16(\cos\pi + i\sin\pi), \text{ bo } \cos\pi = -1, \sin\pi = 0$$

Korzystając z wzoru de Moivre'a:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

$$\sqrt[8]{z} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{8} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{8}\right)$$

Jeżeli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ oraz $w \in C$, to równanie $w^n = z$ ma dokładnie n rozwiązań $w = z_k$ (gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$), czyli n pierwiastków zespolonych stopnia n z liczby zespolonej „z".

Rozważany wielomian ma więc 8 pierwiastków zespolonych które można wyznaczyć korzystając z wzoru de Moivre'a

$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi\right)$

$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{8}\pi + i\sin\frac{7}{8}\pi\right)$

$z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi\right)$

$z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{8}\pi + i\sin\frac{11}{8}\pi\right)$

$z_6 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{8}\pi + i\sin\frac{13}{8}\pi\right)$

$z_7 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{15}{8}\pi + i\sin\frac{15}{8}\pi\right)$

Wartości funkcji trygonometrycznych $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ można obliczyć korzystając z przekształcenia wzoru trygonometrycznego na cosinus podwojonego kąta:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$(1)\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} \qquad (2)\quad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

Znak przed pierwiastkiem zależeć będzie od wartości kąta α.

Teraz można przekształcić pierwiastki wielomianu x^8+16 z postaci trygonometrycznej na postać algebraiczną:

Z_0:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$Z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2} + i\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$$

Znak przed pierwiastkami we wzorze (1) i (2) dla pierwiastka Z_0 wynika z faktu że $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ i $\sin\frac{\pi}{8} > 0$.

Analogiczne przekształcenia pozostałych pierwiastków zespolonych:

Z_1:

$$\cos\frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$Z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$$

Z_2:

$$\cos\frac{5}{8}\pi = -\sqrt{\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin\frac{5}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$Z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$$

z_3:

$$\cos\frac{7}{8}\pi = -\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \qquad \sin\frac{7}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2} + i\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$$

z_4:

$$\cos\frac{9}{8}\pi = -\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \qquad \sin\frac{9}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$z_4 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2} - i\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$$

z_5:

$$\cos\frac{11}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin\frac{11}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$z_5 = -\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{4+\sqrt{2}}}{2}$$

z_6:

$$\cos\frac{13}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin\frac{13}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$$

z_7:

$$\cos\frac{15}{8}\pi = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \qquad \sin\frac{15}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$z_7 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2} - i\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$$

Mając obliczone wszystkie pierwiastki zespolone w postaci algebraicznej można przedstawić wielomian x^8+16 jako iloczyn wielomianów pierwszych nad ciałem liczb zespolonych:

$$x^8+16=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_6)(z-z_7)(z-z_8)$$

Mając obliczone wszystkie pierwiastki zespolone w postaci algebraicznej, można przedstawić wielomian x^8+16 jako iloczyn wielomianów pierwszych nad ciałem liczb zespolonych

$$x^8+16=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6)(z-z_7)$$

$$x^8+16=\left(z-\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2}-i\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}\right)\cdot$$

$$\left(z+\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2}-i\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\right)\cdot$$

$$\left(z+\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2}+i\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{4+\sqrt{2}}}{2}\right)\cdot$$

$$\left(z-\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2}+\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\right.$$

Rozkład na iloczyn wielomianów pierwszych nad ciałem liczb rzeczywistych, dla wielomianu x^8+16.

$$x^8+16=(x^8+8x^4+16)-8x^4=\left((x^4+4)^2-8x^4\right)=\left((x^4+4)-2\sqrt{2}x^2\right)\left((x^4+4)+2\sqrt{2}x^2\right)=$$

$$=\left((x^4+4x^2+4)-4x^2-2\sqrt{2}x^2\right)\left((x^4+4x^2+4)-4x^2+2\sqrt{2}x^2\right)=\left((x^2+2)^2-x^2(4+2\sqrt{2})\right)\cdot$$

$$\left((x^2+2)^2-x^2(4-2\sqrt{2})\right)=\left((x^2+2)-x\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)\left((x^2+2)+x\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)\cdot$$

$$\left((x^2+2)-x\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)\left((x^2+2)+x\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\left(x^2-x\sqrt{4+2\sqrt{2}}+2\right)\left(x^2+x\sqrt{4+2\sqrt{2}}+2\right)\left(x^2-x\sqrt{4-2\sqrt{2}}+2\right)\left(x^2+x\sqrt{4-2\sqrt{2}}+2\right)$$

W pierścieniu liczb rzeczywistych, wielomianami pierwszymi są tylko wielomiany stopnia pierwszego, i wielomiany postaci

$w(x)=x^2+px+q$ dla których $p^2-4q<0$

Otrzymane z rozkładu wielomiany spełniają powyższy warunek. Są więc wielomianami pierwszymi, a ich iloczyn tworzy rozkład nad ciałem liczb rzeczywistych wielomianu x^8+16

Zadanie 6

b)

Rozwiązana nierówność: $Im(z^6) > 0$

Nierówność można rozwiązać wykorzystując postać trygonometryczną liczby zespolonej i wzór de Moivre'a.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Wzór de Moivre'a: $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$$z^6 = |z|^6(\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi)$$

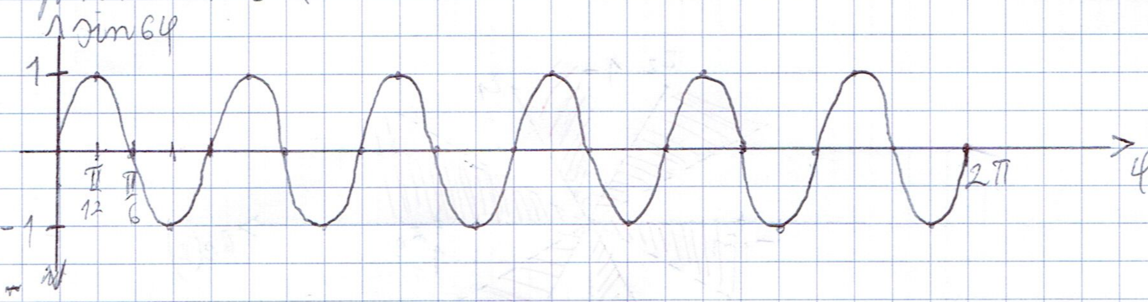
$$\sin\varphi = Im(z)$$

$$\sin 6\varphi = Im(z^6)$$

$$Im(z^6) > 0$$

$$\sin 6\varphi > 0$$

W celu rozwiązania nierówności można naszkicować pomocniczy wykres $\sin 6\varphi$:



Rozwiązaniem nierówności będzie suma przedziałów argumentów funkcji $\sin 6\varphi$.

Ze wzoru de Moivre'a: Każdy pierwiastek stopnia n jest postaci:

$$(1) \quad z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \text{ gdzie } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Początek każdego z przedziałów wyznacza argument pierwiastka z_k : $\frac{2k\pi}{n}$

Posługując się wykresem i zapisanymi twierdzeniami można zapisać model rozwiązania:

$$\varphi \in \left(\frac{2k\pi}{n} ; \frac{\pi + 2k\pi}{n} \right)$$

Liczba zespolona z^6, więc $n = 6$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, więc $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Rozwiązaniem jest suma przedziałów:

$$\varphi \in \left(0 ; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi ; \frac{5}{6}\pi\right) \cup \left(\pi ; \frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{4}{3}\pi ; \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{3}\pi ; \frac{11}{6}\pi\right)$$

Interpretacja geometryczna ~~p~~ na płaszczyźnie zespolonej:
Korzystając ze wzoru (1) można obliczyć pierwiastki liczby zespolonej z^6, następnie nanieść je na wykres zaznaczając obszar odpowiadający wyznaczonym przedziałom

$z_0 = 1$

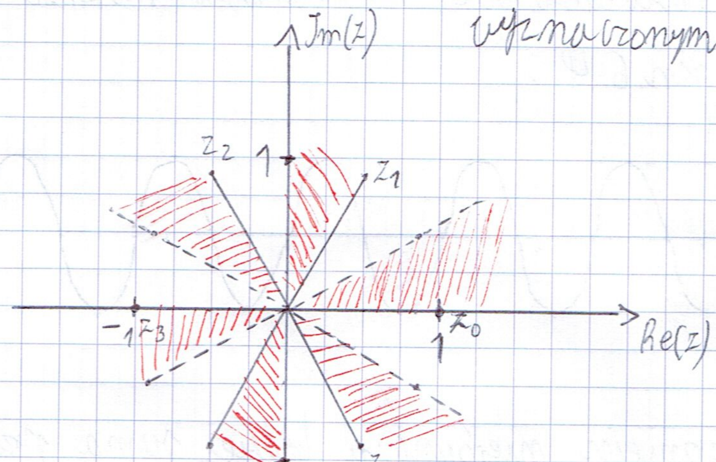
$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_3 = -1$

$z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



Interpretacją graficzną jest obszar zaznaczony czerwonym kolorem