zestaw 4

1) Rozwiązać układy Cramera metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -7 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x + 5y + z = 18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 4x + 8y - 7z + t = 1 \\ x + 2y - z + t = 1 \\ -x + y + 4z + 6t = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 4y + 2z - s = 3 \\ 2x + 9y + 6z - 2s - 3t = 5 \\ x + 2y - z - s + 5t = 5 \\ -2x - 7y + z + 3s - 4t = -5 \\ -x - 5y - z + 3s + 6t = 4 \end{cases}$

2) Wyznaczyć rząd macierzy A jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 6 & 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Wyznaczyć rząd macierzy A jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

Metoda eliminacji Gaussa dla układu Cramera $AX=B$ polega na rozwiązaniu tego układu przez doprowadzenie jego macierzy rozszerzonej $[A|B]$ do postaci $[I|X]$

$$[A|B] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|X]$$

Zad 1

a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 6 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2+3w_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 21 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2:21} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-5w_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{tzn} \quad \left.\begin{array}{l} x=-3 \\ y=1 \end{array}\right\} \text{rozwiązanie}$$

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-2w_1]{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 7 & -5 & 26 \\ 0 & 9 & -5 & 32 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2:7}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 9 & -5 & 32 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-9w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{10}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{w_3:\frac{10}{7}}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2+\frac{5}{7}w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1+2w_2-3w_3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \\ z=-1 \end{array}$$

c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1 \quad w_4 + w_1]{w_2 - 4w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right]$ zamieniamy wiersz 2 na 4 $\xrightarrow{w_2 \to w_4}$

$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 : 2]{w_2 : 3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 - 5w_3}$

$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 : \left(-\frac{3}{2}\right)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 - \frac{1}{3}w_3 - 2w_4 \quad w_1 - 2w_2 + 3w_3]{w_3 - \frac{1}{2}w_4}$

$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ $x = 4,\ y = -2,\ z = 0,\ t = 1.$

d) $x = 1 \quad y = 0,\ z = 1 \quad s = 0 \quad t = 1$

zad 1 d Rozwiązanie

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 9 & 6 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -4 & -5 \\ -1 & -5 & -1 & 3 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4+2w_1 \\ w_5+w_1}]{\substack{w_2-2w_1 \\ w_3-w_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 6 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[w_5+w_2]{\substack{w_3+2w_2 \\ w_4-w_2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_5-3w_3]{w_4-3w_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_5-2w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_5:2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_3-w_5]{w_4-2w_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2-2w_3+3w_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_1-4w_2-2w_3+w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Rozwiązanie

$x = 1$

$y = 0$

$z = 1$

$s = 0$

$t = 1$

Odpow. wyn. 164

2) $rz A = rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 6 & 9 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 - 1w_2]{w_3 + 2w_2} rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cancel{w_4 = 2w_1}}$

Rząd macierzy nie zmieni gdy drugi wiersz pomnożony przez 2 dodamy do trzeciego i pomnożony przez (−1) dodamy do czwartego, wiersz czwarty proporcjonalny do 1, skreślamy wiersz 4

$\rightarrow rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[K_3 - K_5,\ K_4 + 3K_5]{K_1 + K_5,\ K_2 - 2K_5} rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

Rząd nie zmieni się jeżeli kolumnę piątą pomnożoną przez odpowiednią liczbę dodamy do pozostałych (tak żeby otrzymać 0 w drugim wierszu)

$\xrightarrow{\cancel{K_3 = 4K_1}} rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

3) a) $rz A = rz \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & 7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[K_3 + K_4]{K_1 + K_2} rz \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -6 & 12 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\cancel{2K_2 = -K_3}]{\cancel{K_1 = -K_4}}$

$rz \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 2 \quad$ bo $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$

b) $rz A = rz \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\cancel{K = K_3}]{\cancel{K_1 = K_4}} rz \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2$ ponieważ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$