## Zestaw A – sprawdzian odpowiedzi

(1)

Zd 1) $\sqrt[3]{i}$ ; $z_0 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi\right)$$

$k = 0, 1, 2$

$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$

$z_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$

$z_2 = i$

Zd 2) $z_0 = \sqrt{3} - i$, każdy następny pierwiastek jest przesunięty o kąt $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ czyli czynnik $e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

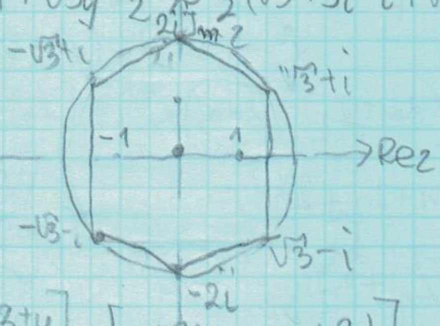
$z_1 = z_0 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = (\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3i - i + \sqrt{3})$

$z_1 = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + 2i) = \sqrt{3} + i$

$z_2 = z_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2i$

$z_3 = -\sqrt{3} + i$

$z_4 = -\sqrt{3} - i$ , $z_5 = -2i$




Zd 3)

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}1+x & 3+y\\ 2+z & t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+3z & y+3t\\ 2x & 2y\end{bmatrix}$$

$1+x = x+3z$

$3+y = y+3t$

$2+z = 2x$

$t = 2y$

$3+y = y+3t = y+6y \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$3+y = y+3t \Rightarrow t = 1$

$1+x = x+3z \Rightarrow z = \frac{1}{3}$

$2+z = 2x$

$2+\frac{1}{3} = 2x \Rightarrow \frac{7}{3} = 2x$

$x = \frac{7}{6}$

$$X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

Zd 4

$$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix} \overset{k_4+k_1+k_2+k_3}{=} \begin{vmatrix}0&1&1&3\\1&0&1&3\\1&1&0&3\\1&1&1&3\end{vmatrix} \overset{\substack{w_2-w_1\\ w_3-w_1\\ w_4-w_1}}{=} \begin{vmatrix}0&1&1&3\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&0\end{vmatrix} = -3$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$D = B \cdot (A+C) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -20 & -4 \\ 4 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Zd 6

$$r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

Zd 7

$$x^2 - 4 = \alpha_1(x^2+2) + \alpha_2(x^2+x) + \alpha_3(2x^2-x+3)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)x^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)x + (2\alpha_1 + 3\alpha_3) = x^2 - 4$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_3 = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_3 = -4 \end{cases} / (-1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_3 = 1 \\ -2\alpha_1 - 3\alpha_3 = 4 \end{cases}$$

$$-\alpha_1 = 5$$
$$\alpha_1 = -5$$

$$\alpha_1 + 3\alpha_3 = 1$$
$$-5 + 3\alpha_3 = 1$$
$$\alpha_3 = 2 = \alpha_2$$

współrz. wekt. w danej bazie

$$(-5, 2, 2)$$

Zd 8)

$$r \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & 11 & 7 \end{bmatrix} = 2$$

($x, y$ - zmienne niezależne) $z_0, t_0$, to jako parametry

Nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 3 parametrów

Baza będzie miała wymiar 3.

Zd 9)

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 9 & 1 \\ 2 & -4 & 9 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$(x, y, z)$ jako zmienne niezależne
$t_0$ - jako parametr

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 9 & 1 \\ 2 & -4 & 9 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{22}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Wymiar przestrzeni rozwiązań 1

Zd 10 $x = 1$ $y = -\frac{1}{2}$ $z = -\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 5 & 6 & -\frac{7}{2} \\ 4 & 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 6 & -5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$