Analiza cwiczenia podsumowanie - calki podstawy

Mateusz Kojro

August 31, 2020

1 Calka oznaczona

1.1 Funkcja pierwotna funkcji f nazywamy:

$$\forall_{x \in (a,b)} F'(x) = f(x) \tag{1}$$

1.2 Definicja calki

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{2}$$

2 Metody obliczania calek

2.1 Calkowanie przez czesci

Jezeli funkcje zmiennej x: $a(x)$ i $b(x)$ maja pochodne ciagle to:

$$\int a(x)b'(x)dx = a(x)b(x) - \int b(x)a'(x)dx \tag{3}$$

lub zapisane inaczej:

$$\int adb = ab - \int bda \tag{4}$$

2.2 Calkowanie przez podstawianie

2.2.1 Def:

Jezeli:

- Dla $x \in [a, b]$ funkcja $g(x)$ ma pochodna ciagla
- $f(x)$ jest ciagla w zbiorze wartosci $g(x)$

To mamy:

$$\int f(g(x)) \times g'(x)dx = \int f(u)du, \ u = g(x) \tag{5}$$

2.3 Rozwiazywanie

$$\int sin(4x) = \begin{vmatrix} u = 4x \\ du = 4dx \\ dx = \frac{du}{4} \end{vmatrix}, \text{ bo } \ df = f'(x) \times dx \tag{6}$$

$$\int \sin u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int \sin u du \tag{7}$$

$$= \frac{1}{4} \times (-\cos u),\ u = 4x \tag{8}$$

$$= \frac{1}{4} \times (-\cos 4x) \tag{9}$$

3 Calka oznaczona

3.1 Definicja

Jezeli dla $x = [a, b]$ wartosci funkcji $f(x) \geq 0$ to pole P ogarniczone liniami $x = a$ i $x = b$ oraz wykresem $f(x)$ jest rowne calce oznaczonej:

$$P = \int_a^b f(x)dx \tag{10}$$

i zachodzi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{11}$$

$$= F(x)|_a^b \tag{12}$$

jezeli natomiast dla $x \in [a, b]$ $f(x) \leq 0$:

$$P = -\int_a^b f(x)dx \tag{13}$$

3.2 Wzory:

Dla calek oznaczonych dzialaja wzory zwiazane z calkami nieoznaczonymi i dodatkowo:

Jezeli mamy przedzial calkowania $[a, b]$ mozemy go podzielic na mniejsze przedzialy i policzyc 2 osobne calki po czym je dodac

$$[a, b] = [a, c] + [c, b] \tag{14}$$

$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x) \tag{15}$$

4 Calki f. nieograniczonych

Jezeli:

- $f(x)$ jest nieograniczona w przedziale $[a, b]$
- jest ograniczona i calkowalna w przedzialach:

$$a \leq x \leq c - \alpha \tag{16}$$

$$c + \beta \leq x \leq b \tag{17}$$

gdzie:

$$c \in [a, b] \text{ , i } \alpha, \beta > 0 \tag{18}$$

To mamy:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to 0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta \to 0} \int_{c+\beta}^b f(x)dx \tag{19}$$

5 Calki oznaczone na przedzialach nieskonczonych

Mamy:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

(20)

analogicznie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \lim_{a \to +-\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{21}$$

6 Calki funkcji wymiernych

Jezeli mamy calke fukcji wymiernej w postaci:

$$\int \frac{W_1}{W_2} = \int \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \times x^i}{\sum_{j=0}^{m} a_j \times x^j} dx \tag{22}$$

to jezeli

- $n \geq m$ - dzielimy wielomiany przez siebie i otrzymujemy wielomian i wymierna gdzie $n \leq m$
- $n \leq m$ - rozkladamy na sume ulamkow prostych:

$$\frac{A}{(ax+b)^q}, \frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)^r} \quad \text{gdzie} \quad \begin{cases} A, B, C, a, b, c, d, e & \in R \\ q, r & \in N \end{cases} \tag{23}$$

  i $cx^2 + dx + e$ nie ma pierwiastkow i $\delta \leq 0$