Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 3

Permutacje

Definicja: Permutacją zbioru liczb $\{1,2,...,n\}$ nazywamy dowolną różnowartościową funkcję określoną na tym zbiorze i o wartościach w tym zbiorze.

Uwaga: Liczba wszystkich permutacji wynosi n!

Permutacje zapisujemy w formie tabeli: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$

Permutacja identycznościowa: $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

Iloczynem permutacji f i g jest złożenie tych funkcji: $f \circ g(i) \equiv f(g(i))$

Przykład: Niech $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Wtedy $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ oraz $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Definicja: Niech π będzie permutacją określoną na zbiorze $\{1,2,...,n\}$ oraz niech r będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że $\pi^r(i) = i$. Wówczas zbiór r różnych elementów $\{\pi^k(i)\}_{k=0}^{r-1}$ nazywamy r-wyrazowym cyklem permutacji π.

Permutacje - rozkład na cykle

Math Player

Przykład: $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1374)(25)(68)$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (125)(36748)$$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 6 & 3 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = (15387)(2)(46)$$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = (1374)(25)(68)(125)(36748) = (15387)(2)(46)$$

Dwa cykle $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ oraz $(j_1, j_2, \ldots, j_l)$ nazywamy rozłącznymi jeżeli zbiory liczb $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ oraz $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$ nie mają elementów wspólnych.

Twierdzenie: **Każdą permutację można rozłożyć na iloczyn rozłącznych cykli.**

Definicja: **Permutację π w której jeden cykl ma długość r, a pozostałe mają tylko po jednym elemencie, nazywamy permutacją cykliczną o długości r.**

Definicja: **Permutację cykliczną o długości 2 nazywamy transpozycją.**

Przykład: $\pi_1 = (143)(24)(356) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (142356)$

Parzystość permutacji

Twierdzenie: Dowolny cykl o długości r można rozłożyć na $r-1$ transpozycji:

$$\left(i_1,i_2,\ldots,i_r\right)=\left(i_1,i_r\right)\left(i_1,i_{r-1}\right)\ldots\left(i_1,i_3\right)\left(i_1,i_2\right)$$

Uwaga: Chociaż rozkład na transpozycje nie jest jednoznaczny, to można pokazać, że parzystość rozkładu (tzn. czy liczba transpozycji jest parzysta czy nie) jest jednoznaczna.

$$(1234)=(14)(13)(12)=(14)\underbrace{(34)(34)}_{1}\overbrace{(23)\underbrace{(12)(12)}_{1}(23)}^{1}(13)(12)$$

Twierdzenie: Dowolna permutacja może być rozłożona na iloczyn transpozycji. Parzystość rozkładu jest jednoznacznie określona.

Definicja: Permutację nazywamy parzystą (nieparzystą) jeśli może być rozłożona na iloczyn parzystej (nieparzystej) liczby transpozycji.

Określenie: Nieporządkiem w permutacji π nazywamy każdą parę liczb i, j taką że $i<j$ oraz $\pi(i)>\pi(j)$. A więc parzystość permutacji można określić zliczając nieporządki:

$$\prod_{i<j}\frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}=\begin{cases}+1 & \text{parzysta}\\ -1 & \text{nieparzysta}\end{cases}$$

Parzystość permutacji

Dowód: Ponieważ π jest permutacją więc istnieją takie k i l, że:

$$\pi(k)=i \qquad \text{oraz} \qquad \pi(l)=j$$

Jeśli $l>k$ wówczas w liczniku wystąpi $\pi(l)-\pi(k)=j-i$

Jeśli $k>l$ wówczas w liczniku wystąpi $\pi(k)-\pi(l)=-(j-i)$

Przykład: Zbadaj parzystość permutacji

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&5&7&1&2&8&4&6\end{pmatrix}=(1374)(25)(68)=(14)(17)(13)(25)(68)$$

Liczba nieporządków:

$$\begin{array}{r} 3\,5\,7\,1\,2\,8\,4\,6 = 2\\ 5\,7\,1\,2\,8\,4\,6 = 3\\ 7\,1\,2\,8\,4\,6 = 4\\ 1\,2\,8\,4\,6 = 0\\ 2\,8\,4\,6 = 0\\ 8\,4\,6 = 2\\ 4\,6 = 0\\ \hline 11\end{array}$$

Calkowita liczba nieporządków: 11

permutacja nieparzysta

Symbol całkowicie antysymetryczny

Definicja: Symbolem całkowicie antysymetrycznym w n wymiarach nazywamy:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{jeżeli permutacja } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{ jest permutacją parzystą} \\ -1 & \text{jeżeli jest permutacją nieparzystą} \\ 0 & \text{jeżeli nie wszystkie liczby są różne} \end{cases}$$

Wybrane własności (dowody przez pokazanie, że $L_{ijk\ldots} = P_{ijk\ldots}$ dla wszystkich $i, j, k, \ldots$):

- **2-dim:** $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ $\quad \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} = \delta_{ij}$ $\quad \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = 2$
- **3-dim:**

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad \sum_{j,k=1}^{2} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \qquad \sum_{i,j,k=1}^{2} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3!$$

- **4-dim:**

$$\sum_{k,s=1}^{4} \varepsilon_{ijks}\varepsilon_{lmks} = 2\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) \qquad \sum_{j,k,s=1}^{2} \varepsilon_{ijks}\varepsilon_{ljks} = 3!\,\delta_{il} \qquad \sum_{i,j,k,s=1}^{2} \varepsilon_{ijks}\varepsilon_{ijks} = 4!$$

- **n-dim:**

Iloczyn zewnętrzny w $\mathcal{R}^2$

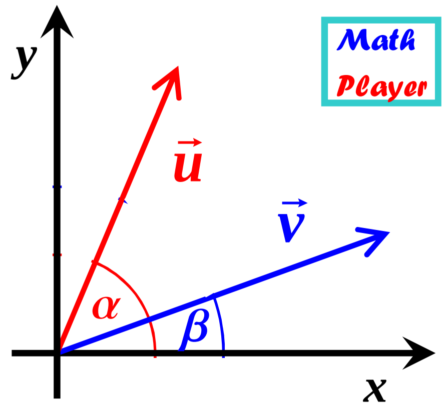
Iloczyn zewnętrzny dwóch wektorów jest obiektem, którego rodzaj zależy od liczby wymiarów. Na płaszczyźnie iloczyn zewnętrzny jest liczbą.

Definicja: Iloczyn zewnętrzny wektorów w 2D przestrzeni Euklidesa to liczba:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \sum_{j,k=1}^{2} \varepsilon_{jk} u_j v_k = u_1 v_2 - u_2 v_1 =$$

$$= |\vec{u}||\vec{v}|(\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta) =$$

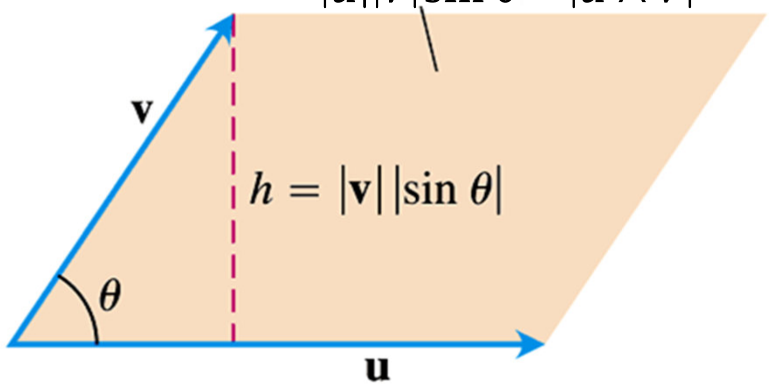
$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\beta - \alpha) = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\gamma$$



Interpretacja geometryczna:

Powierzchnia

$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$$



Własności iloczynu zewnętrznego w 2D:

- antysymetryczny: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- liniowy ($\alpha, \beta \in \mathcal{R}$):

  $$\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w}$$
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$
- określa skrętność układu: $\hat{\vec{e}}_1 \wedge \hat{\vec{e}}_2 = 1$

Iloczyn zewnętrzny (wektorowy) w $\mathcal{R}^3$

Definicja: **Iloczynem wektorowym** dwóch wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor o składowych:

$$(\vec{u}\times\vec{v})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_j v_k$$

Iloczyn wektorowy jest wektorem prostopadłym do obu wektorów składowych i ma wartość:

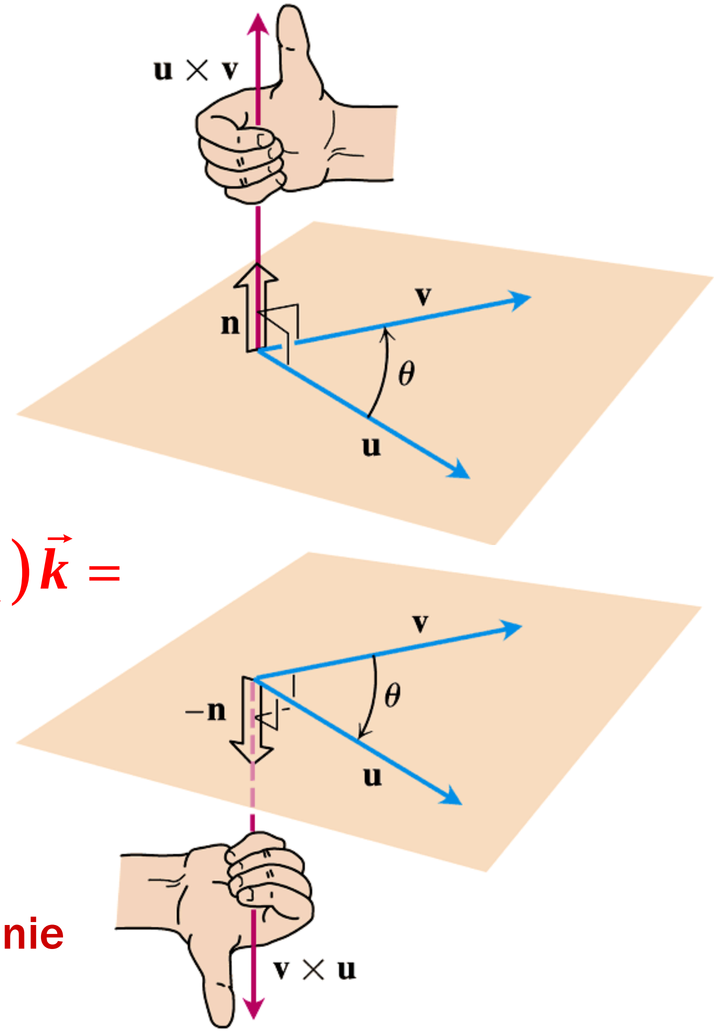
$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k} =$$

$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\gamma\ \vec{n}$$

γ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$\vec{n}$ – wektor jednostkowy, prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$.



Uwaga: Dowód powyższej równości przez przedstawienie składowych za pomocą cosinusów kierunkowych.

Iloczyn wektorowy w $\mathcal{R}^3$

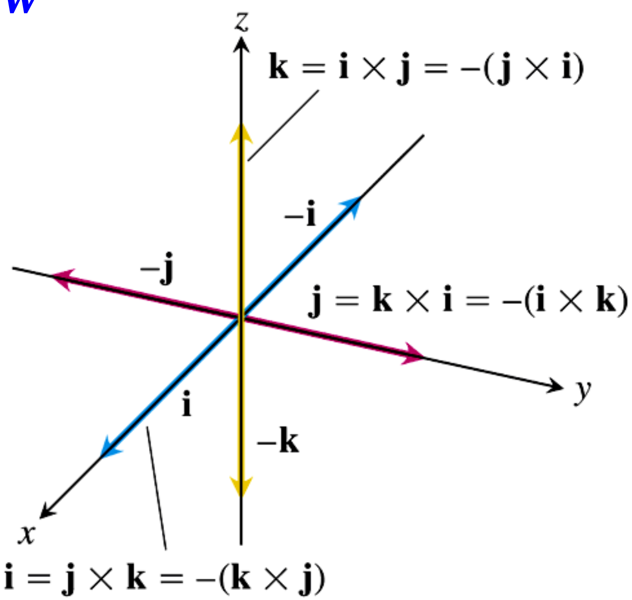
Iloczyn wektorowy jest wektorem ortogonalnym do każdego z wektorów składowych:

$$\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \sum_{i=1}^{3} u_i \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_j v_k = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_i u_j v_k = 0$$

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$$

<u>Własności:</u>

- antysymetryczny: $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u} \;\Rightarrow\; \vec{u}\times\vec{u} = 0$
- liniowy ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$): $\vec{u}\times\left(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}\right) = \alpha\vec{u}\times\vec{v} + \beta\vec{u}\times\vec{w}$
- określa skrętność układu:
- $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$



<u>Przykład:</u> Pokaż, że jeśli $\vec{a} = \vec{b} + \lambda\vec{c}$ dla pewnej $\lambda \in \mathbb{R}$, wtedy $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c}$

$$\vec{a}\times\vec{c} = \left(\vec{b} + \lambda\vec{c}\right)\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c} + \lambda\vec{c}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c}$$

<u>Uwaga:</u> Z powyższego <u>nie wynika</u> że $\vec{a} = \vec{b}$

Iloczyn mieszany wektorów

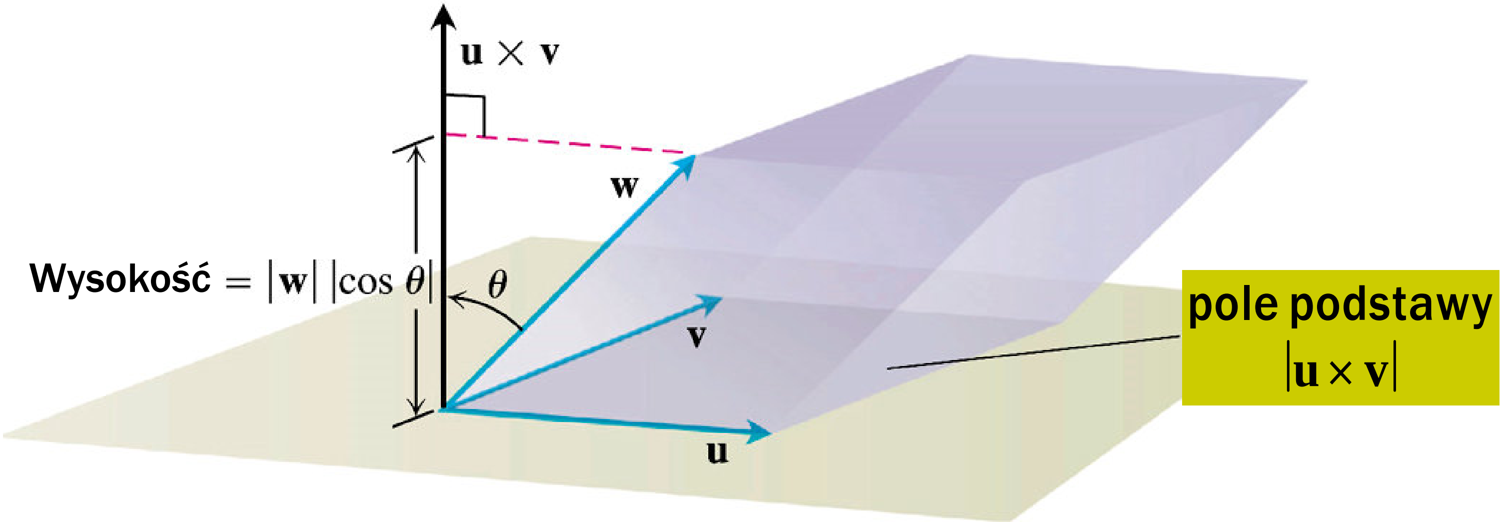
Iloczyn mieszany: $$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}u_i v_j w_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

Własności:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = -\vec{u}\cdot(\vec{w}\times\vec{v}) = -\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) = -\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{u})$$

Interpretacja geometryczna: $|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|$ jest objętością równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$ oraz $\vec{w}$.



Podwójny iloczyn wektorowy

Podwójny iloczyn wektorowy: $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

Własności:

(a) jest ortogonalny do $(\vec{v}\times\vec{w})$ tzn. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ przy czym α, β nie zależą od $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

(b) jest liniowy w składowych $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

(c) jest ortogonalny do $\vec{u}$

(a)+(c) $\Rightarrow$ $\alpha(\vec{v}\cdot\vec{u})+\beta(\vec{w}\cdot\vec{u})=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = c(\vec{w}\cdot\vec{u}),\quad \beta = -c(\vec{v}\cdot\vec{u})$

gdzie c nie zależy od $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

$$\left.\begin{aligned}\hat{e}_1\times(\hat{e}_1\times\hat{e}_2) = \hat{e}_1\times\hat{e}_3 &= -\hat{e}_2\\ (\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2)\hat{e}_1 - (\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1)\hat{e}_2 &= -\hat{e}_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad c=+1$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$$

Wprost z definicji iloczynów skalarnego i wektorowego:

$$\left(\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}u_j\sum_{l,m=1}^{3}\varepsilon_{klm}v_l w_m = \sum_{j,l,m=1}^{3}u_j v_l w_m\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} =$$

$$= \sum_{j,l,m=1}^{3}u_j v_l w_m\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right) = \left(\sum_{j=1}^{3}u_j w_j\right)v_i - \left(\sum_{j=1}^{3}u_j v_j\right)w_i$$

czyli $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$ oraz $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$

Prawdziwa jest więc tożsamość: $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) + \vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}) + \vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$

Linia prosta w przestrzeni 3D

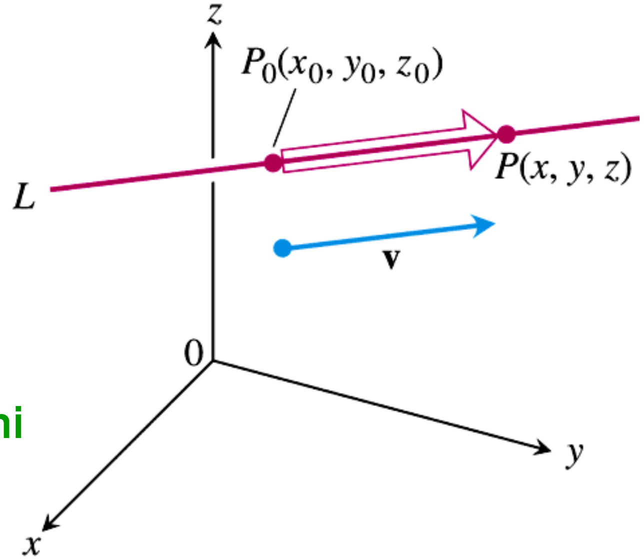
Równanie prostej w przestrzeni:

$\vec{\mathbf{v}}$ to wektor równoległy do prostej,

$\vec{\mathbf{r}}_0$ to wektor wodzący dowolnego punktu P_0 prostej.

$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}t$ – równanie parametryczne $(-\infty < t < \infty)$

$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}}_0 \times \vec{\mathbf{v}} \equiv \vec{\mathbf{b}}$ – równanie w postaci normalnej



Przykład: Odległość d pomiędzy dwiema nierównoległymi i nie przecinającymi się prostymi:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_1 t$$
$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 + \vec{\mathbf{v}}_2 t$$

Niech a i b będą końcami odcinka prostopadłego do obu linii, odpowiednio na linii 1 i 2:

$$\vec{\mathbf{r}}_a = \vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_1 t_1 \qquad \vec{\mathbf{r}}_b - \vec{\mathbf{r}}_a = \frac{\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2}{\left|\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right|} d$$
$$\vec{\mathbf{r}}_b = \vec{\mathbf{r}}_2 + \vec{\mathbf{v}}_2 t_2$$

Z powyższych związków otrzymujemy:

$$\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2 t_2 - \vec{\mathbf{v}}_1 t_1 = \frac{\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2}{\left|\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right|} d \qquad /\cdot\left(\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right) \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{\left(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right|}$$

Wniosek: Dwie linie przecinają się gdy jest spełniony warunek $\left(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right) = 0$

Płaszczyzna w przestrzeni 3D

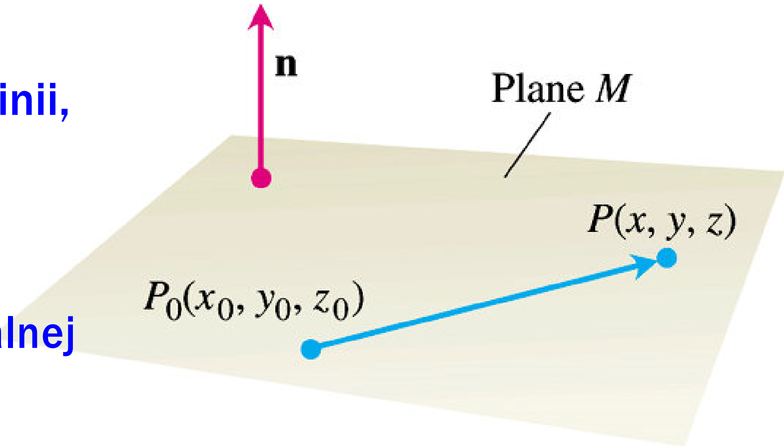
Równanie płaszczyzny w przestrzeni:

$\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ to dwa wektory nie leżące na tej samej linii,

$\vec{\mathbf{n}}$ to wektor prostopadły do płaszczyzny.

$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ – równanie parametryczne

$\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{r}}_0 \cdot \vec{\mathbf{n}} \equiv d$ – równanie w postaci normalnej

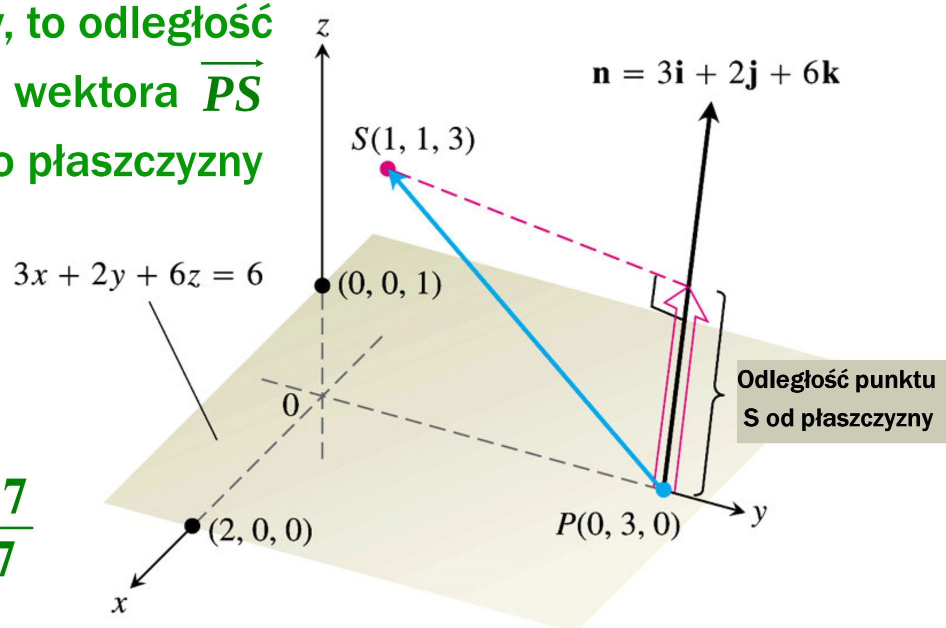


<u>Przykład:</u> Odległość punktu od płaszczyzny:

Jeśli P jest dowolnym punktem płaszczyzny, to odległość punktu S od płaszczyzny jest równa rzutowi wektora $\overrightarrow{PS}$ na kierunek wyznaczony przez normalną do płaszczyzny przechodzącą przez punkt P, czyli:

$$d = \left| \overrightarrow{PS} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| =$$

$$= \left| \left(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot \frac{\left(3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}\right)}{7} \right| = \frac{17}{7}$$



Pojęcie przestrzeni wektorowej

Definicja: Zbiór $\mathcal{V}$ nazywamy **przestrzenią wektorową (liniową)** nad ciałem liczbowym $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$ lub $\mathcal{C}$, jeśli zdefiniowane są dwa wzajemnie uzgodnione działania na jego elementach (wektorach), dodawanie oraz mnożenie przez liczby z $\mathcal{Q}$, posiadające następujące własności (muszą być spełnione dla każdego $c, c_1, c_2 \in \mathcal{Q}$ i każdego $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$):

(A1) $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$

(A2) $(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) + \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} + (\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{u}})$

(A3) $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}}$

(A4) istnieje wektor zerowy $\vec{0} \in \mathcal{V}$ taki, że $\vec{0} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ dla dowolnego $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$

(A5) dla każdego $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ istnieje wektor przeciwny $-\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ taki, że $\vec{\mathbf{v}} + (-\vec{\mathbf{v}}) = \vec{0}$

(M1) $c\,\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ dla wszystkich $c \in \mathcal{Q}$ i $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$

(M2) $(c_1 c_2)\vec{\mathbf{v}} = c_1(c_2\vec{\mathbf{v}})$

(M3) $c(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = c\vec{\mathbf{v}} + c\vec{\mathbf{w}}$

(M4) $(c_1 + c_2)\vec{\mathbf{v}} = c_1\vec{\mathbf{v}} + c_2\vec{\mathbf{v}}$

(M5) istnieje liczba $1 \in \mathcal{Q}$ taka, że $1\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ dla dowolnego $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$

Baza w przestrzeni wektorowej V

Definicja: Zbiór liniowo niezależnych wektorów $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ należących do przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nazywamy bazą, jeśli dowolny wektor $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ może być zapisany w postaci:

$$\vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{\mathbf{e}}_i$$

Liczbę n nazywamy wymiarem przestrzeni $\mathcal{V}$ i oznaczamy *dim*$\mathcal{V}$.

Twierdzenie: Rozkład wektora na składowe w ustalonej bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ jest jednoznaczny.

Dowód: Niech wektor $\vec{\mathbf{x}}$ ma w bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ dwa zestawy współrzędnych x_i oraz y_i:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \\ \vec{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\mathbf{e}}_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\vec{\mathbf{e}}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad x_i = y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, ..., n$$

Uwaga: dowolny zbiór n liniowo niezależnych wektorów tworzy bazę w n wymiarowej przestrzeni wektorowej. W nowej bazie zmieniają się współrzędne wektorów, np. w bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_i'\}$ mamy:

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \vec{\mathbf{e}}_i'$$

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Oznaczenie: $\vec{\mathbf{v}} \equiv |\vec{\mathbf{v}}\rangle \qquad \langle\vec{\mathbf{v}}| \equiv |\vec{\mathbf{v}}\rangle^*$

Definicja: Iloczynem wewnętrznym (skalarnym) wektorów z przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathcal{C}$ nazywamy przyporządkowanie uporządkowanej parze $(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$ dowolnych wektorów $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$ liczby zespolonej, oznaczanej przez $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{w}}\rangle$ jeśli spełnione są następujące warunki:

- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}_1\rangle^*$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1|c\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = c\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$ dla każdego $c \in \mathbb{C}$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}\rangle + \langle\vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}\rangle$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}\rangle > 0$ jesli $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{0}$

Wnioski:

- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}\rangle$ jest zawsze liczbą rzeczywistą
- $\langle c\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = c^*\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_1\rangle + \langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$

Uwaga: W przypadku przestrzeni wektorowej na ciałem $\mathcal{R}$ iloczyn skalarny dowolnych dwóch wektorów ma z definicje wartość rzeczywistą.