Prosta w $\mathbb{R}^3$

Aby wyznaczyć równanie prostej w $\mathbb{R}^3$ wystarczy znać jeden punkt tej prostej i wektor nadający jej kierunek (zwany **wektorem kierunkowym**).

Jeśli $P=(x_P,y_P,z_P)$, $\vec{k}=[m,n,p]$, to **równania parametryczne** prostej mają postać

$$l:\begin{cases} x=x_P+m\cdot t,\\ y=y_P+n\cdot t, & t\in\mathbb{R} \text{ (} t \text{ jest parametrem).}\\ z=z_P+p\cdot t.\end{cases}$$

Po wyeliminowaniu parametru t otrzymujemy **równanie kierunkowe prostej** $l:\dfrac{x-x_P}{m}=\dfrac{y-y_P}{n}=\dfrac{z-z_P}{p}$.

Jeśli dwie płaszczyzny nie są równoległe, to ich krawędź (część wspólna) jest prostą. Zatem układ dwu równań liniowych o trzech zmiennych

$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

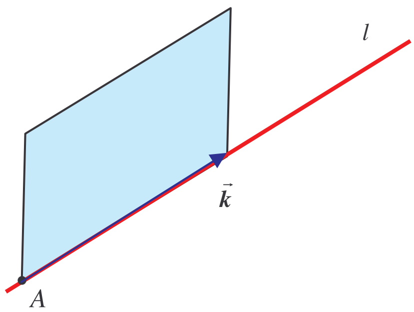
stanowi **równania krawędziowe** prostej w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Wektor kierunkowy $\vec{k}$ prostej l ma postać $\vec{k}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, gdzie $\vec{n}_1=[A_1,B_1,C_1]$, $\vec{n}_2=[A_2,B_2,C_2]$.

Możliwość obliczania pola równoległoboku pozwala na obliczanie **odległości punktu od prostej**. Jeśli

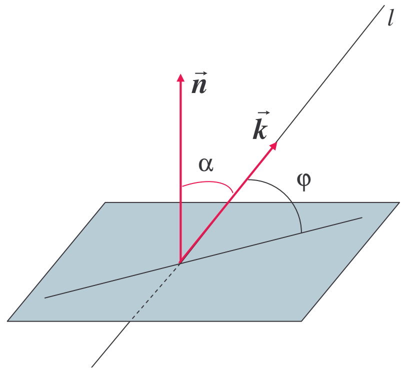
$$l:\frac{x-x_P}{m}=\frac{y-y_P}{n}=\frac{z-z_P}{p},$$

to



$$\text{Odl}(A,l)=\frac{\text{pole równoleglobоku zbudowanego na wektorach } \vec{k},\ \overrightarrow{PA}}{\text{dlugość wektora } \vec{k}}$$

Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.



Kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny σ nazywamy kąt $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, gdzie α jest kątem ostrym między wektorem normalnym $\vec{n}$ płaszczyzny σ i wektorem kierunkowym $\vec{k}$ prostej l.

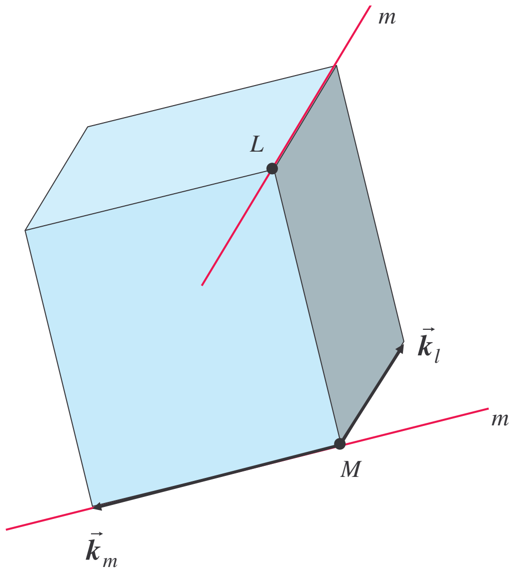
$$\angle(l,\pi)=\arcsin\frac{\left|\vec{n}\circ\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{k}\right|}$$

Kąt między prostymi.

Kątem między prostymi nazywamy kąt ostry między wektorami kierunkowymi tych prostych.

$$\angle(l_1,l_2)=\arccos\frac{\left|\vec{k}_1\circ\vec{k}_2\right|}{\left|\vec{k}_1\right|\cdot\left|\vec{k}_2\right|}$$

Odległość między prostymi skośnymi.



$$d(m,l) = \frac{\text{Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach } \vec{k}_m,\ \vec{k}_l,\ \overrightarrow{ML}}{\text{Pole równoległoboku zbudowanego na wektorach } \mathbf{k}_m,\ \mathbf{k}_l}$$

---

[1] Napisać równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $A=(2,1,-1)$, $B=(1,-2,-1)$.

Rozwiązanie.

Wektorem kierunkowym prostej jest $\overrightarrow{AB}=[-1,-3,0]$, zatem otrzymamy $l:\begin{cases} x=2-t, \\ y=1-3t, \\ z=-1. \end{cases}$

[2] Napisać równania parametryczne prostej $l:\begin{cases} x-4y+3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

Rozwiązanie.

Wystarczy rozwiązać układ równań $\begin{cases} x-4y+3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

Obierając np. zmienną y jako parametr i oznaczając $y=t$, otrzymujemy rozwiązanie (równania parametryczne prostej l)

$$\begin{cases} x=4y-3 \\ z=x+y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4y-3 \\ z=4y-3+y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4y-3 \\ z=5y-1 \end{cases} \Rightarrow l:\begin{cases} x=-3+4t, \\ y=t, \\ z=-1+5t. \end{cases}$$

[3] Napisać równanie ogólne płaszczyzny σ przechodzącej przez punkt $A=(2,1,-1)$ i przez prostą $l:\ x-1=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{3}$.

Rozwiązanie.

Prosta l przechodzi przez punkt $B=(1,-3,2)$. Płaszczyzna σ przechodzi przez np. punkt A i jest równoległa do wektora kierunkowego prostej l oraz wektora $\overrightarrow{AB}$. Dlatego wektorem normalnym płaszczyzny σ może być wektor

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{k} = [-1,-4,3]\times[1,2,3] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k} = [-18,6,2].$$

Stąd

$$\sigma:\ -18(x-2)+6(y-1)+2(z+1)=0,$$
$$\sigma:\ 9x-3y-z-16=0.$$

[4] Przez prostą $l:\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ poprowadzić płaszczyznę σ prostopadłą do płaszczyzny $\pi:\ x+4y-3z+7=0$.

Rozwiązanie.

Płaszczyzna σ przechodzi przez punkt $A=(2,3,-1)$, należący do prostej l i jest równoległa do wektora kierunkowego prostej l oraz wektora normalnego płaszczyzny π. Dlatego wektorem normalnym płaszczyzny σ może być wektor

$$\boldsymbol{n}=[5,1,2]\times[1,4,-3]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}=-11\vec{i}+17\vec{j}+19\vec{k}=[-11,\ 17,\ 19].$$

Stąd

$$\sigma:\ -11(x-2)+17(y-3)+19(z+1)=0,$$
$$\sigma:\ 11x-17y-19z-10=0.$$

[5] Napisać równanie prostej m przechodzącej przez początek układu i równoległej do prostej $l:\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Rozwiązanie.

Równoległe proste mogą mieć ten sam wektor kierunkowy. Zatem $m:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$.

[6] Napisać równanie prostej m przechodzącej przez początek układu i prostopadłej do prostej $l:\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-2}$.

Rozwiązanie.

Spośród punktów prostej l, czyli spośród punktów postaci $P=(5+4t,3+3t,-4-2t)$, $t\in\mathbb{R}$, wybieramy punkt wyznaczony z warunku $\overrightarrow{OP}\perp\boldsymbol{k}$, gdzie $\vec{k}=[4,3,-2]$ jest wektorem kierunkowym prostej l.

$$\overrightarrow{OP}\perp\boldsymbol{k}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{OP}\circ\boldsymbol{k}=0\ \Leftrightarrow\ [5+4t,3+3t,-4+2t]\circ[4,3,-2]=0\ \Leftrightarrow\ 4(5+4t)+3(3+3t)+2(-4-2t)=0\ \Leftrightarrow\ t=-1$$

Zatem rzutem punktu O – początku układu na prostą l jest punkt $Q=(1,0,-2)$. Stąd

$$m:\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-2}.$$

[7] Znajdź punkt symetryczny do $A=(2,3,4)$ względem prostej $l: x=y=z$.

Rozwiązanie.

Wyznaczamy przede wszystkim rzut A_l punktu A na prostą l. Punkt A_l jest tym punktem spośród punktów prostej l, czyli punktów postaci $P=(t,t,t)$, $t\in\mathbb{R}$, który spełnia warunek $\overrightarrow{AP}\perp\boldsymbol{k}_l$, gdzie $\boldsymbol{k}_l=[1,1,1]$ jest wektorem kierunkowym prostej l.

$$\overrightarrow{AP}\perp\boldsymbol{k}_l\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AP}\circ\boldsymbol{k}_l=0\ \Leftrightarrow\ [t-2,t-3,t-4]\circ[1,1,1]=0\ \Leftrightarrow\ t-2+t-3+t-4=0\ \Leftrightarrow\ t=3$$

Zatem rzutem punktu A na prostą l jest punkt $A_l=(3,3,3)$. Aby wyznaczyć punkt symetryczny do punktu A względem prostej l, wystarczy zastosować wzory na współrzędne środka odcinka. Punkt B jest punktem symetrycznym do punktu A względem prostej l, jeśli punkt A_l jest środkiem odcinka AB. Ponieważ

$$\frac{x_A+x_B}{2}=x_{A_l},\quad \frac{y_A+y_B}{2}=y_{A_l},\quad \frac{z_A+z_B}{2}=z_{A_l}$$

więc $B=(4,3,2)$.

[8] Jak jest położona prosta $l:\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ względem płaszczyzny $\sigma:\ x+2y-4z+1=0$?

Rozwiązanie.

Podstawiając współrzędne dowolnego punktu prostej l, czyli punktu $P=(13+8t,1+2t,4+3t)$, $t\in\mathbb{R}$, do równania płaszczyzny σ otrzymujemy równanie $13+8t+2(1+2t)-4(4+3t)+1=0$, które jest spełnione dla każdego $t\in\mathbb{R}$. Dlatego $l\subset\sigma$.

[9] Jak są położone względem siebie proste $m:\begin{cases} x+y-z+4=0 \\ 2x-3y-z-5=0 \end{cases}$ i $l:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$?

Rozwiązanie.

Przede wszystkim piszemy równanie kierunkowe prostej $m:\dfrac{x-9}{-4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-13}{-5}$.

Punkt prostej m wyznaczyliśmy z układu równań $\begin{cases} x+y-z+4=0, \\ 2x-3y-z-5=0, \end{cases}$ przyjmując $y=0$; wektor $\boldsymbol{k}_m=[1,1,-1]\times[2,-3,-1]$ może być wektorem kierunkowym prostej m.

Znajdujemy objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach

$$\boldsymbol{k}_m=[-4,-1,-5],\ \boldsymbol{k}_l=[4,1,2],\ \overrightarrow{ML}=[-12,-3,-12],$$

gdzie $M=(9,0,13)$ jest punktem prostej m, $L=(-3,-3,1)$ jest punktem prostej l.

$$\mathrm{Vol}(\vec{k}_m,\vec{k}_l,\overrightarrow{ML}) = |\begin{vmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \\ -12 & -3 & -12 \end{vmatrix}| = 0$$

Objętość równoległościanu jest równa zero, więc wektory $\vec{k}_m$, $\vec{k}_l$, $\overrightarrow{ML}$ są komplanarne, zatem proste m i l leżą w jednej płaszczyźnie. W takim przypadku, jeśli proste nie są równoległe (a nie są, gdyż ich wektory kierunkowe nie mają proporcjonalnych współrzędnych), możemy wyznaczyć wspólny punkt tych prostych. Wystarczy w tym celu rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 9-4t=-3+4s \\ -t=-3+s \\ 13-5t=1+s \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu jest para $t=\frac{9}{4}$, $s=\frac{3}{4}$. Wspólnym punktem prostych m i l jest $(0,-\frac{9}{4},\frac{7}{4})$.

Zadania

1. Napisać równania prostej przechodzącej przez punkt $M=(2,1,-2)$ i równoległej do prostej $l:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{2}$.

2. Znaleźć punkt przecięcia prostej $l:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ z płaszczyzną $P: x+y+z-1=0$.

3. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $M=(1,-2,3)$ i prostopadłej do płaszczyzny $P: 3x-4y+2z-6=0$.

4. Znaleźć odległość punktu $M=(-3,0,1)$ od prostej $l:\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-2}{-3}$.

5. Wyznacz kąt miedzy prostymi: $l_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$ i $l_2:\frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$.

6. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $M=(2,-3,1)$ i przez prostą $l:\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}$.

7. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez prostą $l:\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ i prostopadłej do płaszczyzny $P: x+4y-3z+7=0$.

8. Prostą $l:\begin{cases} 2x-4y+z-1=0 \\ x+3y+5=0 \end{cases}$ zapisać w postaci kierunkowej.

9. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P=(-1,-4,3)$ i prostopadłej do dwóch prostych:

$$l_1:\begin{cases} 2x-4y+z-1=0, \\ x+3y+5=0 \end{cases} \quad l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{2}.$$

10. Znaleźć współrzędne punktu symetrycznego do punktu $M=(4,3,10)$ względem prostej $l:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

11. Wyznacz płaszczyznę przechodzącą przez punkt $P=(2,-3,-7)$ i prostopadłą do prostej $l:\begin{cases} 2x+y-2z+1=0 \\ x+y+z-5=0 \end{cases}$

12. Wyznacz prostą przechodzącą przez punkt $P=(1,-2,2)$ i równoległą do osi y.

13. Wyznacz prostą przechodzącą przez punkty $P=(2,-1,-1)$, $Q=(3,3,-1)$.

14. Dane są wierzchołki trójkąta: $A=(2,3,-1)$, $B=(1,-2,0)$, $C=(-3,2,2)$. Wyznacz proste, w których zawierają się boki tego trójkąta. Oblicz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka A.

---

1. $l:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{2}$; **2.** $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$; **3.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{2}$; **4.** $\sqrt{\frac{412}{11}}$; **5.** $\arccos\frac{72}{77}$; **6.** $x-3y-z-10=0$; **7.** $11x-8y-7z-5=0$; **8.** $\frac{x+5}{-3}=y=\frac{z-11}{10}$; **9.** $\frac{x+1}{12}=\frac{y+4}{46}=\frac{z-3}{-1}$; **10.** $(2,9,6)$; **11.** $3x-4y+z-11=0$; **12.** $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{0}$; **13.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{0}$; **14.** $\sqrt{\frac{194}{9}}$.

Zadania.

1. Wyznaczyć wspólne punkty płaszczyzn: $\pi_1 : -2x + 2y - 3z = 3$, $\pi_2 : 2x + y - 4z = -4$, $\pi_3 : -2x + y - 2z = 2$.

2. Wyznacz równania prostej leżącej w przecięciu płaszczyzn π_1 i π_2 .

3. Jaki kąt tworzy prosta z zadania 2 z płaszczyzną π_3 ?

4. W jakim punkcie prosta z zadania 2 przebija płaszczyznę π_3 ?

5. Jaki kąt tworzy płaszczyzna π_3 z płaszczyzną π_1 ?

6. Oblicz odległość prostej z zadania 2 od osi y .

7. Oblicz odległość $k : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{0}$ od $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$

8. Oblicz odległość $k : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{0}$ od $l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 0 \end{cases}$

9. Wyznacz punkt symetryczny do początku układu współrzędnych względem: 1) płaszczyzny π_2 , 2) prostej *k* z zadania 8.