ZESTAW 2

1. Niech $|A| = n$. Ile relacji binarnych można zdefiniować w zbiorze A?

2. Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Która z poniższych relacji binarnych w zbiorze A jest (i) zwrotna, (ii) przeciwzwrotna, (iii) symetryczna, (iv) antysymetryczna, (v) przechodnia?

a) $R_1 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

c) $R_3 = \{(2, 4), (4, 2)\}$

d) $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ **(praca domowa)**

e) $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ **(praca domowa)**

f) $R_6 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$ **(praca domowa)**

3. Która z poniższych relacji binarnych w zbiorze liczb rzeczywistych jest (i) zwrotna, (ii) przeciwzwrotna, (iii) symetryczna, (iv) antysymetryczna, (v) przechodnia?

a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy \geq 1\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > y\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = \pm y\}$

d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y\}$ **(praca domowa)**

e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y + 1\}$ **(praca domowa)**

f) $R_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y \leq 3\}$ **(praca domowa)**

4. Pokazać, że relacja binarna $R = \emptyset$ w niepustym zbiorze A nie jest zwrotna, ale jest symetryczna i przechodnia.

5. Pokazać, że relacja binarna $R = \emptyset$ w pustym zbiorze A jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. **(praca domowa)**

6. Niech $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ i $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ będą relacjami binarnymi na zbiorze $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$. Wyznaczyć relację $R_1 \oplus R_2$. **(praca domowa)**

7. Niech $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x < y\}$ i $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > y\}$. Wyznaczyć relację $R_1 \oplus R_2$.

8. Niech $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$ i $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$ będą odpowiednio relacjami binarnymi na zbiorach $\{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$ i $\{1,2,3,4\} \times \{0,1,2\}$. Wyznaczyć relację binarną $S \circ R$ na zbiorze $\{1,2,3\} \times \{0,1,2\}$.

9. Niech $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$ będzie relacją binarną w zbiorze $A = \{1,2,3,4\}$. Wyznaczyć

a) $R^2 = R \circ R$

b) $R^3 = R^2 \circ R$ **(praca domowa)**

c) $R^4 = R^3 \circ R$ **(praca domowa)**

d) $R^5 = R^4 \circ R$ **(praca domowa)**

10. Niech $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > y\}$, $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq y\}$, $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x < y\}$ i $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \leq y\}$. Wyznaczyć

a) $R_1 \circ R_1$

b) $R_1 \circ R_2$

c) $R_1 \circ R_3$ **(praca domowa)**

d) $R_1 \circ R_4$ **(praca domowa)**

DEFINICJE

1. Relacją binarną R w zbiorze A nazywamy dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $A \times A$.
2. Relacja binarna R w zbiorze A
   a) jest zwrotna $\iff \forall\, x \in A \quad (x,x) \in R$,
   b) nie jest zwrotna $\iff \exists\, x \in A \quad (x,x) \notin R$,
   c) jest przeciwzwrotna $\iff \forall\, x \in A \quad (x,x) \notin R$,
   d) nie jest przeciwzwrotna $\iff \exists\, x \in A \quad (x,x) \in R$,
   e) jest symetryczna $\iff \forall\, x,y \in A \quad (x,y) \in R \implies (y,x) \in R$,
   f) nie jest symetryczna $\iff \exists\, x,y \in A \quad (x,y) \in R \wedge (y,x) \notin R$,
   g) jest antysymetryczna $\iff \forall\, x,y \in A \quad (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \implies x = y$,
   h) nie jest antysymetryczna $\iff \exists\, x,y \in A \quad (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \wedge x \neq y$,
   i) jest przechodnia $\iff \forall\, x,y,z \in A \quad (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \implies (x,z) \in R$,
   j) nie jest przechodnia $\iff \exists\, x,y,z \in A \quad (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \wedge (x,z) \notin R$.
3. Niech $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$. Złożeniem relacji R z relacją S nazywamy relację $S \circ R \subseteq A \times C$ taką, że $S \circ R = \{(x,z) \in A \times C \colon \exists\, y \in B \quad (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$.