

Zad. 2 Pierwiastki liczby zespolonej i ich interpretacja geometryczna

- (a) Wyznacz zespolone pierwiastki $z_k = \sqrt[3]{i}$ w postaci algebraicznej wg. wzoru z wykładu.
- (b) Na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} zaznacz położenie tych liczb. Jaką figurę otrzymasz łącząc te punkty odcinkami?
- (c) Wyznacz liczby z'_k otrzymane w wyniku obrotu figury z (a) wokół środka $z_0 = 0$ o kąt $\alpha = \pi/3$ (w dziedzinie zespolonej taki obrót realizuje mnożenie przez pierwszy pierwiastek 6 stopnia z 1 – jaka to liczba zespolona w postaci algebraicznej?). Jaką teraz otrzymasz figurę łącząc kolejno wszystkie punkty z_k i z'_k ?
- (d) Wypisz różne relacje między liczbami z_k i z'_k .

Zad. 3 Konstrukcja zespolona kwadratu/trójkąta równobocznego

Dany jest wierzchołek $z_1 = \sqrt{3} + i$.

- (a) Oblicz pozostałe wierzchołki kwadratu/trójkąta ośrodku w $z_0 = 0$. Wykorzystaj metodę wspomnianą w Zad.2(c) przy odpowiednim doborze czynnika zespolonego.
- (b) Oblicz pozostałe wierzchołki kwadratu/trójkąta ośrodku w $z_0 = 3i$. Wykorzystaj metodę z części (a) po przesunięciu wierzchołka z_1 do $z'_1 = z_1 - z_0$. Dalej, po dokonaniu obrotów, liczby z'_k należy znów przesunąć do pierwotnego układu współrzędnych wykonując $z_k = z'_k + z_0$.

Zad. 4 Pierwiastki zespolone równania kwadratowego

Przyjmij własny przykład wielomianu 2-iego stopnia o współczynnikach całkowitych, tak żeby nie posiadał pierwiastków rzeczywistych.

- (a) Znajdź liczby zespolone będące pierwiastkami tego wielomianu.
- (b) Podaj rozkład na czynniki, inaczej postać iloczynową tego wielomianu.
- (c) Sprawdź rachunkiem, czy zachodzą wzory Viete'a również w tym przypadku?

Zad. 5 Rozkład na iloczyn wielomianów pierwszych

Znajdź oba rozkłady na iloczyn wielomianów pierwszych nad ciałem \mathbb{R} i \mathbb{C} dla wielomianów:

- (a) $w = x^4 + x^2 + 1$
- (b) $w = x^8 + 16$
- (c) Co możesz powiedzieć o rozkładzie na iloczyn wielomianów pierwszych nad ciałem \mathbb{Q} w każdym z tych przypadków?

Zad. 6 Własności liczb zespolonych

Rozwiąż nierówności w dziedzinie zespolonej wykorzystując wzór de Moivre'a:

- (a) $\operatorname{Re}(z^3) < 0$,
- (b) $\operatorname{Im}(z^6) > 0$.

Odpowiedź zaznacz na płaszczyźnie zespolonej.