1 Numerična analiza

Interpolacija. Končnemu številu podatkov želimo prirediti neko zvezno funkcijo. Recimo, da imamo $n+1$ meritev, ki jim želimo prirediti polinom. (Polinomi so očitna izbira za interpolacijo, saj so najpreprostejši. Ko imamo opravka s periodičnimi podatki, pa nam bolj prav pridejo trigonometrične funkcije.) Obstaja lema, da to lahko naredimo, in sicer na natanko en način.

Izberimo bazo za polinom: najpreprostejša je $1, x, x^2, ...x^n$. Vsak polinom se da na točno en način zapisati kot linearna kombinacija teh polinomov. S temi polinomi želimo aproksimirati funkcijo $f(x)$. Za meritve $x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n$ definiramo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + ... + a_0 &= f(x_0) \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + ... + a_0 &= f(x_1) \\ &\cdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + ... + a_0 &= f(x_n) \end{aligned}$$

Sistem predstavimo z matrično enačbo $\underline{A}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, kjer je $\mathbf{a}$ vektor koeficientov polinoma p, $\underline{A}$ pa je Vandermondova matrika. Sistem bo imel rešitev natanko takrat, ko je determinanta matrike $\underline{A}$ enaka 0. Pri Matematiki II smo pokazali, da je determinanta take matrike $\underline{A}$ enaka

$$\det \underline{A} = \prod_{i<j} (x_i - x_j),$$

kar je različno od 0, če so x_i paroma različni med seboj.
Reševanje takega sistema enačb je zanumdno, zato uporabimo Lagrangeovo metodo - izberemo drugo bazo za polinome.

$$L_{n,i} = \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_{n,j}(x)$$

Če je $x = x_i$, je vrednost produkta enaka 1. Sicer je enaka 0. Sledi $p(x_j) = f(x_j)$, kar je to, kar smo želeli. Vrh tega ima ta metoda (pri ne prevelikih vrednostih n) časovno zahtevnost $\mathcal{O}(n^2)$, kar je veliko bolje od naše prvotne baze $(1, x, ...x^n)$, ki je imela časovno zahtevnost $\mathcal{O}(n^3)$.

Tretja metoda je t. i. Newtonova oblik baze.

$$p_n(x) = [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]f + ...$$

$$+ ...(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})[x_0, x_1, ...x_n]f$$

Deljena diferenca $[x_0, x_1, ...x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki ga izračunamo s točkami $x_0, x_1, ..., x_k$. Izračunamo jih z rekurzivno formulo

$$[x_0, x_1, ..., x_k]f = \frac{[x_1, x_2, ..., x_k]f - [x_0, x_1, ..., x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

Rekurzijo ustavimo pri $[x_i]f = f(x_i)$. Tako je npr. $[x_0, x_1]f = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ To pa je ravno smerni koeficient premice med točkama $(x_0, f(x_0))$ in $(x_1, f(x_1))$. Tej deljeni diferenci smo v srednji šoli rekli diferenčni kvocient.
Sestavimo lahko tabelo deljenih diferenc za različne x_i. Ta postopek ima časovno zahtevnost $\mathcal{O}(n^2)$.

Primer. Iščemo kubični polinom, ki interpolira točke $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 9)$.
Klasična oblika: rešujemo sistem enačb

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Dobimo rešitev $(1, 0, 0, 1)$, ki ustreza polinomu $x^3 + 1$.
Lagrangeova oblika:

$$L_{3,0} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$L_{3,1} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_{3,2} = -\frac{x(x+1)(x-2)}{2}$$

$$L_{3,3} = -\frac{x(x+1)(x-1)}{6}$$

$$p_3(x) = \sum_{j=1}^{3} f(x_j) L_{3,j}(x) = ... = x^3 + 1$$

Newtonova oblika:

-1	0			
0	1	1		
1	2	1	0	
2	9	7	3	1

Zanimajo nas le vrednosti na diagonali, dobimo torej

$$p_3(x) = 0 + (x - (-1)) \cdot 1 + (x - (-1))(x - 0) \cdot 0 + (x - (-1))(x - 0)(x - 1) \cdot 1 = x + 1 + x^3 - x = x^3 + 1$$

Alternativnei zapis Lagrangeove motode. Naj bo $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$ Potem na kratko piošemo

$$L_{n,i}(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)}$$

Izrek: Če je f (n+1)-krat zvezno odvedljiva na intervalu [a, b], ki vsebuje paroma različne točke $x_0, x_1, ..., x_n$, potem za vsako število $x \in [a, b]$ obstaja tako število $\xi \in (a, b)$, da bo

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x)$$