Mateusz Łąpieś (138992)  
mateusz.lapies@student.pk.edu.pl

Rozwiązania zadań domowych 1

Zadanie 1.

i) (naturalne)

Wewnętrzność  
zatem działanie nie jest wewnętrzne w **N**Łączność  
kontrprzykład  
zatem działanie nie jest wewnętrzne w **N**Przemienność  
Jeżeli takie, że , to  
Działanie nie jest wewnętrzne w **N** zatem równość nie zachodzi w **N**.

iii) (całkowite)

Wewnętrzność  
 zatem działanie nie jest wewnętrzne w **Z**

Łączność  
kontrprzykład

zatem działanie nie jest łączne w **Z**

Przemienność  
Jeżeli takie, że , to  
Działanie nie jest wewnętrzne w **Z** zatem równość nie zachodzi w **Z**

v) (wymierne)  
Wewnętrzność

zatem działanie jest wewnętrzne w **Q**

Łączność

Zatem działanie jest łączne w **Q**

Wewnętrzność

sprzeczność, zatem działanie nie jest wewnętrzne w **Q**

vii) (rzeczywiste)

Wewnętrzność

ponieważ wszystkie działania (dodawania, odejmowania i mnożenia) są wewnętrzne w **R** zatem działanie jest również wewnętrzne.

Łączność

kontrprzykład

zatem nie jest łączne w **R**.

Przemienność

zatem działanie nie jest przemienne w **R.**

Zadanie 2. Czy (R, ⊗), gdzie a ⊗ b = a · b + 3 · a + 3 · b + 6 jest grupą?

Wewnętrzność  
Działania zawarte w działaniu (mnożenie, dodawanie) są wewnętrzne w **R**.

Łączność  
Niech

zatem działanie jest łączne w **R**.

Element neutralny

Weźmy wtedy

czyli -2 jest elementem neutralnym działania .

Element odwrotny

Niech

Element odwrotny nie istnieje, dlatego (**R**, nie jest grupą.

Zadanie 3. Czy ({−1, 1}, ·), gdzie · to mnożenie indukowane z liczb rzeczywistych jest grupą abelową?

Wewnętrzność

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 |
| -1 | -1 | 1 |

Na podstawie tabelki powyżej można stwierdzić, że działanie mnożenia w jest wewnętrzne, ponieważ żadna z wartości nie wychodzi poza zdefiniowany zbiór.

Łączność

Działanie jest łączne, ponieważ jest łączne w **R**.

Element naturalny

Na podstawie tabelki, rząd dla wartości 1 zawiera te same wartości co wartości dla kolumn. Zatem elementem naturalnym jest 1.

Element odwrotny

Dla każdej liczby z {-1,1} istnieje element odwrotny zatem jest grupą

Przemienność

Przemienność, abelowość grupy jest uzasadnione tym, że jest przemienne w **R**.

Zadanie 4. Czy (Z, ◦), gdzie a ◦ b = a + b + 2 jest grupą abelową?

Wewnętrzność

Działanie dodawania zawarte w jest wewnętrzne w **Z**.

Łączność

Działanie dodawania zawarte w jest łączne w **Z**.

Element neutralny

Weźmy wtedy

czyli -2 jest elementem neutralnym działania .

Element odwrotny

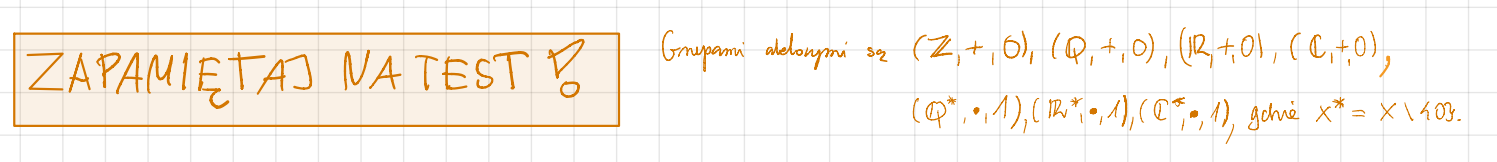
Niech

zatem jest grupą.

Przemienność

Przemienność, abelowość grupy wynika z przemienności działania dodawania w **Z**

Zadanie 5.

1. Dodawanie jest wewnętrzne w **N** ponieważ dodawanie jest wewnętrzne w **R**  
   Dodawanie jest łączne w **N** ponieważ dodawanie jest łączne w **R**  
   Elementem naturalny  
   brak  
   Dodawania w **N** nie jest grupą
2. Dodawanie jest wewnętrzne w **Q** ponieważ dodawanie jest wewnętrzne w **R**  
   Dodawanie jest łączne w **Q** ponieważ dodawanie jest wewnętrzne w **R**Element naturalny  
   weźmy Element odwrotny  
   niech zatem dodawanie w **Q** jest grupą.
3. Dodawanie jest grupą w **R** bo  
   
4. Dodawanie jest wewnętrzne w **Z** podzielnych przez 3ponieważ dodawanie jest wewnętrzne w **R**Dodawanie jest łączne w **Z** podzielnych przez 3 ponieważ jest łączne w **R**  
   Element naturalny  
   weźmy Element odwrotny  
   niech zatem dodawanie w **Z** podzielnych przez 3 jest grupą
5. Jw. n, zamiast 3
6. Dodawanie w zbiorze {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} nie jest grupą ponieważ nie każdy element zbioru ma element odwrotny (9).
7. Dodawanie w zbiorze {0} jest grupą ponieważ zbiór {0} jest podzbiorem **R**.
8. Dodawanie w **Z** nieparzystych nie jest grupą, ponieważ element naturalny nie istnieje dla tego działania.

Zadanie 6.

1. Mnożenie jest wewnętrzne w ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.  
   Mnożenie jest łączne w ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.  
   Element naturalny  
   weźmy   
   Element odwrotny  
   brak elementu odwrotnego, działanie mnożenia w nie jest grupą
2. Mnożenie jest wewnętrzne w **Q** ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.  
   Mnożenie jest łączne w **Q** ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.  
   Element naturalny  
   weźmy   
   Element odwrotny  
   kontrprzykład  
   niech

zatem działanie mnożenia w nie jest grupą

1. Mnożenie jest wewnętrzne w ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.  
   Mnożenie jest łączne w ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.  
   Element naturalny  
   weźmy   
   Element odwrotny  
   kontrprzykład  
   niech

zatem działanie mnożenia w jest grupą.

1. Tak jak w przypadku ii
2. Tak jak w przypadku iii
3. Mnożenie jest wewnętrzne w ponieważ mnożenie jest wewnętrzne w **R**.  
   Mnożenie jest łączne w ponieważ mnożenie jest łączne w **R**.  
   Element naturalny  
   weźmy   
   Element odwrotny  
   kontrprzykład  
   niech

zatem działanie mnożenia w jest grupą.