Niejednoznaczność całki nieoznaczonej

$$\begin{array}{l} f(x)=x^2\\ x^2+1\\ x^2-\frac{1}{12}\\ \vdots\\ x^2+C\end{array} \xrightleftharpoons[\int dx]{\frac{d}{dx}} 2x$$

(Addytywność pochodnej $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$,
Pochodna stałej $\frac{da}{dx}=0$)

$$F(x)+C \xrightleftharpoons[\int dx]{\frac{d}{dx}} f(x)$$

$C \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+3}{3x} = \frac{1}{x}+\frac{1}{3} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{-1}{x^2} \\ \frac{0{,}001-x}{0{,}001} = \frac{1}{x}-1000 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{-1}{x^2} \end{array}\right\} \xrightarrow{\int dx} \frac{1}{x}+C$$

$$\ln x \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{1}{x} \xrightarrow{\int dx} \ln x + C = \ln(\gamma x)$$

→ Tablice pochodnych i całek

Liniowość $\qquad \int f(x)\,dx$

$$\frac{d}{dx}ax = a$$

$$\int a\,dx = ax + C$$

- addytywność

$$\int dx\,(f(x)+g(x)) = \int dx\, f(x) + \int dx\, g(x)$$

$$\int dx\,(f(x)+a) = \int dx\, f(x) + ax + C$$

- jednorodność w stopniu 1

$$\int dx\,\alpha f(x) = \alpha \int dx\, f(x)$$

Razem

$$\int dx\,(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \int dx\, f(x) + \beta \int dx\, g(x)$$

$$\int dx\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int dx\, f_i(x)$$

Przykłady całek obliczanych wprost

$$\int dx\,(x+8)^2 = \int dx\,(x^2+16x+64) = \int dx\, x^2 + 16\int dx\, x + 64\int dx\, 1 =$$

$$= \frac{x^3}{3} + C_1 + 16\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right) + 64(x+C_3) =$$

$$\int dx\, x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$= \frac{x^3}{3} + C_1 + 8x^2 + C_4 + 64x + C_5 =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 8x^2 + 64x + C$$

$$\int dx\,\ln(x\cdot 2^x) = \int dx\,(\ln x + (\ln 2)x) = \int dx\,\ln x + \ln 2\int dx\, x =$$

$$= \underline{x\ln x - x + C_1} + \ln 2\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right) =$$

$$= x\ln x - x + C_1 + \frac{\ln 2}{2}x^2 + C_3 =$$

$$= \frac{\ln 2}{2}x^2 + x\ln x - x + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \\ &\frac{d}{dx}(x\cdot\ln x) = 1\ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \\ &\frac{d}{dx}(x\ln x - x) = \dots = \ln x \\ &\int dx\,\ln x = x\ln x - x + C \end{aligned}}$$

$$\left[\frac{d}{dx}(x\cdot\ln x)\right] - 1 = \ln x$$

$$\left[\frac{d}{dx}(x\cdot\ln x)\right] - \left[\frac{d}{dx}x\right] = \ln x$$

Krysicki – Włodarski. Analiza matematyczna w zadaniach I

15.1, 2, 4 i inne bez „metod".

Ustalenie stałej całkowania

$$F(x) = ?$$

$$F(x) = \int dx\, f(x) = F_1(x) + C_1 = F_2(x) + C_2 = F_3(x)$$

Warunek brzegowy

$$F(x_0) = F_0$$

Układ

$$\begin{cases} F(x) = \underbrace{F_1(x)}_{\text{znana}} + \underbrace{C_1}_{\text{NIE znana}} & (\#1) \\ F(x_0) = F_0 & (\#2) \end{cases}$$

Podstawienie (#2) do (#1)

$$F_0 = F_1(x_0) + C_1$$

$$C_1 = F_0 - F_1(x_0)$$

Przykłady

① $\boxed{\text{Ruch \underline{jednostajny}} \quad v = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}, \; v = \frac{x(t) - x_0}{t}, \; x(t) = x_0 + vt}$

Ale można też inaczej

$$\begin{cases} x(t) = \int dt\, \underbrace{v}_{\text{stała}} = v(t + C_1) = vt + C \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x_0 = v0 + C = C$$

$$C = x_0$$

$$x(t) = x_0 + vt$$

② Ruch jednost.-przyspieszony

$$\begin{cases} v(t) = \int dt\, a = a(t + C_1) = at + C \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$v_0 = a0 + C = C$$

$$C = v_0$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$\boxed{\text{Lub podobnie jak dla jednostajnego bez całkowania}}$

③ Tu już całkowanie jest konieczne

$$\begin{cases} x(t) = \int dt\, v(t) = \int dt\,(v_0 + at) = \int dt\, v_0 + \int dt\, at = \\ \quad = v_0(t + C_1) + a\left(\frac{t^2}{2} + C_2\right) = v_0 t + C_3 + \frac{at^2}{2} + C_4 = \\ \quad = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x_0 = v_0 \cdot 0 + \frac{a \cdot 0^2}{2} + C = C$$

$$C = x_0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Podstawienie /zamiana zmiennych

$$\int dx\, f(x) = \int dx\, g(h(x)) = \begin{Bmatrix} h(x) = y \\ h'(x)dx = dy \\ dx = \frac{dy}{h'(x)} \end{Bmatrix} = \int \frac{dy}{h'(x)} g(y)$$

Przykłady

① $$\int dx\, 4x \cdot e^{x^2} = \begin{Bmatrix} x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{2x} 4x e^t = 2\int dt\, e^t =$$

$e^{x^2} = e^{(x^2)}$

$$= 2(e^t + C_1) = 2e^t + C = \{x^2 = t\} = 2e^{x^2} + C$$

② $$\int dx \frac{\ln x}{x} = \begin{Bmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{Bmatrix} = \int dt\, t = \frac{t^2}{2} + C = \{\cdot\} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

15.4 (II spos.), 9, 12 (I i III spos.) i inne
(bez II)

Części

$$\int dx\, h(x) = \int dx\, \underset{\substack{\swarrow\\ \text{Umiemy całkować}}}{f(x)} \cdot \underset{\substack{\searrow\\ \text{Umiemy różniczkować}}}{G(x)} = \cancel{}\, F(x)G(x) - \int F(x)\, g(x)\, dx$$

Przykłady

① $$\int dx\, \underset{F}{x}\, \underset{g}{e^x} = xe^x - \int dx\, 1 e^x = xe^x - (e^x + C_1) = (x-1)e^x + C$$

② $$\int dx\, \underset{F}{x}\, \underset{g}{\sin x} = -x\cos x + \int dx\, 1 \cos x = -x\cos x + \sin x + C$$

③ $$\int dx\, \underset{f}{x^{10}}\, \underset{G}{\ln x} = \frac{x^{11}}{11}\ln x - \int dx\, \frac{x^{11}}{11}\frac{1}{x} = \frac{x^{11}}{11}\ln x - \int dx\, \frac{x^{10}}{11} =$$

$$= \frac{x^{11}}{11}\ln x - \frac{1}{11}\left(\frac{x^{11}}{11} + C_1\right) =$$

$$= \frac{x^{11}}{11}\ln x - \frac{x^{11}}{11 \cdot 11} + C = \frac{x^{11}}{11}\left(\ln x - \frac{1}{11}\right) + C$$

$$\begin{tikzcd}
\sin \arrow[r, "\frac{d}{dx}"] & \cos \arrow[l, bend left, "\int dx"] \arrow[d] \\
-\cos \arrow[u] & -\sin \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

15.8, 20, 21

Pętlące się

① $$\int dx\, \underset{f}{e^x}\, \underset{G}{\cos x} = e^x \cos x + \int dx\, \underset{f_2}{e^x}\, \underset{G_2}{\sin x} =$$

$$= e^x\cos x + e^x \sin x - \int dx\, e^x \cos x =$$

$$= e^x(\cos x + \sin x) - \int dx\, e^x \cos x$$

$$I = e^x(\cos x + \sin x) - I$$

$$I = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$$

② $\int dx\, e^{2x} = \int dx\, \underset{F}{e^x}\,\underset{g}{e^x} = e^{2x} - \int dx\, e^{2x}$

$$I = e^{2x} - I$$

$$I = \frac{e^{2x}}{2}$$

③ $\int dx (\cos x)^2 = \int dx\, \underset{F}{\cos x}\,\underset{g}{\cos x} = \cos x \sin x + \int dx\, \underset{F_2}{\sin x}\,\underset{g_2}{\sin x} \overset{*}{=}$

$$= \cos x \sin x - \sin x \cos x + \int dx \cos x \cos x$$

$I = I \ldots$

$\star = \cos x \sin x + \int dx (1 - \cos^2 x) = \cos x \sin x + \int dx - \int dx \cos^2 x =$

$$= \cos x \sin x + x + C_1 - \int dx \cos^2 x$$

$$I = \cos x \sin x + x + C_1 - I$$

$$I = \frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{x}{2} + C$$

Sztuczka z pochodną mianownika

$$\int dx\, \frac{a f'(x)}{f(x)} = a(\ln|f(x)| + C_1) = a \ln|f(x)| + C$$

Przykład

$$\int dx\, \frac{2}{x \ln(x^2)} = \int dx\, \frac{\frac{2}{x}}{2\ln x} = \ln|\ln(x^2)| + C$$

Podstawienie uniwersalne...

Całki z f. wymiernych przez ułamki proste... } następnym razem

Części – zapis

Po mojemu: $$\int F(x)\, g(x)\, dx = F(x)G(x) - \int G(x) f(x)\, dx$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\int F(x) \underbrace{G'(x) dx} \qquad F(x)G(x) - \int G(x) \underbrace{F'(x) dx}$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$$

K-W: $$\int F(x)\, dG(x) = F(x)G(x) - \int G(x)\, dF(x)$$

Szczególne podstawienia

Podstawienia trygonometryczne

Podstawienie uniwersalne

$$\int dx\, R(\sin x, \cos x) = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} = \ldots$$

Inne podstawienia trygonometryczne

$$\int dx\, R(\sin^s x, \cos^c x) = \int dx\, R(u, v) =$$

$$\sin^s x \equiv (\sin x)^s, \qquad \cos^c x \equiv (\cos x)^c$$

	$c=2k-1$	$c=2k$
$s=2k-1$	podst. uniw.	$\underline{R(u,v) = -R(-u,v)}$ $\boxed{t=\cos x}$ $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $\sin x = \sqrt{1-t^2}$
$s=2k$	$\underline{R(u,v) = -R(u,-v)}$ $\boxed{t=\sin x}$ $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $\cos x = \sqrt{1-t^2}$	$\underline{R(u,v) = R(-u,-v)}$ $\boxed{t=\mathrm{tg}\, x}$ $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$

Funkcje wymierne

$$\int dx\, \frac{W_1(x)}{W_2(x)} = \int dx\, \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$n \geq m$ – podzielić → dzielenie wielomianów

$n < m$ – rozłożyć na ułamki proste

Dzielenie wielomianów

Np.

$$\overline{(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5)} : (3x - 1)$$

Ułamki proste

$$\frac{A}{(ax+b)^k} = \frac{A'}{(x-b')^k} \qquad \frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)^p} = \frac{B'x+C'}{(x^2+d'x+e')^p}$$

$ab \neq 0 \qquad \Delta < 0$

$A, B, C \in \mathbb{C}$

$a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$

$k, p \in \mathbb{N}$

~~a) Mianownik jest pełnym kwadratem~~

$$\cancel{W_2(x) = [W_3(x)]^2 \Rightarrow \frac{W_1(x)}{W_2(x)} = \frac{A}{[W_3(x)]^2} + \frac{B}{W_3(x)}} \quad \Big| \cdot \underset{\displaystyle [W_3(x)]^2}{\overset{\displaystyle W_2(x)}{\parallel}}$$

$$\cancel{W_1(x) = A + B\,W_3(x)} \rightarrow \text{~~pogrupować wg~~ } x$$

$\forall x$

---

np. (później)

$$\frac{9x-5}{9x^2-6x+1} = \frac{A}{(3x-1)^2} + \frac{B}{3x-1} = \star$$

$$9x - 5 = A + B(3x-1) = 3Bx + (A-B)$$

$3B = 9 \qquad A - B = -5$

$B = 3 \qquad A - 3 = -5$

$A = -2$

$$\star = \frac{-2}{(3x-1)^2} + \frac{3}{3x-1}$$

Rozkładamy na czynniki mianownik

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_r)^{k_r} \underbrace{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}}_{\Delta<0} \cdots \underbrace{(x^2+b_sx+c_s)^{l_s}}_{\Delta<0} a_0$$

Wówczas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} +$$

$$+ \cdots +$$

$$+ \frac{A_{r1}}{(x-a_r)} + \frac{A_{r2}}{(x-a_r)^2} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x-a_r)^{k_r}} +$$

$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+b_1x+c_1)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}} +$$

$$+ \cdots +$$

$$+ \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{(x^2+b_sx+c_s)} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{(x^2+b_sx+c_s)^2} + \dots + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2+b_sx+c_s)^{l_s}}$$

Czas na przykład

Korzystamy z całek ułamków prostych 1-ego rodzaju

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^i} = \frac{(x-a)^{1-i}}{1-i} + C$$

Teraz wróćmy do przykładu

i drugiego rodzaju...

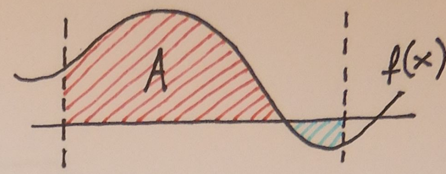
Sztuczka z licznikiem proporcjonalnym do pochodnej mianownika

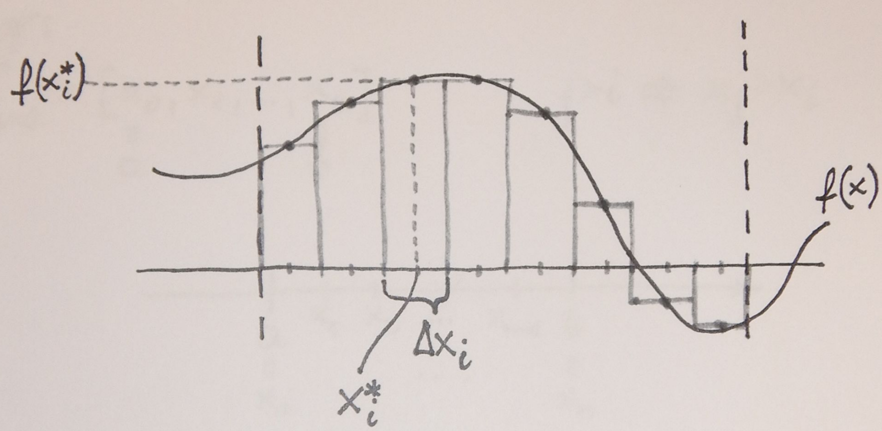
$$\int dx \, \frac{a f'(x)}{f(x)} = a \ln|f(x)| + C$$

Funkcja pierwotna

$$\begin{tikzcd} F(x)+C \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\int dx"] \end{tikzcd}$$

Całka Riemanna



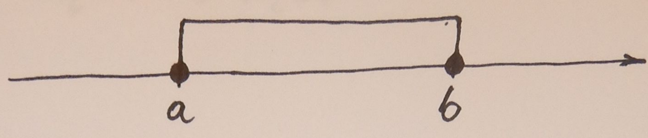


* Przedziały Δx_i nie muszą być równe
* Punkt x_i^* nie musi być środkiem przedziału Δx_i

Podział przedziału, punkty pośrednie i zagęszczanie

Przedział

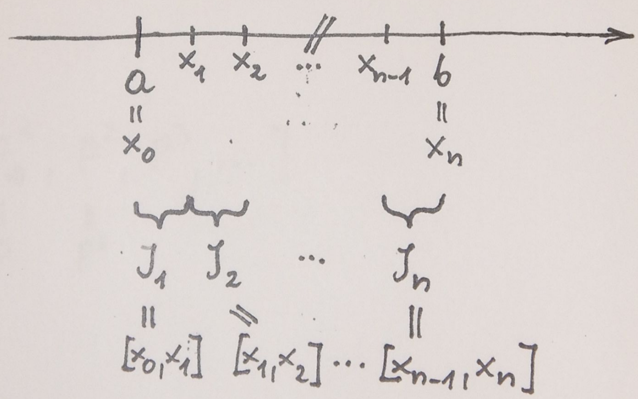
$$\Delta = [a, b] \quad , \quad a \leq b$$



Podział przedziału

ciąg:

$$P = [x_i]_{i=0}^{n} = [\underset{\substack{\parallel \\ a}}{x_0}, x_1, \dots, \underset{\substack{\parallel \\ b}}{x_n}] \qquad j > i \Rightarrow x_j > x_i$$



$$|J_i| =: \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\forall J_i \ \exists x_i^* \in J_i$$

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \ \exists x_i^* \in J_i$$

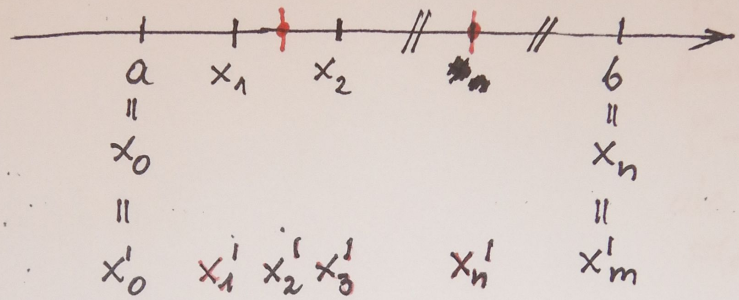
$$p^* = [x_i^*]_{i=1}^{n} = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$$ – ciąg punktów pośrednich

$$P' = [x_i']_{i=0}^{m} = [\underset{\substack{\parallel \\ x_0}}{x_0'}, x_1', \dots, \underset{\substack{\parallel \\ x_n}}{x_n'}, \dots, x_m'] \qquad m > n \quad \text{- nadciąg}$$

(P - podciąg P')

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad x_i \in P \Rightarrow x_i \in P'$$

np.:



Ciąg podziałów

$$[P^i]_{i=1}^{\infty} = [\underset{\substack{\parallel \\ P}}{P^1}, \underset{\substack{\parallel \\ P'}}{P^2}, P^3, \dots]$$

Suma częściowa

$$S(f, P, P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x_i$$

Całka Riemanna

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to \infty} S(f, P^k, P^{*k})$$

* Jeśli granica istnieje, to f jest całkowalna w sensie R.
* Nie zależy od wyboru punktów pośrednich x_i^*

Podstawowe twierdzienie rachunku całkowego

"antiderivative"

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f(x)=\frac{d}{dx}F(x)\,,\quad x\in[a,b] \\ f(x) \text{ jest całkowalna na } [a,b] \end{array}\right\} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Pewna konkretna funkcja pierwotna C-dowolna, ale ta sama dla F(a) i F(b)

* Całka oznaczona jest jednoznaczna

* $$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-\underset{\text{const}}{\underset{\parallel}{F(a)}} = F_1(x)$$

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

$$\frac{dF_1(x)}{dx}=f(x)$$

np.:

$$\int_0^x f(t)\,dt = F_2(x)$$

Addytywność jako funkcji przedziału

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Przedział zdegenerowany

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

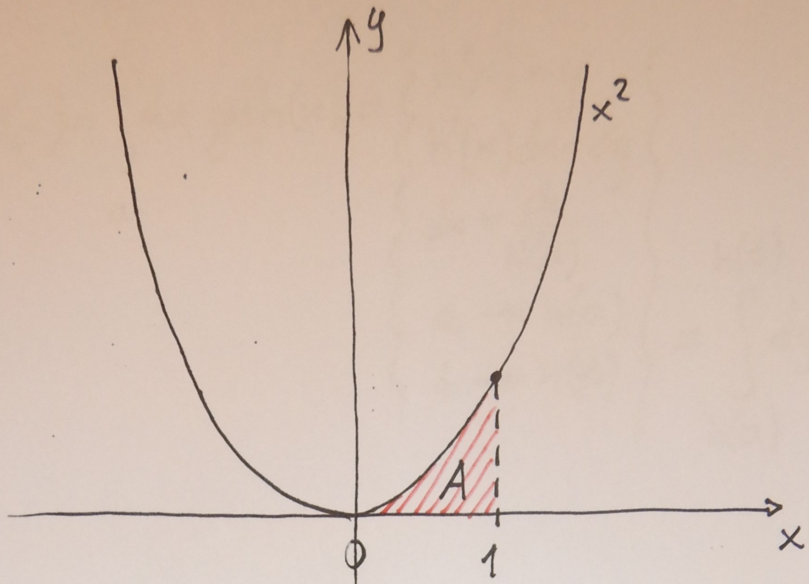
Odwrócenie przedziału

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\left(\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0 \right)$$

Przykład obliczany wprost (związany z polem)

① $f(x)=x^2$



$$A=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$$

②

Podstawienie

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dx\, g(h(x)) = \left\{ \begin{array}{l} h(x) = y \\ h'(x)dx = dy \\ dx = \dfrac{dy}{h'(x)} \\ a \to h(a) \\ b \to h(b) \end{array} \right\} = \int_{h(a)}^{h(b)} dy\, g(y)$$

Przykład

$$\int_e^{e^2} dx\, \frac{\ln x}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \\ e \to \ln e = 1 \\ e^2 \to \ln(e^2) = 2 \end{array} \right\} = \int_1^2 dt\, t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Części

$$\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx = \Big[F(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx$$

Przykład

$$\int_0^\pi \underset{G}{e^x}\,\underset{f}{\cos x}\,dx = \Big[e^x \sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underset{G_1}{e^x}\,\underset{f_1}{\sin x}\,dx =$$

$$= \Big[e^\pi\cdot 0 - 1\cdot 0\Big] - \Big[e^x(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi e^x\cos(x)\,dx$$

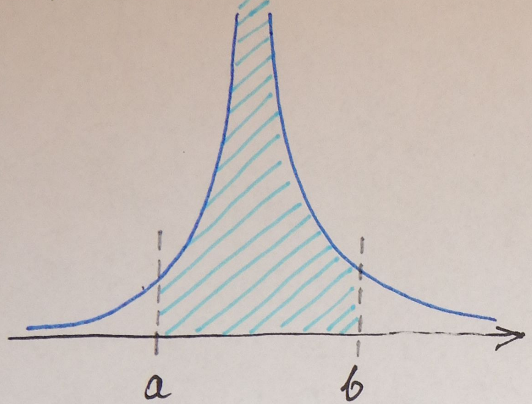
$$I = \left(e^\pi(-1) - 1\right) - I$$

$$I = \frac{-e^\pi - 1}{2}$$

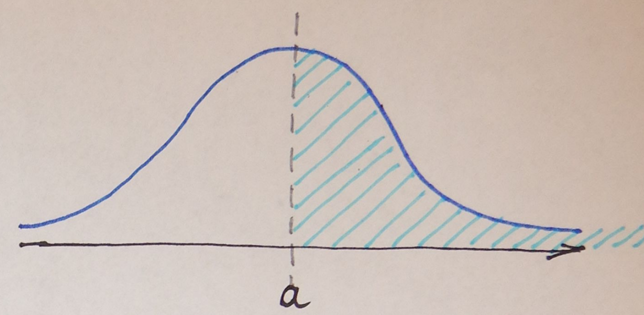
Całka niewłaściwa

1) z funkcji nieograniczonej

2) na przedziale nieograniczonym



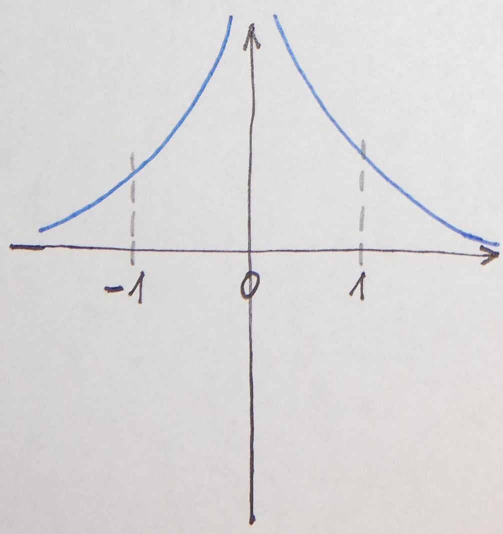
1

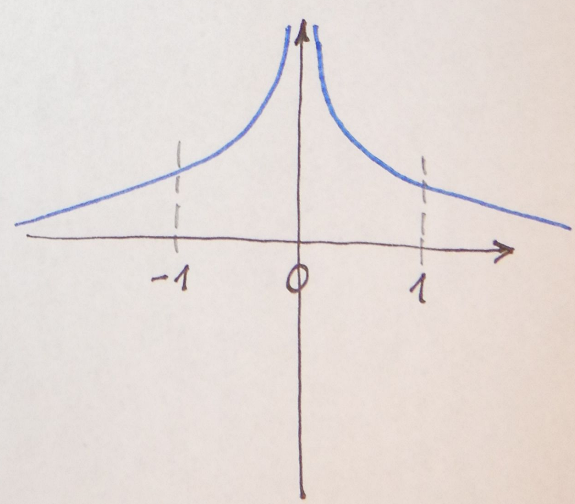


2

Ad 1) Funkcja nieograniczona

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$





Zasada

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right\}$$

Przykład

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{|x|} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{|x|} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\ln x\right]_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\ln 1 - \ln\varepsilon\right) =$$

$$= \ln 1 - (-\infty) = \infty$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\frac{1}{\varepsilon} = \infty$$

<u>ale</u>

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

Zapis uproszczony

(1') $\int_0^1 \frac{dx}{|x|} = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_0^1 = (\ln 1 - \ln 0) = \infty$

(2') $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = (2\sqrt{1} - 2\sqrt{0}) = 2$

Przykłady c.d.

(3) $$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_{0+\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \left[\frac{2x}{\sqrt{-x}}\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \left[2\sqrt{x}\right]_{+\varepsilon}^{+1} \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \left(\frac{-2\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{-2\cdot 1}{\sqrt{1}}\right) + \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) \right\} = 4$$

(3') $$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_{0}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[\frac{2x}{\sqrt{-x}}\right]_{-1}^{0} + \left[2\sqrt{x}\right]_0^{+1} =$$

$$= \cancel{\left(\frac{2\cdot 0}{\sqrt{0}}\right.} = \left(\left[\frac{2\cdot 0_-}{\sqrt{0_+}}\right] - \frac{-2\cdot 1}{\sqrt{1}}\right) + \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{0}\right) = 4$$

2) Na przedziale nieograniczonym

Zasada

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\Lambda\to\infty} \int_a^{\Lambda} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\Lambda\to-\infty} \int_{\Lambda}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

Przykład

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$①\qquad\qquad\qquad ②$$

① $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\Lambda\to+\infty} \int_1^{\Lambda} \frac{dx}{x} = \lim_{\Lambda\to+\infty} \left[\ln x\right]_1^{\Lambda} =$$

$$= \lim_{\Lambda\to+\infty} (\ln\Lambda - \ln 1) = \infty$$

krócej

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^{+\infty} = (\ln\infty - \ln 1) = \infty \qquad ①'$$

ale...

② $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{A} = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{-1}{A} - \frac{-1}{1}\right) = 1$$

krócej

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{+\infty} = \left(\frac{-1}{+\infty} - \frac{-1}{1}\right) = 1$$

Przykłady c.d.

③ $$\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \to +\infty} \left\{ \int_{-A}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{+A} \frac{dx}{x^2} \right\} =}$$

$$\cancel{= \lim_{A \to +\infty} \left\{ \left[\frac{-1}{x}\right]_{-A}^{0} + \left[\frac{-1}{x}\right]_{0}^{+A} \right\} =}$$

$$\cancel{= \lim_{A \to +\infty} \left\{ \left(\left[\frac{-1}{0}\right] - \frac{-1}{-A}\right) + \left(\right. \right.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to +\infty} \left\{ \int_{-A}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+A} \frac{dx}{1+x^2} \right\} =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left\{ \left[\operatorname{atg} x\right]_{-A}^{0} + \left[\operatorname{atg} x\right]_{0}^{+A} \right\} =$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left\{ \left(\operatorname{atg} 0 - \operatorname{atg}(-A)\right) + \left(\operatorname{atg}(A) - \operatorname{atg} 0\right) \right\} =$$

W 0 nie ma zadnej osobliwości!

$$= \left\{ 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 \right\} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty}\left[\operatorname{atg} x\right]_{-A}^{+A} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{atg} A - \operatorname{atg}(-A)\right) = \pi$$

krócej

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{atg} x\right]_{-\infty}^{+\infty} = \left(\operatorname{atg}\infty - \operatorname{atg}(-\infty)\right) = \pi$$

④

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(|x|+1)\sqrt{|x|}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\boxed{0}}\frac{dx}{(1-x)\sqrt{-x}}}_{A} + \underbrace{\int_{\boxed{0}}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}}_{B} = \star$$

$$A = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(1-x)\sqrt{-x}} = \left\{\begin{array}{l} -x = y \\ -dx = dy \\ 0 \to 0 \\ -\infty \to +\infty \end{array}\right\} = \int_{-\infty}^{0}\frac{-dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \int_{0}^{+\infty}\frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = B$$

$$\star = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = 2\left\{\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} + \int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}\right\} =$$

$$= 2\left\{\lim_{\varepsilon\to0_+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} + \lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}\right\} =$$ całka z funkcji niewymiernej

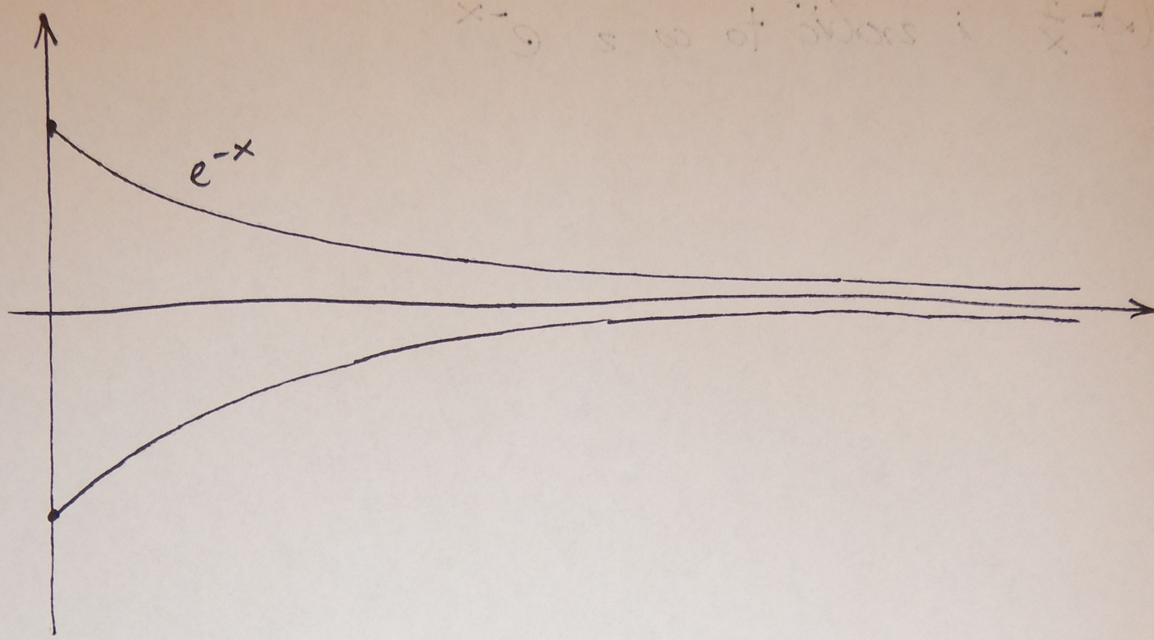
$$= 2\left\{\lim_{\varepsilon\to0_+}\left[2\operatorname{atg}\sqrt{x}\right]_{\varepsilon}^{1} + \lim_{A\to+\infty}\left[2\operatorname{atg}\sqrt{x}\right]_{1}^{A}\right\} =$$

$$= 2\left\{\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{atg}\sqrt{\varepsilon}\right) + \lim_{\Lambda\to+\infty}\left(2\,\mathrm{atg}\sqrt{\Lambda} - \frac{\pi}{2}\right)\right\} =$$

$$= 2\left\{\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2}\right\} = 2\pi$$

5

Przykład kielicha



$$A = \int_0^{+\infty} 2\pi f(x)\,dx = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} -x = y \\ -dx = dy \\ 0 \to 0 \\ +\infty \to -\infty \end{array} \right\} =$$

$$= 2\pi \int_0^{-\infty} e^{y}(-dy) = 2\pi \int_{-\infty}^{0} e^{y}\,dy = 2\pi \left[e^{y}\right]_{-\infty}^{0} =$$

$$= 2\pi\left(e^{0} - e^{-\infty}\right) = 2\pi$$

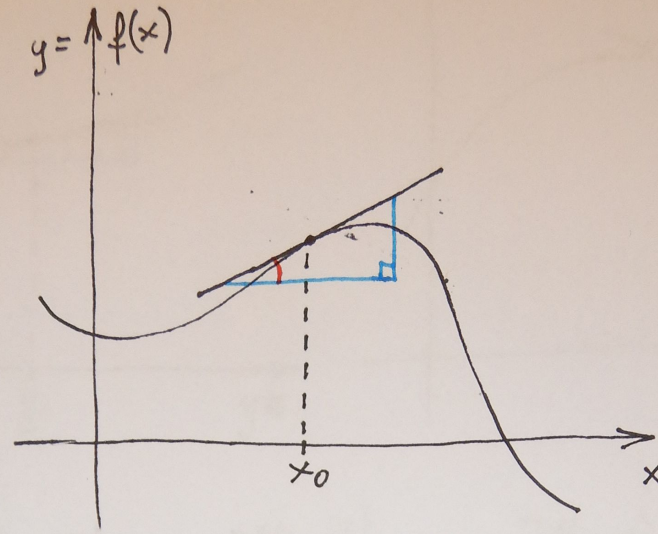
$$V = \int_0^{+\infty} \pi f(x)^2\,dx = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} -2x = y \\ -2dx = dy \\ 0 \to 0 \\ +\infty \to -\infty \end{array} \right\} =$$

$$= \pi \int_0^{-\infty} e^{y}\left(\frac{-dy}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{y}\,dy = \ldots = \frac{\pi}{2}$$

Pd

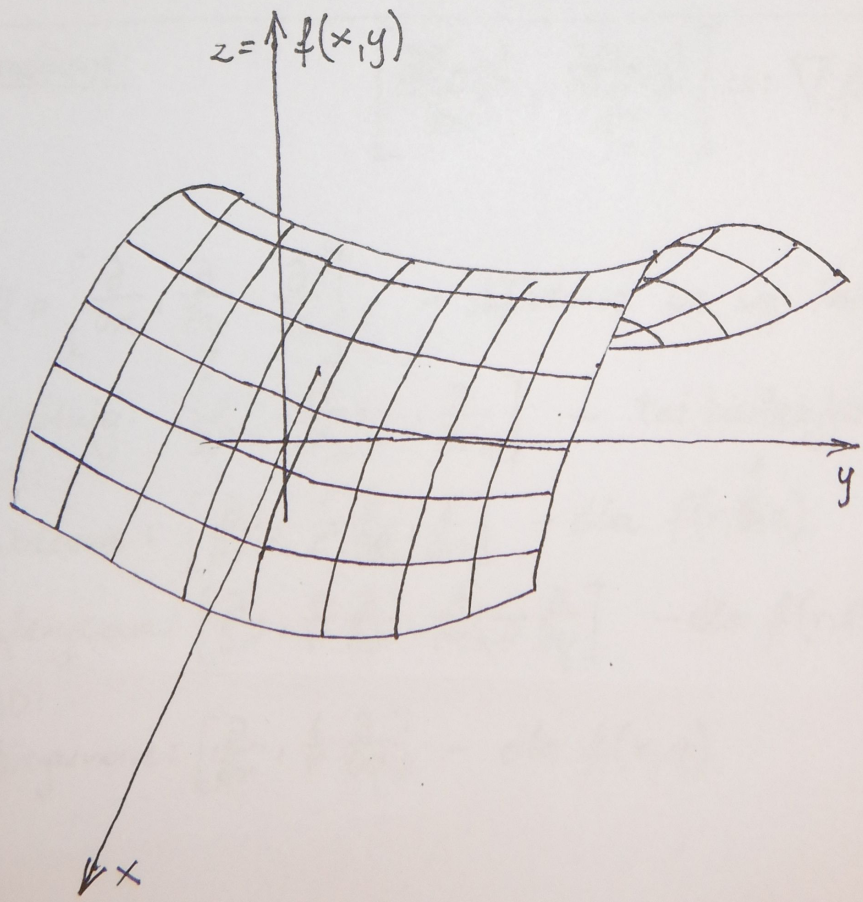
$f(x)=\frac{1}{x}$ i zrobić to co z e^{-x}

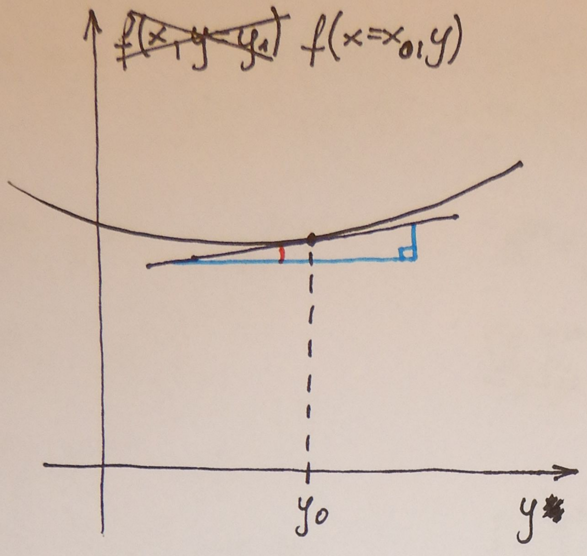
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y$$

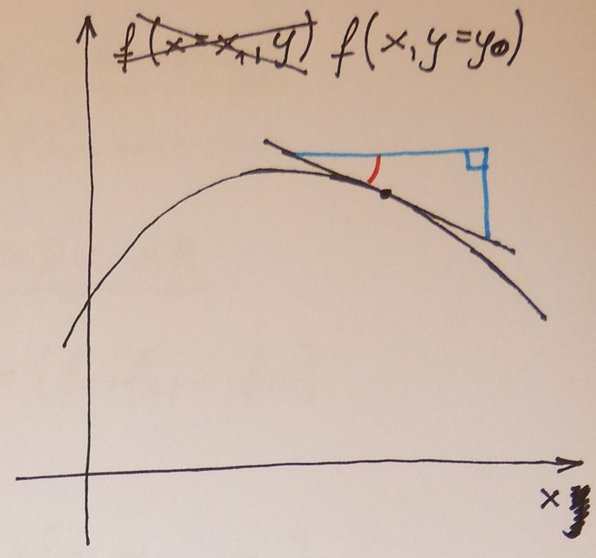


$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \equiv f'(x_0)$$

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$[x, y] \mapsto z$$







$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_0\\x=x_0}} = \left.\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}\right|_{y=y_0} \qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{y=y_0\\x=x_0}} = \left.\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0}$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x}+t\hat{x}_i)-f(\vec{x})}{t}$$

<u>Pochodna cząstkowa</u>

<u>Gradient</u>

$$\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] =: \nabla f(x,y)$$

$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$ – składowe we wsp. kartezjańskich 3D

Ogólniej: $\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]$ – też kartezjańskie nD

3D:

Walcowe: $\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$ – dla $f(r,\varphi,z)$

Sferyczne: $\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right]$ – dla $f(r,\theta,\varphi)$

2D:

Biegunowe: $\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right]$ – dla $f(r,\varphi)$

Funkcja wielu zmiennych (zmiennej wektorowej) o wartościach wektorowych

$\vec{F}: \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times m}$

$\mathbb{R}^{\times n} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$

$\vec{F} = [f_j]_{j=1}^{m}$

$[f_j]_{j=1}^{m} = [f_1, f_2, \ldots, f_m]$

$f_j : \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_j : [x_i]_{i=1}^{n} \mapsto y_j$

$[x_i]_{i=1}^{n} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$

Pole wektorowe

$\vec{F} : \mathbb{R}^{\times n} \to \mathbb{R}^{\times n}$

$\vec{F} = [f_1, f_2, \dots, f_n] = [f_j]_{j=1}^{n}$

$f_j : \mathbb{R}^{\times n} \to \mathbb{R}$

$f_j : [x_i]_{i=1}^{n} \mapsto y_j$

$\vec{F} : [x_i]_{i=1}^{n} \mapsto [\overset{y}{\cancel{f}}_j]_{j=1}^{n}$

! ↯ ~

Dywergencja

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \circ \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right] \circ [f_1, f_2, \dots, f_n] =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$\operatorname{div} \vec{F}\Big|_{\vec{x}_0} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{|V|} \oiint_{A(V)} \vec{F} \circ \underbrace{\vec{dA}}_{\vec{n}\, dA} \quad \text{– w 3D}$$

! ↯ ~

Rotacja

$$\underset{\text{curl}}{\overset{}{\operatorname{rot}}} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \quad \text{– } \underline{\text{tylko}} \text{ w 3D}$$

!

$$= \left[\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right]$$

$$\operatorname{rot} \vec{F}\Big|_{x_0} \circ \vec{n} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{|A|} \oint_{C(A)} \vec{F} \circ \vec{dr}$$

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) \circ \hat{x}_i = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \circ [0, 0, \dots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1}, \dots, 0] = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

P. kierunkowa

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) \circ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u_i =: \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{u}}$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{u}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{u}) - f(\vec{x})}{t}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\hat{x}_i) - f(\vec{x})}{t}}$$

Wyższe rzędy

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x})\right]$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x})\right] \qquad (\rightarrow \text{Tw. Schwarza})$$

$$\frac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left[\cdots\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_n}} f(\vec{x})\right]\cdots\right]\right]$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial \vec{u}\, \partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{u}}\left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(\vec{x})\right]$$

Pochodna zupełna

$$f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t) \qquad \text{ew.} \quad x_i(t) = x_i \not\forall t$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Przykłady

Pochodna cząstkowa

$$f(x,y) = -x^3 + 2x^2y - y + 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 4xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 1$$

Wyższego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-3x^2 + 4xy\right) = -6x + 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2 - 1\right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-3x^2 + 4xy\right) = 4x$$

Gradient

$$\vec{\nabla} f = \left[-3x^2 + 4xy,\ 2x^2 - 1\right]$$

Pochodna kierunkowa

$$\vec{u} = 3\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y} = \left[3, -\frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \left[-3x^2 + 4xy,\ 2x^2 - 1\right] \circ \left[3, -\frac{1}{2}\right] =$$

$$= -9x^2 + 12xy - x^2 + \frac{1}{2}$$

Pochodna zupełna

$$f(x,y) = x^2 \cdot y \qquad \text{ale} \qquad y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 \cdot \frac{1}{2} + 2x \cdot y$$

Metoda różniczki zupełnej w rachunku niepewności

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta x_n$$ – maksymalny

$$\sigma f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma^2 x_n}$$ – oczekiwany

Przykład

$$Q_V = \frac{V}{t} = \frac{H \cdot A}{t} = \frac{H \cdot \pi r^2}{t} = \frac{H \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{t} = \frac{\pi H d^2}{4t}$$

$H = (0{,}200 \pm 0{,}005)\,m$

$d = (0{,}060 \pm 0{,}001)\,m$

$t = (45{,}0 \pm 0{,}5)\,s$

$$\sigma Q_V = \sqrt{\left(\frac{\pi d^2}{4t}\right)^2 \sigma^2 H + \left(\frac{\pi H}{4t} \cdot 2d\right)^2 \sigma^2 d + \left(\frac{\pi H d^2}{4}\left(\frac{-1}{t^2}\right)\right)^2 \sigma^2 t} = \dots$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{f_x(x_0,y_0)}{1!}\Delta x + \frac{f_y(x_0,y_0)}{1!}\Delta y +$$

$$+ \frac{f_{x^2}(x_0,y_0)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f_{xy}(x_0,y_0)}{2!}\Delta x \Delta y +$$

$$+ \frac{f_{yx}(x_0,y_0)}{2!}\Delta y \Delta x + \frac{f_{y^2}(x_0,y_0)}{2!}\Delta y^2 +$$

$$+ \dots =$$

Przykład:

$$f(x,y) = e^x \cos y \qquad f(x,y) \approx \dots \pm O(\Delta x^3, \Delta y^3)$$

$$(x_0,y_0) = (1,1)$$

~~Założenie: Rozkłady zmiennych są w przybl. symetryczne~~

Zależność:

$$Q_V = \frac{V}{t} = \frac{H \cdot A}{t} = \frac{H \cdot \pi r^2}{t} = \frac{H \frac{\pi d^2}{4}}{t} = \frac{\pi H d^2}{4t}$$

Dane:

$$\begin{array}{lll} & \mathbb{E} & \sigma \\ H = (& 0{,}200 & \pm 0{,}005)\,m \\ d = (& 0{,}060 & \pm 0{,}001)\,m \\ t = (& 45{,}0 & \pm 0{,}5)\,s \end{array}$$

4~

Wartość oczekiwana:

$$\overline{Q_V} = \frac{\pi \overline{H}\, \overline{d}^2}{4\overline{t}}$$

$$\overline{Q_V} = \frac{\pi \cdot 0{,}2\,m \cdot (0{,}06\,m)^2}{4 \cdot 45\,s} = 4 \cdot 10^{-6} \pi \frac{m^3}{s} \approx 12{,}566 \cdot 10^{-6} \frac{m^3}{s} =$$

$$= 1{,}2566 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s}$$

$$\sigma Q_V = \sqrt{\left(\frac{\pi \overline{d}^2}{4\overline{t}}\right)^2 \sigma^2 H + \left(\frac{\pi \overline{H}}{4\overline{t}} \cdot 2\overline{d}\right)^2 \sigma^2 d + \left(\frac{\pi \overline{H}\, \overline{d}^2}{4}\left(\frac{-1}{\overline{t}^2}\right)\right)^2 \sigma^2 t} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\pi \cdot (0{,}06\,m)^2}{4 \cdot 45\,s}\right)^2 \cdot (0{,}005\,m)^2 + \ldots}$$

$$\ldots \overline{+ \left(\frac{\pi \cdot 0{,}2\,m}{4 \cdot 45\,s} \cdot 2 \cdot 0{,}06\,m\right)^2 \cdot (0{,}001\,m)^2 +} \ldots$$

$$\ldots \overline{+ \left(\frac{\pi \cdot 0{,}2\,m \cdot (0{,}06\,m)^2}{4 \cdot (45\,s)^2}\right)^2 \cdot (0{,}5\,s)^2} \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-13} \frac{m^6}{s^2} + 2{,}84 \cdot 10^{-13} \frac{m^6}{s^2} + \ldots}$$

$$\ldots \overline{+ 0{,}32 \cdot 10^{-13}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{4{,}76 \cdot 10^{-13} \frac{m^6}{s^2}} = \frac{\pi}{4} \cdot 6{,}90 \cdot 10^{-7} \frac{m^3}{s} =$$

$$= 5{,}41 \cdot 10^{-7} \frac{m^3}{s}$$

$$\overline{Q_V} = 12{,}566 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^3}{s} = 12{,}566\,\frac{cm^3}{s}$$

$$\sigma Q_V = 5{,}41 \cdot 10^{-7}\,\frac{m^3}{s} = 0{,}541 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^3}{s} = 0{,}541\,\frac{cm^3}{s} \approx 0{,}54\,\frac{cm^3}{s}$$

$$Q_V = (12{,}\cancel{6}57 \pm 0{,}54)\,\frac{cm^3}{s}$$

Linearyzacja

$$df = \frac{df(x)}{dx}\, dx$$

$$f(\underbrace{x_0 + dx}_{x_1}) - f(x_0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} dx$$

lub $x = x_1 = x_0 + dx$

$$f(x_1) = f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} dx$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \Delta x \qquad \text{dla} \quad x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \left.\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \Delta x_1 + \dots + \left.\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \Delta x_n =$$

$$= f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \Delta x_i$$

Zastosowania całek, w tym całek wielokrotnych

1. Całki jednowymiarowe
    1.1. Poprzez “sumowanie nieskończenie małych przyczynków”
        1.1.1. Długość krzywej
            1.1.1.1. Określonej funkcją $y(x)$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy(x)^2} = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{dy(x)}{dx}dx\right)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2}$$

$$L = \int_a^b dl = \int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2}$$

Przykład:
Oblicz długość krzywej łańcuchowej $y(x) = \cosh x$ od $x = -2$ do $x = 2$.

$$L = \int_{-2}^{+2} dx\sqrt{1 + \left(\frac{d\cosh x}{dx}\right)^2} = \int_{-2}^{+2} dx\sqrt{1 + (\sinh x)^2} = \int_{-2}^{+2} dx\sqrt{(\cosh x)^2} = \int_{-2}^{+2} dx|\cosh x| = \int_{-2}^{+2} dx\cosh x$$

$$= \int_{-2}^{+2} dx\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{+2} dxe^x + \int_{-2}^{+2} dxe^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{+2} dxe^x - \int_{+2}^{-2} dx'e^{x'}\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{+2} dxe^x + \int_{-2}^{+2} dx'e^{x'}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_{-2}^{+2} dxe^x = \int_{-2}^{+2} dxe^x = [e^x]_{-2}^{+2} = e^2 - e^{-2} = 2\sinh 2 \approx 7.25$$

            1.1.1.2. Określonej parametrycznie $[x(t), y(t)]$

$$dl = \sqrt{dx(t)^2 + dy(t)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}dt\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}dt\right)^2}$$

$$L = \int_a^b dl = \int_{t_0}^{t_1} dt\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}$$

Przykład:
Oblicz długość okręgu $[x(\phi) = e\cos\phi\,, x(\phi) = e\sin\phi]$.
$\phi \in [-\pi, +\pi]$

$$L = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi\sqrt{\left(\frac{d\ e\cos\phi}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{d\ e\sin\phi}{d\phi}\right)^2} = e\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi\sqrt{(\sin x)^2 + (\cos x)^2} = e\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi = e[\phi]_{-\pi}^{+\pi} = e\big(\pi - (-\pi)\big)$$
$$= 2\pi e$$

1.2. Jako „pole pod wykresem”

1.2.1. Pole powierzchni “pod” krzywą $y(x)$

$$A = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx$$

Przykład:

Oblicz pole powierzchni pod parabolą $y(x) = 1 - x^2$

$$64 - x^2 \geq 0$$
$$x^2 \geq 64$$
$$x_0 = -8 \ \vee x_1 = +8$$
$$x \in [-8, +8]$$

$$A = \int_{-8}^{+8} dx(1 - x^2) = \int_{-8}^{+8} dx - \int_{-8}^{+8} dx\, x^2 = [x]_{-8}^{+8} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-8}^{+8} = \big(8 - (-8)\big) - \left(\frac{8^3}{3} - \frac{(-8)^3}{3}\right) = 16 - 2 \cdot \frac{512}{3}$$

1.3. Masa sznurka

1.3.1. Poprzez “sumowanie nieskończenie małych przyczynków”

$\lambda = \frac{\Delta m}{\Delta L}$ – gęstość liniowa

$$\lambda = \frac{dm(l)}{dl}$$

$$dm = \lambda dl = \lambda(x)dx$$

$$M = \int_a^b dm = \int_{x_0}^{x_1} \lambda(x)dx$$

1.3.2. Jako „pole pod wykresem”

$$M = \int_{x_0}^{x_1} \lambda(x)dx$$

Przykład:

Odliczanie wsteczne sygnalizuje upływ czasu sygnałami pojawiającymi się z częstością zależną od pozostałego czasu t w następujący sposób: $f(t) = \frac{10\frac{s}{s}}{t}$. Ile sygnałów zaobserwujemy przy odliczaniu przez dobę a ile przez rok, za każdym razem kończąc zliczanie na ostatniej sekundzie?

$$N(1\,d) = \int_{1\,s}^{1\,d} f(t)dt = \int_{1\,s}^{1\,d} \frac{10\frac{s}{s}}{t} dt = 10\frac{s}{s}\int_{1\,s}^{1\,d} \frac{dt}{t} = 10\frac{s}{s}[\ln t]_{1\,s}^{86400\,s} = 10\frac{\sqrt{s}}{s}(\ln 86400\,s - \ln 1\,s) = 10\frac{s}{s}\ln\frac{86400\,s}{1\,s} \approx 113.7$$

$$N(1\,y) = \cdots = 110\frac{s}{s}\ln\frac{31557600\,s}{1\,s} \approx 172.7$$

Czyli niewiele więcej…

Za to w ostatniej sekundzie mielibyśmy ∞ sygnałów. Potrzeba zależności $1/\sqrt{t}$ żeby całka do 0 była zbieżna.

1.4. Sztuczki

1.4.1. Objętość walca uogólnionego

$$V = AH = H\int_{x_0}^{x_1} y(x)dx$$

1.4.2. Objętość bryły obrotowej (wokół osi x)

$$dV = \pi r^2 dH = \pi y(x)^2 dx$$

$$V = \pi\int_{x_0}^{x_1} y(x)^2 dx$$

1.4.3. Pole powierzchni bocznej figury obrotowej (wokół osi x)

$$dA = 2\pi r dl = 2\pi|y(x)|\sqrt{1+\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$A = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} dx|y(x)|\sqrt{1+\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2}$$

2. Całki dwuwymiarowe

2.1. Poprzez “sumowanie nieskończenie małych przyczynków”

2.1.1. Pole figury płaskiej

$$dA = dxdy$$

$$A = \iint_D dxdy = \int_{x_0}^{x_1} dx\left(\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} dy\right)$$

D – obszar normalny

$$x_0 \le x \le x_1$$

$$y_0(x) \le y \le y_1(x)$$

2.2. Jako „objętość[1] pod powierzchnią”

2.2.1. Objętość “pod” powierzchnią $z(x, y)$

$$V = \iint\limits_D z(x, y) dxdy = \int\limits_{x_0}^{x_1} dx \left(\int\limits_{y_0(x)}^{y_1(x)} dy\, z(x, y) \right)$$

D – obszar normalny

$$x_0 \le x \le x_1$$

$$y_0(x) \le y \le y_1(x)$$

2.3. Masa arkusza

$\sigma = \frac{\Delta m}{\Delta A}$ – gęstość powierzchniowa

$$\sigma = \frac{\partial^2 m(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$dm = \sigma(x, y) da = \sigma(x, y) dxdy$$

$$M = \iint\limits_D \sigma(x, y) dxdy$$

3. Całki trójwymiarowe

3.1. Poprzez “sumowanie nieskończenie małych przyczynków”

3.1.1. Objętość bryły trójwymiarowej

$$dV = dxdydz$$

$$V = \iiint\limits_D dxdydz = \int\limits_{x_0}^{x_1} dx \left(\int\limits_{y_0(x)}^{y_1(x)} dy \left(\int\limits_{z_0(x,y)}^{z_1(x,y)} dz \right) \right)$$

D – obszar normalny

$$x_0 \le x \le x_1$$
$$y_0(x) \le y \le y_1(x)$$
$$z_0(x, y) \le z \le z_1(x, y)$$

[1] Tu już nie pole a objętość.

3.2. Jako „4D-hiperobjętość <<pod>> objętością”[2]

3.2.1. 4D-hiperobjętość “pod” objętością $z(x,y)$

$$\Omega = \iiint_D x_4(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \left(\int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} dx_2 \left(\int_{a_3(x_1,x_2)}^{b_3(x_1,x_2)} dx_3 x_4(x_1,x_2,x_3) \right) \right)$$

D – obszar normalny

$a_1 \leq x_1 \leq b_1$

$a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1)$

$a_3(x_1,x_2) \leq x_3 \leq b_3(x_1,x_2)$

3.3. Jako masa bryły

$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ – gęstość

$$\rho = \frac{\partial^3 m(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$dm = \rho(x,y,z)dv = \rho(x,y,z)dxdydz$$

$$M = \iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz$$

4. Całki wielowymiarowe

1.

[2] To już mało intuicyjne i lepiej rozumieć to np. jako masę

Całka z poprzednich zajęć:

Przez części:

$$V=\pi\int_0^\pi d\varphi(\sin\varphi)^2\left|\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\right|=\pi\int_0^\pi d\varphi\overset{F}{(\sin\varphi)^2}\overset{g}{\sin\varphi}=$$

$$=\pi\left(\left[-(\sin\varphi)^2\cos\varphi\right]_0^\pi+\int_0^\pi d\varphi\,2\sin\varphi\cos\varphi\cos\varphi\right)=$$

$$=\pi\left((0-0)+2\int_0^\pi d\varphi\sin\varphi(\cos\varphi)^2\right)=$$

$$=2\pi\int_0^\pi d\varphi\sin\varphi(\cos\varphi)^2=\star=$$

$$=2\pi\int_0^\pi d\varphi\overset{f}{\sin\varphi}\overset{G}{(\cos\varphi)^2}=$$

$$=2\pi\left(\left[-\cos\varphi(\cos\varphi)^2\right]_0^\pi-\int_0^\pi d\varphi\cos\varphi\,2\cos\varphi\sin\varphi\right)=$$

$$=2\pi\left((1-(-1))-2\int_0^\pi d\varphi(\cos\varphi)^2\sin\varphi\right)=$$

$$=2\pi\left(2-2\int_0^\pi d\varphi(\cos\varphi)^2\sin\varphi\right)=$$

$$=4\pi\Big(1-\underbrace{\int_0^\pi d\varphi\overset{F}{(\cos\varphi)^2}\overset{g}{\sin\varphi}}_{J}\Big)=\#=$$

$$=4\pi\left(1-\left(\left[-(\cos\varphi)^2\cos\varphi\right]_0^\pi-\int_0^\pi d\varphi\,2\cos\varphi\sin\varphi\cos\varphi\right)\right)=$$

$$=4\pi\Big(1-\big((1-(-1))-2\underbrace{\int_0^\pi d\varphi(\cos\varphi)^2\sin\varphi}_{J}\big)\Big)$$

#:

$$V=4\pi(1-J)$$

$$J=2-2J$$

$$3J=2$$

$$J=\frac{2}{3}$$

$$V=4\pi\left(1-\frac{2}{3}\right)=4\pi\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\pi$$

Skrót:

$$\star=2\pi\int_0^\pi d\varphi\overbrace{\sin\varphi(\cos\varphi)^2}^{\frac{df}{d\varphi}}=2\pi\int_0^\pi d\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{-1}{3}(\cos\varphi)^3\right)=$$

$$=2\pi\left[\frac{-1}{3}(\cos\varphi)^3\right]_0^\pi=\frac{-2\pi}{3}((-1)-1)=\frac{4}{3}\pi$$

$$\left(\begin{array}{l}\frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi)^3=-3(\cos\varphi)^2\sin\varphi\\[2ex]\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{-1}{3}(\cos\varphi)^3\right)=-\frac{1}{3}\left(-3(\cos\varphi)^2\sin\varphi\right)=(\cos\varphi)^2\sin\varphi\end{array}\right)$$

$$V = \pi \int_0^\pi d\varphi (\sin\varphi)^2 \sin\varphi = \pi \int_0^\pi d\varphi \left(1-(\cos\varphi)^2\right)\sin\varphi = \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi = t \\ -\sin\varphi \, d\varphi = dt \\ d\varphi = \frac{-dt}{\sin\varphi} \\ 0 \to 1 \\ \pi \to -1 \end{array} \right\}$$

$$= \pi \int_{+1}^{-1} (1-t^2) \cancel{\sin\varphi} \frac{-dt}{\cancel{\sin\varphi}} =$$

$$= \pi \left(-\int_{+1}^{-1} dt + \int_{+1}^{-1} dt\, t^2 \right) =$$

$$= \pi \left(\int_{-1}^{+1} dt - \int_{-1}^{+1} dt\, t^2 \right) =$$

$$= \pi \left([t]_{-1}^{+1} - \frac{1}{3} [t^3]_{-1}^{+1} \right) =$$

$$= \pi \left((1-(-1)) - \frac{1}{3}(1-(-1)) \right) =$$

$$= \pi \left(2 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{4}{3}\pi$$

$$\sigma(x,y) = \frac{3}{16} + \frac{3}{8}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{16}y + \frac{3}{8}xy$$

$$M = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{3} dx\, dy\, \sigma(x,y) = \int_0^1 dy \int_0^3 dx \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{8}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{16}y + \frac{3}{8}xy\right) =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^3 dx\, \frac{3}{16} + \int dy \int dx\, \frac{3}{8}x - \int dy \int dx\, \frac{1}{16}x^2 + \int dy \int dx\, \frac{3}{16}y + \int dy \int dx\, \frac{3}{8}xy =$$

$$\frac{3}{16}\int_0^1 dy\, [x]_0^3 = \frac{3}{16}\int_0^1 dy\,(3-0) = \frac{3}{16}\cdot 3\,[y]_0^1 = \frac{9}{16}(1-0) = \frac{9}{16}$$

$$\frac{3}{8\cdot 2}\int_0^1 dy\, [x^2]_0^3 = \frac{3}{16}\int_0^1 dy\,(9-0) = \frac{9\cdot 3}{16}\int_0^1 dy = \frac{27}{16}[y]_0^1 = \frac{27}{16}$$

$$\frac{1}{16\cdot 3}\int_0^1 dy\, [x^3]_0^3 = \frac{1}{48}\int_0^1 dy\,(27-0) = \frac{27}{48}[y]_0^1 = \frac{27}{48}$$

$$\frac{3}{16}\int_0^1 dy\, y \int_0^3 dx = \frac{3}{16}\int_0^1 dy\, y\, [x]_0^3 = \frac{3}{16}\int_0^1 dy\, y\,(3-0) = \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2}[y^2]_0^1 = \frac{9}{32}$$

$$\frac{3}{8}\int_0^1 dy\, y \int_0^3 dx\, x = \frac{3}{8\cdot 2}\int_0^1 dy\, y\, [x^2]_0^3 = \frac{3\cdot 9}{16\cdot 2}[y^2]_0^1 = \frac{27}{32}$$

$$\Sigma \rightarrow \ldots$$

f. 2 zmiennych rozseparowana na 2 f. 1 zmiennej (iloczyn)

$y_1(x) = y_1 \leftarrow$ stała

$$\iint\limits_{D} dx\,dy\; z(x,y) = \int_{x_0}^{x_1} dx \left(\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} dy\; z(x,y) \right) = \int_{x_0}^{x_1} dx \left(\int_{y_0}^{y_1} dy\; z_x(x) \cdot z_y(y) \right) =$$

$D \leftarrow$ prostokąt

$y_0(x) = y_0 \leftarrow$ stała

$$= \left(\int_{x_0}^{x_1} dx\; z_x(x) \right) \cdot \left(\int_{y_0}^{y_1} dy\; z_y(y) \right)$$

iloczyn całek

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy \left(\int_{\frac{x+y}{2}}^{2(x+y)} dz \right) \right) = \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy \,\Big[z \Big]_{\frac{x+y}{2}}^{2(x+y)} = \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy \left(2x + 2y - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right) =$$

$0 \cancel{<} < x < 1$

$\frac{x}{2} < y < 2x$

$\cancel{y < x < z < 2x + y < 2x}$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} < z < 2x + 2y$

$$\cancel{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \int_0^1 dx\, x \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy\, y = \frac{9}{4} \int_0^1 dx\, x \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy\, y}$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y \right) = \frac{3}{2} \left(\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy\, x + \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy\, y \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \left(\int_0^1 dx\, x \Big[y \Big]_{\frac{x}{2}}^{2x} + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \Big[y^2 \Big]_{\frac{x}{2}}^{2x} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \int_0^1 dx\, x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{16} \int_0^1 dx\, x^2 \right) =$$

$4x^2 - \frac{1}{4}x^2$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{\cancel{3}\,1}{2\,\cancel{3}} \Big[x^{\cancel{3}} \Big]_0^1 + \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{32} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \Big[x^3 \Big]_0^1 \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{32} \right) = \dots$$