# Analiza Matematyczna II

3 września 2020

## 1 Wzór Taylora i wzór Maclaurina

Jeżeli $f(x)$ ma pochodne dowolnego rzędu na $[x, x+h]$, to istnieje takie $\rho \in (x, x+h)$, $\rho = x+\ominus h$, $0 < \ominus < 1$ takie, że

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2]!}h^2 + ... + \frac{f^{n-1}(x)}{n-1!}x^{n-1} + R_n$$

**Reszta w postaci Lagrange'a**

$R_n = \frac{f^n(x+\ominus h)h^n}{n!}$

**Wzór Maclaurina** (tu chodzi o przekształcenie, takie że: $x = 0, h = x$)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x + ... + \frac{f^{n-1}(0)}{n-1!}x^{n-1} + R_n$$

**Reszta w postaci Lagrange'a**

$$R_n = \frac{f^n(\ominus x)h^n}{n!}x^n$$

## 2 Szereg Taylora i szereg Maclaurina

Załóżmy, że $f(x)$ ma pochodne dowolnego rzędu w otoczeniu punktu $x$ oraz, że $x+h$ należy do tego otoczenia.
**Szereg Taylora**

$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$

**Szereg Maclaurina** ($x = 0, h = x$)

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

**Rozwinięcie funkcji $f(x)$ wokół punktu $x = h$**

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(n)}{n!}(x-h)^{n"}$

## 3 Funkcje monotoniczne

$f(x)$ **rosnąca** na $(a, b)$ $\forall_{x,x \in (a,b)}$ $x_1 < x_2 => f(x_1) < f(x_2)$
$f(x)$ **malejąca** na $(a, b)$ $\forall_{x,x \in (a,b)}$ $x_1 < x_2 => f(x_1) > f(x_2)$
$f(x)$ **nierosnąca** na $(a, b)$ $\forall_{x,x \in (a,b)}$ $x_1 < x_2 => f(x_1) \geq f(x_2)$
$f(x)$ **niemalejąca** na $(a, b)$ $\forall_{x,x \in (a,b)}$ $x_1 < x_2 => f(x_1) \leq f(x_2)$

Jeżeli $f'(x) > 0$ na $(a, b)$ to funkcja $f(x)$ jest rosnąca na $(a, b)$
Jeżeli $f'(x) < 0$ na $(a, b)$ to funkcja $f(x)$ jest malejąca na $(a, b)$

Warunkiem koniecznym wystarczającym aby $f(x)$ była niemalejąca jest $f'(x) \geq 0$ na przedziale $(a, b)$
Warunkiem koniecznym wystarczającym aby $f(x)$ była nierosnąca jest $f'(x) \leq 0$ na przedziale $(a, b)$

## 4 Ekstremum lokalne funkcji jednej zmiennej. Warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremum

**Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego**
Jeżeli funkcja f(x) ma w punkcie $f(x)$ ma w punkcie $x_0$ ekstremum lokalne, to albo $f'(x_0) = 0$ albo $f'(x_0)$ nie istnieje.
Punkt $x_0$ jest nazywany punktem krytycznym pierwszego rodzaju.
Punkt, w którym $f'(x_0) = 0$ - punkt stacjonarny.

**Warunki wystarczające istnienia ekstremum lokalnego**
**1.** Zmiana znaku pochodnej w otoczeniu punktu, w którym mamy ekstremum.
**2.** Znak $f''(x)$ w punkcie stacjonarnym $x_0(f'(x_0) = 0)$

W ogólnym przypadku załóżmy, że

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{n-1}(x_0) = 0 \text{ oraz } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Jeżeli $n$ jest parzyste to w punkcie $x_0$ jest ekstremum lokalne, $f^n(x_0) < 0$ - maksimum i $f^n(x_0) > 0$ - minimum. Jeżeli $n$ jest nieparzyste, to w punkcie $x_0$ nie ma ekstremum.

## 5 Funkcje wypukłe i wklęsłe

Funkcja $f(x)$ jest wypukła w punkcie $x_0$, jeżeli dla dowolnego x $\in$ do to otoczenia punktu $x_0$ wykres funkcji $y = f(x)$ leży nad styczną w punkcie $x_0$
Funkcja $f(x)$ jest wklęsła w punkcie $x_0$, jeżeli dla dowolnego x $\in$ do to otoczenia punktu $x_0$ wykres funkcji $y = f(x)$ leży pod styczną w punkcie $x_0$
**Warunek wypukłości w $f(x)$ w punkcie $x_0$**

$$f(x_0 + h) > f(x_0) + f'(x_0)h$$

**Warunek wklęsłości w $f(x)$ w punkcie $x_0$**

$$f(x_0 + h) < f(x_0) + f'(x_0)h$$

$f(x)$ wypukła na $(a, b)$, jeżeli $f''(x) > 0$ na $(a, b)$
$f(x)$ wklęsła na $(a, b)$, jeżeli $f''(x) < 0$ na $(a, b)$

# 6 Całka nieoznaczona. Podstawowe własności całki nieoznaczonej

Funkcję pierwotną funkcji $f(x)$ nazywamy całką nieoznaczoną i oznaczamy symbolem

$$\int f(x)dx$$

Definicja:

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

**Podstawowe własności całki nieoznaczonej**

**1.** Liniowość

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

$\lambda = const$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - g(x)dx$$

**Kres górny zbioru**

W zbiorze A $\subset$ R, jeżeli istnieje liczba M, taka, że $\forall_{x \in A} x \leq M \wedge \forall_{\epsilon > 0} \exists_{x \in A} x > M - \epsilon$

$$M = supA \text{ (supremum)}$$

**Kres dolny zbioru**

W zbiorze A $\subset$ R, jeżeli istnieje liczba M, taka, że $\forall_{x \in A} m \leq x \wedge \forall_{\epsilon > 0} \exists_{x \in A} x < m + \epsilon$

$$m = infA \text{ (infimum)}$$

# 7 Całka Riemanna

Funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $(a, b)$ gdy dolna i górna całka Darboux funkcji f w przedziale $(a, b)$ są równe, to znaczy:

$$\int_{a-}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b-} f(x)dx$$

Zbiór wszystkich funkcji całkowalnych w sensie Riemanna w $(a, b)$ oznaczamy

$$R([a, b])$$

Jeśli $f \in R([a, b])$, to wspólną wartość dolnej i górnej całki oznaczamy

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

i nazywamy całką Riemanna funkcji $f$ w przedziale $(a, b)$

# 8 Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego

Jeśli $f$ jest całkowalna na $(a, b)$, i $F$ jest ciągła i różniczkowalna na $(a, b)$ i $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$, to

$$\int_{a}^{b} f = F(b) - F(a)$$

Dla prostoty istnieje też zapis:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)|_{a}^{b}$$

gdzie $F(x)|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$

# 9 Podstawowe własności całki oznaczonej

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

Twierdzenie o podziale przedziału całkowania

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{b}^{a} f(u)du$$

Liniowość

$$\int_{a}^{b} [f(x) + -g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + -\int_{a}^{b} g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Wzór na zamianę zmiennych. Całkowanie przez podstawienie

$$\int_a^b f(y(x))y'(x)dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(u)du$$

Wzór na całkowanie przez części

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Różniczkowanie po górnej granicy całkowania

$$\int_a^x f(u)du = f(x)$$

# 10 Nierówności dla całek. Twierdzenie o wartości średniej dla całek

1) Jeżeli funkcjie $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne na $(a, b)$ oraz $f(x) \leq g(x)$ dla dowolnego $x \in (a, b)$ to

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

2) Jeżeli $f(x)$ jest ciągła i $y(x)$ całkowalna na $(a, b)$ oraz $y(x) \geq 0$ dla dowolnego $x \in (a, b)$, to

$$m \int_a^b y(x)dx \leq \int_a^b f(x)y(x)dx \leq M \int_a^b y(x)dx$$

$m$ - najmniejsza wartość funkcji na $(a, b)$ $M$ - największa wartość funkcji na $(a, b)$ Twierdzenie o wartości średniej dla całek Jeżeli $f(x)$ jest ciągła na $(a, b)$ oraz $y(x)$ całkowalna i nieujemna albo niedodatnia na $(a, b)$, to istnieje taki punkt $\varepsilon \in (a, b)$, że

$$\int_a^b y(x)dx = f(\varepsilon) \int_a^b y(x)dx$$

# 11 Całki niewłaściwe - całki o nieograniczonym przedziale całkowania

Niech będzie dana funkcja $f(x)$ ciągła na $[a, \infty]$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Z uwagi na założoną ciągłość funkcji f(x), całka pod znakiem granicy istnieje. Całkę nazywamy całką niewłaściwą pierwszego rodzaju od $a$ do $\infty$ i jeżeli granica istnieje, to całka jest zbieżna. Jeśli nie - rozbieżna. Podobnie definiujemy

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Całką po całej prostej rzeczywistej definiujemy za pomocą związku

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Kryterium porównawcze zbieżności całek Jeżeli funkcje f(x) i g(x) spełniają nierówności $|f(x)| \leq g(x)$ dla dowolnego $x \in [a, \infty)$ oraz istnieje całka

$$\int_{a}^{\infty} g(x)dx$$

to istnieje całka

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

i jest ona bezwzględnie zbieżna. Odpowiednik kryterium limesowego dla szeregów: Jeżeli $f(x) \geq 0$ oraz $lim_{x\to\infty} f(x)x^m = A \neq \infty, A \neq 0$ tzn. $f(x)\ \frac{A}{x^m}$, dla $x \to \infty$, to całka

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

jest zbieżna dla $m > 1$ oraz rozbieżna dla $m \leq 1$

# 12 Całki niewłaściwe - całki z funkcji nieograniczonej

Funkcja f(x) ciągła w przedziale $[a, b)$ oraz nieograniczona gdy $x \to b$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = lim_{\varepsilon\to+0+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Z uwagi na ciągłość funkcji f(x) w przedziale $[a, b - \varepsilon]$, całka pod znakiem granicy istnieje. Całkę nazywamy całką niewłaściwą drugiego rodzaju. Jeżeli granica istnieje to całka jest zbieżna, jeśli nie - rozbieżna. Analogicznie w przypadku gdy $f(x)$ jest ciągła w $(a, b]$ i nieograniczona dla $x \to a$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = lim_{\varepsilon\to0+} \int_{a-\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Wtedy jest ciągła na przedziale całkowania $(a + \varepsilon, b]$ co oznacza istnienie całki pod znakiem granicy. Może wystąpić sytuacja, kiedy całkujemy po przedziale $[a, b]$ zawierającym punkt $c$, w którym funkcja staje się nieskończona. Zakładamy przy tym, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w $[a, c]$ oraz $(c, b)$. Wtedy zdefiniowana jest następująco:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = lim_{\varepsilon\to0+} \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + lim_{\varepsilon\to0+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Całka jest zbieżna, gdy istnieją obie granice. Jeśli nie - rozbieżna. Kryterium porównawcze $|f(x)| \leq g(x)$ dla dowolnego $x \in [a, b]$ oraz całka

$$\int_{a}^{b} g(x)dx$$

jest zbieżna, to całka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

jest bezwzględnie zbieżna. Odpowiednik kryterium limesowego dla szeregów: Jeżeli $f(x) \geq 0$ oraz $lim_{x\to\infty} f(x)|x-c|^m = A \neq \infty, A \neq 0$ tzn. $f(x)$ $\frac{A}{|x-c|^m}$, dla $x \to \infty$, gdzie $c \in [a,b]$ jest punktem, w którym funkcja $f(x)$ staje się funkcją nieograniczoną, wówczas całka

$$\int_a^b f(x)dx$$

jest zbieżna dla $m < 1$ oraz rozbieżna dla $m \geq 1$

# 13 Zastosowanie całek w geometrii: obliczanie pól i długości krzywych. Kryterium całkowe zbieżności szeregów

# 14 Zastosowanie całek w geometrii: obliczanie pól oraz objętości brył obrotowych

# 15 Szeregi Fouriera

Szeregiem Fouriera nazywamy nieskończony szereg funkcyjny w postaci:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx$$

Szereg Fouriera pozwala funkcję okresową o okresie $2\pi$ przedstawić za pomocą sumy funkcji trygonometrycznych. Współczynniki (wzory Eulera-Fouriera) $a_n$ i $b_n$ dla funkcji określonej na przedziale $[-\pi, \pi]$ definiowane są w następujący sposób:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int f(x)cosnxdx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int f(x)sinnxdx$$

Każda funkcja $f(x)$ o okresie $2\pi$ przedziałami ciągła wraz ze swoją pochodną, przedziałami monotoniczna i spełniająca w punktach nieciągłości warunek

$f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

daje się rozwinąć w szereg Fouriera.

# 16 Funkcje rzeczywiste wielu zmiennych rzeczywistych. Granica funkcji i ciągłość funkcji wielu zmiennych

Funkcje takie, że $f : R^k \to R$, przyporządkowują elementowi $(x_1, ..., x_k) \in R^k$ liczbę rzeczywistą $f(x_1, ..., x_k)$ bądź równoważnie (wykorzystując strukturę przestrzeni liniowej $R^k$) wektorowi $x = (x_1, ..., x_k)$ liczbę rzeczywistą $f(x)$.

Zapis wektorowy umożliwia zwartą postać wielu wzorów. Wartości oznaczamy literą $u$ i piszemy $u = f(x1, \ldots, xk)$, albo w zapisie wektorowym $u = f(x)$.
Odpowiednikiem wykresu jest zbiór punktów $R^{k+1}$. Punkty te są parametryzowane przez $k$ zmiennych $x_1, ..., x_k$, co oznacza, że tworzą one k-wymiarowy podzbiór (tzw. Hiperpowierzchnię) przestrzeni $R^{k+1}$
**Granica funkcji wielu zmiennych**

# 17 Pochodna kierunkowa. Pochodna cząstkowa. Gradient

**Pochodna kierunkowa** Niech $f : R^k \to R$ Pochodną kierunkową funkcji $f$ w punkcie $x$, w kierunku wektora $v$, nazywamy granicę

$$f'_v(x) = lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}$$

Pochodna kierunkowa określa tempo zmian wartości funkcji $f(x)$ w kierunku wektora $v$ w danych punkcie $x$.
Szczególnym przypadkiem pochodnej kierunkowej są **pochodne cząstkowe** funkcji $f(x)$ po zmiennych $x_i$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := f'_{ei}(x) = lim_{e \to 0} \frac{f(x + \varepsilon e_i) - f(x)}{\varepsilon}, i = 1, ...k$$

Gdzie ei, i = 1, . . . , k, są wektorami bazy kanonicznej Rk. Pochodne cząstkowe są po prostu pochodnymi kierunkowymi w kierunku wektorów bazy kanonicznej. Określają one tempo zmian wartości funkcji w kierunku wektorów bazy kanonicznej.
Wektor postaci $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = (\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_k})$ nazywamy **gradientem** funkcji $f(x)$ w punkcie x.

# 18 Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Funkcja jest różniczkowlana w punkcie x, jeżeli istnieje gradient $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ oraz

$$lim_{v \to 0} \frac{f(x + v) - f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} * v}{|v|} = 0$$

gdzie 0 pod znakiem granicy oznacza wektor zerowy. W tym przypadku formę liniową

$$df(x)v = \frac{\partial f(x)}{\partial x} * v$$

nazywamy różniczką zupełną funkcji $f$ w punkcie $x$ ze względu na przyrost argumentu $v$.
Jeżeli pochodne cząstowe $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, i = 1, ..., k$, istnieją w pewnym otoczeniu punktu $x$ i są ciągłe w punkcie $x$, to funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie x. Jeżeli funkcja $f$ jest różniczowalna w punkcie $x$, to jest w tym punkcie ciągła.

19 Różniczka zupełna funkcji wielu zmiennych. Zastosowanie różniczki zupełnej w rachunkach przybliżonych

20 Pochodne cząstowe funkcji złożonej

21 Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

22 Różniczki wyższych rzędów funkcji wielu zmiennych. Wzór Taylora. Wzór Maclaurina

23 Ekstremum lokalne funkcji wielu zmiennych. Warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych

24 Ekstremum warunkowe. Warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremum warunkowego

25 Całka podwójna po prostokącie. Całki iterowane