Zestaw3 odpowiedzi (macierze, wyznaczniki , układy równań)

Wyznacznik macierzy o wymiarze 2x2 co zapisujemy $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ jest określony jako $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

Wyznacznik macierzy o wymiarze 3x3

Dla macierzy 3×3 używamy tzw. *metody Sarrusa*: dopisujemy do macierzy z prawej strony dwie pierwsze kolumny (lub z dołu dwa pierwsze wiersze) i następnie iloczyny wzdłuż trzech przekątnych dodajemy, a wzdłuż trzech odejmujemy:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2$$

Rozwinięcia Laplace'a wyznacznika

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą stopnia *n*, gdzie *n*≥2.

Dla dowolnej, ustalonej liczby *i*, gdzie 1≤*i*≤*n*, wyznacznik macierzy *A* jest równy

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}.$$

Powyższą równość nazywamy **rozwinięciem Laplace'a względem *i***

i **-tego wiersza**.

Dla dowolnej, ustalonej liczby *j*, gdzie $1 \le j \le n$, wyznacznik macierzy *A* jest równy

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, D_{kj}.$$

Powyższą równość nazywamy **rozwinięciem Laplace'a względem *j*-tej kolumny**.

Dopełnienie algebraiczne

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

M_{ij}- Minor wyznacznik powstały ze skreślenia wiersza o numerze *i* oraz kolumny o numerze *j*.

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ możemy określić w kartezjańskim układzie współrzędnych jako wyznacznik

$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right)$$

Wyznaczniki

a) przestawienie dwóch wierszy (kolumn) w macierzy wyznacznika jest równoważne pomnożeniu wyznacznika przez -1.

b) wyznacznik o dwóch jednakowych wierszach (kolumnach) jest równy 0

c) wyznacznik o 2 proporcjonalnych wierszach jest równy 0

d) Jeżeli w wyznaczniku jeden z wierszy (lub jedna z kolumn) jest kombinacją liniową pozostałych wierszy (lub kolumn) to wyznacznik jest równy 0.

e) wyznacznik nie zmieni jeżeli do jego wiersza (lub kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (lub kolumn)

f) mnożąc wiersz wyznacznika (kolumnę) przez liczbę, mnożymy przez tę liczbę cały wyznacznik

g) wyznacznik nie zmieni wartości, jeżeli do jego wiersza (lub kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (lub kolumn)

$$AX = B$$

układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorami Cramera

$$x_1 = \frac{W_1}{W} \quad x_2 = \frac{W_2}{W} \ldots = x_n = \frac{W_n}{W}$$

$$W = |A|$$

Wzory wyprowadził Cramer w roku 1750 - w ten sposób zapoczątkowana została teoria wyznaczników.

Rzędem macierzy o wymiarze $m \times n$ nazywamy liczbę równą najwyższemu ze stopni jej różnych od zera minorów, gdy macierz jest niezerowa.

0 - gdy macierz zerowa.

Macierz określająca **macierz odwrotną** do nieosobliwej macierzy A stopnia n ma postać:

$$A^{-1} = \frac{1}{DetA}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2n} \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Zd1.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 * 3 - 2 * 4 = -5$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} +$

$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + (-1) = -2$

$a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +$

$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (3-5) + (2-4) + (10-12) =$

$= (-2) + (-2) + (-2) = -6$

4

d) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix} = a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b & 0 \\ z & c \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot c$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} +$

$+7(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-9+8) - 5(-18-20) +$

$+7(12-15) = - \quad -5\cdot(-38) + 7\cdot(-27) = -2+190-189$

$= -2+190-189 = -1$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{k_3+k_1-2k_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Zd2. Wyznaczyć rząd macierzy

$$a)A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_2-K_4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$rz[A]=rz\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \longrightarrow rz[A] = 1$$

$$b)B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rz[B\}=rz\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \xrightarrow{K_2-K_4} rz\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{Rz}[c] = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \xrightarrow{K_4 - K_2} \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_4 - K_1} \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 \qquad \text{policzmy} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Zd3. Znajdź macierz odwrotną i sprawdź otrzymany wynik

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$; $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-5) \cdot 6 = 36$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{36} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{36} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{36} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ $\mathrm{Det}[B] \equiv |B| = -1$

$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$; $D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38$

$D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27$ $D_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1$

$D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41$ $D_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29$ $D_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$

$D_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34$ $D_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24$

$$B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & -38 & 27 \\ -1 & 41 & -29 \\ 1 & -34 & 24 \end{bmatrix}^{T}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$$

Zd4. Rozwiązać układy równań metodą Cramera:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 9 = 17$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 48 + 21 = 69$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 36 = -22$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{69}{17}$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{-22}{17}$$

b) $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 5 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - y + 3z = -6 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 10 - 4 \cdot (3-8) + 5 \cdot (-1-4) = 30 + 20 - 25 = 25$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-6) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5(6+4) - 6(16-10)$$

$$W_x = 50 - 36 = 14$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} \overset{2\ \text{wiersz}}{=} (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -(15+30)$$

$$-4 \cdot (-18-10) = -45 - 4 \cdot (-28) = -45 + 112 = 67$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} \overset{2\ \text{wiersz}}{=} (-1)^3 \cdot 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$W_z = -(-24+5) + 2(-18-10) = 19 - 56 = 37$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{14}{25} \qquad y = \frac{W_y}{W} = \frac{67}{25} \qquad z = \frac{W_z}{W} = \frac{37}{25}$$

c) $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{1\ \text{wiersz}}{=} 1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5 - (-2-3) + 3 \cdot (-4+9) = 5 + 5 + 15 =$$

$$= 25 \neq 0$$

Na mocy tw. Cramera $x = y = z = 0$ (rozwiązanie trywialne)

9

d) $\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

1 wiersz

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$W = -25$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -25 \quad ; \quad W_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -50$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -75$$

$$x = \frac{W_x}{W} = 1$$

$$y = \frac{W_y}{W} = 2$$

$$z = \frac{W_z}{W} = 3$$

Praca domowa

Rozwiązać równanie $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

Wyznaczyć wyznacznik macierzy A = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.