Mateusz Łąpieś (138992)
mateusz.lapies@student.pk.edu.pl

Rozwiązania zadań domowych 1

Zadanie 1.

i) $a \circ b = a - b$ (naturalne)

Wewnętrzność

$$1,2 \in \boldsymbol{N}\ 1 \circ 2 = 1 - 2 = -1 \notin \boldsymbol{N}$$

zatem działanie $a \circ b$ nie jest wewnętrzne w **N**
Łączność
kontrprzykład

$$1,2,3 \in \boldsymbol{N}$$
$$1 \circ (2 \circ 3) = 1 \circ (2 - 3) = 1 - (2 - 3) = 2\ \epsilon \boldsymbol{N}$$
$$(1 \circ 2) \circ 3 = (1 - 2) \circ 3 = (1 - 2) - 3 = -4\ \notin \boldsymbol{N}$$

zatem działanie $a \circ b$ nie jest wewnętrzne w **N**
Przemienność
Jeżeli $a, b \in \boldsymbol{N}$ takie, że $a - b \in \boldsymbol{N}$, to

$$a \circ b = a - b = b - a = b \circ a$$

Działanie $a \circ b$ nie jest wewnętrzne w **N** zatem równość $a \circ b = b \circ a$ nie zachodzi w **N**.

iii) $a \oplus b = \frac{1}{2}(a + b)$ (całkowite)

Wewnętrzność

$$-2,1 \in \boldsymbol{Z} - 2 \oplus 1 = \frac{1}{2}(-2 + 1) = -\frac{1}{2}\ \notin \boldsymbol{Z}$$

zatem działanie $a \oplus b$ nie jest wewnętrzne w **Z**

Łączność
kontrprzykład

$$-1, -2, -3 \in \boldsymbol{Z}$$

$$-1 \oplus (-2 \oplus -3) = -1 \oplus \left(\frac{1}{2}\big(-2 + (-3)\big)\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + \left(\frac{1}{2}\big(-2 + (-3)\big)\right)\right) \notin \boldsymbol{Z}$$

$$(-1 \oplus -2) \oplus -3 = \left(\frac{1}{2}\big(-1 + (-2)\big)\right) \oplus -3 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\big(-2 + (-3)\big)\right) + (-3)\right) \notin \boldsymbol{Z}$$

zatem działanie $a \oplus b$ nie jest łączne w **Z**

Przemienność
Jeżeli $a, b \in \boldsymbol{Z}$ takie, że $\frac{1}{2}(a + b)\ \in \boldsymbol{Z}$, to

$$a \oplus b = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(b + a) = b \oplus a$$

Działanie $a \oplus b$ nie jest wewnętrzne w **Z** zatem równość $a \oplus b = b \oplus a$ nie zachodzi w **Z**

v) $a \oslash b = b$ (wymierne)
Wewnętrzność

$$\bigvee_{a,b\in \boldsymbol{Q}} a \oslash b = b \in \boldsymbol{Q}$$

zatem działanie $a \oslash b$ jest wewnętrzne w **Q**

Łączność

$$a, b, c \in \boldsymbol{Q}$$
$$a \oslash (b \oslash c) = a \oslash (c) = c$$
$$(a \oslash b) \oslash c = (b) \oslash c = c$$

Zatem działanie $a \oslash b$ jest łączne w **Q**

Wewnętrzność

$$\bigvee_{a,b\in \boldsymbol{Q}} a \oslash b \ = b = a = b \oslash a$$

sprzeczność, zatem działanie $a \oslash b$ nie jest wewnętrzne w **Q**

vii) $a \triangle b = a + a * b - b$ (rzeczywiste)

Wewnętrzność

$$\bigvee_{a,b\in \boldsymbol{R}} a \triangle b = a + a * b - b \ \in \boldsymbol{R}$$

ponieważ wszystkie działania (dodawania, odejmowania i mnożenia) są wewnętrzne w **R** zatem działanie $a \triangle b$ jest również wewnętrzne.

Łączność

kontrprzykład

$$2,3,4 \in \mathbf{R}$$
$$2 \triangle (3 \triangle 4) = 2 \triangle (3 + 3 * 4 - 4) = 2 + 2 * (3 + 3 * 4 - 4) - (3 + 3 * 4 - 4)$$
$$= 2 + 22 - 11 = 13$$
$$(2 \triangle 3) \triangle 4 = (2 + 2 * 3 - 3) \triangle 4 = (2 + 2 * 3 - 3) + (2 + 2 * 3 - 3) * 4 - 4$$
$$= 5 + 20 - 4 = 21$$

$2 \triangle (3 \triangle 4) \neq (2 \triangle 3) \triangle 4$ zatem $a \triangle b$ nie jest łączne w **R**.

Przemienność

$$10,30\epsilon\boldsymbol{R}$$
$$10 \triangle 30 = 10 + 10 * 30 - 30 = 30 + 10 * 30 - 10 = 30 \triangle 10$$
$$280 \neq 320$$

zatem działanie $a \triangle b$ nie jest przemienne w **R.**

Zadanie 2. Czy (R, ⊗), gdzie a ⊗ b = a · b + 3 · a + 3 · b + 6 jest grupą?

Wewnętrzność
Działania zawarte w działaniu ⊗ (mnożenie, dodawanie) są wewnętrzne w **R**.

Łączność
Niech $a, b, c \in \boldsymbol{R}$

$$\begin{aligned} a \otimes (b \otimes c) &= a \otimes (b * c + 3 * b + 3 * c + 6) \\ &= a * (b * c + 3 * b + 3 * c + 6) + 3 * a + 3 \\ &* (b * c + 3 * b + 3 * c + 6) + 6 \\ &= abc + 3ab + 3ac + 6a + 3a + 3bc + 9b + 9c + 18 + 6 \\ &= abc + 3ab + 3ac + 3bc + 9a + 9b + 9c + 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \otimes c &= (a * b + 3 * a + 3 * b + 6) \otimes c \\ &= (a * b + 3 * a + 3 * b + 6) * c + 3 * (a * b + 3 * a + 3 * b + 6) + 3 \\ &* c + 6 = abc + 3ac + 3bc + 6c + 3ab + 9a + 9b + 18 + 3c + 6 \\ &= abc + 3ab + 3ac + 3bc + 9a + 9b + 9c + 24 \end{aligned}$$

$$\bigvee_{a,b,c \in \boldsymbol{R}} a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$$

zatem działanie ⊗ jest łączne w **R**.

Element neutralny

Weźmy $e = -2$ wtedy

$$\bigvee_{a \in \boldsymbol{R}} a \otimes e = a * -2 + 3 * a + 3 * (-2) + 6 = a$$

czyli -2 jest elementem neutralnym działania ⊗.

Element odwrotny

Niech $a, a^{-1} \in \boldsymbol{R}$

$$\begin{aligned} &a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = e \\ &a * a^{-1} + 3a + 3a^{-1} + 6 = -2 \\ &a * a^{-1} + 3a + 3a^{-1} + 8 = 0 \end{aligned}$$

Element odwrotny nie istnieje, dlatego (**R**, ⊗) nie jest grupą.

Zadanie 3. Czy ({−1, 1}, ·), gdzie · to mnożenie indukowane z liczb rzeczywistych jest grupą abelową?

Wewnętrzność

·	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Na podstawie tabelki powyżej można stwierdzić, że działanie mnożenia w $\{-1,1\}$ jest wewnętrzne, ponieważ żadna z wartości nie wychodzi poza zdefiniowany zbiór.

Łączność

Działanie · jest łączne, ponieważ · jest łączne w **R**.

Element naturalny

Na podstawie tabelki, rząd dla wartości 1 zawiera te same wartości co wartości dla kolumn. Zatem elementem naturalnym $(\{-1,1\},\cdot)$ jest 1.

Element odwrotny

Dla każdej liczby z {-1,1} istnieje element odwrotny zatem $(\{-1,1\},\cdot)$ jest grupą

$$1^{-1} = 1 \; bo \; 1 * 1 = 1 * 1 = 1$$
$$(-1)^{-1} = 1 \; bo \; (-1) * 1 = (-1) * 1 = -1$$

Przemienność

Przemienność, abelowość grupy $(\{-1,1\},\cdot)$ jest uzasadnione tym, że · jest przemienne w **R**.

Zadanie 4. Czy (Z, ◦), gdzie a ◦ b = a + b + 2 jest grupą abelową?

Wewnętrzność

Działanie dodawania zawarte w ∘ jest wewnętrzne w **Z**.

Łączność

Działanie dodawania zawarte w ∘ jest łączne w **Z**.

Element neutralny

Weźmy $e = -2$ wtedy

$$\bigvee_{a \epsilon \boldsymbol{Z}} a \circ e = a + (-2) + 2 = a$$

czyli -2 jest elementem neutralnym działania ∘.

Element odwrotny

Niech $a, a^{-1} \epsilon \boldsymbol{Z}$

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

$$a^{-1} = -a - 4 \; bo \; a \circ a^{-1} = a + (-a - 4) + 2 = -2$$

zatem $(\{-1,1\},\cdot)$ jest grupą.

Przemienność

Przemienność, abelowość grupy $(\{-1,1\},\cdot)$ wynika z przemienności działania dodawania w **Z**

Zadanie 5.

i) Dodawanie jest wewnętrzne w **N** ponieważ dodawanie jest wewnętrzne w **R**
Dodawanie jest łączne w **N** ponieważ dodawanie jest łączne w **R**
Elementem naturalny
brak
Dodawania w **N** nie jest grupą

ii) Dodawanie jest wewnętrzne w **Q** ponieważ dodawanie jest wewnętrzne w **R**
Dodawanie jest łączne w **Q** ponieważ dodawanie jest wewnętrzne w **R**
Element naturalny
weźmy $e = 0 \in \boldsymbol{Q}$

$$\bigvee_{a \in \boldsymbol{Q}} a + e = e + a = a$$

Element odwrotny
niech $a, a^{-1} \in \boldsymbol{Q}$

$$a^{-1} = 0 \; bo \; a + a^{-1} = a + 0 = a$$

zatem dodawanie w **Q** jest grupą.

iii) Dodawanie jest grupą w **R** bo

iv) Dodawanie jest wewnętrzne w **Z** podzielnych przez 3ponieważ dodawanie jest wewnętrzne w **R**
Dodawanie jest łączne w **Z** podzielnych przez 3 ponieważ jest łączne w **R**
Element naturalny
weźmy $e = 0 \in \boldsymbol{Z} \; podzieln \; przez \; 3$

$$\bigvee_{a \in \boldsymbol{Q}} a + e = e + a = a$$

Element odwrotny
niech $a, a^{-1} \in \boldsymbol{Z} \; podzieln \; przez \; 3$

$$a^{-1} = 0 \; bo \; a + a^{-1} = a + 0 = a$$

zatem dodawanie w **Z** podzielnych przez 3 jest grupą

v) Jw. n, zamiast 3

vi) Dodawanie w zbiorze {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} nie jest grupą ponieważ nie każdy element zbioru ma element odwrotny (9).

vii) Dodawanie w zbiorze {0} jest grupą ponieważ zbiór {0} jest podzbiorem **R**.

viii) Dodawanie w **Z** nieparzystych nie jest grupą, ponieważ element naturalny nie istnieje dla tego działania.

Zadanie 6.

i) Mnożenie jest wewnętrzne w $\{\mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.
Mnożenie jest łączne w $\{\mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.
Element naturalny
weźmy $e = 1 \in \boldsymbol{Z}$

$$\bigvee_{a \in \{\boldsymbol{Z} \setminus \{0\}\}} a * e = a * 1 = a$$

Element odwrotny

brak elementu odwrotnego, działanie mnożenia w $\{\boldsymbol{Z} \setminus \{0\}\}$ nie jest grupą

ii) Mnożenie jest wewnętrzne w **Q** ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.

Mnożenie jest łączne w **Q** ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.

Element naturalny

weźmy $e = 1 \in \mathbf{Q}$

$$\bigvee_{a \in \boldsymbol{Q}} a * e = a * 1 = a$$

Element odwrotny

kontrprzykład

niech $\mathrm{a} = 0$ i $\mathrm{a}^{-1} \in \mathbf{Q}$

$$a * a^{-1} = 0 * a^{-1} = 0 \neq e$$

zatem działanie mnożenia w $\{\mathbf{Q} \setminus \{0\}\}$ nie jest grupą

iii) Mnożenie jest wewnętrzne w $\{\mathbf{Q} \setminus \{0\}\}$ ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.

Mnożenie jest łączne w $\{\mathbf{Q} \setminus \{0\}\}$ ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.

Element naturalny

weźmy $e = 1 \in \{\mathbf{Q} \setminus \{0\}\}$

$$\bigvee_{a \in \{\mathbf{Q} \setminus \{0\}\}} a * e = a * 1 = a$$

Element odwrotny

kontrprzykład

niech $\mathrm{a}, \mathrm{a}^{-1} \in \{\mathbf{Q} \setminus \{0\}\}$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \; bo \; a * a^{-1} = a * \frac{1}{a} = 1 = e$$

zatem działanie mnożenia w $\{\mathbf{Q} \setminus \{0\}\}$ jest grupą.

iv) Tak jak w przypadku ii

v) Tak jak w przypadku iii

vi) Mnożenie jest wewnętrzne w $\boldsymbol{R}_+$ ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.

Mnożenie jest łączne w $\boldsymbol{R}_+$ ponieważ mnożenie jest łączne w **R**.

Element naturalny

weźmy $e = 1 \in \boldsymbol{R}_+$

$$\bigvee_{a \in \boldsymbol{R}_+} a * e = a * 1 = a$$

Element odwrotny

kontrprzykład

niech $\mathrm{a}, \mathrm{a}^{-1} \in \boldsymbol{R}_+$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \; bo \; a * a^{-1} = a * \frac{1}{a} = 1 = e$$

zatem działanie mnożenia w $\boldsymbol{R}_+$ jest grupą.