PIERŚCIEŃ WIELOMIANÓW *K*[x] NAD CIAŁEM *K* (c.d.)

Def. **Największym wspólnym dzielnikiem wielomianów** φ i ψ, z których co najmniej jeden jest różny od zera, nazywamy taki wielomian ω, że

1) jego najwyższy współczynnik jest 1,
2) $\omega | \varphi$, $\omega | \psi$,
3) jeśli $\sigma | \varphi$ i $\sigma | \psi$, to $\sigma | \omega$.

NWD wielomianów oznaczamy: (φ, ψ).

Def. **Najmniejszą wspólną wielokrotnością wielomianów** φ i ψ różnych od zera, nazywamy taki wielomian ω, że

1) jego najwyższy współczynnik jest iloczynem najwyższych współczynników wielomianów φ i ψ,
2) $\varphi | \omega$, $\psi | \omega$,
3) jeśli $\varphi | \sigma$ i $\psi | \sigma$, to $\omega | \sigma$.

NWW wielomianów oznaczamy: $[\varphi, \psi]$.

Tw. (**algorytm Euklidesa dla wielomianów**)

Dla dowolnych dwóch wielomianów φ i ψ z pierścienia $\boldsymbol{K}[x]$, z których choć jeden jest różny od 0, istnieje jeden i tylko jeden największy wspólny dzielnik w $\boldsymbol{K}[x]$, przy czym można go wyznaczyć z dokładnością do stałej, jako ostatnią resztę ρ_{n+1} w algorytmie Euklidesa dla wielomianów, tzn.

$$(\varphi, \psi) = (\rho_{n+1} / a) \in \boldsymbol{K}[x],$$ gdzie a jest największym współczynnikiem wielomianu ρ_{n+1}.

Dowód jest analogiczny jak dla dzielników w pierścieniu $\boldsymbol{Z}$ - sprawdź!.

P.1 Wyznaczymy największy wspólny dzielnik wielomianów:

$$\varphi = 2x^5 - x^4 - 6x^3 - x^2 + 4x + 1 \text{ oraz } \psi = x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$$

Tworząc kolejne ilorazy χ_k i reszty ρ_k wg. algorytmu Euklidesa otrzymujemy:

$\varphi = \chi_1 \psi + \rho_1$, gdzie $\chi_1 = 2x + 1$ i $\rho_1 = x^3 - 2x^2 + 1$;

$\psi = \chi_2 \rho_1 + \rho_2$, gdzie $\chi_2 = x + 1$ i $\rho_2 = -x^2 + x$;

$\rho_1 = \chi_3 \rho_2 + \rho_3$, gdzie $\chi_3 = -x + 1$ i $\rho_3 = -x + 1$;

$\rho_2 = \chi_4 \rho_3 + \rho_4$, gdzie $\chi_4 = x$ i $\rho_4 = 0$.

Ostatnia reszta wynosi $\rho_3 = -x + 1$, ale warunek (1) def. NWD dla wielomianów wymaga, aby jego najwyższy współczynnik był 1, stąd $(\varphi, \psi) = \rho_3/(-1) = x - 1$.

Podobnie jak dla dzielników liczb całkowitych mamy również:

Wn.1 Dla dwóch wielomianów φ i $\psi \in \boldsymbol{K}[x]$, istnieją takie wielomiany α, $\beta \in \boldsymbol{K}[x]$, że

$$\varphi\,\alpha + \psi\,\beta = (\varphi, \psi). \qquad (*)$$

Def. Dwa wielomiany φ i ψ nazywamy **względnie pierwszymi**, jeśli $(\varphi, \psi) = 1$.

Tw. (**związek NWD i NWW wielomianów**)

Jeśli $\varphi \neq 0$ i $\psi \neq 0$, to istnieje najmniejsza wspólna wielokrotność, przy czym

$$[\varphi, \psi] = \varphi\,\psi/(\varphi, \psi) \qquad (**)$$

Dowód: Dzieląc równość (*) z Wn.1 przez (φ,ψ) i mnożąc przez ω, który spełnia warunki $\varphi \mid \omega$ (tzn. $\omega = \varphi\,\omega_1$) i $\psi \mid \omega$ (tzn. $\omega = \psi\,\omega_2$), mamy równość $\omega_2\,\alpha\,[\varphi, \psi] + \omega_1\,\beta\,[\varphi, \psi] = \omega$, czyli $[\varphi, \psi] \mid \omega$. Dla zakończenia dowodu zauważmy, że najwyższy współczynnik wielomianu (φ, ψ) jest 1, więc ten współczynnik wielomianu (**) jest iloczynem najwyższych współczynników wielomianów φ i ψ, c.b.d.o.

Def.(a) Wielomian φ nazywamy **pierwszym** w ciele $\boldsymbol{K}$, jeśli st $\varphi > 0$ i nie istnieją w $\boldsymbol{K}[x]$ takie wielomiany q_1 i q_2 stopni dodatnich, że $\varphi = q_1\,q_2$.

(b) Pozostałe wielomiany nazywamy **złożonymi**.

Wn.2 Wielomian q jest pierwszym w ciele $\boldsymbol{K}$, jeśli każdy jego dzielnik należący do $\boldsymbol{K}[x]$ jest stałą c (wielomian stopnia 0) albo ma postać: cq.

P.3 (a) Wielomian $x^2 - 2 = (x - 2^{1/2})(x + 2^{1/2})$ jest pierwszy w ciele liczb wymiernych $\boldsymbol{Q}$, ale w ciele $\boldsymbol{R}$ jest złożony.

(b) Każdy wielomian postaci $q(x) = ax^2 + bx + c$ o współczynnikach z ciała $\boldsymbol{R}$ spełniających nierówność $b^2 - 4ac < 0$ jest pierwszy w tym ciele. Ten sam wielomian jest złożony w ciele liczb zespolonych $\boldsymbol{C}$, gdyż wówczas $q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $q(x_i) = 0$ oraz x_i są z ciała $\boldsymbol{C}$ dla $i = 1, 2$.

Def. Wielomiany φ i ψ z $\boldsymbol{K}[x]$ nazywamy **stowarzyszonymi**, jeśli istnieje stała $c \neq 0$, taka że $\varphi = c\psi$ i c należy do $\boldsymbol{K}$.

W analogii do rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze mamy

Tw. (**o rozkładzie wielomianów na czynniki pierwsze**)

Każdy wielomian φ z $\boldsymbol{K}[x]$ stopnia dodatniego można przedstawić jako iloczyn czynników pierwszych w $\boldsymbol{K}$, przy czym dwa takie rozkłady mają równą ilość czynników, które odpowiednio są ze sobą stowarzyszone.

Dowód przez indukcję względem st φ - pomijamy.

Def. Liczbę t nazywamy **pierwiastkiem wielomianu** q, jeśli $q(t) = 0$.

Wn.5 Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby t było pierwiastkiem wielomianu q jest $(x - t) \mid q$.

Def. Liczbę t nazywamy ***k*-krotnym pierwiastkiem** wielomianu q, jeśli

$$(x - t)^k \mid q \qquad \text{i} \qquad (x - t)^{k+1} \nmid q.$$

Tw. (**rozkład na czynniki wielomianu o pierwiastkach wielokrotnych**)

Jeśli $t_1, t_2,\ldots, t_m$ są różnymi pierwiastkami wielokrotnymi wielomianu $q \neq 0$ o krotnościach: $k_1, k_2,\ldots, k_m$ ($k_r > 0$), to $q(x)= (x-t_1)^{k1}(x-t_2)^{k2}\ldots(x-t_m)^{km}w(x)$, gdzie $w(t_r) \neq 0$ dla $r = 1, 2, \ldots, m$.

Def. **Pochodną wielomianu** postaci $\varphi = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

nazywamy wielomian postaci: $\varphi' = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$.

Wn.6(a) Pochodna sumy wielomianów jest sumą pochodnych tych wielomianów.

(b) Pochodna iloczynu wielomianów p i q jest wielomianem postaci: $p'q + p\,q'$.

Def. **Pochodną wyższych rzędów** wielomianu φ określamy rekurencyjnie, jako

$$\varphi^{(k)} = (\varphi^{(k-1)})'.$$

P.4 Dla $\varphi = 2x^4 - 3x^3 + 2$, mamy $\varphi' = 8x^3 - 9x^2$, $\varphi^{(2)} = 24x^2 - 18x$, $\varphi^{(3)} = 48x - 18$, $\varphi^{(4)} = 2*4!$.

Wn.7 Jeśli t jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu φ ($k > 0$), to t jest (k-1)-krotnym pierwiastkiem jego pochodnej φ'.

Istotnie, z def. mamy $\varphi = (x - t)^k\psi$ i $\psi(t) \neq 0$, a z Wn.6b wynika, że

$\varphi' = (x - t)^{k-1} [k\psi + (x - t)\psi'] = (x - t)^{k-1}\beta$, gdzie $\beta = k\psi + (x - t)\psi'$. Dlatego $\beta(t) = k\psi(t) \neq 0$.

P.5 Pokażemy, że wielomian $q(x) = x^4 + 1$ jest <u>pierwszy w ciele liczb wymiernych</u> $\boldsymbol{Q}$.
W ciele $\boldsymbol{R}$ wielomian q jest złożony (tu nawet jest iloczynem czynników pierwszych w $\boldsymbol{R}$):
$x^4 + 1 = (x^4 +2 x^2+ 1) -2 x^2 = (x^2+ 1)^2 - (2^{1/2} \mathrm{x})^2 = (x^2 - 2^{1/2} x + 1) (x^2 + 2^{1/2} x + 1)$.
Załóżmy, że $q(x) = q_1(x)\, q_2(x)$, gdzie q_1 i q_2 są z $\boldsymbol{Q}[x]$. Gdyby jeden z nich był stopnia 3, to drugi byłby stopnia 1, a wówczas q miałby pierwiastek wymierny, co jest niemożliwe. Zatem, niech $q_1(x) = ax^2 +bx + c$ o współczynnikach z ciała $\boldsymbol{Q}$ i wobec wyznaczonego rozkładu w ciele $\boldsymbol{R}$ mamy $(x^2 - 2^{1/2} x + 1) \mid q_1q_2$. Wobec Wn.4 również np. $(x^2 - 2^{1/2} x + 1) \mid q_1$, ale wtedy $q_1(x) = ax^2 +bx + c = d\, (x^2 - 2^{1/2} x + 1)$, co daje dla stałej d: $a = d$ i $b = -2^{1/2}d$, czyli $2^{1/2} = -b/a$, co powinno być liczbą wymierną, a więc sprzeczność.
UWAGA: Zauważmy, że w ciele liczb zespolonych $\boldsymbol{C}$ wielomian $q(x) = x^4 + 1$ jest rozkładalny na czynniki pierwsze stopnia 1: $q(x) = (x - z_0)\, (x - z_1)\, (x - z_2)\, (x - z_3)$, gdzie każda liczba zespolona z_k ($k = 0, 1, 2, 3$) jest pierwiastkiem 4-tego stopnia z (-1).

WZORY INTERPOLACYJNE – numeryczne zastosowanie wielomianów

Podane zostało wcześniej tw. o jednoznaczności istnienia wielomianu stopnia n o danych (n+1)-wartościach: $w_0, w_1, w_2,..., w_n$ w danych (n+1)-punktach: $a_0, a_1, a_2,..., a_n$.
Teraz podamy konstrukcje takich wielomianów, zwanych wielomianami interpolacyjnymi.

Zdefiniujmy (n+1) współczynników, każdy jest wielomianem stopnia n:

$$l_j(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}-a_0)/(aj-a_0)*(\mathrm{x}-a_1)/(aj-a_1)*...*(\mathrm{x}-a_{j-1})/(aj-a_{j-1})*(\mathrm{x}-a_{j+1})/(a_j-a_{j+1})*...*(\mathrm{x}-a_n)/(a_j-a_n)$$

zauważmy, że brak w nim jest oczywiście (!) czynnika $(\mathrm{x}-a_j)/(a_j-a_j)$, ale zachodzi relacja:

$$l_j(a_k) = \delta_{jk} = 1 \text{ dla } j = k \text{ i } 0 \text{ dla } j \neq k. \qquad (1)$$

Tw. (**wzór interpolacyjny Lagrange'a – wielomian Lagrange'a**)

Wielomian $q(\mathrm{x}) = \sum_{j=0}^{n} w_j l_j(x)$ jest stopnia $\leq$ n i dla wszystkich $x = a_j$ przyjmuje wartości w_j.

Dowód jest oczywisty wobec konstrukcji wielomianów $l_j(\mathrm{x})$ w (1).

P.6 Zbudujemy wielomian interpolacyjny Lagrange'a st $q \leq 3$, dla którego
$q(1) = 1$, $q(2) = -2$, $q(3) = 3$ i $q(4) = 0$. Wobec (1) otrzymujemy
$q(\mathrm{x}) = 1(\mathrm{x}-2)/(-1)*(\mathrm{x}-3)/(-2)*(\mathrm{x}-4)/(-3) -2(\mathrm{x}-1)/(1)*(\mathrm{x}-3)/(-1)*(\mathrm{x}-4)/(-2) +$
$+3(\mathrm{x}-1)/(2)*(\mathrm{x}-2)/(1)*(\mathrm{x}-4)/(-1) + 0(\mathrm{x}-1)/(3)*(\mathrm{x}-2)/(2)*(\mathrm{x}-3)/(1)$.

Którego stopnia jest znaleziony wielomian Lagrange'a?

Tw. (**wzór interpolacyjny Newtona – wielomian Newtona**)

Każdy wielomian interpolacyjny q stopnia $\leq n$ daje się przedstawić w jeden i tylko jeden sposób w postaci Newtona:

$$q(\mathrm{x}) = c_0 + c_1(x - a_0) + c_2(x - a_0)(x - a_1) + ... + c_n(x - a_0)(x - a_1)*...*(x - a_{n-1}). \qquad (2)$$

Dowód: należy wyznaczyć współczynniki c_k - co pokażemy na przykładzie.

P.7 Znajdziemy wielomian interpolacyjny Newtona, który w punktach $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ i $a_3 = 4$ przyjmuje wartości: $w_0 = 1$, $w_1 = 2$, $w_2 = 3$ i $w_3 = 0$. Wobec (2) jest

$q(\mathrm{x}) = c_0 + c_1(x - 1) + c_2(x - 1)(x - 2) + c_3(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Wówczas, równania opisujące współczynniki c_k są postaci (tzn.: $q(a_i) = w_i$):

$c_0 = w_0 = 1$; $c_0 + c_1 = w_1 = 2$; $c_0 + 2c_1 + 2c_2 = w_2 = 3$, $c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 = w_3 = 0$, co daje

$c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ i $c_3 = -2/3$, stąd $q(\mathrm{x}) = 1 + (x - 1) - 2/3(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Którego stopnia jest znaleziony wielomian Newtona?

Porównaj wynik z otrzymanym w poprzednim przykładzie.