

Notatki Algebra i Geometria Liniowa

Mateusz Kojro

August 21, 2020

1 Wiadomości wstępne

1.1 Zbiory

Def Zbiór pusty: zbiór który nie zawiera żadnego elementu oznaczamy

$$A = \emptyset \quad (1)$$

Def Podzbiór: Mówimy że A jest podzbiorem B jeżeli:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow \forall a(a \in A \Rightarrow a \in B) \quad (2)$$

Def Zbiory równe Zbiory są równe jeżeli:

$$(A = B) \Leftrightarrow \forall a(a \in A \Leftrightarrow a \in B) \quad (3)$$

Def Suma Zbiorów Suma zbiorów A i B nazywamy

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad (4)$$

Def Iloczyn zbiorów Iloczyn zbiorów A i B nazywamy:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \quad (5)$$

Def Różnica zbiorów Różnica zbiorów nazywamy:

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \quad (6)$$

Def Alternatywa rozłączna (XOR) chyba

$$A \div B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\} \quad (7)$$

Def Iloczyn Kartezjański Iloczynem Kartezjańskim zbiorów nazywamy

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (8)$$

1.2 Odwzorowania

Def Odwzorowanie zbioru A w zbiór B każdemu elementowi a z zbioru A przyporządkujemy dokładnie jeden element b z B oznaczamy:

$$h : A \rightarrow B \quad (9)$$

Gdzie:

- Dziedzina : A
- Przeciwdziedzina odwzorowania A (obraz zbioru A) : $h(A) \subset B$
- Przeciwobraz zbioru B_1 : $A_1 = h^{-1}(B_1)$ taki że $h(A_1) \subset B_1$

Def Superpozycja (złożenie) złożeniem odwzorowań $h : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ nazywamy

$$g \circ h : A \rightarrow C \quad (10)$$

takie że

$$(g \circ h)(a) = g(h(a)) \quad \forall a \in A \quad (11)$$

Def Iniekcja (odwzorowanie różnowartościowe) $h : A \rightarrow B$ jest Iniekcją gdy:

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad h(a_1) = h(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad (12)$$

Def Surjekcja (odwzorowanie na) $h : A \rightarrow B$ jest Surjekcją gdy:

$$\forall b \in B \exists a \in A \quad h(a) = b \quad (13)$$

Def Bijekcja (odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne) Odwzorowanie jest Bijekcją jeżeli jest Iniekcją i Surjekcją

Def Odwzorowanie odwrotne jeżeli $h : A \rightarrow B$ jest Bijekcją to Odwzorowaniem odwrotnym nazywamy $h^{-1} : B \rightarrow A$ takie że

$$\forall a \in A \quad (h^{-1} \circ h)(a) = a \quad (14)$$

inaczej

$$h^{-1} \circ h = Id_A \quad (15)$$

Def Identyfikacja Odwzorowanie zbioru A w siebie w postaci $Id_A(a) = a$

2 Struktury Algebraiczne

2.1 Grupy

Def Zamknietosc wzoru wzgledem dzialania \oplus Zbiór A jest zamknięty względem \oplus (działanie \oplus jest wykonalne w zbiorze A) jeżeli:

$$\forall a, b \in A \exists c \in A \quad c = a \oplus b \quad (16)$$

Przykłady:

- Zbiór N nie jest jest zamknięty względem odejmowania
- Zbiór liczb całkowitych Z jest zamknięty względem $+$ i $*$ ale nie jest zamknięty względem \div bo wynik dzielenia liczb całkowitych może nie być liczbą całkowitą

Grupa Grupą nazywamy parę zbioru G z działaniem \circ względem którego zbiór jest zamknięty jeżeli spełnione są aksjomaty grupy:

- Prawo łączności: $\forall a, b, c \in G \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Istnienie elementu neutralnego: $\exists e \in G \forall a \in G \quad a \circ e = e \circ a = a$
- Istnienie elementu odwrotnego: $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G \quad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Grupa Abelowa (przemienna) Grupę nazywamy Abelową jeżeli jej działanie jest przemienne:

$$\forall a, b \in G \quad a \circ b = b \circ a \quad (17)$$

Przykłady ...

2.2 Ciała

Ciało Ciałem nazywamy zbiór K zawierający więcej niż jeden element i niech będzie zamknięty względem dwóch działań (\oplus, \circ) jeżeli zachodzą relacje:

- Przemienność dodawania: $a \oplus b = b \oplus a$
- Przemienność mnożenia: $a \circ b = b \circ a$
- Łączność dodawania: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
- Łączność mnożenia: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Rozdzielność \circ względem \oplus : $a \circ (b \oplus c) = a \circ b \oplus a \circ c$
- Istnienie zera: $\exists! \theta \in K \forall a \in K \quad a \oplus \theta = a$
- Wykonalność odejmowania: $\forall a, b \in K \exists! c \in K \quad a \oplus c = b$
- Wykonalność dzielenia: $\forall a, b \in K \text{ i } a \neq \theta \quad \exists! c \in K \quad a \circ c = b$

W związku z tym struktura (K, \oplus, \circ) jest ciałem względem działań $(\oplus, \circ) \Leftrightarrow$ struktury (K, \oplus) i (K, \circ) są grupami abelowymi z rozdzielnością \circ względem \oplus

2.3 Pierścienie

Def Pierścien (nieprzemienny) Pierścieniem nieprzemiennym nazywamy zbiór P będący grupą Abelową względem działania dodawania \oplus o elemencie neutralnym θ w którym spełnione jest Prawo łączności mnożenia \circ przy czym zachodzą oba prawa rozdzielności

$$a \circ (b \oplus c) = a \circ b \oplus a \circ c \text{ oraz } (a \oplus b) \circ c = a \circ c \oplus b \circ c \quad (18)$$

Def Pierścien (przemienny) jeżeli w zbiorze P zachodzi także prawo przemienności to pierścień jest przemienny

3 Cialo liczb zespolonych

3.1 Definicja

Cialo liczb zespolonych:

$$C = (R \times R, +', *) \quad (19)$$

3.2 Postac algebraiczna

Kazda liczbe zespolona $z = (a, b) \in C$ mozemy przedstawic w postaci algebraicznej

$$z = a + b * i, \quad i = \sqrt{-1} \quad (20)$$

3.3 Wlasnosci

- jezeli $z = a + bi$ to $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- jezeli $z = a + bi$ to $\phi = \arg(z)$ jezeli
 - $\cos\phi = \frac{a}{|z|}$
 - $\sin\phi = \frac{b}{|z|}$
 - jezeli $\phi < 2\pi$ to argument glowny ozn $\text{Arg}(z)$

3.4 Postac trygonometryczna

Licze zespolona $z = a + bi \neq 0$ moze byc zapisana w postaci geometrycznej:

$$z = |z|(\cos(\phi_0) + i \sin(\phi_0)) \quad \text{gdzie } \phi_0 = \text{Arg}(z) \quad (21)$$

Wzor de Moivre'a jezeli $z = |z|(\cos(\phi_0) + i \sin(\phi_0))$ to:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)) \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad (22)$$

Pierwiastki Zespolone jezeli $z = |z|(\cos(\phi_0) + i \sin(\phi_0))$ oraz $w \in C$, to rownanie $w^n = z$ ma dokladnie n rozwiazan:

$$w = z_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (23)$$

pierwiastkow zespolonych stopnia n z liczby zespolonej z gdzie:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos((\phi + 2k\pi)/n) + i \sin((\phi + 2k\pi)/n)) \quad (24)$$

3.5 Interpretacja geometryczna

Do zrobienia ...

3.6 Postac Eulera liczby zespolonej

$$z = |z|e^{i\phi}, \quad \text{gdzie } \phi = \arg(z) \quad (25)$$

4 Iloczyn Skalarny

4.1 Iloczyn Skalarny

Przyporządkowanie $V \times V \ni \rightarrow \langle x, y \rangle \in K$ nazywamy Iloczynem Skalarnym wektorów x, y

Przestrzeń Euklidesowa (Unitarna) natomiast to para $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nad ciałem skalarów K

jeżeli: V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K ($K \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{C} \dots$) każdej parze wektorów x, y przyporządkujemy skalar $\langle x, y \rangle$ taki że:

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in K$
- $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$, przy czym $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Przy czym wyróżniamy formy: - uzupełnić warunki form

- Forma dwuliniowa symetryczna (hermitowska)
- Forma kwadratowa
- Forma kwadratowa dodatnio określona

Dlatego iloczynem Skalarnym nazywa się dowolna forma dwuliniowa symetryczna lub hermitowska dodatnio określona

4.2 Twierdzenia

Twierdzenie Sylwestra: Macierz kwadratowa A jest dodatnio określona jeżeli wszystkie jej minory główne ostatnich elementów głównej przekątnej są dodatnie

Def Ślad Macierzy M ($Tr(M)$) jest sumą jej elementów diagonalnych m_{ii}

Def Długość wektora jeżeli $x \in (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ to długość wektora to:

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (26)$$

Def Kąt dwóch wektorów jeżeli wektory $x, y \in E = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ to ϕ jest kątem określonym:

$$\phi = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}\right) \quad (27)$$

Def Wektory ortogonalne wektory $x, y \in (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazywamy ortogonalnymi jeżeli:

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad (28)$$

jeżeli wektor jest zerowy to jest ortogonalny do każdego w E

Def Odległość wektorów Odległością wektorów $x, y \in E = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazywamy liczbę d :

$$d = |x - y| \quad (29)$$

Def jakiś dziwny wniosek o wektorach

Def Unormowanie niezerowego wektora to operacja na $x \in E = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazywamy operację dającą do utworzenia wektora:

$$\hat{x} = \frac{x}{|x|}, \text{ taki że } |\hat{x}| = 1 \quad (30)$$

Twierdzenie Pitagorasa (w ogólnych przestrzeniach wektorowych) dla ortogonalnych parami wektorów $x, y, z, \dots, w \in E = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zachodzi:

$$|x + y + z + \dots + w|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \dots + |w|^2 \quad (31)$$

Nierówność Schwarza dla dowolnych wektorów $x, y \in E = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zachodzi:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad (32)$$

Z nierówności Schwarza wynika nierówność trójkąta

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (33)$$

Ortogonalne bazy przestrzeni Euklidesa Niezerowe wektory $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ n -wymiarowej przestrzeni Euklidesowej $E = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tworzą bazę zwaną:

- Ortogonalna: jeżeli są parami prostopadłe
- Orto-normalna: gdy są parami prostopadłe i są wektorami

mamy wtedy:

$$\langle b_k, b_p \rangle = \delta_{kp} \quad (k, p = 1, 2, \dots, n) \quad (34)$$

Wnioski:

- W bazie ortogonalnej $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ współrzędne wektora x_k wektora x są w postaci:

$$(*) \quad x_k = \langle x, b_k \rangle / \langle b_k, b_k \rangle \quad (35)$$

i tworzą rzuty wektora x na kolejne wektory bazy

- W przestrzeni Euklidesowej z bazą orto-normalną iloczyn skalarny jest w postaci standardowej:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n \quad (36)$$

gdzie

$$n = \dim V$$

Istotnie wektory x i y są liniowymi kombinacjami wektorów bazy i teza wynika z liniowości iloczynu skalarnego wobec relacji (*)

Algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta Każda n -wymiarowa przestrzeń Euklidesowa posiada bazę Ortogonalną

Wnioski:

- Wiersze dowolnej macierzy ortogonalnej stopnia k stanowią bazę ortonormalną przestrzeni wektorowej R^k
- Wiersze macierzy kwadratowej stopnia k która spełnia $AA^T = D$ gdzie macierz D jest pewną macierzą diagonalną stanowią bazę ortogonalną przestrzeni wektorowej R^k

5 Przestrzeń Euklidesowa

Wektor ortogonalny do p.p.w. Jeżeli $E = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, a V_1 podprzestrzenią wektorową przestrzeni V to wektor $h \in V$ nazywamy wektorem ortogonalnym do podprzestrzeni V_1 , jeśli jest on ortogonalny do każdego wektora

$$y \in V_1 : \langle h, y \rangle = 0 \quad (37)$$

Wnioski Aby wektor $h \in V$ był ortogonalny do podprzestrzeni przestrzeni wektorowej V_1 wystarczy żeby był ortogonalny do wszystkich wektorów dowolnej bazy przestrzeni wektorowej V_1 – kompletnie tego nie ogarniam (wykład 2b str 1)

Def Podprzestrzenie ortogonalne V_1 i V_2 w przestrzeni Euklidesowej $E = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazywamy ortogonalnymi jeżeli dowolnie:

$$x \in V_1, y \in V_2 \quad (38)$$

sa Ortogonalne

Def Dopelnienie ortogonalne podprzestrzeni przestrzeni wektorowej to zbiór wszystkich wektorów przestrzeni wektorowej V ortogonalnych do podprzestrzeni przestrzeni wektorowej $V_1 \subset V$ oznaczamy:

$$V_1^\perp \quad (39)$$

Def Rzut wektora na podprzestrzeń przetrzedni wektorowej jeżeli V_1 jest p.p.w przestrzeni Euklidesowej $E = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ i dla każdego wektora $y \notin V_1$ wektor $y_0 \in V_1$ taki że wektor $h = y - y_0$ jest ortogonalny do V_1 to wektor y_0 jest rzutem wektora y na V_1

6 Macierze

6.1 Dodawanie (odejmowanie)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \\ q & r & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+q & e+r & f+t \end{bmatrix} \quad (40)$$

6.2 Mnożenie (dzielenie)

Mozliwe tylko wtedy kiedy $Kolumny(1) = Wiersze(2)$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & q \\ r & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a*x+b*z+c*r & a*y+b*q+c*f \\ d*x+e*z+f*r & d*y+e*q+f*t \end{bmatrix}$$

6.3 Wyznacznik Macierzy

oznaczamy:

$$\det A \text{ lub } |A| \quad (41)$$

obliczamy:

$$x \quad (42)$$

Macierz kwadratowa ktorej wyznacznik jest rowny 0 nazywamy *Osobliwa*

6.4 Rząd macierzy

6.5 Rozwiązywanie rownan macierzowych