Macierze (typy, działania i własności)

Def. Macierzą $\boldsymbol{A}$ nad ciałem $\boldsymbol{K}$ nazywamy przyporządkowanie każdej uporządkowanej parze liczb naturalnych $(i, j) \in \boldsymbol{N}\mathrm{x}\boldsymbol{N}$ pewnego elementu ciała $\boldsymbol{K}$ (= $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$). Wówczas,

- element ten oznaczamy a_{ij} i nazywamy elementem macierzy $\boldsymbol{A}$,
- parę (i, j) - nazywamy wskaźnikami (indeksami) elementu a_{ij},
- macierz ozn. $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{mxn}$ gdzie indeks $i = 1, 2, 3, ..., m$ oraz $j = 1, 2, 3, ..., n$,
- parę liczb (m, n) nazywamy wymiarem macierzy **A** (wymiar m na n),
- gdy $m \neq n$ – macierz $\boldsymbol{A}$ nazywamy prostokątną (zbiór macierzy ozn. $\boldsymbol{M}_{mxn}(\boldsymbol{K})$),
- gdy $m = n$ – macierz $\boldsymbol{A}$ nazywamy kwadratową, a n – stopniem macierzy $\boldsymbol{A}$.

JEDNO R-NIE MACIERZOWE ⇔ UKŁAD m R-Ń z n NIEWIADOMYMI

W szczególności, $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} B$ **(o ile macierz odwrotna A^{-1} istnieje !)**

Przykłady (wiersze i kolumny)

P1. Macierz ***A*** wymiaru *mxn* składa się z *m* wierszy i *n* kolumn, czyli

$$A = \left[a_{ij}\right]_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

2-gi wiersz

wiersz i-ty

pierwsza kolumna

kolumna j-ta

Uwaga: Macierze mogą posiadać wymiary nieskończone (!) i wówczas ich wiersze i kolumny są utworzone z pewnych ciągów liczb, np. macierz ***A*** = $[i+j]_{\boldsymbol{N}\text{x}\boldsymbol{N}}$

Podmacierze

Def. Podmacierzą macierzy **A** nazywamy każdą macierz, która powstaje z danej przez skreślenie pewnej liczby wierszy lub kolumn.

Def. Podmacierzą stopnia k macierzy kwadratowej **A** stopnia n ($k < n$) nazywamy każdą z macierzy powstałą z **A** przez skreślenie (n - k) wierszy i kolumn.
Gdy $k = n - 1$ otrzymujmy macierz $\mathbf{A_{ij}}$ – skreślając w **A** i-ty wiersz i j-tą kolumnę.

P2. Macierze prostokątne wymiaru 2x3 i 1x3, gdzie $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 0$, to np.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ (tzw. macierz wierszowa).

(a) Macierz **C** (kwadratowa stopnia 2) jest podmacierzą macierzy **A,** otrzymaną z **A** po skreśleniu pierwszej kolumny. Ile można utworzyć podmacierzy z macierzy A wymiaru 2x3?

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

(b) Czy macierze **B, B'** lub **C'** są też podmacierzami macierzy **A** ?

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (tzw. macierz kolumnowa)

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Odp. Tylko macierz **C'** nie jest podmacierzą macierzy **A** – posiada elementy tej macierzy, ale nie można jej utworzyć przez skreślenia pełnych wierszy lub kolumn.

Macierze równe, suma macierzy i iloczyn przez skalar

Def. Dwie macierze **A** = $[a_{ij}]_{pxr}$ i **B** = $[b_{ij}]_{mxn}$ nazywamy równymi, jeśli ich wymiary są równe (czyli $p = m$ i $r = n$) oraz wszystkie odpowiadające sobie elementy tych macierzy są identyczne,

tzn. $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdej pary indeksów $1 \le i \le p$, $1 \le j \le r$.

Def. Sumą dwóch macierzy **A** = $[a_{ij}]_{mxn}$ i **B** = $[b_{ij}]_{mxn}$ równych wymiarów nazywamy macierz **C** = $[c_{ij}]_{mxn}$, której każdy element jest sumą odpowiednich elementów macierzy **A** i **B**:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ dla każdej pary indeksów $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$.

Def. Iloczynem macierzy **A** = $[a_{ij}]_{mxn}$ i elementu $\lambda \neq 0$ z ciała ***K*** nazywamy taką macierz **B** = $[b_{ij}]_{mxn}$, której elementy są postaci

$b_{ij} = \lambda\, a_{ij}$ dla każdej pary indeksów $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$.

Uwaga: Operacje równości, sumy i mnożenia macierzy przez skalar są analogiczne, jak w rachunku wektorów.

Typy macierzy

Def. Macierzą diagonalną nazywamy kwadratową macierz $\mathbf{D} = [d_{\mathrm{ij}}]_{nxn}$ której wszystkie elementy o różnych indeksach $i \neq j$ (elementy pozadiagonalne) są zerami, tzn. $d_{\mathrm{ij}} = 0$, dla każdego $1 \leq i, j \leq n$.

Def. Macierzą trójkątną nazywamy kwadratową macierz $\mathbf{T} = [t_{\mathrm{ij}}]_{nxn}$ której wszystkie elementy pod (lub nad) główną przekątną są zerami, tzn. $d_{\mathrm{ij}} = 0$ dla $i > j$ (lub $i < j$).

P3. Macierz A jest macierzą diagonalną dla $a = 0$, natomiast dla $a \neq 0$ – macierzą trójkątną (tzw. górną).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a \\ 0 & \mathbf{2} & a \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

elementy diagonalne

Zad.1 Czy podmacierz A_{ii} macierzy diagonalnej (trójkątnej) jest tego samego typu?

Zad.2 Czy suma macierzy diagonalnych (trójkątnych) zachowuje typ macierzy?

Zad.3 Czy iloczyn przez skalar macierzy diagonalnej (trójkątnej) zachowuje typ macierzy?

Transpozycja macierzy

Def. Macierzą transponowaną macierzy $\mathbf{A} = [a_{\mathrm{ij}}]_{mxn}$ nazywamy taką macierz $\mathbf{B} = [b_{\mathrm{kl}}]_{nxm}$, dla której zachodzi równość

$$b_{\mathrm{kl}} = a_{\mathrm{lk}} \text{ dla każdej pary indeksów } 1 \le k \le n,\ 1 \le l \le m. \text{ Ozn. } \mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

P4. Macierzą transponowaną macierzy wierszowej jest macierz kolumnowa:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \text{ natomiast } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \text{ oraz } \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$$

Wn.1 Transpozycja macierzy trójkątnej górnej jest macierzą trójkątną dolną.

Wn.2 Transpozycja macierzy diagonalnej jest tą samą macierzą: $D^{T} = D$. Dlaczego?

Wn.3 Dla dowolnej macierzy $(A^{T})^{T} = A$

Macierz symetryczna i skośnie-symetryczna

Def. Macierzą symetryczną nazywamy kwadratową macierz $\mathbf{A} = [a_{\mathrm{ij}}]_{nxn}$,
dla której $a_{\mathrm{ij}} = a_{\mathrm{ji}}$ dla dowolnej pary indeksów $1 \le i, j \le n$.

Def. Macierzą skośnie-symetryczną nazywamy kwadratową macierz $\mathbf{A} = [a_{\mathrm{ij}}]_{nxn}$,
dla której $a_{\mathrm{ij}} = - a_{\mathrm{ji}}$ dla dowolnej pary indeksów $1 \le i, j \le n$.

P5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c & 0 & a \\ 0 & c & a \\ b & b & c \end{bmatrix}$ jest macierzą *symetryczną*, jeśli $a = b$ i c jest dowolnym elementem ciała $\boldsymbol{K}$, natomiast, gdy $a = - b$, to macierz **A** jest *skośnie*-*symetryczna*, o ile $c = 0$ – **dlaczego**?

Jeśli $a = b = c = 0$, to macierz $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ **i** jest to tzw. macierz zerowa stopnia 3.

Jeśli $a = b = 0$ i $c = 1$, to $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ jest tzw. macierzą jednostkową (diagonalna !).

Wn. Macierz A jest symetryczna $\Leftrightarrow$ $A^T = A$.

Wn. Macierz A jest skośnie-symetryczna $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}^T = – A$.

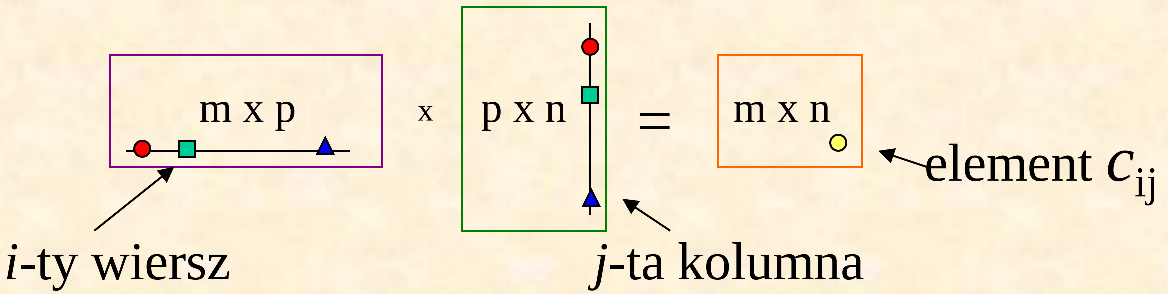
Zad.Zespolone macierze: hermitowska i skośnie-hermitowska – patrz w notatkach.

Iloczyn macierzowy

Def. Iloczynem dwóch macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mxp}$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{pxn}$ odpowiednich wymiarów nazywamy macierz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{mxn}$, której każdy element c_{ij} jest sumą iloczynów kolejnych elementów i-tego wiersza macierzy **A** i elementów j-tej kolumny macierzy **B**:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad \text{dla indeksów } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Wn. Schemat mnożenia macierzy **A B** = **C** wymaga zgodności wymiarów:



P6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 10 + 2\cdot(-1) \\ 0\cdot 0 + 3\cdot 1 & 0\cdot 10 + 3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = ?$

$$\mathbf{W} = [0 \quad 1] \quad \mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{W}\cdot\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = [1] \neq \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wn. Iloczyn macierzowy nie jest przemienny

Def. Macierze A i B, dla których zachodzi relacja **A B** = **B A** nazywamy macierzami komutującymi.

Def. Macierze A i B, dla których zachodzi relacja **A B** = – **B A** nazywamy macierzami anty-komutującymi.

Zad. Wskaż przykłady komutujących macierzy stopnia drugiego różnych od macierzy zerowej **0** i macierzy jednostkowej **I**.

Wn. Macierze blokowe: macierze o elementach będących macierzami niższych wymiarów. W szczególności, macierz ⇔ wektor kolumn lub wierszy:

np. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}$, gdzie $w_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}, w_2=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}, c_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, c_2=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$

Wn. Iloczyn macierzy niezerowych **A** i **B** może być macierzą zerową **A B** = **0**. Wówczas, takie macierze **A** i **B** nazywamy dzielnikami zera.

P7. Sprawdź, że dzielnikami zera są macierze: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Macierz odwrotna

Def. Macierzą odwrotną macierzy kwadratowej **A** nazywamy taką macierz **B**, dla której $\mathbf{A\,B} = \mathbf{B\,A} = \mathbf{I}$, ozn. $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Wn. Nie każda macierz posiada macierz odwrotną, jak np. macierz zerowa **0**, bo $\mathbf{0\,B} = \mathbf{B\,0} = \mathbf{0} \neq \mathbf{I}$.

Przykłady macierzy nieodwracalnych: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ - dlaczego?

P8. Macierze **A** i B: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

są wzajemnie odwrotne – sprawdź!

Tw. **(o macierzy odwrotnej iloczynu macierzy)**

Iloczyn macierzy odwracalnych jest macierzą odwracalną, przy czym $(\mathbf{A\,B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}$ (!!!).

Istotnie, z def. macierzy odwrotnej $(\mathbf{A\,B})(\mathbf{A\,B})^{-1} = \mathbf{I}$. Po lewostronnym mnożeniu tego równania kolejno przez macierze odwrotne $\mathbf{A}^{-1}$ oraz $\mathbf{B}^{-1}$ otrzymujemy tezę.

Tw. (o postaci macierzy odwrotnej macierzy stopnia 2)

Dla dowolnej macierzy kwadratowej stopnia 2 postaci: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
istnieje macierz odwrotna,
jeśli wyrażenia $w = a\,d - b\,c$ jest różne od zera: $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{w}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Dowód: sprawdź, że teza wynika z odwrócenia ogólnego układu 2 równań z 2 niewiadomymi: $\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

do układu równań względem u i v: $\begin{cases} Pu + Qv = x \\ Ru + Sv = y \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Pokaż, że wówczas wyznaczamy $P = d/w$, $Q = -b/w$, $R = -c/w$ i $S = a/w$.

P9. Rozwiązanie macierzowe układu 2 równań z 2 niewiadomymi jest postaci jak w dowodzie dane przez macierz odwrotną, np.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 10 \\ 7x - 15y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ dla } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 7 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -15 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Tw. (własności działań na macierzach)

Dla macierzy **A**, **B** i **C** (odpowiednich wymiarów!) nad ciałem ***K*** mamy:

(1) przemienność dodawania: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

(2) łączność dodawania: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

(3) łączność mnożenia: $\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{C}$

(4) rozdzielczość lewo/prawo-stronnego mnożenia względem dodawania:

$\mathbf{A}\,(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C}$ i $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{C} + \mathbf{B}\,\mathbf{C}$

(5) przemienność transponowania z dodawaniem: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(6) przemienność transponowania z mnożeniem: $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\,\mathbf{A}^T$

(**kolejność !!!**)

(7) element neutralny dodawania (macierz zerowa): $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

(8) element neutralny mnożenia (macierz jednostkowa): $\mathbf{A}\,\mathbf{I} = \mathbf{I}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$

Dowód: oprócz p.6 teza wynika bezpośrednio z definicji działań.

Zad.Udowodnij relację transpozycji iloczynu macierzy (Egzamin+/1_konsultacje).

Tw. (związek macierzy odwrotnej i transponowanej)

Jeżeli macierz **A** posiada macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$, to macierz transponowana $\mathbf{A}^{T}$ jest również macierzą odwracalną. Wówczas, $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$.

Istotnie, transpozycja warunku macierzy odwrotnej prowadzi do relacji:

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^{T} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{T} = \mathbf{I}^{T} = \mathbf{I}$$

co wobec p.6 powyższego Tw. daje warunek macierzy odwrotnej dla $\mathbf{A}^{T}$:

$(\mathbf{A}^{-1})^{T}\mathbf{A}^{T} = \mathbf{A}^{T}(\mathbf{A}^{-1})^{T} = \mathbf{I}$ czyli $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$ wg. definicji macierzy odwrotnej.

Tw. (**rozkład macierzy na sumę macierzy symetrycznej i skośnie-symetrycznej**)

Dla dowolnej macierz kwadratowej **A** istnieją dwie macierze:

macierz symetryczna **X** i macierz skośnie-symetryczna **Y**, takie że $\mathbf{A} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$.

Istotnie, należy przyjąć $\mathbf{X} = ½\,(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{T})$ oraz $\mathbf{Y} = ½\,(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{T})$. Wzory te wynikają z rozwiązania układu dwóch równań macierzowych postaci:

$\mathbf{A} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ (teza) i $\mathbf{A}^{T} = \mathbf{X}^{T} + \mathbf{Y}^{T}$ (transpozycja równania z tezy).

Sprawdź tezę jako ćwiczenie! W praktyce, np.: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$

Macierz ortogonalna

Def. Macierzą **ortogonalną** nazywamy kwadratową macierz **A**, jeśli

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\,\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Wn. Dla macierzy ortogonalnej: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.

Wn. Macierz jednostkowa **I** jest macierzą ortogonalną, bo $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}$.

Tw. **(o związku wierszy i kolumn macierzy ortogonalnych)**

Wiersze (kolumny) macierzy ortogonalnej dowolnego stopnia, rozumiane jako wektory, są wersorami parami wzajemnie prostopadłymi.

Dowód: wynika z def. macierzy ortogonalnej i mnożenia macierzy z użyciem mnożenia skalarnego wektorów jako wierszy macierzy A przez kolumny macierzy $\mathbf{A}^T$ oraz odwrotnie. Jeśli to jest widoczne to rozumiesz mnożenie macierzy.

Def. Ogólnie, macierz zespoloną $\mathbf{U} \in \mathbf{M}_{nxn}(\boldsymbol{C})$ nazywamy macierzą **unitarną**, jeśli

$$\boxed{\mathbf{U}\overline{\mathbf{U}}^T = \overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}}$$

Wn. Macierz odwrotna macierzy unitarnej **U** jest postaci : $\boxed{\mathbf{U}^{-1} = \overline{\mathbf{U}}^T}$.

Tw. (o postaci macierzy ortogonalnych stopnia drugiego)

Każda macierz ortogonalna stopnia 2 jest postaci:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$ dla pewnego kąta α.

Dowód: wynika bezpośrednio z definicji i tw. Pitagorasa.

Tw. (**o iloczynie macierzy ortogonalnych**)

Iloczyn $\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2$ macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną.

Istotnie, z def. $\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_1^T = \mathbf{I}$ i $\mathbf{A}_2\ \mathbf{A}_2^T = \mathbf{I}$. Niech $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ wówczas

$\mathbf{B}^T = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^T = \mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_1^T$ co łatwo daje warunek ortogonalności dla macierzy $\mathbf{B}$:

$\mathbf{B}\ \mathbf{B}^T = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^T = \mathbf{A}_1\ (\mathbf{A}_2\ \mathbf{A}_2^T)\mathbf{A}_1^T = \mathbf{A}_1\ \mathbf{I}\ \mathbf{A}_1^T = \mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_1^T = \mathbf{I}$.

Zad. (**konstrukcja macierzy ortogonalnej**)

Zbuduj macierz ortogonalną stopni 3, gdzie wiersz pierwszy będzie unormowanym wektorem powstałym z $w_1 = [1, 1, 1]$, a kolejne wiersze w_2 i w_3 będą wersorami prostopadłymi zarówno do siebie jak i do wektora w_1.

Test: co możesz powiedzieć o następujących macierzach?

1) Jakie mają własności dane macierze i ich iloczyny?

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \; \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \; \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2) Która z poniższych macierzy jest macierzą ortogonalną?

$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

3) Wyznacz $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T$, **AB** i **BA**. Jakie to są macierze?

4) Znajdź postać potęg macierzy $\mathbf{A}^n$ dla dowolnej liczby całkowitej n, jeśli

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Czy względem któregoś z działań na macierzach stanowią te macierze grupę?

5) Czy iloczyn macierzy trójkątnych górnych (dolnych) jest taką samą macierzą?

Algorytm Gaussa

Dozwolone elementarne przekształcenia wierszowe:

1) przestawianie wierszy: $w_i \longleftrightarrow w_j$

2) mnożenie wiersza w_i (element po elemencie) przez liczbę $\alpha \neq 0$: αw_i

3) dodanie do j-tego wiersza iloczynu wiersza i-tego przez liczbę $\alpha \neq 0$:

$$\alpha w_i \longrightarrow w_j$$

P1. Algorytm Gaussa - przejście od danej macierzy do macierzy diagonalnej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \left\{ \begin{matrix} (-1)w_3 \to w_1 \\ (-3)w_3 \to w_2 \end{matrix} \right\} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \left\{ \begin{matrix} (-\frac{1}{2})w_1 \to w_2 \\ w_2 \to w_3 \end{matrix} \right\} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wn. Odwracanie macierzy kwadratowej wg. algorytmu Gaussa – operacje wierszowe na macierzy blokowej: $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$.

P2.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] = [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$$

Przekształcenia elementarne na wierszach i kolumnach

Wn. Dozwolone przekształcenia algorytmu Gaussa są osiągane przez mnożenie lewostronnie danej macierzy przez elementarne macierze postaci, odpowiednio:

np.: (1) $\mathbf{E}_{1\leftrightarrow 2}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ (2) $\mathbf{M}_3(\alpha)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\alpha&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ (3) $\mathbf{M}_{3\to 1}(\alpha)=\begin{bmatrix}1&0&\alpha&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Wn. Mnożenie prawostronne przez powyższe macierze prowadzi do analogicznych operacji na kolumnach macierzy mnożonej.

Wn. Złożenie elementarnych przekształceń Gaussa na macierzach jest równoważne iloczynowi macierzy elementarnych w porządku od prawej do lewej.

P3. Pokaż, że w P1. macierz trójkątna-dolna jest osiągana L-mnożeniem przez

$\mathbf{M}_{3\to 2}(-3)\cdot\mathbf{M}_{3\to 1}(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$, zaś rezultat przez $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

Wyznaczniki

Def. Wyznacznikiem macierzy kwadratowej **A** stopnia n nazywamy takie przyporządkowanie det : **A** $\rightarrow$ **K** tej macierzy elementu z ciała **K**, które spełnia warunki: (a) jeśli **A** = [a] $\in M_{1x1}$(**K**) to det **A** = a,

(b) jeśli **A** = [a_{ij}] $\in M_{nxn}$(**K**), gdzie $n > 1$, to $\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{in} \det \mathbf{A}_{in}$, gdzie podmacierz $\mathbf{A}_{in} \in M_{(n-1)x(n-1)}$(**K**) (**A** bez ostatniej kolumny oraz i-tego wiersza).

Def. Minorem elementu a_{ij} macierzy **A** = [a_{ij}] nazywamy wyznacznik det A_{ij},

ozn. M_{ij} , natomiast dopełnieniem algebraicznym tego elementu jest wyrażenie

$$(-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Wn. Wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem elementów diagonalnych, np.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-10)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 10\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 10\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0+0+0+4\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4!$$

Zad. Czy wyznacznik macierzy diagonalnej jest także takim iloczynem? (Egz$^+$)

Macierz dołączona i konstrukcja macierzy odwrotnej

Def. Macierzą dołączoną $\mathbf{A}^D$ macierzy kwadratowej $\mathbf{A} \in M_{nxn}(\mathbf{K})$ nazywamy transponowaną macierz dopełnień algebraicznych poszczególnych elementów macierzy **A**, tj. $\mathbf{A}^D = [(-1)^{i+j} \det A_{ij}]^T \in M_{nxn}(\mathbf{K})$

Wn. Dla $\mathbf{A} \in M_{nxn}(\mathbf{K})$ mamy $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^D = \mathbf{A}^D\,\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\,\mathbf{I}$,

gdyż z definicji wyznacznika $\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{in} \det \mathbf{A}_{in} = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{A}^D\right]_{ni} a_{in}$

Def. Dla macierzy kwadratowej **A,** dla której $\det \mathbf{A} \neq 0$ (wówczas jest to tzw. macierz nieosobliwa) istnieje macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$ dana przez

$$\mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^D$$

P. Sprawdź odwracanie macierzy trójkątnej górnej wg powyższej konstrukcji:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tw. Laplace'a

Dla macierzy **A** ∈ M_{nxn}(**K**) stopnia *n* i dowolnych $i, j = 1, 2, \ldots, n$ zachodzą następujące równości (delta Kroneckera: $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ lub 1 dla $i = j$):

$$\delta_{ij} \det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{kj} \det \mathbf{A}_{ki} \qquad (*)$$

oraz

$$\delta_{ij} \det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{jk} \det \mathbf{A}_{ik} \qquad (**)$$

(*) – rozwinięcie wyznacznika macierzy A względem *i*-tej kolumny (dla $i = j$)

(**) – rozwinięcie wyznacznika macierzy A względem *i*-tego wiersza (dla $i = j$)

Wn.1 Wyznacznik dowolnej macierzy kwadratowej otrzymujemy mnożąc element po elemencie dowolny wiersz (kolumnę) przez dopełnienia algebraiczne elementów tego samego wiersza (kolumny), czyli dla $i = j$ w Tw. Laplace'a.

Wn.2 Wykonanie powyższej operacji dla różnych wierszy ($i \neq j$) daje zero.

Tw. (własności wyznacznika)

1. Wyznacznik macierzy diagonalnej jest iloczynem jej elementów diagonalnych,
2. Wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem jej elementów diagonalnych,
3. Wyznacznik macierzy zawierającej kolumnę (lub wiersz) samych zer jest równy zeru (tzw. macierz osobliwa),
4. $\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$
5. $\det(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = (\det \mathbf{A})\,(\det \mathbf{B})$ (tw. Cauchy'ego) $\Rightarrow$ $\det(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = (\det \mathbf{B}\,\mathbf{A})$
6. $\det(c_1, c_2,\ldots, a\,c_k + b\,d_k, \ldots c_n)$
   $= a\det(c_1, c_2,\ldots, c_k, \ldots c_n) + b\det(c_1, c_2,\ldots, d_k, \ldots c_n)$, $a, b \in \mathbf{K}$,
7. $\det(c_1, c_2,\ldots, c_k + a\,c_i, \ldots, c_n) = \det(c_1, c_2,\ldots, c_k, \ldots, c_n)$, $a \in \mathbf{K}$, (!)
8. $\det(c_1, c_2,\ldots,c_k,\ldots, c_p, \ldots c_n) = -\det(c_1, c_2,\ldots, c_p,\ldots, c_k, \ldots c_n)$,
9. $\det(c_1, c_k, c_3,\ldots,c_k,\ldots,c_n) = 0$,
10. Dla macierzy nieosobliwej $\det(\mathbf{A}^{-1}) = [\det \mathbf{A}]^{-1}$,

Wn. Wszystkie własności dla kolumn są również prawdziwe dla wierszy macierzy.

Metoda Sarrusa – wyznacznik macierzy stopnia 3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = ayw + xvc + ubz - cyu - zva - wbx$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \end{matrix}$$

$-$ z minusem

$+$ z plusem

iloczyny 3 elementów macierzowych

P.1

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0\cdot 6\cdot 3 + 1\cdot 7\cdot 1 + 2\cdot\alpha\cdot 2 - 1\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 7\cdot 0 - 3\cdot\alpha\cdot 1 = 0 + 7 + 4\alpha - 12 - 0 - 3\alpha = \alpha - 5$$

Dla α = 5 jest to macierz osobliwa, bo wówczas det **A** = 0.

P2. Układ 3 równań z 3 niewiadomymi o macierzy **A** z P1. dla α = 4, gdy det **A** = -1, ma rozwiązanie dane w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4b_1 + 5b_2 - 2b_3 \\ -b_1 + 2b_2 - b_3 \\ 5b_1 - 8b_2 + 4b_3 \end{bmatrix}$$

dla dowolnej kolumny wyrazów wolnych **b**.

Tw. Cramera

Def. Macierzą układu n równań liniowych o n niewiadomych nazywamy macierz **A** stopnia n, której elementy utworzone są przez kolejne współczynniki każdego z równań odpowiednio przy uporządkowanych zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Def. Jeżeli macierz **A** układu jest nieosobliwa to układ równań liniowych nazywamy układem Cramera.

Def. Wyznacznik det **A** nazywamy wyznacznikiem układu równań liniowych, natomiast $A_k = \det(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, \mathbf{b}, c_{k+1}, \ldots, c_n)$, gdzie **b** jest kolumną wyrazów wolnych rozważanego układu r-ń liniowych : $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Tw. Dla układu Cramera o macierzy $\mathbf{A} \in M_{nxn}(\mathbf{K})$ stopnia n jedynym rozwiązaniem jest :

$$x_k = \frac{A_k}{\det A} \quad \text{dla każdego } k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (*)$$

Wn. Jedynym rozwiązaniem jednorodnego (tzn. gdy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$) układu Cramera jest rozwiązanie zerowe, tzn. $x_k = 0$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$.

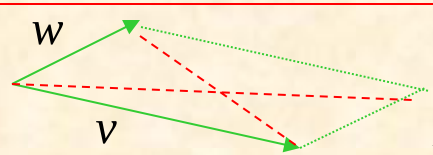
Istotnie, każdy wyznacznik A_k w (*) jest równy zeru, gdyż posiada kolumnę zer.

Zastosowanie wyznaczników

P3. Dla układu z P2. mamy rozwiązania dane teraz przez tw. Cramera (porównaj):

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -1, \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & 4 & 1 \\ b_2 & 6 & 2 \\ b_3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 4b_1 - 5b_2 + 2b_3, \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & 1 \\ 1 & b_2 & 2 \\ 2 & b_3 & 3 \end{vmatrix} = b_1 - 2b_2 + b_3, \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & b_1 \\ 1 & 6 & b_2 \\ 2 & 7 & b_3 \end{vmatrix} = -5b_1 + 8b_2 - 4b_3$$

Wn. (interpretacja geometryczna wyznacznika)



(a) Pole powierzchni równoległoboku rozpiętego

na wektorach $w=[a, b]$ i $v=[c, d]$ jest równe: $P(w,v) = \left|\det\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|$

(b) Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach

$w=[a, b, c]$, $v=[d, e, f]$ oraz $u=[g, h, \mathrm{k}]$ jest równa: $V(w,v,u) = \left|\det\begin{bmatrix} w \\ v \\ u \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}\right|$

(c) $V(w, v, u) = w \circ (v \times u)$ (iloczyn mieszany wektorów).

Wn. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

$w=[a, b, c]$, $v=[d, e, f]$ określa wyznacznik: $w \times v = \det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow |w \times v| = P(w,v)$

pole powierzchni równoległoboku

gdzie e_1, e_2, e_3 są wersorami osi układu współrzędnych.

Zastosowanie algorytmu Gaussa

Wn. (eliminacja Gaussa – obliczanie wyznacznika przez obniżanie jego stopnia)
Jeżeli $a_{11} \neq 0$ to z własności wyznacznika mamy tożsamościowo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} \text{, gdzie } \quad a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}$$

Jeżeli $a_{11} = 0$ wybieramy następny i-ty wiersz rozpoczynający się od $a_{i1} \neq 0$.

P. Wygodnie jest łączyć eliminację Gaussa z wykorzystaniem innych własności tożsamościowego przekształcania wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} 2 & 10 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -6 & -2 \\ 0 & 5-9\cdot 5 & 2-9\cdot 3 & 10+9\cdot 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ -8 & 6 & 2 \\ -40 & -25 & 28 \end{vmatrix} = -16 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/8 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -25 & 28+40/8 \end{vmatrix} = -16 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -25 & 33 \end{vmatrix} = ?$$

W tym przykładzie szybszą redukcję stopnia dałoby odjęcie kolumny 1-ej od 2-ej i rozwinięcie wyznacznika względem 3-go wiersz. Wskaż inne podobne sposoby.

Zad. Metoda kolumn jednostkowych – rozwiązanie układu Cramera – patrz literatura

Rząd macierzy

Def. Rzędem macierzy **A** nazywamy liczbę będącą najwyższym stopniem niezerowego minora tej macierzy – ozn. rz **A**.

Tw. (**własności rzędu macierzy**)

Rząd macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli wykonamy następującą operację:

(a) zamiana dwóch kolumn (wierszy) miejscami;

(b) dodanie do wybranego wiersza (kolumny) innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez dowolną liczbę λ z ciała **K** różną od zera;

(c) pomnożenie wybranego wiersza (kolumny) przez dowolną liczbę λ z ciała **K** różną od zera;

(d) pominiemy wiersz (kolumnę) samych zer.

Wn. (a) rz $\mathbf{A} = $ rz $\mathbf{A}^T$; (b) dla $\mathbf{A} \in M_{nxn}$ rz $\mathbf{A} = n$, gdy macierz jest nieosobliwa.

Wn. Stosując tw. sprowadza się dowolną macierz **A** do postaci diagonalnej **A'**, gdzie ilość jedynek na głównej przekątnej równa się rzędowi danej macierzy.

Rząd macierzy - przykład

$$rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 8 & -3 & 4 \end{bmatrix} = 3 \quad rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \quad rz\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ \boxed{2 \quad 4 \quad 6} \\ \boxed{4 \quad 8 \quad 12} \end{bmatrix} = 1$$

$$rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Tw. Kroneckera-Capelliego – ogólne układy równań liniowych

Ogólny układ m równań liniowych o n niewiadomych:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (*)$$

gdzie $\mathbf{A} \in M_{mxn}(\mathbf{K})$, $\mathbf{x} \in M_{nx1}(\mathbf{K})$ oraz $\mathbf{b} \in M_{mx1}(\mathbf{K})$,

posiada rozwiązanie (niekoniecznie jednoznaczne) $\Leftrightarrow$ rz $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ = rz $\mathbf{A}$.

W szczególności, gdy rz $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ = rz $\mathbf{A}$ = n to rozwiązanie jest dokładnie jedno.

Wn. Jeśli dla układu (*) zachodzi warunek: rz $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ = rz $\mathbf{A} = p = n < m$, to

(a) wybieramy p-równań spośród m tak, aby tworzyły one układ Cramera;

(b) jeśli również $p < n$, to $(n – p)$ zmiennych przyjmujemy za stałe parametry, tzn.
$x_{p+1} = c_1$, $x_{p+2} = c_2$, ..., $x_n = c_{n-p}$, dążąc do układu Cramera (det $\mathbf{A}' \neq 0$);

(c) rozwiązujemy otrzymany układ p-równań z p-niewiadomymi wg. Tw. Cramera,

przy czym rozwiązania będą zależeć od przyjętych $(n - p)$ parametrów c_k.

Równania płaszczyzny i prostej w przestrzeni R^3

Ogólne r-nie płaszczyzny: $A x + B y + C z = D$, $([A,B,C]o[x,y,z] = D)$

Odcinkowe r-nie płaszczyzny: $x/(D/A) + y/(D/B) + z/(D/C) = 1$, jeśli $D \neq 0$

Parametryczne r-nie płaszczyzny: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + c_1\, \mathbf{b}_1 + c_2\, \mathbf{b}_2$, gdzie c_1 i c_2 – parametry oraz $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{b}_1$ i $\mathbf{b}_2$ – pewne wektory, a $\mathbf{r} = [x, y, z]$

Krawędziowe r-nie prostej: $A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$,
$A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2$, gdy $A_1/A_2 \neq B_1/B_2 \neq C_1/C_2$

P. Rozwiązaniem równania $4x + 3y – z = 12$ (płaszczyzna przebijająca kolejne osie układu w punktach o wartościach 3, 4 i -12) uzyskanym wg. tw. K-C jest równanie parametryczne tej płaszczyzny: niech $x = c_1$ i $y = c_2$ wtedy rozwiązaniem jest $z = – 12 + 4c_1 + 3c_2$ i wektorowa postać równania tej płaszczyzny jest

$[x, y, z] = [c_1, c_2, – 12 + 4c_1 + 3c_2] = [0, 0,-12] + c_1[1, 0, 4] + c_2[0, 1, 3]$.

Dla jakich wartości parametrów c_1 i c_2 uzyskujemy punkty przebicia osi?

P. Rozwiąż i podaj interpretację graficzną układu r-ń: $x + y + z = 2x – 2y – 4z = 8$.

Kryterium istnienia rozwiązań układów jednorodnych

Tw. Na to, aby układ *n* równań liniowych jednorodnych o *n* niewiadomych posiadał rozwiązanie niezerowe potrzeba i wystarcza, żeby det **A** = 0.

Istotnie, gdy det **A** = 0, to rz [**A, 0**] = rz **A** = *p* < *n* (!) i wobec tw. K-C istnieje rozwiązanie niezerowe, gdy (*n* – *p*) zmiennych przyjmiemy za stałe parametry.

P. Układ 3 równań jednorodnych:

$$4x + 3y - z = 0;\ x - y + z = 0;\ 3x + 4y - 2z = 0$$

posiada niezerowe rozwiązanie, bo $\det\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} = 0$, więc rz **A** = 2, a stąd wg. Tw. K-C przyjmujemy 1=3-2 parametr i wybieramy 2 równania z 3 danych.

Niech $z = c_1$. Odrzucamy 3-cie r-nie, więc $4x + 3y = c_1$ i $x - y = -c_1$ (to jest układ Cramera), co daje wektorowe rozwiązanie parametryczne postaci:

$[x, y, z] = [-2c_1/7, 5c_1/7, c_1] = c_1[-2/7, 5/7, 1]$.

Jest to r-nie linii prostej o kierunku $\vec{w} = [-2, 5, 7]$ przechodzącej przez **0**.

Podaj rozwiązania uzyskane odrzucając pierwsze lub drugie równanie układu.

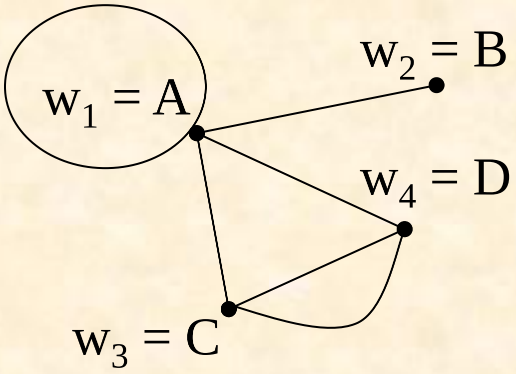
Macierze grafów

Def. Grafem G nazywamy parę zbiorów G = (W, K), gdzie W = $\{w_1, w_2,...,w_m\}$ jest zbiorem wierzchołków grafu i K = $\{k_{ij}$: krawędzie łączące pary w_i oraz w_j $\}$.

Def. Drogą długości *n* w grafie G = (W, K) nazywamy ciąg (*n*+1) wierzchołków z W połączonych *n* krawędziami ze zbioru K.

Def. Cykl to droga długości 1 o początku i końcu w tym samym wierzchołku.

Def. Droga cykliczna to droga o początku i końcu w jednym wierzchołku.



G = (W={A, B, C, D}, K={k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{34} , k_{34}'})

Drogą długości 3 w grafie G jest np. ciąg: DCAB.
Graf ten posiada jeden cykl k_{11} =AA i wiele dróg cyklicznych, np. DCD i DACD różnych długości.

<u>Uwaga</u>: Grafy są używane w analizie wielu problemów informatycznych:
począwszy od budowania algorytmów, po projektowanie sieci komputerowych i badanie przepływów sieciowych. Grafy opisują obiekty i ich wzajemne relacje.

Czego dowiemy się z analizy macierzy grafu?

Pyt.: Ile jest wszystkich dróg o długości n ?

Ile jest dróg o długości n wychodzących z danego $w_i \in W$?

Z którego wierzchołka wychodzi najwięcej dróg określonej długości n ?

Jaka jest minimalna długość n dróg łączących każde dwa wierzchołki ?

Def. Macierzą grafu G nazywamy macierz

$$\mathbf{M} = \left[m_{ij} \right], \text{ gdzie } m_{ij} = \begin{cases} p \text{ gdy } k_{ij} \in K \\ 0 \text{ gdy } k_{ij} \notin K \end{cases}$$

(p – ilość krawędzi łączących w_i oraz w_j)

Wn. Suma elementów danego wiersza (kolumny) macierzy grafu jest liczbą krawędzi grafu wychodzących z (wchodzących do) węzła o numerze tego wiersza.

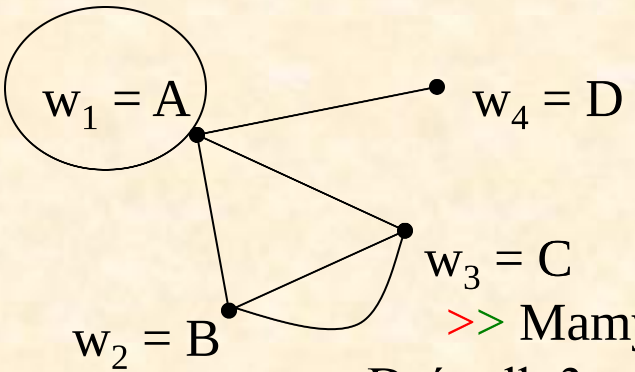
Wn. Elementy n-tej potęgi macierzy grafu G określają liczbę dróg długości n w G.

Istotnie, z def. mnożenia macierzowego mamy np. dla $n = 2$:

$M^2 = [m_{i1} m_{1j} + m_{i2} m_{2j} + m_{i3} m_{3j} + \ldots + m_{iw} m_{wj}]$ – suma dróg długości 2 między węzłami i oraz j przechodzących pośrednio przez wszystkie dostępne węzły grafu.

Przykład

Dla danego grafu G macierz ***M*** i jej kolejne potęgi ***M***^{k} będą postaci:



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{M}^3 = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 10 & 4 \\ 10 & 5 & 13 & 3 \\ 10 & 13 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

\>> Mamy np. 1 drogę dł. 2 z B do C ale aż 3 z B do A. Jakie?

\>> Dróg dł. 3 z wierzchołka A mamy 35, z B i C – po 31, z D – 11!

\>>> Minimalna długość dróg *n*, przy której każdy wierzchołek jest osiągalny z dowolnego innego lub niego samego to 2, bo już w macierzy M^2 nie ma elementu równego 0.

Zad.(a) Narysuj i scharakteryzuj graf G, dla którego macierz jest postaci:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

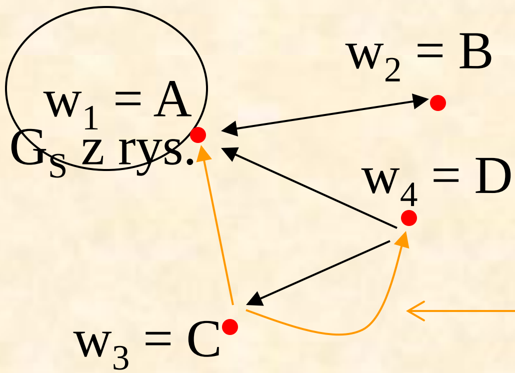
(b) Pokaż, że mimo istnienia 4 dróg cyklicznych dł. 2 dla węzła 3, to brak jest dróg cyklicznych dł. 3 dla tego węzła.

(c) Które węzły grafu G nie są połączone drogą dł. 2? Wskaż węzły o największej liczbie połączeń drogami o dł. 1, 2, 3 i 4.

Grafy skierowane

Def. Grafem skierowanym nazywamy graf G = (W, K), w którym każda krawędź k_{ij} ma nadany pewien kierunek: $w_i \rightarrow w_j$ lub $w_i \leftarrow w_j$ lub $w_i \leftrightarrow w_j$.

Wówczas, każdy element m_{ij} macierzy ***M*** grafu skierowanego określa liczbę krawędzi wychodzących z wierzchołka w_i i wchodzących do wierzchołka w_j.



Macierz grafu skierowanego G_S = (W, K_S) jest ogólnie macierzą niesymetryczną. Np. dla G_S z rys.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathbf{M}^4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Informacje zawarte w macierzy grafu prostego i skierowanego są analogiczne.

Zad. (a) Jak zmieni się macierz grafu G_S i jej potęgi przez dołączenie nowej krawędzi np. wychodzącej z D i wchodzącej do B na rys.?

(b) Czy taka zmiana wprowadzi możliwość obejścia grafu po wszystkich krawędziach jedną drogą bez powtórzeń?