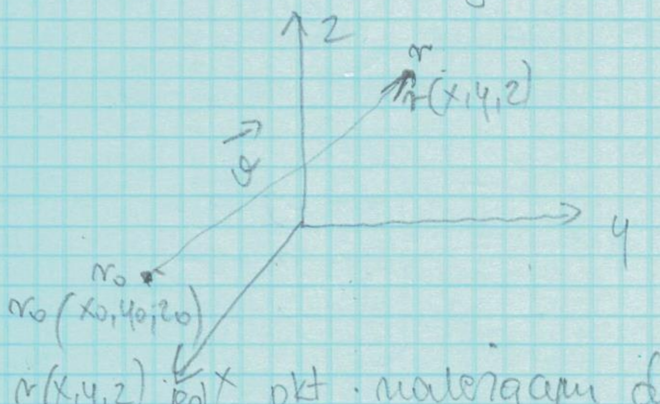
Zestaw 10 - odp (1)

zd 1]: Równanie prostej przech. przez pkt $r_0(x_0, y_0, z_0)$ i $\parallel$ do $\vec{v} = \vec{i}a + \vec{j}b + \vec{k}c$



Jeśli $r(x,y,z)$ jest pkt należącym do prostej to wektor $\vec{r} - \vec{r_0}$ jest $\parallel$ do $\vec{v}$ możemy więc zapisać równanie jako:

$$\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{v}$$

gdzie parametr t może przybierać dowolną wartość rzeczywistą.

$$[x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0] = t[a, b, c]$$

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tb \end{cases} \rightarrow \text{równanie parametryczne prostej}$$

Liczby (a, b, c) nazywamy współczynnikami kierunkowymi prostej, a $\frac{a}{|\vec{v}|}, \frac{b}{|\vec{v}|}, \frac{c}{|\vec{v}|}$ określają cosinusy kierunkowe prostej.

zd 2] Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $r_1(1, -1, 2)$ oraz $r_2(-2, 3, 1)$

Prosta jest równoległa do wektora $\overrightarrow{r_2 - r_1}$

$$\overrightarrow{r_2 - r_1} = (-2 - 1)\vec{i} + (3 - (-1))\vec{j} + (1 - 2)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{r_2 - r_1} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$$

Wybierając r_1 mamy ($r_1 \equiv r_0$) otrzymamy

$x = 1 - 3t,\ y = -1 + 4t,\ z = 2 - t$

Wybierając pkt r_2 ($r_2 \equiv r_0$) otrzymujemy

$x = -2 - 3t \quad , \quad y = 3 + 4t \quad , \quad z = 1 - t$

Porównując dwa rozwiązania widzimy że równania parametryczne prostej nie są wyznaczone jednoznacznie

$$\text{I} \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Drugi układ można otrzymać z pierwszego podstawiając $t+1$ w miejsce t

Zd 3 Równ. pr. przech. przez pkty. $r_1(2,1,1)$, $r_2(-1,0,1)$

$$\vec{r_2} - \vec{r_1} = (-1-2)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = -3\vec{i} - \vec{j} + 0\vec{k}$$

Równ. param.: (wybierając $r_1 \equiv r_0$)

$x = \underset{x_0}{2} - 3t \quad , \quad y = \underset{y_0}{1} - t \quad , \quad z = 1$

Równanie kierunkowe

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$ jeśli jedna z

lub a, b, c jest równa 0 np. $c = 0$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad , \quad z = z_0$$

$$\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 1}{-1} \quad , \quad z = 1$$

lub $$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{1} \quad z = 1$$

Zd 4 Równ. płaszczyzny przech. przez pkty. (3)

$r_1(1,1,7)$

$r_2(-2,2,3)$

$r_3(1,-1,6)$

Dwa wektory $\overrightarrow{r_2-r_1}$ oraz $\overrightarrow{r_3-r_1}$ są $\parallel$ do szukanej płaszczyzny.

$$\overrightarrow{r_2-r_1}=(-2-1)\vec{i}+(2-1)\vec{j}+(3-7)\vec{k}=$$
$$=-3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{r_3-r_1}=(1-1)\vec{i}+(-1-1)\vec{j}+(6-7)\vec{k}=$$
$$=-2\vec{j}-\vec{k}$$

Korzystając z faktu, że wektor $\vec{u}\times\vec{v}$ jest prostopadły do pł wyznaczonej przez $\vec{u}$ i $\vec{v}$ widzimy, że wektor, który jest prostopadły do $\overrightarrow{r_2-r_1}$ oraz $\overrightarrow{r_3-r_1}$ jest określony jako

$$\vec{v}=(\overrightarrow{r_2-r_1})\times(\overrightarrow{r_3-r_1})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=-9\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k} \qquad \vec{v}=[-9,-3,6]$$

$$\underbrace{(\overrightarrow{r-r_1})}_{\text{wektor leżący w pł.}}\underbrace{\vec{v}}_{\text{wektor prostopadły do szukanej płaszczyzny}}=0$$

$$-9(x-1)-3(y-1)+6(z-7)=0$$
$$-9x-3y+6z+9+3-42=0$$
$$-9x-3y+6z-30=0 \quad /:(-3)$$
$$3x+y-2z+10=0.$$

Zd 5. Równ. pr. przech. przez pkt $r_1(2,-1,3)$ prostopadłej do pł.: $x-y+2z=4$

(4)

$Ax+By+Cz+D=0$ – równ. pł.

wektor $[A, B, C]$ jest $\perp$ do pł. tzn.

$\vec{v} = 1\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k}$ jest normalny do pł. a więc równoległy do szukanej prostej.

Równ. param. mają postać

$$r = r_1 + vt$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} t \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

lub w postaci kierunkowej.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

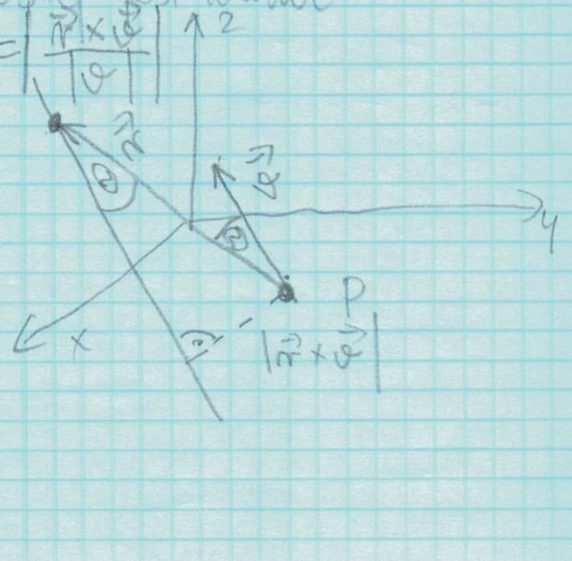
Zd 6 Wyzn. odległ. od pkt $r_1(1,2,-1)$ od prostej przech. przez pkty $r_2(1,0,0)$ oraz $r_3(1,-1,2)$

Prosta jest równoległa do wektora $\vec{v}$

$$\vec{v} = \overrightarrow{r_3 - r_1} = (1-1)\vec{i} + (-1-0)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = -\vec{j} + 2\vec{k}$$

odległość d pkt P od prostej jest równa

$$d = |r \sin\theta| = \left|\frac{\vec{r} \times \vec{v}}{|v|}\right|$$



Jako $\vec{r}$ wybierzmy $r_2 - r_1$ (5)

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_2 - r_1} = (1-1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (0+1)\vec{k} = -2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3\vec{i}$$

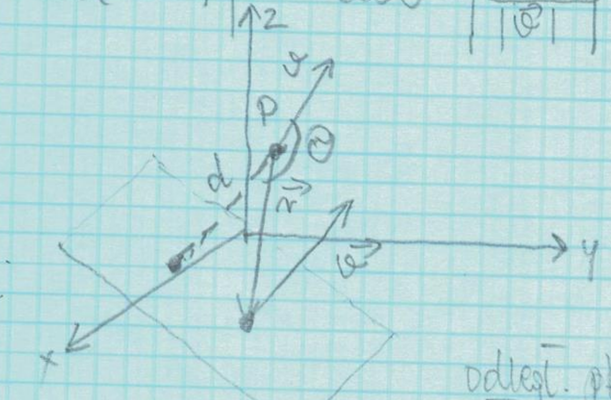
$$d = \left|\frac{\vec{r} \times \vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \left|\frac{-3\vec{i}}{\sqrt{5}}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Ten sam wynik otrzymalibyśmy gdybyśmy wybrali $\vec{r} = r_3 - r_1$ zamiast $\vec{r} = \overrightarrow{r_2 - r_1}$

Zad 7 Metody wektorowe umożliwiają także obliczenie odległości pkt P od płaszczyzny.

$\vec{r}$ – wektor łączący pkt P z dowolnym pkt płaszczyzny

$$d = |r\cos(\pi - \theta)| = r\cos\theta = \left|\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}\right| \rightarrow \text{A}$$



odległ. pkt $P(1,2,3)$ od pł. $3x - 2y + 5z = 10$

wektor ⊥ do pł. jest postaci $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$

Niech $x = y = 1$. Rozw. równ. $3x - 2y + 5z = 10$ względem z, mamy $z = \frac{9}{5}$. Tzn pkt $(1, 1, \frac{9}{5})$ należy do pł. zatem wektor $\vec{r} = (1-1)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (\frac{9}{5} - 3)\vec{k} = -\vec{j} - \frac{6}{5}\vec{k}$

z wzoru (A) mamy

$$d = \left|\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \left|\frac{0 \cdot 3 + (-1)(-2) + (-\frac{6}{5}) \cdot 5}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{2-6}{\sqrt{38}}\right| = \frac{4}{\sqrt{38}} = \frac{4\sqrt{38}}{38}.$$