Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

Wydział Matematyki i Informatyki

Krzysztof Dyczkowski

Osobliwe zbiory rozmyte i ich własności

Praca doktorska przygotowana pod kierunkiem
prof. UAM dra hab. Macieja Wygralaka
w Zakładzie Metod Numerycznych

Poznań 2002

Chciałbym gorąco podziękować mojemu promotorowi
prof. dr hab. Maciejowi Wygralakowi, bez którego
opieki promotorskiej oraz wielkiej cierpliwości
nie byłoby możliwe powstanie niniejszej pracy.

Spis treści

Wstęp **4**

1 Normy triangularne **6**

1.1 Pojęcie normy triangularnej 6

1.2 Archimedesowe normy triangularne 12

1.3 Negacje 16

2 Elementy teorii zbiorów rozmytych **22**

2.1 Algebra zbiorów rozmytych 23

2.2 Moc zbioru rozmytego 26

3 Osobliwe zbiory rozmyte **37**

3.1 Pojęcie osobliwości zbioru rozmytego 37

3.2 Kryteria osobliwości 39

3.3 Przypadek negacji indukowanej 47

4 Osobliwość a rozmytość zbioru rozmytego **50**

4.1 Osobliwość zbioru rozmytego stałego na nośniku 50

4.2 Miary rozmytości 54

Wstęp

Pojęcie zbioru rozmytego, czyli mnogości mającej za podstawę logiczną logikę wielowartościową wprowadzone zostało przez Lotfi A. Zadeha w roku 1965 ([31]). Zapoczątkowało to dynamiczny rozwój nowych teorii i metod w informatyce, matematyce, sterowaniu i automatyce oraz w innych dziedzinach nauki, techniki i technologii. Jednym z podstawowych zagadnień w ramach teorii zbiorów rozmytych są ich moce. Problem jest istotny nie tylko z teoretycznego (matematycznego) punktu widzenia. Ma on też doniosłe znaczenie aplikacyjne np. w zagadnieniach komunikacji z bazami danych i internetem, podejmowania decyzji w warunkach nieostrości informacji, modelowania znaczeń wyrażeń języka naturalnego i kwantyfikatorów lingwistycznych itd. (patrz [2], [3], [14], [22], [32-36]).

Badania nad teorią mocy zbiorów rozmytych trwają od lat 70-tych XX w., koncentrując się wokół dwóch głównych podejść: skalarnego ([2], [8], [11], [17, 18], [22], [29], [32]) oraz określającego moc zbioru rozmytego jako rozmyty zbiór liczb kardynalnych w zwykłym sensie ([2], [12], [25], [27, 28, 30], [33, 34]). Tego drugiego nurtu dotyczy niniejsza dysertacja. Dokładniej mówiąc, tematem rozważań będą uogólnione liczby kardynalne typu $FECount$ dla skończonych zbiorów rozmytych z operacjami indukowanymi przez normy i konormy triangularne. W pracy [30] zauważono, że używając wówczas nieścisłych archimedesowych t-norm, pewne zbiory rozmyte stają się osobliwe co do mocy, w tym znaczeniu, że ich uogólnione liczby kardynalne stają się ciągiem samych zer. Oznacza to całkowite niepodobieństwo zbioru rozmytego do zbioru jakiejkolwiek mocy i może utrudniać podejmowanie decyzji, jeśli jej podstawą jest ocena mocy tego zbioru rozmytego. Celem przygotowanej dysertacji jest zbadanie zjawiska osobliwości.

Organizacja rozprawy jest następująca:

W rozdziale 1 przedstawione zostały elementy teorii norm triangularnych przydatne w zasadniczej części rozważań. Omówiono w nim własności tych operacji ze szczególnym uwzględnieniem archimedesowych t-norm. Ostatni paragraf dotyczy negacji, w tym negacji indukowanych.

Rozdział 2 prezentuje elementy teorii zbiorów rozmytych i ich algebry. Zawiera też przegląd głównych współczesnych podejść do zagadnienia mocy zbioru rozmytego. W szczególności przedstawione zostały uogólnione liczby kardynalne typu $FGCount$, $FLCount$ i $FECount$ zbiorów rozmytych z operacjami triangularnymi.

Zasadniczą część rozprawy stanowią rozdziały 3 i 4. W pierwszym z nich zdefiniowano pojęcie osobliwości zbioru rozmytego, a następnie sformułowano jego własności oraz kryteria osobliwości. Zauważono też związek zjawiska osobliwości z rozmytością. Wątek ten jest rozważany w rozdziale 4, a punkt wyjścia stanowi kwestia osobliwości zbiorów rozmytych stałych na nośniku. Uzyskane rezultaty wykorzystane zostały w podrozdziale 4.2. Zdefiniowano w nim najpierw pewną relację częściowo porządkującą zbiory rozmyte ze względu na ich stopnie rozmytości, wykorzystującą pojęcie punktu stałego ścisłej negacji. Zauważono, że element późniejszy w sensie tej relacji jest osobliwy, jeśli element wcześniejszy jest też osobliwy. Skonstruowano dalej odpowiednią rodzinę miar rozmytości oraz podano twierdzenie charakteryzujące te miary.

Rozprawę zamyka spis wykorzystanej literatury przedmiotu.

Rozdział 1

Normy triangularne

Na początek przedstawimy elementy teorii norm triangularnych, które będą przydatne w dalszych rozważaniach. Monograficzne ujęcie tego tematu można znaleźć np. w [7, 13, 16].

We wszystkich częściach niniejszej pracy wykorzystywać będziemy następujące oznaczenia: $:=$ - równość z definicji, $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$, & - spójnik koniunkcji, $\perp$ - spójnik alternatywy; pozostałe spójniki logiczne mają oznaczenia klasyczne.

1.1 Pojęcie normy triangularnej

Historia norm triangularnych sięga lat 40-tych XX wieku, gdy Karl Menger rozważał zagadnienie probabilistycznych przestrzeni metrycznych ([19]). Normy triangularne (trójkątne) pojawiły się jako narzędzie służące uogólnieniu nierówności trójkąta na przypadek takich przestrzeni (stąd ich nazwa). Problematykę tę rozwinęli później w latach 60-tych Schweizer i Sklar w [23, 24]. W latach 80-tych zauważono, iż normy triangularne znakomicie nadają się do interpretacji numerycznej spójników logicznych w logikach wielowartościowych ([7]).

Definicja 1.1. *Binarną operację* $\boldsymbol{t} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *nazywamy normą triangularną (w skrócie: t-normą), gdy spełnione są następujące warunki:*

(TN1) $\forall a, b \in [0,1] :\ a\, \boldsymbol{t}\, b = b\, \boldsymbol{t}\, a,$ *(przemienność)*

(TN2) $\forall a, b, c \in [0,1] :\ (a\, \boldsymbol{t}\, b)\, \boldsymbol{t}\, c = a\, \boldsymbol{t}\, (b\, \boldsymbol{t}\, c),$ *(łączność)*

(TN3) $\forall a, b, c, d \in [0,1] :\ (a \leqslant b\ \&\ c \leqslant d) \Rightarrow a\, \boldsymbol{t}\, c \leqslant b\, \boldsymbol{t}\, d,$ *(monotoniczność)*

(TN4) $\forall a \in [0,1] :\ a\, \boldsymbol{t}\, 1 = a.$ *(1- element neutralny)*

Definicja 1.2. *Binarną operację* $\boldsymbol{s} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *nazywamy konormą triangularną (w skrócie: t-konormą), gdy* $\boldsymbol{s}$ *spełnia warunki* ***TN1-TN3*** *oraz warunek*

(TK5) $\forall a \in [0,1] :\ a\, \boldsymbol{s}\, 0 = a.$ *(0- element neutralny)*

t-Normy i t-konormy nazywać będziemy łącznie *operacjami triangularnymi (t-operacjami).* Podstawowymi przykładami t-operacji są:

1. t-norma minimum $\wedge$

$$a \wedge b := min(a, b),$$

2. t-konorma maximum $\vee$

$$a \vee b := max(a, b),$$

3. t-norma drastyczna $\boldsymbol{t}_d$

$$a\, \boldsymbol{t}_d\, b := \begin{cases} a \wedge b, & \text{gdy } a \vee b = 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

4. t-konorma drastyczna $\boldsymbol{s}_d$

$$a \, \boldsymbol{s}_d \, b := \begin{cases} a \vee b, & \text{gdy } a \wedge b = 0, \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

5. t-norma algebraiczna $\boldsymbol{t}_a$

$$a \, \boldsymbol{t}_a \, b := ab,$$

6. t-konorma algebraiczna $\boldsymbol{s}_a$

$$a \, \boldsymbol{s}_a \, b := a + b - ab,$$

7. t-norma Łukasiewicza $\boldsymbol{t}_Ł$

$$a \, \boldsymbol{t}_Ł \, b := 0 \vee (a + b - 1),$$

8. t-konorma Łukasiewicza $\boldsymbol{s}_Ł$

$$a \, \boldsymbol{s}_Ł \, b := 1 \wedge (a + b).$$

Twierdzenie 1.3. *Dla dowolnej t-normy* $\boldsymbol{t}$ *i t-konormy* $\boldsymbol{s}$ *oraz* $a, b, c \in [0, 1]$ *spełnione są następujące własności:*

(a) $a \, \boldsymbol{t} \, 0 = 0$, $a \, \boldsymbol{s} \, 1 = 1$,

(b) $a \, \boldsymbol{t}_d b \leqslant a \, \boldsymbol{t} \, b \leqslant a \wedge b \leqslant a \vee b \leqslant a \, \boldsymbol{s} \, b \leqslant a \, \boldsymbol{s}_d b$,

(c) $a \, \boldsymbol{t} \, a \leqslant a \leqslant a \, \boldsymbol{s} \, a$,

(d) $a \, \boldsymbol{t} \, b = 1 \;\Leftrightarrow\; a = b = 1$,

(e) $a \, \boldsymbol{s} \, b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b = 0$,

(f) $(\forall a \in [0, 1] : \; a \, \boldsymbol{t} \, a = a) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{t} = \wedge$, *(g)* $(\forall a \in [0,1] :\ a\, \boldsymbol{s}\, a = a) \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{s} = \vee$,

(h) $(\forall a, b, c \in [0,1] :\ a\, \boldsymbol{t}\, (b\, \boldsymbol{s}\, c) = (a\, \boldsymbol{t}\, b)\, \boldsymbol{s}\, (a\, \boldsymbol{t}\, c)) \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{s} = \vee$,

(i) $(\forall a, b, c \in [0,1] :\ a\, \boldsymbol{s}\, (b\, \boldsymbol{t}\, c) = (a\, \boldsymbol{s}\, b)\, \boldsymbol{t}\, (a\, \boldsymbol{s}\, c)) \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{t} = \wedge$.

Dowód. Ustalmy dowolne $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}$ oraz $a, b, c \in [0,1]$.
(a) Z (TN1), (TN3) oraz (TN4) wynika, że $a\, \boldsymbol{t}\, 0 = 0\, \boldsymbol{t}\, a \leqslant 0\, \boldsymbol{t}\, 1 = 0$, tzn. $a\, \boldsymbol{t}\, 0 = 0$. Uzasadnienie równości $a\, \boldsymbol{s}\, 1 = 1$ jest analogiczne.
(b) $a\, \boldsymbol{t}\, b \leqslant 1\, \boldsymbol{t}\, b = b$ na mocy (TN3) i (TN4), a przez symetrię także $a\, \boldsymbol{t}\, b \leqslant a$, skąd $a\, \boldsymbol{t}\, b \leqslant a \wedge b$. Z drugiej strony, jeżeli $a \vee b = 1$, to $a = 1$ lub $b = 1$, a więc (TN4) implikuje $a\, \boldsymbol{t}\, b = a \wedge b = a\, \boldsymbol{t}_d\, b$. Jeżeli natomiast $a \vee b < 1$, to $a\, \boldsymbol{t}_d\, b = 0 \leqslant a\, \boldsymbol{t}\, b$, co dowodzi nierówności $a\, \boldsymbol{t}_d b \leqslant a\, \boldsymbol{t}\, b$. Dowód $a \vee b \leqslant a\, \boldsymbol{s}\, b \leqslant a\, \boldsymbol{s}_d\, b$ pomijamy jako analogiczny.
(c) Teza wynika z (b) przez położenie $b := a$.
(d) Wynikanie $a = b = 1 \ \Rightarrow\ a\, \boldsymbol{t}\, b = 1$ jest konsekwencją (TN4), a (b) implikuje $a\, \boldsymbol{t}\, b = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1 \Rightarrow a = b = 1$. Dowód dla **(e)** jest podobny.
(f) Wystarczy pokazać ($\Rightarrow$). Jeżeli $a\, \boldsymbol{t}\, a = a$ dla każdego $a \in [0,1]$, to na mocy (TN3) i (b) otrzymujemy $a = a\, \boldsymbol{t}\, a \leqslant a\, \boldsymbol{t}\, b \leqslant a \wedge b = a$ dla $b \geqslant a$ tzn. $a\, \boldsymbol{t}\, b = a$. Stąd przez symetrię $a\, \boldsymbol{t}\, b = b$ przy $b \leqslant a$. Zatem $\boldsymbol{t} = \wedge$. Dowód **(g)** jest znów analogiczny.
(h) Wynikanie ($\Leftarrow$) jest prostą konsekwencją postulatu monotoniczności (TN3). Załóżmy, że $a\, \boldsymbol{t}\, (b\, \boldsymbol{s}\, c) = (a\, \boldsymbol{t}\, b)\, \boldsymbol{s}\, (a\, \boldsymbol{t}\, c)$ dla każdego $a, b, c \in [0,1]$. Na mocy (TN4) oraz (a) mamy zatem $a\, \boldsymbol{s}\, (a\, \boldsymbol{t}\, b) = (a\, \boldsymbol{t}\, 1)\, \boldsymbol{s}\, (a\, \boldsymbol{t}\, b) = a\, \boldsymbol{t}\, (1\, \boldsymbol{s}\, b) = a\, \boldsymbol{t}\, 1 = a$, a stąd $a\, \boldsymbol{s}\, a = a\, \boldsymbol{s}\, (a\, \boldsymbol{t}\, 1) = a$ dla każdego a, czyli $\boldsymbol{s} = \vee$ wobec (g). Dowód tezy **(i)** jest analogiczny. $\square$

Własność (b) z powyższego twierdzenia można krócej zapisać jako

$$\boldsymbol{t}_d \leqslant \boldsymbol{t} \leqslant \wedge \leqslant \vee \leqslant \boldsymbol{s} \leqslant \boldsymbol{s}_d, \tag{1.1}$$

gdzie relacja częściowego porządku $\leqslant$ zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{v} \ \Leftrightarrow \ \forall a, b \in [0,1]: \ a \, \boldsymbol{u} \, b \leqslant a \, \boldsymbol{v} \, b.$$

Zatem $\boldsymbol{t}_d$ i $\wedge$ są ekstremalnymi t-normami, a $\boldsymbol{s}_d$ i $\vee$ ekstremalnymi t-konormami. Własności (f) i (g) mówią, iż $\wedge$ jest jedyną idempotentną t-normą i $\vee$ jest jedyną idempotentną t-konormą.

Twierdzenie 1.4. *Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między t-normami i t-konormami. Dokładniej:*
(a) *Jeżeli operacja binarna* $\boldsymbol{t}$ *jest t-normą, to operacja* $\boldsymbol{t}^*$ *taka, że*

$$\forall a, b \in [0,1]: \ a \, \boldsymbol{t}^* \, b := 1 - (1-a) \, \boldsymbol{t} \, (1-b)$$

jest t-konormą.
(b) *Jeżeli operacja binarna* $\boldsymbol{s}$ *jest t-konormą, to operacja* $\boldsymbol{s}^*$ *taka, że*

$$\forall a, b \in [0,1]: \ a \, \boldsymbol{s}^* \, b := 1 - (1-a) \, \boldsymbol{s} \, (1-b)$$

jest t-normą.
(c) $(\boldsymbol{t}^*)^* = \boldsymbol{t}$, $(\boldsymbol{s}^*)^* = \boldsymbol{s}$.

Dowód. Jest rutynowy i polega na sprawdzeniu warunków definicyjnych. □

Zauważmy, że $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{s}^*$ implikuje $\boldsymbol{t}^* = (\boldsymbol{s}^*)^* = \boldsymbol{s}$ i odwrotnie. Jeżeli $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{s}^*$ lub (równoważnie) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t}^*$, to mówimy, że $\boldsymbol{t}$ i $\boldsymbol{s}$ są *sprzężone*. Podstawowymi przykładami sprzężonych t-operacji są: $\wedge$ i $\vee$, $\boldsymbol{t}_a$ i $\boldsymbol{s}_a$, $\boldsymbol{t}_Ł$ i $\boldsymbol{s}_Ł$, $\boldsymbol{t}_d$ i $\boldsymbol{s}_d$. Dalsze przykłady podamy poniżej.

Przykład 1.5.

1. *Rodziny t-operacji Schweizera z* $\lambda > 0$*:*

$$a\,\boldsymbol{t}_{S,\lambda}\,b := (0 \vee (a^\lambda + b^\lambda - 1))^{\frac{1}{\lambda}},$$

$$a\,\boldsymbol{s}_{S,\lambda}\,b := 1 - (0 \vee ((1-a)^\lambda + (1-b)^\lambda - 1))^{\frac{1}{\lambda}};$$

2. *Rodziny t-operacji Yagera z* $\lambda \geqslant 1$*:*

$$a\,\boldsymbol{t}_{Y,\lambda}\,b := 1 - (1 \wedge ((1-a)^\lambda + (1-b)^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}),$$

$$a\,\boldsymbol{s}_{Y,\lambda}\,b := 1 \wedge (a^\lambda + b^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}};$$

3. *Rodziny t-operacji Hamachera z* $\lambda \geqslant 0$*:*

$$a\,\boldsymbol{t}_{H,\lambda}\,b := \frac{ab}{\lambda + (1-\lambda)(a+b-ab)},$$

$$a\,\boldsymbol{s}_{H,\lambda}\,b := \frac{a+b-ab-(1-\lambda)ab}{1-(1-\lambda)ab};$$

4. *Rodziny t-operacji Franka z* $\lambda > 0,\ \lambda \neq 1$*:*

$$a\,\boldsymbol{t}_{F,\lambda}\,b := \log_\lambda\left(1 + \frac{(\lambda^a - 1)(\lambda^b - 1)}{\lambda - 1}\right),$$

$$a\,\boldsymbol{s}_{F,\lambda}\,b := 1 - \log_\lambda\left(1 + \frac{(\lambda^{1-a} - 1)(\lambda^{1-b} - 1)}{\lambda - 1}\right);$$

5. *Rodziny t-operacji Webera, dla* $\lambda > -1$

$$a\,\boldsymbol{t}_{W,\lambda}\,b := 0 \vee \left(\frac{a+b-1+\lambda ab}{1+\lambda}\right),$$

$$a\,\boldsymbol{s}_{W,\lambda}\,b := 1 \wedge \left(\frac{(1+\lambda)(a+b)-\lambda ab}{1+\lambda}\right).$$

□

Zwróćmy uwagę, iż np.

$$\boldsymbol{t}_a = \boldsymbol{t}_{H,1}, \ \boldsymbol{s}_a = \boldsymbol{s}_{H,1},$$

$$\boldsymbol{t}_Ł = \boldsymbol{t}_{S,1}, \ \boldsymbol{s}_Ł = \boldsymbol{s}_{S,1}.$$

Warto podkreślić własności graniczne t-operacji Franka:

$$a \, \boldsymbol{t}_{F,\lambda} b \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} a \wedge b, \quad a \, \boldsymbol{s}_{F,\lambda} b \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} a \vee b,$$

$$a \, \boldsymbol{t}_{F,\lambda} b \underset{\lambda \to 1}{\longrightarrow} a \, \boldsymbol{t}_a b, \quad a \, \boldsymbol{s}_{F,\lambda} b \underset{\lambda \to 1}{\longrightarrow} a \, \boldsymbol{s}_a b,$$

$$a \, \boldsymbol{t}_{F,\lambda} b \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} a \, \boldsymbol{t}_Ł b, \quad a \, \boldsymbol{s}_{F,\lambda} b \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} a \, \boldsymbol{s}_Ł b.$$

Twierdzenie 1.4 o sprzężeniu pozwala ograniczyć się tylko do t-norm przy rozważaniach w ramach teorii t-operacji, co uczynimy w dalszej części pracy.

1.2 Archimedesowe normy triangularne

Dalsze rozważania ograniczymy do klasy ciągłych t-norm, rozumiejąc ciągłość t-normy jako ciągłość względem każdego argumentu.

Definicja 1.6. *Ciągła t-norma $\boldsymbol{t}$ jest archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a \, \boldsymbol{t} \, a < a \tag{1.2}$$

dla wszystkich $a \in (0, 1)$.

Mówimy, że ciągła t-norma jest *ścisła*, gdy jest ona ściśle rosnąca na $(0, 1) \times (0, 1)$ tzn., gdy $a < b \ \Rightarrow \ a \, \boldsymbol{t} \, c < b \, \boldsymbol{t} \, c$. Ścisłość $\boldsymbol{t}$ oznacza więc jej ciągłość oraz ścisłą monotoniczność względem obu argumentów. Każda ścisła t-norma jest archimedesowa, gdyż ścisłość $\boldsymbol{t}$ implikuje, że $a \, \boldsymbol{t} \, a < a \, \boldsymbol{t} \, 1 = a$.

Jeżeli $\boldsymbol{t}$ nie jest ścisła mówi się, że $\boldsymbol{t}$ jest *nieścisła*. Rodzinę wszystkich nieścisłych archimedesowych t-norm oznaczać będziemy przez $Natn$. Niearchimedesowe są dla przykładu t-normy $\wedge$ i $\boldsymbol{t}_d$.

Przykładem ścisłych, a więc archimedesowych t-norm są $\boldsymbol{t}_{H,\lambda}$ oraz $\boldsymbol{t}_{F,\lambda}$, a przykłady nieścisłych archimedesowych t-norm to $\boldsymbol{t}_{S,\lambda}$, $\boldsymbol{t}_{W,\lambda}$ oraz $\boldsymbol{t}_{Y,\lambda}$.

Zauważmy, że każda ściśle rosnąca, a więc w szczególności każda ścisła t-norma $\boldsymbol{t}$ spełnia następujące własności:

1. $(a > 0 \; \& \; a \, \boldsymbol{t} \, b = a \, \boldsymbol{t} \, c) \;\Rightarrow\; b = c,$ *(prawo skreśleń)*

2. $a, b > 0 \;\Rightarrow\; a \, \boldsymbol{t} \, b > 0.$ *(**t** nie ma dzielników zera)*

Istotnie, gdyby $b \neq c$ przy $a \, \boldsymbol{t} \, b = a \, \boldsymbol{t} \, c$ oraz $a > 0$, to przeczyłoby to ścisłej monotoniczności $\boldsymbol{t}$. Taką samą sprzeczność powoduje $a \, \boldsymbol{t} \, b = 0$ dla $a, b > 0$. Nieścisłe archimedesowe t-normy mają dzielniki zera.

Definicja 1.7. *Niech J oznacza niepusty i co najwyżej przeliczalny zbiór indeksów. Niech $(\boldsymbol{t}_i)_{i \in J}$ będzie rodziną dowolnych t-norm, a $([a_i, b_i])_{i \in J}$ rodziną niepustych i parami rozłącznych lub złączonych tylko końcami podprzedziałów przedziału $[0,1]$. Sumą porządkową rodziny $((t_i, [a_i, b_i]))_{i \in J}$ nazywamy operację $\boldsymbol{t} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ taką, że*

$$a \, \boldsymbol{t} \, b := \begin{cases} a_i + (b_i - a_i)\left(\frac{a-a_i}{b_i-a_i} \boldsymbol{t}_i \frac{b-a_i}{b_i-a_i}\right), & \textit{gdy } (a,b) \in [a_i, b_i]^2 \\ a \wedge b & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dowód faktu, że suma porządkowa $\boldsymbol{t}$ jest zawsze t-normą znaleźć można np. w [13].

Pojęcie sumy porządkowej pozwala tworzyć nowe, niejednorodne t-normy przez "sklejanie" danych t-norm.

Przykład 1.8. *Sumą porządkową rodziny* $((\boldsymbol{t}_a, [0.1, 0.5]), (\boldsymbol{t}_Ł, [0.7, 0.9]))$ *jest następująca t-norma:*

$$a\,\boldsymbol{t}\,b = \begin{cases} 0.1 + 2.5(a - 0.1)(b - 0.1) & \textit{dla } (a, b) \in [0.1, 0.5]^2, \\ 0.7 + 0 \vee (a + b - 1.6) & \textit{dla } (a, b) \in [0.7, 0.9]^2, \\ a \wedge b & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

□

Pojęcie sumy porządkowej umożliwia wygodną charakteryzację klasy ciągłych t-norm.

Twierdzenie 1.9. *Każda ciągła t-norma albo jest równa* $\wedge$*, albo jest archimedesowa, albo jest sumą porządkową pewnej rodziny archimedesowych t-norm.*

Dowód. Patrz [13]. □

Dla t-norm archimedesowych istnieje wygodne twierdzenie charakteryzacyjne sformułowane przez Linga ([15]).

Twierdzenie 1.10 (tw. Linga)**.** *t-Norma* $\boldsymbol{t}$ *jest archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sciśle malejąca i ciągła funkcja* $g : [0, 1] \to [0, \infty]$*, taka że* $g(1) = 0$ *oraz*

$$a\,\boldsymbol{t}\,b = g^{-1}(g(0) \wedge (g(a) + g(b))) \tag{1.3}$$

dla każdego $a, b \in [0, 1]$. $\boldsymbol{t}$ *jest ścisła dokładnie wtedy, gdy* $g(0) = \infty$.

Dla zwartości pracy pominiemy dowód twierdzenia Linga jako zbyt długi. Jego współczesną postać znaleźć można w [7, 13].

Funkcję g występującą w twierdzeniu 1.10 nazywamy *generatorem addytywnym* lub krótko *generatorem* t-normy $\boldsymbol{t}$. Generator taki wyznaczony jest jednoznacznie z dokładnością do dodatniego stałego mnożnika.

Mówimy, iż generator g nieścisłej archimedesowej t-normy $\boldsymbol{t}$ jest *unormowany*, jeżeli $g(0) = 1$. Generator nieścisłej archimedesowej t-normy zawsze można unormować mnożąc go przez $\frac{1}{g(0)}$. Z tego powodu rozważania dotyczące generatorów takich t-norm wystarczy ograniczyć do przypadku generatorów unormowanych.

Przykład 1.11. *Przedstawmy generatory t-norm z przykładu 1.5.*

1. *Generator t-normy Schweizera* $\boldsymbol{t}_{S,\lambda}$*:*
$$g(a) = 1 - a^{\lambda};$$
2. *Generator t-normy Yagera* $\boldsymbol{t}_{Y,\lambda}$*:*
$$g(a) = (1 - a)^{\lambda};$$
3. *Generator t-normy Hamachera* $\boldsymbol{t}_{H,\lambda}$*:*
$$g(a) = \begin{cases} \frac{1-a}{a} & \textit{dla } \lambda = 0, \\ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda + (1-\lambda)a}{a} & \textit{dla } \lambda > 0; \end{cases}$$
4. *Generator t-normy Franka* $\boldsymbol{t}_{F,\lambda}$*:*
$$g(a) = \log_{\lambda} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda^{a} - 1} \right);$$
5. *Generator t-normy Webera* $\boldsymbol{t}_{W,\lambda}$*:*
$$g(a) = \begin{cases} 1 - \frac{\ln(1+\lambda a)}{\ln(1+\lambda)} & \textit{dla } \lambda \neq 0, \\ 1 - a & \textit{dla } \lambda = 0. \end{cases}$$

□

Z twierdzenia 1.10 przez indukcję matematyczną otrzymujemy:

$$a_1 \boldsymbol{t}\, a_2 \boldsymbol{t}\, \ldots \boldsymbol{t}\, a_k = g^{-1}(g(0) \wedge \sum_{i=1}^{k} g(a_i)) \tag{1.4}$$

dla każdej archimedesowej t-normy $\boldsymbol{t}$ z generatorem g oraz dla każdego układu liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k \in [0,1]$ przy $k \in \mathbf{N}$. Dla $k = 0$ przyjmujemy, iż $a_1 \boldsymbol{t}\, a_2 \boldsymbol{t}\, \ldots \boldsymbol{t}\, a_k = 1$. Zatem

$$a_1 \boldsymbol{t}\, a_2 \boldsymbol{t}\, \ldots \boldsymbol{t}\, a_k > 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} g(a_i) < g(0), \tag{1.5}$$

czyli $a_1 \boldsymbol{t}\, a_2 \boldsymbol{t}\, \ldots \boldsymbol{t}\, a_k > 0 \Leftrightarrow a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$, gdy $\boldsymbol{t}$ jest ścisła. Ostatnia równoważność nie zachodzi dla t-norm archimedesowych i nieścisłych, gdyż mają one dzielniki zera.

Zauważmy, iż posiadanie przez t-normę $\boldsymbol{t}$ dzielników zera, oznacza, że $\boldsymbol{t}$ charakteryzuje się pewną "bezwładnością" przy osiąganiu wartości dodatnich. Dodatni argument mniejszy od 1 jest wówczas nadal traktowany jako zero, o ile drugi argument jest mniejszy od 1 i nie jest dostatecznie "duży". Mamy np. $0.4\ \boldsymbol{t}_{Ł}\ 0.5 = 0$, lecz $0.4\ \boldsymbol{t}_{Ł}\ 0.8 > 0$. Można więc powiedzieć, iż t-normy z rodziny $Natn$ są bardziej "wymagające" od ścisłych t-norm, gdyż ignorują dodatniość zbyt małych argumentów mniejszych od 1. Ta cecha t-norm archimedesowych i nieścisłych jest bardzo użyteczna i pożądana np. w zagadnieniach agregacji zbiorów rozmytych.

1.3 Negacje

Definicja 1.12. *Funkcję $\nu : [0,1] \to [0,1]$ nazywamy negacją, gdy ν jest nierosnąca oraz spełnia warunki $\nu(0) = 1$ i $\nu(1) = 0$.*

Definicja 1.13. *Negację ν nazywamy ścisłą, gdy jest ona ściśle malejąca i ciągła.*

Definicja 1.14. *Negację ν nazywamy silną, gdy jest ścisła oraz inwolutywna, czyli*

$$\nu(\nu(a)) = a \text{ dla każdego } a \in [0,1]. \tag{1.6}$$

Można zauważyć, iż funkcja odwrotna ν^{-1} do każdej ścisłej negacji ν jest też ścisłą negacją. Silna negacja pokrywa się ze swoją odwrotnością.

Najmniejszą możliwą negacją jest więc negacja ν_* taka, że

$$\nu_*(a) := \begin{cases} 1 & \text{dla } a = 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \tag{1.7}$$

a największą negacją jest ν^*, gdzie

$$\nu^*(a) := \begin{cases} 1 & \text{dla } a < 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{1.8}$$

Zatem $\nu_* \leqslant \nu \leqslant \nu^*$ dla dowolnej negacji ν, gdzie relacja $\leqslant$ określona jest jako $\nu \leqslant \mu \;\Leftrightarrow\; \forall a \in [0,1] :\; \nu(a) \leqslant \mu(a)$.

Ważnym przykładem silnej (a więc i ścisłej) negacji jest *negacja Łukasiewicza* $\nu_{Ł}$, gdzie

$$\nu_{Ł}(a) := 1 - a \quad \text{dla każdego } a \in [0,1]. \tag{1.9}$$

Innym przykładem silnej negacji są funkcje wprowadzone przez Sugeno:

$$\nu_{S,\lambda}(a) := \frac{1-a}{1+\lambda a} \quad \text{dla parametru } \lambda > -1. \tag{1.10}$$

W dalszej części pracy rodzinę wszystkich silnych negacji będziemy oznaczać przez $Sneg$.

Zauważmy, iż każda ścisła negacja $\nu \in Sneg$ ma dokładnie jeden punkt stały $a^* \in (0,1)$. Na przykład $a^* = 0.5$ dla $\nu = \nu_{Ł}$. Ogólnie, $\nu(a^*) = a^*$ oraz

$$\forall a \neq a^* :\; \nu(a) < a^* < a \perp a < a^* < \nu(a), \tag{1.11}$$

tzn.

$$\forall a \in [0,1]: \; a \vee \nu(a) \geqslant a^*. \tag{1.12}$$

Niech $\boldsymbol{t}$ oznacza dowolną t-normę oraz niech $\nu_{\boldsymbol{t}} : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją zdefiniowaną w następujący sposób:

$$\nu_{\boldsymbol{t}}(a) := \bigvee\{c \in [0,1] : \; a \,\boldsymbol{t}\, c = 0\}. \tag{1.13}$$

Twierdzenie 1.15 ([26])**.**

(a) Funkcja $\nu_{\boldsymbol{t}}$ jest negacją.

(b) Jeżeli $\boldsymbol{t}$ jest ścisła lub $\boldsymbol{t} = \wedge$, to $\nu_{\boldsymbol{t}} = \nu_*$.

(c) Jeżeli $\boldsymbol{t} \in Natn$ oraz g jest generatorem t-normy $\boldsymbol{t}$, to negacja $\nu_{\boldsymbol{t}}$ jest silna oraz

$$\forall a \in [0,1]: \; \nu_{\boldsymbol{t}}(a) = g^{-1}(g(0) - g(a)).$$

Dowód. Niech $\boldsymbol{t}$ oznacza dowolną ustaloną t-normę.

(a) Z twierdzenia 1.3(a) i postulatu (TN4) wynika, że $\nu_{\boldsymbol{t}}(0) = 1$ i $\nu_{\boldsymbol{t}}(1) = 0$. Nadto mamy

$$\begin{aligned} a \leqslant b \;&\Rightarrow\; a \,\boldsymbol{t}\, c \leqslant b \,\boldsymbol{t}\, c \\ &\Rightarrow\; \{c \in [0,1] : \; b \,\boldsymbol{t}\, c = 0\} \subset \{c \in [0,1] : \; a \,\boldsymbol{t}\, c = 0\} \\ &\Rightarrow\; \nu_{\boldsymbol{t}}(b) = \bigvee\{c \in [0,1] : \; b \,\boldsymbol{t}\, c = 0\} \\ &\qquad\qquad \leqslant \bigvee\{c \in [0,1] : \; a \,\boldsymbol{t}\, c = 0\} \\ &\qquad\qquad = \nu_{\boldsymbol{t}}(a), \end{aligned}$$

a więc $\nu_{\boldsymbol{t}}$ jest negacją.

(b) $\nu_\wedge = \nu_*$ wynika wprost z (1.7) oraz (1.13). Przypuśćmy, że $\boldsymbol{t}$ jest ścisła, a więc nie ma dzielników zera. Zatem $\nu_{\boldsymbol{t}}(a) = 0$ dla $a > 0$, tzn. $\nu_{\boldsymbol{t}} = \nu_*$.

(c) Niech $\boldsymbol{t} \in Natn$ ma generator g. Z (a) wynika, że $\nu_{\boldsymbol{t}}$ jest negacją, a więc wystarczy pokazać, iż $\nu_{\boldsymbol{t}}$ jest ściśle malejąca, ciągła i inwolutywna.
Na mocy (1.5) mamy:

$$\begin{aligned} a\,\boldsymbol{t}\,b = 0 &\Leftrightarrow g(0) \leqslant g(a) + g(c) \\ &\Leftrightarrow g(c) \geqslant g(0) - g(a) \\ &\Leftrightarrow c \leqslant g^{-1}(g(0) - g(a)), \end{aligned}$$

a więc (1.13) implikuje

$$\nu_{\boldsymbol{t}}(a) = g^{-1}(g(0) - g(a)).$$

Ponieważ g jest ściśle malejąca otrzymujemy

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow g(b) < g(a) \\ &\Rightarrow g(0) - g(a) < g(0) - g(b) \\ &\Rightarrow \nu_{\boldsymbol{t}}(b) < \nu_{\boldsymbol{t}}(a), \end{aligned}$$

tzn. $\nu_{\boldsymbol{t}}$ jest ściśle malejąca. Jej ciągłość wynika z ciągłości i ścisłej monotoniczności g. Nadto

$$\begin{aligned} \nu_{\boldsymbol{t}}(\nu_{\boldsymbol{t}}(a)) &= \nu_{\boldsymbol{t}}(g^{-1}(g(0) - g(a))) \\ &= g^{-1}(g(0) - g(g^{-1}(g(0) - g(a)))) \\ &= g^{-1}(g(a)) \\ &= a \end{aligned}$$

dla każdego $a \in [0, 1]$, co kończy dowód.

$\square$

Każda t-norma $\boldsymbol{t}$ generuje zatem negację $\nu_{\boldsymbol{t}}$. Nazywać ją będziemy *negacją indukowaną przez* $\boldsymbol{t}$.

Przykład 1.16.

1. *Negacja generowana przez t-normę Schweizera:*

$$\nu_{\boldsymbol{t}_{S,\lambda}}(a) = (1 - a^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}};$$

2. *Negacja generowana przez t-normę Yagera:*

$$\nu_{\boldsymbol{t}_{Y,\lambda}}(a) = 1 - \left(1 - (1-a)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}};$$

3. *Negacja generowana przez t-normę Webera:*

$$\nu_{\boldsymbol{t}_{W,\lambda}}(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}.$$

□

Na mocy twierdzenia 1.15(c) oraz twierdzenia Linga 1.10, jeżeli $\boldsymbol{t} \in Natn$ ma generator g, to

$$\begin{aligned} a\, \boldsymbol{t}\, \nu_{\boldsymbol{t}}(a) &= g^{-1}(g(0) \wedge (g(a) + g(\nu_{\boldsymbol{t}}(a))) \\ &= g^{-1}(g(0) \wedge (g(a) + g(0) - g(a)), \end{aligned}$$

a więc

$$\forall a \in [0,1] : \quad a\, \boldsymbol{t}\, \nu_{\boldsymbol{t}}(a) = 0. \tag{1.14}$$

Zatem

$$a^*\, \boldsymbol{t}\, \nu_{\boldsymbol{t}}(a^*) = \nu_{\boldsymbol{t}}(a^*)\, \boldsymbol{t}\, \nu_{\boldsymbol{t}}(a^*) = a^*\, \boldsymbol{t}\, a^* = 0,$$

$$\tag{1.15}$$

$$\forall a \leqslant a^* : \ a\, \boldsymbol{t}\, a = 0, \quad \forall a \geqslant a^* : \ \nu_{\boldsymbol{t}}(a)\, \boldsymbol{t}\, \nu_{\boldsymbol{t}}(a) = 0,$$

gdzie a^* oznacza punkt stały negacji $\nu_{\boldsymbol{t}}$. Z twierdzenia 1.15(c) wynika również, iż $a^* = g^{-1}\left(\frac{1}{2}g(0)\right)$. Jeśli więc generator g jest unormowany, mamy

$$a^* = g^{-1}(0.5). \tag{1.16}$$

Dla t-normy Schweizera $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{S,\lambda}$ przy $\lambda > 0$ z unormowanym generatorem $g(a) = 1 - a^\lambda$ otrzymujemy $g^{-1}(y) = (1-y)^{1/\lambda}$, a więc punkt stały negacji $\nu_{\boldsymbol{t}}$ równy jest $a^* = 0.5^{1/\lambda}$.

Warto na koniec wspomnieć, iż własność (1.14) pozostaje w mocy, jeśli $\boldsymbol{t}$ jest ciągła, a nawet tylko lewostronnie ciągła. Jednak $\nu_{\boldsymbol{t}}$ przestaje być wtedy inwolutywna i mamy tylko (patrz [7])

$$a \leqslant \nu_{\boldsymbol{t}}(\nu_{\boldsymbol{t}}(a)) \quad \text{oraz} \quad \nu_{\boldsymbol{t}}(\nu_{\boldsymbol{t}}(\nu_{\boldsymbol{t}}(a))) = \nu_{\boldsymbol{t}}(a). \tag{1.17}$$

Rozdział 2

Elementy teorii zbiorów rozmytych

Niech $\mathcal{M}$ oznacza uniwersum pewnych elementów, skończone lub nie. Zbiorami rozmytymi w $\mathcal{M}$ (lub krótko: zbiorami rozmytymi) nazywa się obiekty teorii mnogości opartej na logice wielowartościowej, utożsamiane z funkcjami $\mathcal{M} \to [0, 1]$, zwanymi też uogólnionymi funkcjami charakterystycznymi lub funkcjami przynależności. Istotą koncepcji zbioru rozmytego jest stopniowanie należenia do niego elementów $x \in \mathcal{M}$. Jeśli $A : \mathcal{M} \to [0, 1]$, liczbę $A(x)$ interpretuje się jako stopień przynależności x do zbioru rozmytego A. Zbiory rozmyte poglądowo przedstawia się jako mgławice elementów w $\mathcal{M}$. Zbiór $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ utożsamiać można z jego funkcją charakterystyczną $1_{\mathcal{D}}$, tzn. z pewną funkcją $\mathcal{M} \to \{0, 1\}$. Przez analogię, zbiór rozmyty utożsamiamy z funkcją $\mathcal{M} \to [0, 1]$.

Pojęcie zbioru rozmytego wprowadził w 1965 r. Lotfi A. Zadeh w pracy "Fuzzy Sets" [31]. Dała ona początek obszernej i dynamicznie rozwijającej się rodzinie teorii, metod i podejść z zakresu informatyki, matematyki, teorii sterowania, technologii itd.

Dla uniknięcia nieporozumień zbiory będziemy w niniejszej pracy oznaczać literami $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$, a zbiory rozmyte - symbolami $A, B, C \ldots$.

2.1 Algebra zbiorów rozmytych

Operacje triangularne i negacje znajdują zastosowanie przy definiowaniu operacji na zbiorach rozmytych (patrz [7]). Niech $\boldsymbol{t}$ oznacza dowolną t-normę, $\boldsymbol{s}$- t-konormę, ν- negację oraz $A, B \in [0,1]^{\mathcal{M}}$. Wówczas *przekrój* $A \cap_{\boldsymbol{t}} B$ zbiorów rozmytych A i B indukowany przez $\boldsymbol{t}$, *sumę* $A \cup_{\boldsymbol{s}} B$ indukowaną przez $\boldsymbol{s}$ oraz *iloczyn kartezjański* $A \times_{\boldsymbol{t}} B$ indukowany przez $\boldsymbol{t}$ określa się następująco:

$$\begin{aligned} (A \cap_{\boldsymbol{t}} B)(x) &:= A(x)\ \boldsymbol{t}\ B(x) \quad \text{dla } x \in \mathcal{M}, \\ (A \cup_{\boldsymbol{s}} B)(x) &:= A(x)\ \boldsymbol{s}\ B(x) \quad \text{dla } x \in \mathcal{M}, \\ (A \times_{\boldsymbol{t}} B)(x,y) &:= A(x)\ \boldsymbol{t}\ B(y) \quad \text{dla } (x,y) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

W ostatnim przypadku przyjmujemy, że $A \in [0,1]^{\mathcal{M}_1}$ i $B \in [0,1]^{\mathcal{M}_2}$. *Dopełnienie* A^{ν} zbioru rozmytego A indukowane przez ν definiuje się jako

$$A^{\nu}(x) := \nu(A(x)) \quad \text{dla } x \in \mathcal{M} \tag{2.2}$$

Jeśli $\boldsymbol{t} = \wedge$, $\boldsymbol{s} = \vee$ i $\nu = \nu_{Ł}$, zastosujemy uproszczoną notację i terminologię:

$$\begin{aligned} A \cap B &:= A \cap_{\wedge} B, \quad (\textit{przekrój } A \text{ i } B) \\ A \cup B &:= A \cup_{\vee} B, \quad (\textit{suma}) \\ A \times B &:= A \times_{\wedge} B, \quad (\textit{iloczyn kartezjański}) \\ A' &:= A^{\nu_{Ł}}. \quad (\textit{dopełnienie } A) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Operacje $\cap$, $\cup$, $\times$ i $'$ są standardowymi operacjami na zbiorach rozmytych wprowadzonymi przez Zadeha w [31].

Relację zawierania się $\subset$ i równości $=$ dwóch zbiorów rozmytych określamy też w sposób standardowy:

$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; \forall x \in \mathcal{M}:\; A(x) \leqslant B(x),$$

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subset B \;\&\; B \subset A.$$

Wprost z definicji 1.1 i 1.2 oraz (2.1) wynika, że operacje $\cap_{\boldsymbol{t}}$ i $\cup_{\boldsymbol{s}}$ są przemienne, łączne, monotoniczne, a $1_{\mathcal{M}}$ i $1_{\emptyset}$ są odpowiednio ich elementami neutralnymi. Konsekwencją twierdzenia 1.3 są następujące własności dla $A, B, C \in [0,1]^{\mathcal{M}}$:

$$A \cap_{\boldsymbol{t}_d} B \subset A \cap_{\boldsymbol{t}} B \subset A \cap B \subset A, B \subset A \cup B \subset A \cup_{\boldsymbol{s}} B \subset A \cup_{\boldsymbol{s}_d} B,$$

$$\begin{gathered} A \cap_{\boldsymbol{t}} A \subset A \subset A \cup_{\boldsymbol{s}} A, \\ A \cap A = A \cup A = A, \\ A \cap_{\boldsymbol{t}} (B \cup C) = (A \cap_{\boldsymbol{t}} B) \cup (A \cap_{\boldsymbol{t}} C), \\ A \cup_{\boldsymbol{s}} (B \cap C) = (A \cup_{\boldsymbol{s}} B) \cap (A \cup_{\boldsymbol{s}} C). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Nadto funkcjonują prawa de Morgana:

$$(A \cap_{\boldsymbol{t}} B)' = A' \cup_{\boldsymbol{t}^*} B',$$

$$(A \cup_{\boldsymbol{s}} B)' = A' \cap_{\boldsymbol{s}^*} B'.$$

Jednak $A \cap A' \neq 1_{\emptyset}$ oraz $A \cup A' \neq 1_{\mathcal{M}}$ dla $A \notin \{0,1\}^{\mathcal{M}}$.
Jeśli ν jest silna, to

$$(A^{\nu})^{\nu} = A.$$

Na mocy (1.17), dla lewostronnie ciągłej t-normy $\boldsymbol{t}$ otrzymujemy:

$$A \subset (A^{\nu_{\boldsymbol{t}}})^{\nu_{\boldsymbol{t}}}, \;\; ((A^{\nu_{\boldsymbol{t}}})^{\nu_{\boldsymbol{t}}})^{\nu_{\boldsymbol{t}}} = A$$

oraz

$$A \cap_t A^{\nu_t} = 1_\emptyset.$$

Uogólnioną sumę $\bigcup\limits_{i \in J} A_i$ i *uogólniony przekrój* $\bigcap\limits_{i \in J} A_i$ rodziny $(A_i)_{i \in J}$ zbiorów rozmytych, gdzie J- dowolny niepusty zbiór indeksów, określimy punktowo za pomocą następujących formuł:

$$\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)(x) := \bigvee_{i \in J} A_i(x), \quad \left(\bigcap_{i \in J} A_i\right)(x) := \bigwedge_{i \in J} A_i(x)$$

dla każdego $x \in \mathcal{M}$. Niech $A \in [0,1]^{\mathcal{M}}$. Zbiór

$$A_t := \{x \in \mathcal{M} : \ A(x) \geqslant t\}, \ \ t \in (0,1],$$

nazywa się *t-warstwą* zbioru rozmytego A, a zbiór

$$A^t := \{x \in \mathcal{M} : \ A(x) > t\}, \ \ t \in [0,1),$$

określa się jako *ostrą t-warstwę* A. Zatem $A_t = A^{-1}([t,1])$ i $A^t = A^{-1}((t,1])$. Łatwo zauważyć, że

$$A \subset B \ \Rightarrow \ \forall t: \ A_t \subset B_t,$$

$$t \leqslant u \ \Rightarrow \ A_u \subset A_t,$$

$$(A * B)_t = A_t * B_t,$$

gdzie $*$ oznacza dowolną z operacji $\cap, \cup, \times$. Identyczne własności zachodzą dla ostrych t-warstw. Ponadto

$$A = B \ \Leftrightarrow \ \forall t \in (0,1]: \ A_t = B_t \ \Leftrightarrow \ \forall t \in (0,1]: \ A^t = B^t$$

Zdefiniujmy

$$core(A) := A_1, \quad (\textit{jądro zbioru rozmytego } A)$$

oraz

$$supp(A) := A^0. \quad (\textit{nośnik } A)$$

Mówi się, że A jest *normalny*, gdy $core(A) \neq \emptyset$. Jeśli $supp(A)$ jest skończony, A nazywamy *skończonym* zbiorem rozmytym. Rodzinę wszystkich skończonych zbiorów rozmytych w $\mathcal{M}$ oznaczymy przez FFS. FCS oznaczać będzie rodzinę *wszystkich zbiorów skończonych* w $\mathcal{M}$.

Zbiory rozmyte o 1-elementowych nośnikach nazywamy *singletonami*. Symbolem a/x oznaczamy singleton przyjmujący wartość $a > 0$ w punkcie $x \in \mathcal{M}$. Każdy zbiór rozmyty przedstawić można jako sumę singletonów:

$$A = \bigcup_{x \in supp(A)} A(x)/x. \tag{2.5}$$

Jeśli A jest skończony i $supp(A) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \geqslant 1$, użyjemy notacji

$$A = A(x_1)/x_1 + A(x_2)/x_2 + \ldots + A(x_n)/x_n.$$

Powiemy, że $A, B \in [0,1]^{\mathcal{M}}$ są *rozłączne*, gdy $A \cap B = 1_{\emptyset}$. Jeśli $\mathcal{M}$ jest liniowo uporządkowany przez pewną relację $\leqslant$, to A nazywa się *wypukłym* zbiorem rozmytym, gdy

$$\forall x, y, z \in \mathcal{M}\ (x \leqslant y \leqslant z):\ A(y) \geqslant A(x) \wedge A(z).$$

2.2 Moc zbioru rozmytego

Moc zbioru rozmytego, podobnie jak moc zbioru jest jedną z jego podstawowych charakterystyk. Zagadnienie mocy w przypadku zbioru rozmytego ma też silne motywacje aplikacyjne. Pytania typu

"Ile x-ów jest p?"

"Czy więcej jest x-ów, które są p niż x-ów będących q?"

gdzie p,q- własności nieostre, to pytania o moce zbiorów rozmytych lub o wyniki porównań tych mocy. Przykładem są następujące proste pytania w języku naturalnym:

"Ile obiektów znajduje się *w pobliżu* obiektu x?",

"Czy więcej obiektów znajduje się *w pobliżu* x niż y?",

"Ile rekordów zaktualizowano w bazie danych *około* godziny 11.00?",

"Ile osób w bazie danych jest *wysokich* i ma od *około* 25 do *około* 28 lat ?".

Uzyskanie adekwatnych odpowiedzi na takie pytania jest istotne np. w zagadnieniach podejmowania decyzji w warunkach nieostrości informacji, komunikacji z bazami danych lub internetem na naturalnym poziomie pojęciowym, modelowania znaczeń wyrażeń języka naturalnego itd. (parz np. [2], [3], [14], [22], [32-36]).

Dla przykładu rozważmy sytuację, gdy w pewnym portalu internetowym opartym o system baz danych, w jednej z tabel zapisywane są informacje o działaniach użytkowników z niego korzystających (patrz rys. 2.1). Przy tworzeniu oprogramowania raportującego obciążenie systemu przewidziano między innymi, iż administratora może interesować informacja jak wielu użytkowników było zalogowanych do systemu około pewnej godziny, np. godziny 11.00, oraz około której godziny aktywność użytkowników była największa.

Klasyczne, przedziałowe rozumienie terminu "około godziny 11.00", np. około 11.00 = od 10.30 do 11.30, może być w powyższej sytuacji zbyt "sztywne" i nieadekwatne. Znacznie naturalniejsza jest interpretacja w postaci trapezowego zbioru rozmytego (patrz rys. 2.2). Informacja, której oczekuje administrator jest więc informacją o mocy pewnego zbioru rozmytego lub wyniku porównań mocy kilku zbiorów rozmytych.

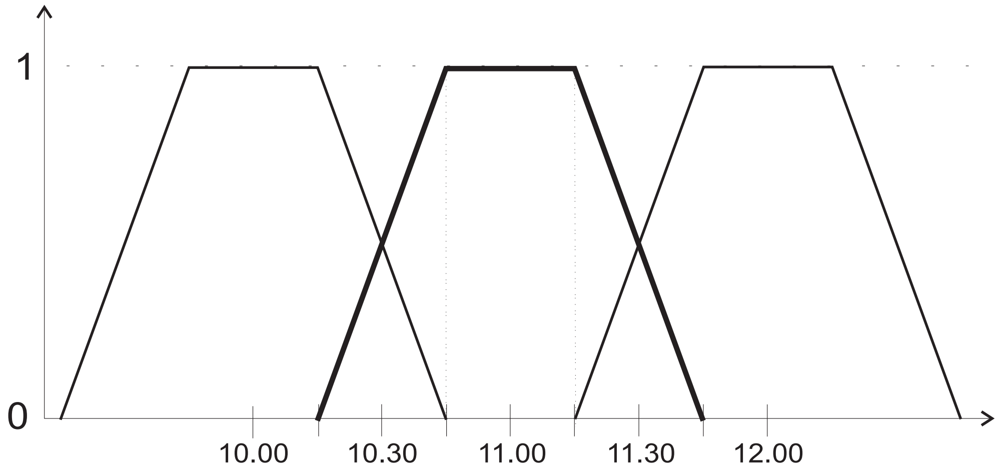
Jest jasne, że przy definiowaniu pojęcia mocy zbioru rozmytego A zasadnicza trudność i różnica w porównaniu z przypadkiem zbioru polega na tym, że należenie elementu $x \in \mathcal{M}$ do A podlega stopniowaniu.

Przejdziemy teraz do przedstawienia współczesnych podejść do definiowania mocy $|A|$ zbioru rozmytego A. Ponieważ z aplikacyjnego punktu wi-

Id	Data	Godzina	Działanie	Adres IP
546	20-01-2001	10:00:01	LOGOWANIE	150.254.65.32
547	20-01-2001	10:10:31	LOGOWANIE	150.254.65.39
548	20-01-2001	10:12:36	TRANSAKCJA	150.254.65.32
549	20-01-2001	10:22:19	LOGOWANIE	150.254.65.39
550	20-01-2001	10:30:22	TRANSAKCJA	150.254.65.39
551	20-01-2001	10:31:28	WYLOGOWANIE	11.12.121.14
552	20-01-2001	10:35:01	WYLOGOWANIE	212.142.11.45
553	20-01-2001	10:36:75	TRANSAKCJA	150.254.65.39
554	20-01-2001	10:38:34	TRANSAKCJA	212.142.11.41
555	20-01-2001	10:52:02	LOGOWANIE	212.242.121.45
556	20-01-2001	10:52:01	LOGOWANIE	150.142.11.12
557	20-01-2001	10:54:43	LOGOWANIE	120.142.131.25
558	20-01-2001	10:59:01	TRANSAKCJA	212.142.11.14
559	20-01-2001	10:59:05	LOGOWANIE	193.24.11.33
560	20-01-2001	11:04:41	LOGOWANIE	211.12.112.51
561	20-01-2001	11:12:05	TRANSAKCJA	212.142.11.45
562	20-01-2001	11:15:21	TRANSAKCJA	212.142.11.45
563	20-01-2001	11:17:26	LOGOWANIE	150.122.202.33
564	20-01-2001	11:30:46	WYLOGOWANIE	162.2.1.49
565	20-01-2001	11:32:06	LOGOWANIE	212.142.11.45
566	20-01-2001	11:36:41	TRANSAKCJA	150.142.1.32
567	20-01-2001	11:38:01	TRANSAKCJA	212.142.11.45
568	20-01-2001	11:39:41	LOGOWANIE	150.22.11.215
569	20-01-2001	11:39:59	LOGOWANIE	212.122.14.15
570	20-01-2001	11:40:31	WYLOGOWANIE	150.254.65.39
571	20-01-2001	11:41:25	WYLOGOWANIE	10.12.11.45
572	20-01-2001	11:45:00	TRANSAKCJA	212.142.11.145
573	20-01-2001	12:00:00	TRANSAKCJA	212.142.11.45
574	20-01-2001	12:01:01	TRANSAKCJA	150.254.65.39
575	20-01-2001	12:01:04	TRANSAKCJA	111.142.11.41

Rysunek 2.1: Przykładowe rekordy tabeli zawierającej informację o działaniach użytkowników.

dzenia dominującą rolę odgrywają skończone zbiory rozmyte, w poniższym przeglądzie oraz w dalszych rozważaniach w niniejszej pracy ograniczymy się zasadniczo do takich zbiorów rozmytych. Przyjmiemy więc, że $A \in FFS$,



Rysunek 2.2: Zbiór rozmyty reprezentujący pojęcie "około godziny 11.00"

$n := |supp(A)|$ i $m := |core(A)|$.

Wyróżnia się dwie główne grupy koncepcji definiowania $|A|$:

(a) *podejścia skalarne*

$$|A| := \text{ liczba rzeczywista nieujemna,}$$

(b) *podejścia "rozmyte"*

$$|A| := \text{ wypukły zbiór rozmyty w } \mathbb{N}.$$

W przypadku dowolnych, być może nieskończonych zbiorów rozmytych, definicje te przyjmują odpowiednio postać

$|A|:=$ liczba kardynalna w zwykłym sensie,

$|A|:=$ wypukły zbiór rozmyty liczb kardynalnych w zwykłym sensie.

ad (a) Podejścia skalarne są prostsze i wygodniejsze operacyjnie, a także starsze niż podejścia typu (b). Do najczęściej używanych skalarnych mocy należą:

(i) $|A| := sc(A) = \sum_{x \in supp(A)} A(x),$ (tzw. *sigma count* zb. rozmytego A; patrz ([17], [18], [32-35])

(ii) $|A| := sc_p(A) = \sum_{x \in supp(A)} (A(x))^p, \;\; p > 0,$ ([2], [11])

(iii) $|A| := |A_t|$ lub $|A| := |A^t|$, ([22], [29])

a w szczególności

$|A| := |core(A)|$ lub $|A| := |supp(A)|$. ([8])

W pracy [29] skonstruowane zostało ogólne, aksjomatyczne ujęcie teorii skalarnych mocy, które przypominamy poniżej.

Definicja 2.1. *Funkcję $\sigma : FFS \to [0, \infty)$ nazywamy mocą skalarną, gdy σ spełnia następujące warunki dla każdego $a, b \in [0, 1]$, $A, B \in FFS$ oraz $x, y \in \mathcal{M}$:*

(SC1) $\sigma(1/x) = 1$,

(SC2) $a \leqslant b \Rightarrow \sigma(a/x) \leqslant \sigma(b/y)$,

(SC3) $A \cap B = 1_\emptyset \Rightarrow \sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$.

Jeśli σ spełnia powyższe trzy postulaty, to $\sigma(A)$ nazywa się skalarną mocą zbioru rozmytego A.

Moce skalarne w sensie definicji 2.1 mają wygodną charakteryzację w postaci sum.

Twierdzenie 2.2. *Funkcja $\sigma : FFS \to [0, \infty)$ jest mocą skalarna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall A \in FFS : \; \sigma(A) = \sum_{x \in supp(A)} f(A(x)),$$

gdzie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ jest niemalejąca oraz $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$.

Funkcja f z twierdzenia 2.2 wyraża nasze rozumienie skalarnej mocy singletonu i nazywa się wzorcem mocy. Odpowiednio dobierając ten wzorzec wygenerować można w/w klasyczne moce skalarne, np.:

1. $\sigma(A) = sc(A)$, gdy $f = id$,
2. $\sigma(A) = sc_p(A)$, gdy $f(a) = a^p$ dla $a \in [0, 1]$,
3. $\sigma(A) = |A_t|$, gdy $f(a) = \begin{cases} 1 & \text{dla } a \geqslant t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$

ad (b) Kosztem swej złożoności, podejścia rozmyte oferują znacznie bardziej adekwatny opis mocy zbioru rozmytego. Wypukłe zbiory rozmyte liczb kardynalnych (w szczególności: naturalnych) wyrażające moce zbiorów rozmytych w $\mathcal{M}$ nazywa się *uogólnionymi liczbami kardynalnymi*. Oznaczać je będziemy małymi literami $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ z początku alfabetu greckiego. Równość $\alpha = \beta$ rozumiemy jako $\alpha(i) = \beta(i)$ dla każdego i. Zanim przejdziemy do przedstawienia podstawowych typów uogólnionych liczb kardynalnych skończonych zbiorów rozmytych wprowadzimy pewną dodatkową symbolikę i konwencję notacyjną.

Niech $A \in FFS$ oraz

$$[A]_i := \bigvee\{t \in (0, 1] : \ |A_t| \geqslant i\} \text{ dla } i \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

NB. symbol $[A]_i$ zachowuje sens także dla nieskończonego A oraz pozaskończonej liczby kardynalnej i.

Widać, że

$$[A]_0 = 1, \ [A]_i = 0 \text{ dla } i > n, \ [A]_i = 1 \text{ dla } i \leqslant m$$

oraz

$$A \subset B \ \Rightarrow \ \forall i : \ [A]_i \leqslant [B]_i.$$

Jeśli $0 < i \leqslant n$, mamy $[A]_i \in (0,1]$ oraz $[A]_i$ jest i-tym elementem w nierosnącym ciągu wszystkich dodatnich stopni przynależności $A(x)$, uwzględniającym ich ewentualne powtórzenia.

Uogólnione liczby kardynalne skończonych zbiorów rozmytych zapisywać będziemy wektorowo z użyciem następującej notacji:

$$\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_k, (a)) \text{ dla } k \in \mathbb{N}$$

oznacza, że $\alpha(i) = a_i$ dla $i \leqslant k$ oraz $\alpha(i) = a$ dla $i > k$. Co więcej,

$$(a_0, a_1, \ldots, a_k) := (a_0, a_1, \ldots, a_k, (0)).$$

Dla przykładu zapis $\alpha = (0, 0.3, 0.4, 0.7, 0.2)$ oznacza, że $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 0.3$, $\alpha(2) = 0.4$, $\alpha(3) = 0.7$, $\alpha(4) = 0.2$ oraz $\alpha(i) = 0$ dla $i > 4$.

Przedstawimy teraz trzy klasy uogólnionych liczb kardynalnych, które są najistotniejsze z teoretycznego i aplikacyjnego punktu widzenia.
Niech $A \in FFS$ oraz $\alpha = |A|$.

(b1)

$$\alpha(k) := [A]_k \text{ dla } k \in \mathbb{N},$$

tzn.

$$\alpha = (1, [A]_1, [A]_2, \ldots, [A]_n).$$

Liczba $\alpha(k)$ interpretowana jest jako stopień, w jakim A ma co najmniej k elementów, a więc α stanowi w istocie dolne oszacowanie mocy A.

(b2)

$$\alpha(k) := 1 - [A]_{k+1} \text{ dla } k \in \mathbb{N},$$

tzn.

$$\alpha = (1 - [A]_1, 1 - [A]_2, \ldots, 1 - [A]_n, (1)).$$

$\alpha(k)$ rozumiemy w tym przypadku jako stopień, w jakim A zawiera co najwyżej k elementów; α jest zatem górnym oszacowaniem mocy A.

(b3)

$$\alpha(k) := [A]_k \wedge (1 - [A]_{k+1}) \ \text{ dla } k \in \mathbb{N},$$

tzn.

$$\alpha = (1 - [A]_1, 1 - [A]_2, \ldots, 1 - [A]_l, [A]_l, [A]_{l+1}, \ldots, [A]_n).$$

przy $l = \min\{k : \ [A]_k + [A]_{k+1} \leqslant 1\}$. $\alpha(k)$ wyraża teraz stopień, w jakim A ma dokładnie k elementów. α jest przekrojem uogólnionych liczb kardynalnych z (b1) i (b2) i może być uważana za "właściwą" uogólnioną liczbę kardynalną zbioru rozmytego A.

Uogólnione liczby kardynalne postaci (b1), (b2) i (b3) nazywane są odpowiednio liczbami typu $FGCount$, $FLCount$ i $FECount$. Określenia te, zaproponowane przez Zadeha, nie doczekały się niestety dotychczas polskich odpowiedników. Typ $FGCount$ i $FLCount$ wprowadził Zadeh w [33, 34], a $FECount$ - Zadeh ([34]) i Wygralak ([27]).

Jak zauważono w [30], definicje (b1)-(b3) są odpowiednie tylko dla zbiorów rozmytych z operacjami standardowymi $\cap$ i $\cup$. Przedstawimy teraz w oparciu o [30] ich uogólnienia na przypadek zbiorów rozmytych z operacjami indukowanymi przez t-normy. Przez $\boldsymbol{t}$ oznaczymy dowolną t-normę, a przez ν- negację.

(b1*) *Uogólniony $FGCount$ zbioru rozmytego A*

$$\alpha(k) := [A]_1 \, \boldsymbol{t} \, [A]_2 \, \boldsymbol{t} \, \ldots \, \boldsymbol{t} \, [A]_k \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Używając zapisu wektorowego uogólniony $FGCount$ zbioru rozmytego A możemy więc zapisać jako:

$$\alpha = (1, [A]_1, [A]_1 \, \boldsymbol{t} \, [A]_2, \ldots, [A]_1 \, \boldsymbol{t} \, [A]_2 \, \boldsymbol{t} \, \ldots \, \boldsymbol{t} \, [A]_n). \tag{2.8}$$

Można zauważyć, że $\alpha(k)$ jest stopniem w jakim A posiada (co najmniej) i elementów dla każdego $i \leqslant k$. Podstawiając $\boldsymbol{t} = \wedge$, otrzymujemy klasyczny $FGCount$ zbioru rozmytego A.

(b2*) *Uogólniony $FLCount$ zbioru rozmytego A*

$$\begin{aligned} \alpha(k) &:= \nu([A]_{k+1})\,\boldsymbol{t}\ \nu([A]_{k+2})\,\boldsymbol{t}\ \ldots \\ &= \nu([A]_{k+1})\,\boldsymbol{t}\ \nu([A]_{k+2})\,\boldsymbol{t}\ \ldots\ \boldsymbol{t}\ \nu([A]_n) \text{ dla } k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

W tym przypadku $\alpha(k)$ jest stopniem w jakim A zawiera co najwyżej i elementów dla każdego $i \geqslant k$. W zapisie wektorowym mamy:

$$\begin{aligned} \alpha = \; & (\nu([A]_1)\,\boldsymbol{t}\ \nu([A]_2)\,\boldsymbol{t}\ \ldots\ \boldsymbol{t}\ \nu([A]_n), \\ & \nu([A]_2)\,\boldsymbol{t}\ \nu([A]_3)\,\boldsymbol{t}\ \ldots\ \boldsymbol{t}\ \nu([A]_n), \\ & \vdots \\ & \nu([A]_{n-1}\,\boldsymbol{t}\ \nu([A]_n), \\ & \nu([A]_n), (1)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Podstawiając $\boldsymbol{t} = \wedge$ i $\nu = \nu_Ł$ otrzymujemy $FLCount$ z punktu (b2).

(b3*) *Uogólniony $FECount$ zbioru rozmytego A*

$$\begin{aligned} \alpha(k) := \; & [A]_1\,\boldsymbol{t}\,[A]_2\,\boldsymbol{t}\ \ldots\ \boldsymbol{t}\,[A]_k\,\boldsymbol{t} \\ & \nu([A]_{k+1})\,\boldsymbol{t}\,\nu([A]_{k+2})\,\boldsymbol{t}\ \ldots\ \boldsymbol{t}\,\nu([A]_n) \text{ dla } k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

a w zapisie wektorowym:

$$\begin{aligned}\alpha \;=\; & (\nu([A]_1)\,\boldsymbol{t}\;\nu([A]_2)\,\boldsymbol{t}\;\ldots\;\boldsymbol{t}\;\nu([A]_n), \\ & [A]_1\,\boldsymbol{t}\;\nu([A]_2)\,\boldsymbol{t}\;\nu([A]_3)\,\boldsymbol{t}\;\ldots\;\boldsymbol{t}\;\nu([A]_n), \\ & [A]_1\,\boldsymbol{t}\,[A]_2\,\boldsymbol{t}\;\nu([A]_3)\,\boldsymbol{t}\;\ldots\;\boldsymbol{t}\;\nu([A]_n), \\ & \qquad\vdots \\ & [A]_1\,\boldsymbol{t}\,[A]_2\,\boldsymbol{t}\;\ldots\;\boldsymbol{t}\,[A]_{n-1}\,\boldsymbol{t}\;\nu([A]_n), \\ & [A]_1\,\boldsymbol{t}\,[A]_2\,\boldsymbol{t}\;\ldots\;\boldsymbol{t}\,[A]_n).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Zdefiniowany w (2.11) uogólniony $FECount$ α zbioru rozmytego A indukowany przez $\boldsymbol{t}$ i ν jest przekrojem uogólnionych liczb kardynalnych (2.7) i (2.9).

Jeśli $\boldsymbol{t} = \wedge$ i $\nu = \nu_Ł$, α sprowadza się do uogólnionej liczby kardynalnej typu $FECount$ określonej w (b3). Przy $\boldsymbol{t} = \wedge$ oraz $\nu = \nu^*$ formuła (2.12) przyjmuje postać

$$\alpha(k) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{m}}, 1, [A]_{m+1}, [A]_{m+2}, \ldots, [A]_n), \tag{2.13}$$

a więc α staje się uogólnioną liczbą kardynalną typu Dubois wprowadzoną w [2].

W dalszym ciągu przez $GFE_{\boldsymbol{t},\nu}$ oznaczymy rodzinę wszystkich uogólnionych liczb kardynalnych (2.12) z $A \in FFS$, indukowanych przez $\boldsymbol{t}$ i ν. Dla podkreślenia, że $\alpha \in GFE_{\boldsymbol{t},\nu}$ zastosujemy też w razie potrzeby zapis indeksowany $\alpha^{\boldsymbol{t},\nu}$ zamiast α.

Twierdzenie 2.3. *Niech $A \in FFS$ i $|A| = \alpha \in GFE_{\boldsymbol{t},\nu}$, gdzie $\boldsymbol{t}$ oznacza dowolną t-normę, a ν- negację. Wówczas*

(a) α jest wypukłym zbiorem rozmytym,

(b) jeśli $\nu(a) = 1 \;\Leftrightarrow\; a = 0$*, to* α *jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy* $A \in FCS$*,*

(c) $\alpha = 1_{\{n\}}$*, gdy* $A \in FCS$*,*

(d) $\alpha(k) = 0$ *dla* $k \notin [m, n]$*,*

(e) jeśli $\boldsymbol{t} \leqslant \boldsymbol{\mu}$ *i* $\nu \leqslant \xi$*, to* $\alpha^{\boldsymbol{t},\nu} \subset \alpha^{\boldsymbol{\mu},\xi}$*.*

Dowód powyższego twierdzenia podano w [30]. Własności (b)-(e) są natychmiastowymi konsekwencjami (2.11). (e) implikuje, że

$$\alpha^{\boldsymbol{t},\nu} \subset \alpha^{\wedge,\nu^*},$$

a więc uogólnione liczby kardynalne Dubois z (2.13) są maksymalne wśród liczb typu uogólniony $FECount$.

Dodawanie i mnożenie uogólnionych liczb kardynalnych postaci (2.8), (2.10) i (2.12) z archimedesową t-normą (włączając $\boldsymbol{t} = \wedge$) oraz ścisłą negacją ν określa się w sposób klasyczny:

(i) $\alpha + \beta := |A \cup B|$,
gdzie $A, B \in FFS$ są dowolnymi rozłącznymi zbiorami rozmytymi takimi, że $|A| = \alpha$ i $|B| = \beta$.

(ii) $\alpha \cdot \beta := |A \times B|$,
gdzie $A, B \in FFS$ są takie, że $|A| = \alpha$ i $|B| = \beta$.

Dodawanie można równoważnie realizować za pomocą zasady rozszerzania:

$$(\alpha + \beta)(k) = \bigvee_{i+j=k} \alpha(i)\, \boldsymbol{t}\, \beta(j) \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Szczegółową analizę uogólnionych liczb kardynalnych (2.8), (2.10) i (2.12) oraz ich arytmetykę przedstawiono w [30].

Rozdział 3

Osobliwe zbiory rozmyte

Dalsze rozważania ograniczymy do uogólnionych liczb kardynalnych z klasy $GFE_{\boldsymbol{t},\nu}$, gdzie t-norma $\boldsymbol{t}$ jest archimedesowa lub $\boldsymbol{t} = \wedge$ oraz $\nu \in Sneg$. Zauważymy, że używając $\boldsymbol{t} \in Natn$ pewne zbiory rozmyte stają się osobliwe co do mocy w tym sensie, że ich uogólnione liczby kardynalne typu $FECount$ okazują się być wektorem zerowym. Z technicznego punktu widzenia przyczyną tego zjawiska jest posiadanie przez $\boldsymbol{t}$ dzielników zera. Zbadamy ten przypadek dokładniej, formułując kryteria osobliwości i własności osobliwych zbiorów rozmytych oraz określając w następnym rozdziale związek między osobliwością a rozmytością zbioru rozmytego.

3.1 Pojęcie osobliwości zbioru rozmytego

Niech $A, B \in FFS$, $|A| = \alpha \in GFE_{\boldsymbol{t},\nu}$ i $|B| = \beta \in GFE_{\boldsymbol{t},\nu}$, gdzie $\boldsymbol{t}$ jest archimedesowa, z włączeniem $\boldsymbol{t} = \wedge$, oraz negacja ν jest ścisła.

Jeżeli $\boldsymbol{t}$ jest ścisła lub $\boldsymbol{t} = \wedge$, uogólnionym liczbom kardynalnym w $GFE_{\boldsymbol{t},\nu}$

odpowiada bardzo naturalna relacja równoliczności $\sim$:

$$\begin{aligned} A \sim B \quad &\Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}: \ [A]_k = [B]_k \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in (0,1]: \ |A_t| = |B_t| \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,1): \ |A^t| = |B^t|. \end{aligned}$$

Równoliczność $A \sim B$ oznacza, iż A oraz B są identyczne z dokładnością do permutacji ich dodatnich stopni przynależności, wliczając w to możliwe powtórzenia. Jest ona równoważna zwykłej równoliczności wszystkich odpowiadających sobie t-warstw (ostrych lub nie) zbiorów rozmytych A i B. W konsekwencji, dwa równoliczne zbiory rozmyte mają równoliczne jądra i równoliczne nośniki. Ponieważ $\boldsymbol{t}$ nie ma dzielników zera, mamy $\alpha \neq (0)$, tzn. α zawsze jest różna od funkcji zerowej. W tym kontekście warto zauważyć, iż $\alpha = 1_{\{k\}}$, gdy A sprowadza się do zbioru k-elementowego. Tak więc, w szczególności, uogólniony $FECount$ zbioru pustego $1_\emptyset$ jest równy $1_{\{0\}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$.

Sytuacja jest zupełnie inna, gdy $\boldsymbol{t} \in Natn$. Wtedy $\boldsymbol{t}$ ma dzielniki zera i dlatego nie można skonstruować relacji równoliczności podobnej do wyżej zdefiniowanej. Równość $\alpha = \beta$ może zachodzić dla A i B różniących się mocami odpowiadających sobie t-warstw, nośników i jąder. Możliwe jest też $\alpha = (0)$. Uogólnioną liczbę kardynalną (0) nazywać będziemy *płaską liczbą kardynalną*. Jeśli $\alpha = (0)$, mówimy, że A jest *osobliwym* zbiorem rozmytym, w przeciwnym wypadku A będziemy nazywać *nieosobliwym*. $\alpha = (0)$ oznacza, iż A jest zupełnie niepodobny do zbioru jakiejkolwiek mocy, ponieważ wszystkie wagi $\alpha(k)$ skojarzone z nieujemymi liczbami całkowitymi są równe zero. Dla przykładu, zbiory rozmyte $A = 1/x_1 + 0.8/x_2 + 0.5/x_3 + 0.4/x_4$ i $B = 0.7/x_1 + 0.6/x_2 + 0.3/x_3$, są osobliwe przy $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_Ł$ i $\nu = \nu_Ł$. To sugeruje nam, że bardzo "zwyczajne", a z drugiej strony, bardzo różne zbiory rozmyte, różniące się mocami nośników i mocami jąder, mogą być osobliwe. Widzimy też, iż osobliwość/nieosobliwość zbioru rozmytego jest relatywna i w ogólności zależy od wyboru konkretnej t-normy i negacji. Rzeczywiście, niech $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u} \in Natn$, $\nu, \sigma \in Sneg$, $|A| = \alpha \in GFE_{\boldsymbol{t},\nu}$ oraz $|A| = \beta \in GFE_{\boldsymbol{u},\sigma}$. Na mocy (2.11), jeżeli α jest płaska, $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{t}$ i $\sigma \leqslant \nu$, to β też jest płaska. Weźmy np. $A = 0.9/x_1 + 0.5/x_2 + 0.5/x_3 + 0.3/x_4$, z $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_Ł$ i $\nu = \nu_Ł$. A jest wówczas osobliwy. Ten sam zbiór rozmyty staje się nieosobliwy przy $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{S,4}$ i $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$. Jeśli $A \in FCS$, to $|A| = 1_{\{n\}}$, a więc zbiory są zawsze nieosobliwe.

W dalszej części pracy zbadamy zjawisko osobliwości. Kryteria i własności, które sformułujemy mogą być także użyte do konstruowania i rozpoznawania nieosobliwych zbiorów rozmytych.

3.2 Kryteria osobliwości

Dla zwięzłości sformułowań twierdzeń, w dalszej dyskusji zawsze korzystać będziemy z domyślnego założenia, że $|A| = \alpha \in GFE_{\boldsymbol{t},\nu}$ przy $A \in FFS$, $\boldsymbol{t} \in Natn$ z unormowanym generatorem g oraz $\nu \in Sneg$. Punkt stały negacji ν oznaczać będziemy jak poprzednio przez a^* ($a^* \in (0, 1)$). Niech nadto

$$s_{A,\nu} := \max\{i \in \mathbb{N} : [A]_i > a^*\} \tag{3.1}$$

oraz

$$r_{A,\nu} := \max\{i \in \mathbb{N} : [A]_i \geqslant a^*\}. \tag{3.2}$$

Dla prostoty notacji położymy $s := s_{A,\nu}$ i $r := r_{A,\nu}$. Widać, że $s = |A^{a^*}|$, $r = |A_{a^*}|$ oraz $m \leqslant s \leqslant r \leqslant n$.

Twierdzenie 3.1.

(a) $\alpha(k) \leqslant \alpha(s)$ *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$*,*

(b) $\alpha = (0)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\alpha(s) = 0$*.*

Dowód. (a) Jeżeli $n = 0$, to $s = 0$ oraz $\alpha = (1)$. Teza jest więc w oczywisty sposób prawdziwa. Podobnie, jeżeli $n = 1$, mamy $\alpha = (\nu([A]_1), [A]_1)$ przy $[A]_1 \in (0, 1]$. Zatem, $s = 0$ daje $\alpha(0) \geqslant \alpha(1)$ ponieważ $[A]_1 \leqslant a^*$, podczas gdy $s = 1$ prowadzi do $\alpha(0) < \alpha(1)$. Zakładając, że $n \geqslant 2$, następujące łańcuchy implikacji są prawdziwe:

$$\begin{aligned} k \leqslant s \quad &\Rightarrow \quad [A]_k > a^* \Rightarrow \nu([A]_k) < [A]_k, \\ k > s \quad &\Rightarrow \quad [A]_k \leqslant a^* \Rightarrow \nu([A]_k) \geqslant [A]_k. \end{aligned}$$

Stąd dla każdego $k \neq s$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= [A]_1 \, \boldsymbol{t} \, \ldots \, \boldsymbol{t} \, [A]_k \, \boldsymbol{t} \, \nu([A]_{k+1}) \, \boldsymbol{t} \, \ldots \, \boldsymbol{t} \, \nu([A]_n) \\ &\leqslant [A]_1 \, \boldsymbol{t} \, \ldots \, \boldsymbol{t} \, [A]_s \, \boldsymbol{t} \, \nu([A]_{s+1}) \, \boldsymbol{t} \, \ldots \, \boldsymbol{t} \, \nu([A]_n) \\ &= \alpha(s) \end{aligned}$$

co kończy dowód dla (a). Teza (b) jest natychmiastową konsekwencją (a). $\square$

Warto zauważyć, że

$$\alpha(s) = \alpha(s+1) = \ldots = \alpha(r),$$

gdyż

$$\alpha(s) = [A]_1 \, \boldsymbol{t} \, \ldots \, \boldsymbol{t} \, [A]_s \, \boldsymbol{t} \, \nu([A]_{s+1}) \, \boldsymbol{t} \, \ldots \, \boldsymbol{t} \, \nu([A]_r) \, \boldsymbol{t} \, \ldots \, \boldsymbol{t} \, \nu([A]_n),$$

a z definicji

$$[A]_{s+1} = [A]_{s+2} = \ldots = [A]_r = a^* \text{ przy } s < r,$$

a więc także

$$\nu([A]_{s+1}) = \nu([A]_{s+2}) = \ldots = \nu([A]_r) = a^*.$$

Cała procedura sprawdzania, czy $\alpha(k) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ może zatem być ograniczona do sprawdzania pojedynczego warunku $\alpha(s) = 0$ lub $\alpha(k) = 0$ dla dowolnego $s \leqslant k \leqslant r$. Z drugiej strony, każda z liczb całkowitych z przedziału $[s, r]$, a zwłaszcza liczba s lub r, może być użyta jako najlepsze skalarne oszacowanie uogólnionej liczby kardynalnej α.

Twierdzenie 3.2.

$$\alpha(s) = 0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{s} g([A]_i) + \sum_{i=s+1}^{n} g(\nu([A]_i)) \geqslant 1$$

Dowód. Teza wynika bezpośrednio z zastosowania (1.5) do ogólnej postaci $\alpha(s)$ określonej w (2.11). □

Ponieważ g oraz ν są funkcjami malejącymi, powyższe twierdzenie mówi, że A jest nieosobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy stopnie przynależności $[A]_i$ dla $i \leqslant s$ są dostatecznie bliskie 1 (są znacząco większe niż a^*) oraz $[A]_i$ dla $s + 1 \leqslant i \leqslant n$ są wystarczająco mniejsze od punktu stałego a^*. Inaczej mówiąc, $\alpha \neq (0)$ jest możliwe tylko wtedy, gdy A jest "podobny" do zbioru s-elementowego. Sugeruje to związek między osobliwością zbioru rozmytego a jego rozmytością. Kwestią tą zajmiemy się w rozdziale 4.

Wniosek 3.3. *Niech $s > 1$ będzie takie, że $a^* < g^{-1}(1/s)$. Jeżeli*

$$[A]_i \leqslant g^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

wtedy A jest osobliwy.

Dowód. Nierówność $s > 1$ implikuje, iż $[A]_1 > a^*$, co oznacza, że $[A]_1 \leqslant g^{-1}(1/s)$ jest możliwe tylko wtedy, gdy s spełnia warunek $a^* < g^{-1}(1/s)$. Nierówność $[A]_1 \leqslant g^{-1}(1/s)$ prowadzi wtedy do $g([A]_1) \geqslant 1/s$, a więc

$$\sum_{i=1}^{s} g([A]_i) \geqslant \sum_{i=1}^{s} g([A]_1) \geqslant 1$$

Korzystając z twierdzenia 3.2, otrzymujemy $\alpha(s) = 0$, a więc A jest osobliwy.

$\square$

Dla przykładu, niech $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_Ł$ oraz $\nu = \nu_Ł$, tzn. $a^* = 0.5$ i $g(a) = 1 - a$. Wtedy warunek $a^* < g^{-1}(1/s)$ jest równoważny nierówności $s \geqslant 3$. Powyższy wniosek mówi, iż jeżeli $s \geqslant 3$ oraz $[A]_1 \leqslant 1 - 1/s$, to A jest osobliwy. Zatem np. każdy zbiór rozmyty A z parametrem $s = 10$ jest osobliwy, gdy $[A]_1 \leqslant 0.9$.

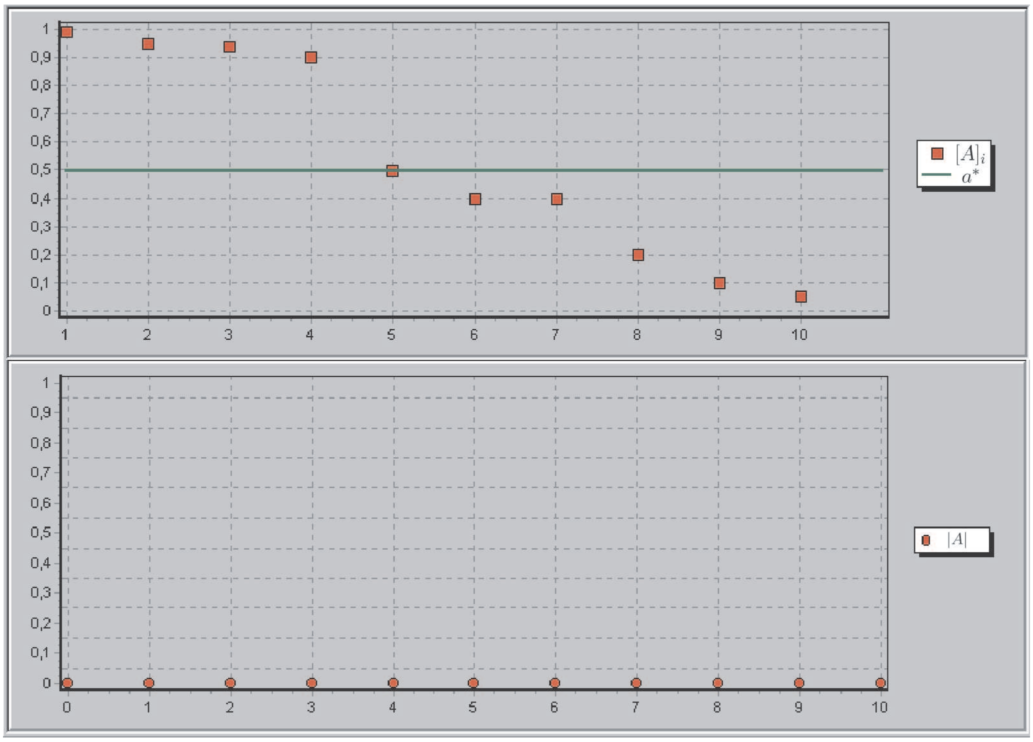
Przykład 3.4. *W świetle twierdzenia 3.2, jak już zauważyliśmy, nieosobliwy zbiór rozmyty A musi być podobny do zbioru s-elementowego. Dla lepszego zrozumienia tego faktu, pokażemy kilka przykładów.*

(i) *Załóżmy znów, iż* $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_Ł$ *oraz* $\nu = \nu_Ł$, *a więc* $a^* = 0.5$. *Zatem* $A = 0.8/x_1 + 0.2/x_2 + 0.1/x_3 + 0.1/x_4$ *jest nieosobliwy ponieważ* $s = 1$ *oraz* $\alpha(s) = 0.8 \,\boldsymbol{t}\, \nu(0.2) \,\boldsymbol{t}\, \nu(0.1) \,\boldsymbol{t}\, \nu(0.1) > 0$. *Widzimy, że A jest rzeczywiście podobny do zbioru 1-elementowego.*

(ii) *Niech* $\boldsymbol{t}$ *oraz* ν *będą takie same jak w (i). Niech*

$$\begin{aligned} A &= 0.99/x_1 + 0.95/x_2 + 0.94/x_3 + 0.9/x_4 + 0.5/x_5 + \\ &\quad +0.4/x_6 + 0.4/x_7 + 0.2/x_8 + 0.1/x_9 + 0.05/x_{10}. \end{aligned}$$

W tym przypadku $s = 4$ *oraz* $\alpha(s) = 0.99 \,\boldsymbol{t}\, 0.95 \,\boldsymbol{t}\, 0.94 \,\boldsymbol{t}\, 0.9 \,\boldsymbol{t}\, 0.5 \,\boldsymbol{t}\, 0.6 \,\boldsymbol{t}\, 0.6 \,\boldsymbol{t}\, 0.8 \,\boldsymbol{t}\, 0.9 \,\boldsymbol{t}\, 0.95 = 0$, *tzn. A jest osobliwy. Jego podobieństwo* *do zbioru 4-elementowego jest małe ze względu na zbyt duże wartości przynależności elementów x_5, x_6 i x_7. Mówiąc bardziej precyzyjnie, nie są one dostatecznie mniejsze od a^*. (patrz rys. 3.1)*

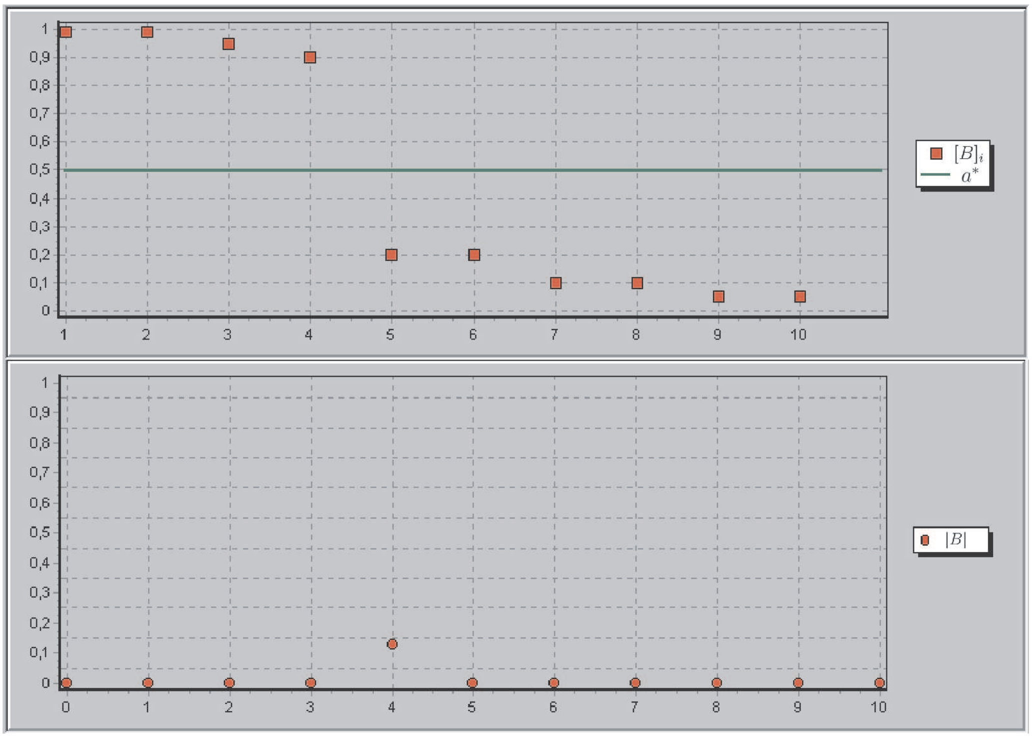


Rysunek 3.1:

Zbiór rozmyty

$$\begin{aligned} B &= 0.99/x_1 + 0.99/x_2 + 0.95/x_3 + 0.9/x_4 + 0.2/x_5 a + \\ &+0.2/x_6 + 0.1/x_7 + 0.1/x_8 + 0.05/x_9 + 0.05/x_{10}. \end{aligned}$$

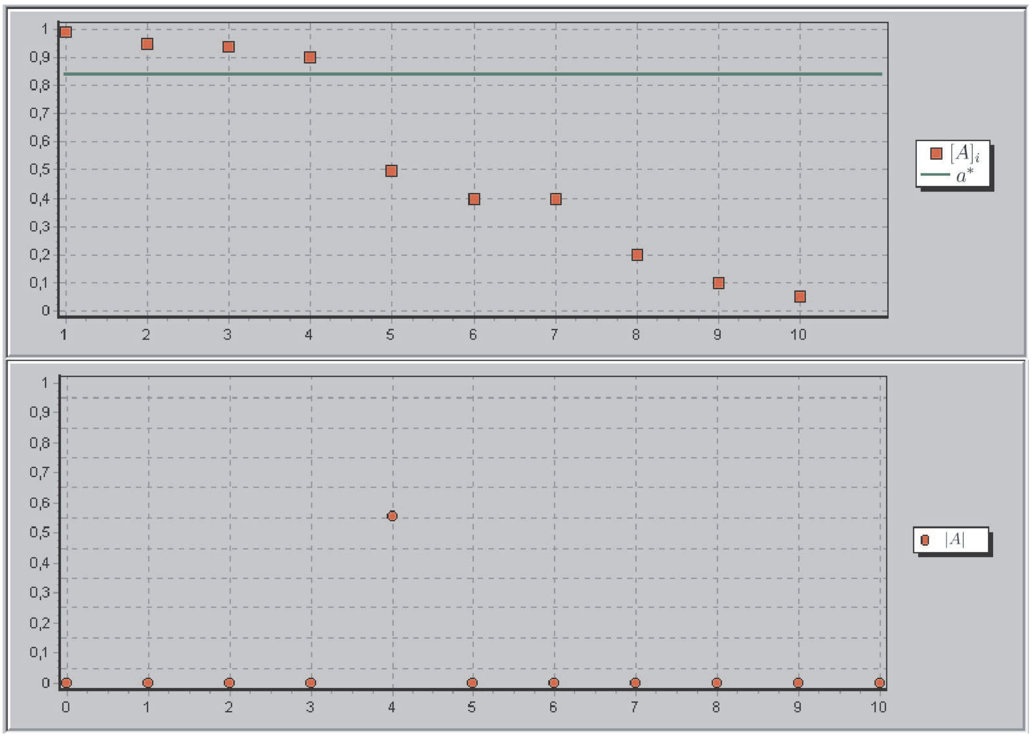
jest nieosobliwy chociaż również w tym przypadku $s_{B,\nu}$=4. Dzieje się tak ze względu na to, iż B jest bardziej podobny do zbioru 4-elementowego niż zbiór rozmyty A (patrz rys. 3.2)



Rysunek 3.2:

(iii) *Weźmy* $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{S,4}$ *oraz* $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$, *tzn.* $a^* = 0.5^{1/4} \approx 0.84$ *(patrz ((1.16)). Weźmy znów pod uwagę zbiór rozmyty* A *z (ii). Tak jak poprzednio mamy* $s = 4$, *lecz tym razem* $\alpha(s) > 0$ *i stąd* A *jest nieosobliwy (patrz rys. 3.3).*

Powodem tego faktu jest to, że a^* *zawsze odgrywa rolę punktu progowego: stopnie przynależności* $> a^*$ *są uznawane za mniej lub bardziej podobne do maksymalnej wartości przynależności 1, podczas gdy stopnie* $\leqslant a^*$ *traktowane są jako mniej lub bardziej podobne do minimalnej wartości przynależności 0. W niniejszym przykładzie mamy* $a^* \approx 0.79$. *Stopnie przynależności punktów* x_5, x_6 *i* x_7 *są teraz znacznie mniejsze od wartości progowej i w konsekwencji* A *staje się bardziej podobny do zbioru 4-elementowego niż w (ii).*



Rysunek 3.3:

Twierdzenie 3.5. *Jeżeli A jest osobliwy oraz B jest rozłączny z A, to zbiór rozmyty $A \cup B$ jest osobliwy.*

Dowód. Załóżmy, że A jest osobliwy oraz $A \cap B = 1_\emptyset$. Niech $c_i := [A \cup B]_i$ dla $i \geqslant 1$, $q := max\{i : c_i > a^*\}$, $n^* := |supp(B)|$ oraz $l := |supp(A \cup B)| = n + n^*$. Ciąg $c_1, c_2 \ldots, c_l$ powstaje w wyniku połączenia ciągów $[A]_1, [A]_2, \ldots, [A]_n$ oraz $[B]_1, [B]_2, \ldots, [B]_{n^*}$ w jeden ciąg nierosnący. Zatem $q \geqslant s$ oraz z twierdzenia 3.2 otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{q} g(c_i) + \sum_{i=q+1}^{l} g(\nu(c_i)) \geqslant \sum_{i=1}^{s} g([A]_i) + \sum_{i=s+1}^{n} g(\nu([A]_i)) \geqslant 1,$$

co oznacza, iż $A \cup B$ jest osobliwy. $\square$

Własność zbiorów osobliwych opisaną w powyższym twierdzeniu nazywać będziemy własnością *absorpcji*. Własność ta jest odzwierciedlona w wynikach generowanych przez zasadę rozszerzania:

$$(\alpha + \beta)(k) := \bigvee\{\alpha(i)\ \boldsymbol{t}\ \beta(j) : i + j = k\}.$$

Widzimy bowiem, że $(0) + \beta = (0)$ dla każdego $\beta \in GFE_{\boldsymbol{t},\nu}$.

Wniosek 3.6. *Jeżeli zbiór rozmyty $a_{i_1}/x_{i_1} + a_{i_2}/x_{i_2} \ldots + a_{i_k}/x_{i_k}$ jest osobliwy dla pewnych indeksów $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ przy $2 \leqslant k < n$, to zbiór rozmyty $A = a_1/x_1 + a_2/x_2 + \ldots + a_n/x_n$ jest również osobliwy.*

Dowód. Teza jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 3.5, gdy wziąć pod uwagę fakt, iż każdy zbiór rozmyty jest sumą rozłącznych singletonów składających się na niego. □

Tak więc zbiór rozmyty jest osobliwy, gdy jego właściwy podzbiór rozmyty powstały poprzez obcięcie nośnika jest również osobliwy. Z drugiej strony, fakt iż A jest osobliwy nie musi oznaczać, że istnieje jego osobliwy podzbiór rozmyty $a_{i_1}/x_{i_1} + a_{i_2}/x_{i_2} + \ldots + a_{i_k}/x_{i_k}$. Przykładem może być $A = 0.6/x_1 + 0.6/x_2 + 0.6/x_3$ z $t = t_Ł$ i $\nu = \nu_Ł$. A jest osobliwy, lecz $|0.6/x_i + 0.6/x_j| = (0, 0, 0.2) \neq (0)$.

Wniosek 3.6 daje nam użyteczne kryterium na to czy dany zbiór rozmyty jest osobliwy, gdyż w praktyce łatwo jest sprawdzić czy zbiór rozmyty o małym nośniku, powiedzmy 2- lub 3-elementowym, jest osobliwy. Nierówność $k \geqslant 2$ odzwierciedla fakt, iż singleton nie może być osobliwy, gdyż $|a/x| = (\nu(a), a)$ dla $a \in (0, 1]$. Przy okazji warto podkreślić, iż w ogólności łatwo jest skonstruować osobliwy zbiór rozmyty o nośniku mającym moc $\geqslant 3$. Zadanie konstrukcji osobliwego zbioru rozmytego o nośniku 2-elementowym może być znacznie trudniejsze lub nawet niewykonalne. Czynnikiem warunkującym jest tu postać ν (patrz twierdzenie 3.10 w następnym podrozdziale). W ogólności, im większy nośnik tym łatwiej skonstruować na nim osobliwy zbiór rozmyty (por. wniosek 3.3).

3.3 Przypadek negacji indukowanej

Korzystając z konwencji notacyjnej wprowadzonej w podrozdziale 3.2 przedstawimy kilka rezultatów dotyczących osobliwości zbioru rozmytego przy $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$. Pierwszy z nich stanowi uproszczenie kryterium z twierdzenia 3.2.

Twierdzenie 3.7. *Jeżeli* $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$, *to*

$$\alpha(s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} g([A]_i) - \sum_{i=s+1}^{n} g([A]_i) \geqslant s - n + 1. \tag{3.3}$$

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 3.2 i twierdzenia 1.15(c). □

Twierdzenie powyższe umożliwia nam formułowanie explicite kryterium osobliwości dla konkretnej t-normy i indukowanej przez niej negacji. Oto dwa przykłady.

Przykład 3.8.

(1) $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{S,\lambda}$ *dla* $\lambda > 0$ *i* $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$. *Wtedy*

$$\alpha(s) = 0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{s}([A]_i)^\lambda - \sum_{i=s+1}^{n}([A]_i)^\lambda \leqslant s - 1.$$

Tak więc jeśli $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{Ł}$ *i* $\nu_{\boldsymbol{t}} = \nu_{Ł}$, *to*

$$\alpha(s) \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{s}[A]_i - \sum_{i=s+1}^{n}[A]_i \leqslant s - 1.$$

(2) $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{W,\lambda}$ *dla* $\lambda > -1$ *i* $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$. *Otrzymujemy*

$$\alpha(s) = 0 \;\Leftrightarrow\; \prod_{i=1}^{s}(1+\lambda[A]_i) \leqslant (1+\lambda)^{s-1} \prod_{i=s+1}^{n}(1+\lambda[A]_i)$$

dla $\lambda > 0$*; jeżeli* $-1 < \lambda < 0$*, symbol* $\leqslant$ *należy zastąpić przez* $\geqslant$*. Przypadek* $\lambda = 0$ *jest tu pominięty ponieważ* $\boldsymbol{t}_{W,0} = \boldsymbol{t}_{Ł}$. □

Twierdzenie 3.9. *Jeżeli* $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$ *oraz* $[A]_{s+1} = [A]_{s+2} = a^*$*, to* $\alpha(s) = 0$.

Dowód. Stosując (1.15) w formule

$$\alpha(k) = [A]_1 \,\boldsymbol{t}\, \ldots \,\boldsymbol{t}\, [A]_s \,\boldsymbol{t}\, \nu([A]_{s+1}) \,\boldsymbol{t}\, \nu([A]_{s+2}) \,\boldsymbol{t}\, \ldots \,\boldsymbol{t}\, \nu([A]_n),$$

otrzymujemy $\alpha(s) = 0$, gdy $[A]_{s+1} = [A]_{s+2} = a^*$ oraz $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$. □

Tak więc, gdy A przyjmuje wartości a^* w przynajmniej 2 punktach, wtedy A jest osobliwy przy założeniu, że $\nu_{\boldsymbol{t}}$ jest użyta jako negacja. Innymi słowy, nieosobliwość zbioru A implikuje $|\{x : A(x) = a^*\}| \leqslant 1$. W szczególności, A z $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{S,\lambda}$ jest osobliwy, gdy $|\{x : A(x) = 0.5^{1/\lambda}\}| \geqslant 2$. Zauważmy też, iż twierdzenie 3.9 może być również otrzymane z twierdzenia 3.2 oraz (1.16).

Jak stwierdziliśmy wcześniej, singletony nie mogą być osobliwe. Następująca własność nawiązuje do pytania o konstruowalność osobliwego zbioru rozmytego posiadającego nośnik 2-elementowy.

Twierdzenie 3.10. *Niech* $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$ *i* $a, b > 0$*. Zbiór rozmyty* $a/x + b/y$ *jest osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy* $a = b = a^*$.

Dowód. Niech $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$. Wybierzmy dowolne $a, b \in (0, 1]$ i załóżmy, że $\alpha = |A|$ dla $A = a/x + b/y$ gdzie $x, y \in \mathcal{M}$. Zatem $n = 2$. Bez straty ogólności możemy założyć, iż $a \geqslant b$. Na mocy (2.12) mamy

$$\alpha = (\nu(a) \,\boldsymbol{t}\, \nu(b), a \,\boldsymbol{t}\, \nu(b), a \,\boldsymbol{t}\, b).$$

(a) Jeżeli $a \geqslant b > a^*$, wtedy $s = 2$ oraz na mocy twierdzenia 3.7 otrzymujemy

$$\alpha = (0) \Leftrightarrow \alpha(2) = 0 \Leftrightarrow g(a) + g(b) \geqslant 1.$$

Biorąc pod uwagę fakt (1.16) mówiący, że $a^* = g^{-1}(0.5)$ mamy

$$g(a) \leqslant g(b) < g(a^*) = 0.5.$$

Stąd $g(a) + g(b) < 1$, co oznacza, że A nie może być osobliwy.

(b) Jeżeli $a > a^* \geqslant b$, wtedy

$$g(a) < g(a^*) = 0.5 \leqslant g(b),$$

a więc $g(a) - g(b) < 0$. I znów A nie może być osobliwy ponieważ $s = 1$ oraz

$$\alpha = (0) \Leftrightarrow \alpha(1) = 0 \Leftrightarrow g(a) - g(b) \geqslant 0.$$

(c) Załóżmy, iż $a^* \geqslant a \geqslant b > 0$. Tym razem

$$g(b) \geqslant g(a) \geqslant 0.5.$$

Z drugiej strony, $s = 0$ oraz

$$\alpha(0) = 0 \Leftrightarrow g(a) + g(b) \leqslant 1.$$

A jest zatem osobliwy tylko wtedy, gdy $g(a) = g(b) = 0.5$, co oznacza iż $a = b = a^*$. To kończy dowód.

$\square$

Jeżeli zatem $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_Ł$ oraz $\nu = \nu_Ł$, wtedy jedynym osobliwym zbiorem rozmytym postaci $a/x+b/y$ jest zbiór rozmyty z $a = b = 0.5$. Twierdzenie 3.10 nie zachodzi przy $\nu \neq \nu_{\boldsymbol{t}}$. Dla przykładu, $a/x + b/y$ jest zawsze nieosobliwy dla $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_Ł$ i $\nu(a) = 1 - a^2$. Istnieje natomiast nieskończenie wiele osobliwych zbiorów rozmytych $a/x + b/y$ jeżeli zastosujemy t-normę Łukasiewicza oraz negację $\nu(a) = 1 - a^{0.5}$.

Rozdział 4

Osobliwość a rozmytość zbioru rozmytego

Jak zauważyliśmy, twierdzenie 3.2 sugeruje związek osobliwości zbioru rozmytego z jego rozmytością. W niniejszym rozdziale zbadamy dokładniej tę kwestię. Punktem wyjścia będą rozważania dotyczące osobliwości zbioru rozmytego stałego na swym nośniku.

4.1 Osobliwość zbioru rozmytego stałego na nośniku

Nadal korzystać będziemy z ustaleń sformułowanych na początku podrozdziału 3.2. Uogólniając symbol $1_{\mathcal{D}}$ oznaczający funkcję charakterystyczną zbioru $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$, zdefiniujmy w następujący sposób zbiór rozmyty $a_{\mathcal{D}}$ dla $a \in (0, 1]$:

$$a_{\mathcal{D}}(x) := \begin{cases} a, & \text{gdy } x \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Twierdzenie 4.1. *Dla każdego $a \in (0,1]$ i każdego niepustego skończonego zbioru $\mathcal{D}$, $a_{\mathcal{D}}$ jest osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a \vee \nu(a) \leqslant g^{-1}\left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\right).$$

Dowód. Ustalmy $a \in (0,1]$ i skończony zbiór $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Niech $\gamma := |a_{\mathcal{D}}|$, $p := |\mathcal{D}|$ oraz $q := max\{i : [a_{\mathcal{D}}]_i > a^*\}$. Mamy więc $[a_{\mathcal{D}}]_i = a$ dla $1 \leqslant i \leqslant p$. Przypuśćmy, że $a \in (a^*, 1]$. Wtedy $q = p$ oraz z twierdzenia 3.2 i (1.11) mamy:

$$\gamma(q) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} g(a) \geqslant 1 \Leftrightarrow \nu(a) < a \leqslant g^{-1}(1/p). \tag{4.1}$$

Jeżeli $a \in (0, a^*]$, wtedy $q = 0$ oraz

$$\gamma(q) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{p} g(\nu(a)) \geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; a \leqslant \nu(a) < a \leqslant g^{-1}(1/p). \tag{4.2}$$

Tak więc łącząc (4.1) i (4.2) otrzymujemy, że $a_{\mathcal{D}}$ jest osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy $a \vee \nu(a) \leqslant g^{-1}(1/p)$, co kończy dowód. □

Ponieważ $g^{-1}(1) = 0$, twierdzenie 4.1 daje nam dodatkowe potwierdzenie, iż singleton nie może być osobliwy.

Wniosek 4.2. *Niech $|\mathcal{D}| \geqslant 2$ oraz $a \in (0,1]$.*

(a) $a_{\mathcal{D}}$ jest osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\nu^{-1}\left(g^{-1}\left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\right)\right) \leqslant a \leqslant g^{-1}\left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\right).$$

(b) Jeżeli $a_{\mathcal{D}}$ jest osobliwy oraz $|\mathcal{D}| < |\mathcal{E}|$, to $a_{\mathcal{E}}$ jest również osobliwy.

(c) Jeżeli $g^{-1}\left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\right) < a^*$, to $a_{\mathcal{D}}$ jest nieosobliwy.

Dowód.

(a) $a_{\mathcal{D}}$ jest osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \vee \nu(a) \leqslant g^{-1}(1/|\mathcal{D}|),$$

co oznacza, iż $a \leqslant g^{-1}(1/|\mathcal{D}|)$ oraz

$$a \geqslant \nu^{-1}(g^{-1}(1/|\mathcal{D}|)).$$

(b) $|\mathcal{D}| < |\mathcal{E}|$ implikuje

$$g^{-1}(1/\mathcal{D}|) < g^{-1}(1/|\mathcal{E}|).$$

Stosując twierdzenie 4.1 wnioskujemy, że $a_{\mathcal{E}}$ jest osobliwy, jeśli $a_{\mathcal{D}}$ jest osobliwy.

(c) Nierówność $g^{-1}(1/|\mathcal{D}|) < a^*$ w połączeniu z (1.12) prowadzi do nierówności

$$g^{-1}(1/|\mathcal{D}|) < a \vee \nu(a),$$

co implikuje, iż $a_{\mathcal{D}}$ jest nieosobliwy dla każdego $a \in (0, 1]$.

□

Sformułujmy teraz kilka użytecznych wniosków w przypadku $a = a^*$. Widać, iż uogólniona liczba kardynalna zbioru rozmytego $a^*_{\mathcal{D}}$ jest zawsze funkcją stałą na swym nośniku ponieważ $\nu(a^*) = a^*$ (patrz 2.12).

Wniosek 4.3. *Niech* $|\mathcal{D}| \geqslant 2$.

(a) $a^*_{\mathcal{D}}$ *jest osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy* $a^* \leqslant g^{-1}\left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\right)$.

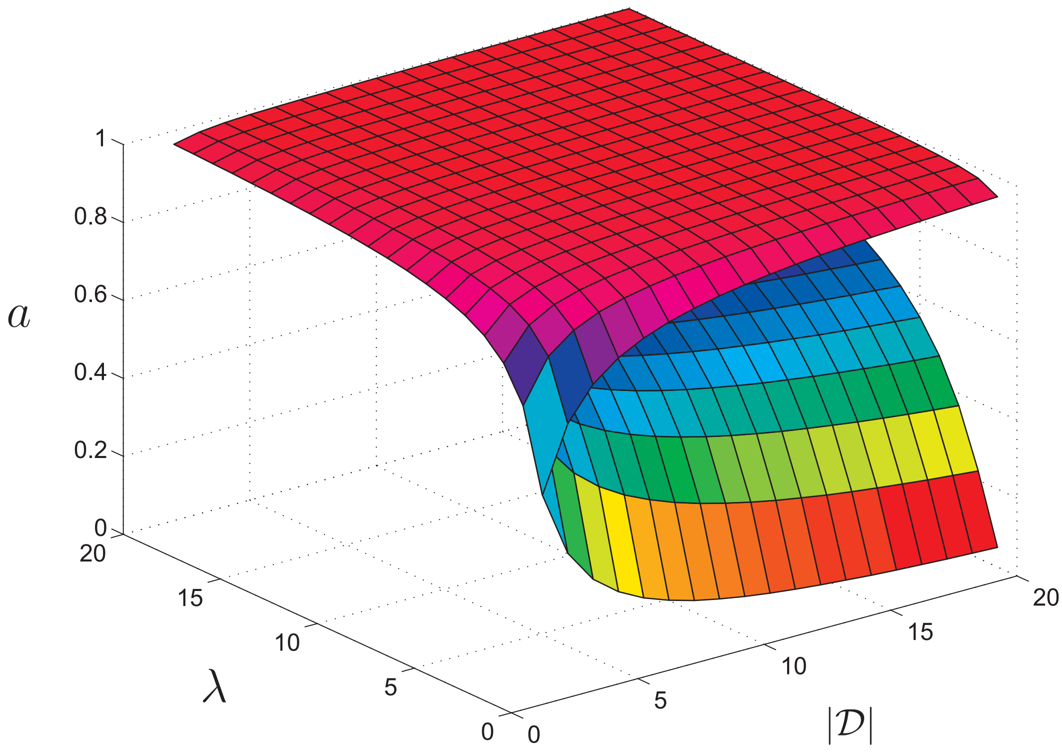
(b) $a^*_{\mathcal{D}}$ *jest osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy* $|\mathcal{D}| \geqslant \frac{1}{g(a^*)}$.

Dowód. (a) Wynika bezpośrednio z twierdzenia 4.1. (b) jest przekształconą wersją tezy (a). □

Wariant (a) wniosku 4.3 jest wygodny gdy $\mathcal{D}$ oraz $\boldsymbol{t}$ są ustalone i szukamy negacji ν takiej, iż $a^*_{\mathcal{D}}$ jest osobliwy/nieosobliwy. (b) mówi, iż jeżeli $\boldsymbol{t}$, ν, a więc a^* są dane, to $a^*_{\mathcal{D}}$ jest zawsze osobliwy, o ile $\mathcal{D}$ jest dostatecznie dużej mocy.

Wniosek 4.4. *Jeżeli $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$, to $a^*_{\mathcal{D}}$ przy $|\mathcal{D}| \geqslant 2$ jest osobliwy.*

Dowód. Teza jest bezpośrednią konsekwencją (1.16) oraz wniosku 4.3(b). □



Rysunek 4.1:

Zauważmy, iż powyższy wniosek można również otrzymać z twierdzenia 3.9. Rozważmy przykład, w którym $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{S,\lambda}$ dla $\lambda > 0$ i $\nu = \nu_{\boldsymbol{t}}$. Stosując wniosek 4.2(a), wnioskujemy wtedy, że $a_{\mathcal{D}}$ przy $a \in (0, 1]$ oraz $|\mathcal{D}| \geqslant 2$ jest osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\right)^{1/\lambda} \leqslant a \leqslant \left(1 - \frac{1}{|\mathcal{D}|}\right)^{1/\lambda}.$$

Wykres powierzchni ograniczającej wartości a spełniające powyższe nierówności przestawiony został na rysunku 4.1.

4.2 Miary rozmytości

Wprowadźmy następującą relację częściowego porządku dla zbiorów rozmytych.

Definicja 4.5. *Niech $A, B \in FFS$, $\nu \in Sneg$ oraz*

$$A \leqslant^{\nu} B \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{M}: \; A(x) \leqslant B(x) \leqslant a^* \perp a^* \leqslant B(x) \leqslant A(x).$$

Jeżeli $A \leqslant^{\nu} B$ mówimy, że B jest bardziej rozmyty niż A lub dualnie, że A jest bardziej ostry niż B.

Łatwo zauważyć, iż $A \leqslant^{\nu} a^*_{supp(A)}$ oraz ogólnie, iż najbardziej rozmytym zbiorem rozmytym o danym nośniku $\mathcal{D}$ jest $a^*_{\mathcal{D}}$.

Relacja $\leqslant^{\nu}$ była rozważana z użyciem innej terminologii w [10]. Jej szczególny przypadek z $\nu = \nu_{Ł}$ i $a^* = 0.5$ użyty jest np. w [18].

Twierdzenie 4.6. *Jeżeli A jest osobliwy oraz $A \leqslant^{\nu} B$, to B jest również osobliwy.*

Dowód. Załóżmy, iż $\boldsymbol{t} \in Natn$, $\nu \in Sneg$ oraz $A, B \in FFS$ są takie, że $A \leqslant^{\nu} B$. Niech $\alpha = |A|$ oraz $\beta = |B|$. Załóżmy, że A jest osobliwy, tzn. na mocy twierdzenia 3.1 mamy

$$\alpha(s) = [A]_1\, \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\, [A]_s\, \boldsymbol{t}\ \ \nu([A]_{s+1})\ \ \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\ \ \nu([A]_n) = 0.$$

Niech $n^* := |supp(B)|$ oraz $q := max\{i : [B]_i > a^*\}$. Z definicji relacji $\leqslant^{\nu}$ otrzymujemy $s \geqslant q$ oraz $n \leqslant n^*$. Ze względu na to, iż $[B]_j = a^*$ dla każdego $q < j \leqslant s$, mamy dla takich j równość $\nu([B]_j) = [B]_j$. Stąd

$$\begin{aligned}
\beta(q) &= [B]_1\, \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\, [B]_q\, \boldsymbol{t}\, \nu([B]_{q+1})\, \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\, \nu([B]_s)\, \boldsymbol{t}\, \nu([B]_{s+1})\, \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\, \nu([B]_{n^*}) \\
&= [B]_1\, \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\, [B]_s\, \boldsymbol{t}\, \nu([B]_{s+1})\, \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\, \nu([B]_{n^*}) \\
&\leqslant [A]_1\, \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\, [A]_s\, \boldsymbol{t}\, \nu([A]_{s+1})\, \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\, \nu([A]_{n^*}) \\
&= [A]_1\, \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\, [A]_s\, \boldsymbol{t}\, \nu([A]_{s+1})\, \boldsymbol{t} \ \ldots\ \boldsymbol{t}\, \nu([A]_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ponieważ $[B]_i \leqslant [A]_i$ dla $i \leqslant s$, $[A]_i \leqslant [B]_i$ dla $s < i \leqslant n^*$ oraz $\nu([A]_i) = 1$ dla $i > n$. Ostatecznie $\beta(q) = 0$, a zatem B jest osobliwy. □

Jeśli więc $A \leqslant^{\nu} B$ i B jest nieosobliwy, to A też jest nieosobliwy. Innymi słowy, zbiór rozmyty będący bardziej rozmyty niż osobliwy zbiór rozmyty jest również osobliwy, a zbiór rozmyty ostrzejszy niż nieosobliwy zbiór rozmyty jest również nieosobliwy. Innym wnioskiem z twierdzenia 4.6 jest to, że jeżeli A jest osobliwy, to również osobliwy jest zbiór $a^*_{\mathcal{D}}$ dla dowolnego $\mathcal{D}$ takiego, że $|D| \geqslant n$. Tak więc, A z $n \leqslant |\mathcal{D}|$ jest nieosobliwy, gdy $a^*_{\mathcal{D}}$ ze skończonym zbiorem $\mathcal{D}$ jest nieosobliwy.

Relacja $\leqslant^{\nu}$ zwraca naszą uwagę na miary rozmytości, odpowiadające na pytanie jak bardzo rozmyty jest zbiór rozmyty. Istnieją dwie ogólne klasy takich miar: miary entropii i miary energii. Opisują one odpowiednio, na ile zbiór rozmyty różni się od zbioru i od zbioru 1-elementowego (patrz [9, 18, 21].

Rozważania w niniejszej pracy ograniczymy do miar rozmytości typu entropijnego. Załóżmy dodatkowo, iż uniwersum $\mathcal{M}$ jest skończone. Gwarantuje to skończoność $a^*_{\mathcal{M}}$. Jak poprzednio, $\nu \in Sneg$ oraz a^* oznacza punkt stały negacji ν.

Definicja 4.7. *Odwzorowanie $\mathcal{E} : FFS \to [0, \infty)$ jest miarą rozmytości wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A, B \in FFS$ spełnione są następujące postulaty:*

(A1) $\mathcal{E}(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; A \in FCS$,

(A2) $\mathcal{E}$ *osiąga swe jedyne maximum w punkcie* $a^*_{\mathcal{M}}$,

(A3) $A \leqslant^{\nu} B \;\Rightarrow\; \mathcal{E}(A) \leqslant \mathcal{E}(B)$,

(A4) $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A^{\nu})$,

(A5) $\mathcal{E}(A \cup B) + \mathcal{E}(A \cap B) = \mathcal{E}(A) + \mathcal{E}(B)$.

Liczbę $\mathcal{E}(A)$ nazywamy miarą rozmytości zbioru rozmytego A.

Klasyczna definicja miary rozmytości podana w [18] jest szczególnym przypadkiem definicji 4.7 przy $\nu = \nu_Ł$ i $a^* = 0.5$. To klasyczne sformułowanie jest właściwe tylko, gdy używa się standardowego dopełnienia A' indukowanego przez negację Łukasiewicza. Definicja 4.7 stanowi naturalne uogólnienie definicji z [18] na przypadek dopełnienia indukowanego przez ścisłą negację. Postulaty (A1), (A2), (A3) są również użyte w [10] do zdefiniowania ogólnej klasy miar rozmytości. Jak pokazano tam, klasa ta jest identyczna z klasą miar rozmytości zdefiniowanych jako odległość między A oraz A^{ν}.

Można powiedzieć, że jeżeli $A \in FFS$ jest nieosobliwy, to jego miara rozmytości $\mathcal{E}(A)$ jest "mała" w porównaniu z $\mathcal{E}\left(a^*_{supp(A)}\right)$. Jest to oczywiście prawdą tylko przy założeniu, że $|supp(A)| \geqslant 1/g(a^*)$. Z wniosku 4.3(b) wynika bowiem, że $|supp(A)| < 1/g(a^*)$ implikuje nieosobliwość $a^*_{supp(A)}$, a zatem A jest również nieosobliwy, chociaż $\mathcal{E}(A)$ jest być może bliskie $\mathcal{E}\left(a^*_{supp(A)}\right)$.

Miary rozmytości z definicji 4.7 mogą być scharakteryzowane w dogodny sposób za pomocą skończonych sum przekształconych stopni przynależności.

Twierdzenie 4.8. $\mathcal{E} : FFS \to [0, \infty)$ *jest miarą rozmytości wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathcal{E}(A) = \sum_{x \in \mathcal{M}} f((A(x)) = \sum_{x \in supp(A)} f((A(x))$$

dla każdego $A \in FFS$, *gdzie* $f : [0,1] \to [0, \infty)$ *spełnia następujące warunki:*

(P1) $f(0) = f(1) = 0$ *oraz* $f(a) > 0$ *dla* $a \in (0,1)$,

(P2) $\forall a \neq a^* : \ f(a) < f(a^*)$,

(P3) f *jest niemalejąca na* $[0, a^*]$ *i nierosnąca na* $[a^*, 1]$,

(P4) $\forall a \in [0,1] : \ f(a) = f(\nu(a))$.

Dowód.

$(\Rightarrow)$ Załóżmy, że $\mathcal{E}$ jest miarą rozmytości spełniającą aksjomaty (A1)-(A5). Na mocy (A1) i (A5), jeżeli $A \cap B = 1_\emptyset$, wtedy $\mathcal{E}(A \cap B) = 0$, a zatem

$$\mathcal{E}(A \cup B) = \mathcal{E}(A) + \mathcal{E}(B).$$

Stąd

$$\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}\left(\bigcup_{x \in \mathcal{M}} A(x)/x\right) = \sum_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{E}(A(x)/x).$$

(i) Ponieważ $\mathcal{E} : FFS \to [0,\infty)$ i domyślnie zakładamy, że $\mathcal{E}(a/x)$ nie zależy od x, otrzymujemy $\mathcal{E}(a/x) = f(a)$ dla $a \in [0,1]$ z $f : [0,1] \to [0,\infty)$ taką, że $f(0) = f(1) = 0$ i $f(a) > 0$ dla $a \in (0,1)$, co wynika z (A1). Stąd funkcja f spełnia (P1) oraz co więcej mamy

$$\mathcal{E}(A) = \sum_{x\in\mathcal{M}} f(A(x)) = \sum_{x\in supp(A)} f(A(x)).$$

(ii) (A2) implikuje (P2). Faktycznie, jeżeli $f(a) \geqslant f(a^*)$ dla pewnego $a \neq a^*$, wtedy

$$\mathcal{E}(a_{\mathcal{M}}) = \sum_{x\in\mathcal{M}} f(a) \geqslant \sum_{x\in\mathcal{M}} f(a^*) = \mathcal{E}(a^*_{\mathcal{M}}),$$

co przeczy (A2).

(iii) Wobec (A3), $a/x \leqslant^{\nu} b/x$ dla $a, b \in [0,1]$ implikuje $\mathcal{E}(a/x) \leqslant \mathcal{E}(b/x)$, co oznacza, że $f(a) \leqslant f(b)$. Biorąc pod uwagę, iż

$$a \leqslant b \leqslant a^* \text{ lub } a^* \leqslant b \leqslant a,$$

stwierdzamy, że f spełnia (P3).

(iv) Z (A4) i (A1) mamy

$$\begin{aligned} f(a) &= \mathcal{E}(a/x) = \mathcal{E}(\nu(a)/x \cup 1_{\{y\in\mathcal{M}:\, y\neq x\}}) \\ &= \mathcal{E}(\nu(a)/x) + \mathcal{E}(1_{\{y\in\mathcal{M}:\, y\neq x\}}) \\ &= \mathcal{E}(\nu(a)/x) = f(\nu(a)) \end{aligned}$$

dla każdego $a \in [0,1]$, co oznacza, że jest spełniony postulat (P4).

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\mathcal{E}(A) = \sum_{x\in\mathcal{M}} f(A(x))$ dla każdego $A \in FFS$ z funkcją f spełniającą warunki (P1)-P(4). Pokażemy, że $\mathcal{E}$ jest miarą rozmytości w sensie definicji 4.7. Wobec (P1) mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(A) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{x \in \mathcal{M}} f(A(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{M} : \; f(A(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{M} : \; A(x) \in \{0, 1\},\end{aligned}$$

tzn. (A1) jest spełnione.

(i) Postulat (P2) implikuje

$$\mathcal{E}(A) = \sum_{x \in \mathcal{M}} f(A(x)) < \sum_{x \in \mathcal{M}} f(a^*) = \mathcal{E}(a^*_{\mathcal{M}})$$

gdy $A \neq a^*_{\mathcal{M}}$, co oznacza, że (A2) jest spełniony. Podobnie pokazujemy, że (P3) implikuje (A3) oraz (P4) implikuje (A4). Ponieważ $f(a \vee b) + f(a \wedge b) = f(a) + f(b)$ dla $a, b \in [0, 1]$, otrzymujemy

$$\sum_{x \in \mathcal{M}} f((A \cup B)(x)) + \sum_{x \in \mathcal{M}} f((A \cap B)(x)) = \sum_{x \in \mathcal{M}} f(A(x)) + \sum_{x \in \mathcal{M}} f(B(x)).$$

Własność waluacji (A5) jest więc spełniona, co kończy dowód.

$\square$

Charakteryzacja sformułowana w powyższym twierdzeniu uogólnia charakteryzację podaną w [6] dla szczególnego przypadku miar rozmytości z $\nu = \nu_Ł$ oraz $a^* = 0.5$.

Bibliografia

[1] C. Alsina and E. Trillas. Sur les measures du degre de flou. *Stochastica*, 3:81–84, 1979.

[2] D.Dubois and H. Prade. Fuzzy cardinality and the modeling of imprecise quantification. *Fuzzy Sets and Systems*, 8:43–61, 1985.

[3] M. Delgado, D. Sánchez, and M. Amparo Vila. Fuzzy cardinality based evaluation of quantified sentences. *International Journal of Approximate Reasoning*, 23:23–66, 2000.

[4] K. Dyczkowski and M. Wygralak. On triangular norm-based generalized cardinals and singular fuzzy sets. W recenzji.

[5] K. Dyczkowski and M. Wygralak. *On Cardinality and singular fuzzy sets*, pages 2206:261–269. w: B. Reusch (Ed.), Computational Intelligence. Theory and Applications, Lectures Notes in Computer Science. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[6] B.R. Ebanks. On measures of fuzziness and their representations. *J. Math Anal. and Appl.*, 94:24–37, 1983.

[7] S. Gottwald. *Many-Valued Logic and Fuzzy Set Theory*, pages 5–89. w: U. Hohle/S.E. Rodabaugh (Eds.) Mathematics of Fuzzy Sets. Logic,

Topology, and Mea sure Theory. The Handbooks of Fuzzy Sets Series. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[8] S. Gotwald. A note on fuzzy cardinals. *Kybernetika*, 16:156–158, 1980.

[9] S. Gotwald, E. Czogała, and W.Pedrycz. Measures of fuzzines and operations with fuzzy sets. *Stochastica*, 6:187–205, 1982.

[10] M. Higashi and G. J. Klir. On measure of fuzziness and fuzzy complements. *General Systems*, 8:169–189, 1982.

[11] A. Kaufmann. *Introduction a la Theorie des Saus-Ensambles Flous*, volume IV. Masson, Paris, 1977.

[12] E.P. Klement. Fuzzy measures assuming their values in the set of fuzzy numbers. *J. Math Anal. and Appl.*, 93:312–323, 1983.

[13] E.P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular Norms*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[14] Y. Lin and E.E. Kerre. An overwiew of fuzzy quantifiers, part i interpretation. *Fuzzy Sets and Systems*, 95:1–21, 1998.

[15] C. H. Ling. Representation of associative functions. *Publ. Math. Deebreceb*, 12:189–212, 1965.

[16] R. Lowen. *Fuzzy Set Theory, Basic Concepts, Techniques and Bibliography*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[17] A. De Luca and S. Termini. On the convergence of entropy measures of the fuzzy set. *Kybernetes*, 6:219–227, 1977.

[18] A. De Luca and S. Termini. On some algebraic aspect of the measures of fuzzines. *Fuzzy Information and Decision Processes*, 1982.

[19] K. Menger. Statistical metrics. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 8:535–537, 1942.

[20] M.T.Nguyen and E.A. Walker. *A First Course in Fuzzy Logic*. CRC Press, Boca Raton, 1997.

[21] N.R. Pal and J.C. Bezdek. Measuring fuzzy uncertainty. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2:107–118, 1994.

[22] D. Ralescu. Cardinality, quantifiers, and the agreggation of fuzzy criteria. *Fuzzy Sets and Systems*, 69:355–365, 1995.

[23] B. Schweizer and A. Sklar. Associative functions and statistcal triangle inequalities. *Publ. Math., Debrecen*, 8:169–186, 1961.

[24] B. Schweizer and A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1983.

[25] A.P. Šostak. *Fuzzy cardinals and cardinalities of fuzzy sets*, pages 137–144. Algebra and Discrete Mathematics. Latvian State University, Riga, 1989.

[26] S. Weber. A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms. *Fuzzy Sets ans Systems*, 11:115–134, 1983.

[27] M. Wygralak. Fuzzy cardinals based on the generalized equality of fuzzy subsets. *Fuzzy Sets and Systems*, 18:143–158, 1986.

[28] M. Wygralak. Questions of cardinality of finite fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 102:185–210, 1999.

[29] M. Wygralak. *Triangular operations, negations, and scalar cardinality of fuzzy set*, pages 1:326–341. w: L.A. Zadeh, J. Kacprzyk (Eds.), Computing with Words in Information/Intelligent Systems 1. Foundations. Physica-Verlag, Heidelberg, 1999.

[30] M. Wygralak. Fuzzy sets with triangular norms and their cardinality theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 124:1–24, 2001.

[31] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Inform. Control*, 8:338–353, 1965.

[32] L. A. Zadeh. *A theory of approximate reasoning*, pages 9:149–194. J.E. Hayes, D. Michel, L. Mikulich (Eds.), Machine Inteligence. Willey, New York, 1979.

[33] L. A. Zadeh. *Fuzzy probabilities and their role in decision analysis*, pages 15–23. Proc. IFAC Symp. on Theory and Applications of Digital Control. New Dehli, 1982.

[34] L. A. Zadeh. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Comput. and Math. with Appl.*, 9:149–184, 1983.

[35] L. A. Zadeh. From computing with numbers to computing with words - from manipulation of measurements to manipulation of perceptions. *IEEE Trans. on Circuits and Systems -I: Fundamental Theory and Appl.*, 45:105–119, 1999.

[36] L. A. Zadeh. *Fuzzy logic = Computing with words*, pages 3–23. L.A. Zadeh, J. Kacprzyk (Eds.), Computing with Words in Information/Intelligent Systems 1. Foundations. Physica-Verlag, Heidelberg and New York, 1999.