

14 sierpnia 2020

Karol Ławniczak

Spis zagadnień zrealizowanych w toku ćwiczeń

Rok akademicki: 2019/2020

Kierunek: Informatyka

Przedmiot: Analiza matematyczna

Szczegółowy spis zagadnień:

1. Powtórzenie informacji o pochodnej
 1. Sens geometryczny
 2. Definicja analityczna
 3. Rozróżnienie
 1. Pochodna funkcji w punkcie
 2. Funkcja pochodna
 3. Operator pochodnej
 4. Obliczanie pochodnych
 1. Więcej przykładów
 5. Zastosowania pochodnej
 1. Reguła de l'Hospitala
 1. Więcej przykładów
 2. Ekstrema lokalne
 1. Więcej przykładów
 3. Szereg Taylora
2. Funkcja pierwotna i pochodna
 1. Addytywność pochodnej, pochodna stałej – przypomnienie
 2. Niejednoznaczność całki nieoznaczonej
3. Tablice pochodnych i całek
4. Liniowość całki
 1. Addytywność
 2. Jednorodność (stopnia 1)
 3. Razem
5. Przykłady całek obliczanych wprost

6. Zagadnienie brzegowe: ustalanie stałej całkowania
 1. Zasada
 2. Przykłady dot. ruchu:
 1. Położenie jako całka prędkości z położeniem początkowym
 1. Także bez całkowania
 2. Prędkość jako całka przyspieszenia z prędkością początkową
 1. Także bez całkowania
 3. Położenie jako całka całki przyspieszenia z położeniem początkowym i prędkością początkową (całkowanie już konieczne)
7. Całkowanie przez podstawienie
 1. Więcej przykładów
8. Całkowanie przez części
 1. Więcej przykładów
 2. Wielokrotne zastosowanie całkowania przez części
 3. Całki pętające się (zwrotne)
 1. Więcej przykładów
 4. Warianty zapisu
9. Inne sposoby:
 1. Szczególne podstawienia*
 1. Uniwersalne podstawienie trygonometryczne
 2. Alternatywne podstawienia trygonometryczne
 2. Całkowanie funkcji wymiernych* (tylko prosty przykład)
 1. Funkcje wymierne – przypomnienie
 2. Dzielenie wielomianów – przypomnienie
 3. Ułamki proste (1 i 2 rodzaju)
 4. Rozkład wielomianu na czynniki
 5. Wyznaczenie współczynników
 6. Całki ułamków prostych pierwszego rodzaju
 7. Całki ułamków prostych drugiego rodzaju
 8. Prostý przykład

3. Sztuczka: licznik proporcjonalny do pochodnej mianownika
10. Całka oznaczona Riemanna
 1. Sens geometryczny jako pole pod wykresem
 2. Definicja analityczna: podział przedziału, punkty pośrednie, zagęszczanie podziału, ciąg podziałów, suma częściowa, ciąg sum częściowych, granica ciągu sum częściowych*
11. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego (FTC)
 1. Postać $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow \frac{d}{dx} F_a(x) = f(x)$
 2. Wniosek $\int_a^b f(t) dt = F_c(b) - F_c(a)$
 3. Jednoznaczność całki oznaczonej
12. Addytywność całki jako funkcji przedziału
 1. Całka na przedziale zdegenerowanym do punktu
 2. Efekt zamiany granic przedziału
13. Przykład całki oznaczonej obliczany wprost
14. Całkowanie oznaczone przez zamianę zmiennych (podstawienie)
 1. Obliczenie całki nieoznaczonej przez zamianę zmiennych i zastosowanie FTC
 2. Zamiana zmiennych przy obliczaniu całki oznaczonej wprost
 3. Więcej przykładów
15. Całkowanie oznaczone przez części
 1. Obliczenie całki nieoznaczonej przez części i zastosowanie FTC
 2. Obliczanie całki oznaczonej przez części wprost
 3. Więcej przykładów
16. Całka niewłaściwa
 1. Z funkcji nieograniczonej na przedziale ograniczonym
 1. Przykłady:
 1. Całki zbieżnej
 2. Całki rozbieżnej do nieskończoności
 2. z funkcji ograniczonej na przedziale nieograniczonym
 1. Przykłady:
 1. Całki zbieżnej

2. Całki rozbieżnej do nieskończoności
3. Z funkcji nieograniczonej na przedziale nieograniczonym – przykład
17. Przykłady zastosowań całki jednokrotnej
 1. Długość przedziału – całka z funkcji stałej 1 (sama różniczka pod znakiem całki)
 2. Długość krzywej
 1. określonej funkcją $y(x)$
 2. określonej parametrycznie $[x(t), y(t)]$
 1. $[x(t), y(t), z(t)]$
 3. Pole pod krzywą – powtórzenie
 4. Masa łańcucha o gęstości liniowej $\lambda(x)$
 5. Zastosowana całki jednokrotnej dla figur przestrzennych:
 1. Objętość walca uogólnionego
 2. Objętość bryły obrotowej (wokół osi argumentów)
 3. Pole powierzchni bocznej figury obrotowej (wokół osi argumentów)
 4. Trąba Gabriela (Gabriel's Horn, Torricelli's trumpet) i paradoks malarzy
18. Funkcja wielu zmiennych
 1. Przykład dla ustalenia uwagi: rzędna terenu jako funkcja długości i szerokości kartograficznej, obraz przełęczy górskiej.
19. Pochodna cząstkowa
 1. Sens geometryczny
 2. Definicja analityczna
 3. Rozróżnienie:
 1. pochodna cząstkowa danej funkcji w danym punkcie (wartość)
 2. funkcja pochodna (cząstkowa) danej funkcji (funkcja)
 3. pochodna cząstkowa względem x_i jako funkcja x_i dla ustalonej wartości niektórych lub wszystkich $x_{j(\neq i)}$ *
 4. pochodna cząstkowa względem x_i dla ustalonej wartości x_i jako funkcja niektórych lub wszystkich $x_{j(\neq i)}$ *
 5. operator pochodnej cząstkowej
 4. Różne oznaczenia pochodnej cząstkowej

20. Gradient

1. Rozróżnienie (podobnie jak dla pochodnej i pochodnej cząstkowej):

1. Gradient funkcji w punkcie
2. Gradient jako funkcja
3. Gradient jako funkcja niektórych argumentów przy ustalonych pozostałych argumentach*
4. Operator gradientu

2. Postać operatora gradientu we współrzędnych*:

1. Biegunowych (2D)
2. Walcowych (3D)
3. Sferycznych (3D)
4. Hipersferycznych (nD)

~~21. Funkcja wielu zmiennych o wartościach wektorowych**~~

~~22. Pole wektorowe**~~

~~23. Dywergencja**~~

~~24. Rotacja**~~

25. Pochodna kierunkowa

1. Sens geometryczny
2. Definicja analityczna
3. Pochodna cząstkowa jako szczególny przypadek kierunkowej

26. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

1. Twierdzenie Schwarz'a

27. Pochodne kierunkowe wyższych rzędów*

~~28. Zmiana bazy w przestrzeni argumentów**~~

29. Gradient jako uogólnienie pochodnej na przypadek wielowymiarowy

30. Macierz Hessego jako uogólnienie drugiej pochodnej na przypadek wielowymiarowy

1. Hesjan

~~31. Trójwymiarowa tablica pochodnych trzeciego rzędu $[f_{x_1 x_2 x_3}(\vec{x}_0)]_{x_1=1}^n$~~
 $x_2 = 1$
 $x_3 = 1$

32. ~~Wielowymiarowe tablice pochodnych wyższych rzędów~~ $[f_{x_1 \dots x_k}(\vec{x_0})]_{x_1}^n = 1$
 \vdots
 $x_k = 1$
~~—ideowo**~~

33. Zastosowania pochodnych cząstkowych (i ew. kierunkowych):

1. Ekstrema funkcji wielu zmiennych
 1. Przypadek funkcji jednej zmiennej – przypomnienie
 2. Przypadek funkcji dwóch zmiennych
 3. ~~Przypadek funkcji dowolnie wielu zmiennych**~~

34. Pochodna zupełna

35. Zastosowania pochodnej zupełnej:

1. Linearyzacja funkcji wielu zmiennych
2. Szereg Taylora – przypomnienie
3. Szereg Taylora dla funkcji wielu zmiennych
4. Przybliżenie funkcji wielu zmiennych do wyrazów wybranych rzędów
5. Metoda różniczeki zupełnej w rachunku błędów*

36. Całki podwójne

1. Obszar normalny
2. Całki iterowane
 1. Co robić gdy obszar całkowania nie jest obszarem normalnych – wskazówka, bez rozwijania*
 3. Faktoryzacja funkcji podcałkowej z separacją zmiennych i rozbiecie całki po prostokącie na iloczyn całek

37. Zastosowania całek podwójnych

1. Pole powierzchni figury płaskiej – całka z funkcji stałej 1 (same różniczeki pod znakiem całki)
 1. Prostokąt
 2. Obszar normalny
 3. Obszar inny niż normalny*
2. ~~Pole powierzchni wykresu funkcji 2 zmiennych **~~
3. Objętość pod powierzchnią
 1. Po obszarze prostokąta

2. Po obszarze normalnym
4. Masa płachty o gęstości powierzchniowej $\sigma(x, y)$
38. Całki potrójne
 1. Obszar normalny w przypadku 3D
 2. Całki iterowane w przypadku 3D
 3. Faktoryzacja funkcji podcałkowej z separacją zmiennych i rozbić całki po prostopadłościan na iloczyn całek w przypadku 3D
39. Zastosowania całek potrójnych
 1. Objętość bryły 3D – całka z funkcji stałej 1 (same różniczki pod znakiem całki)
 1. Prostopadłościan
 2. Obszar normalny 3D
 2. Objętość 3D-hiperpowierzchni „wykresu” funkcji 3 zmiennych — idea
**
 3. 4D-hiperobjętość „pod” 3D-hiperpowierzchnią** –idea
 4. Masa bryły 3D o gęstości $\rho(x, y, z)$
40. Całki wielowymiarowe — ideowo, przykład z objętością przestrzeni fazowej
**