Sferne funkcije. Za enotsko sfero S gledamo funkcije $f\colon S \to \mathbb{R}$, ki naj bojo dvakrat zvezno odvedljive. Med njimi iščemo rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$\nabla^2 u = -\lambda u$$

Uvedemo sferične koordinate za $r = 1$. Tedaj lahko f gledamo kot $f(\varphi, \vartheta)\colon [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ Dodamo zahtevi za f, in sicer mora biti

$$f(0, \vartheta) = f(2\pi, \vartheta)$$
$$f(\varphi, 0) = \text{konst.}$$
$$f(\varphi, \pi) = \text{konst.}$$

Uvedemo skalarni produkt:

$$\langle f, g\rangle = \iint_S f(\varphi, \vartheta) g(\varphi, \vartheta)\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi, \vartheta) g(\varphi, \vartheta) \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

Iz skalarnega produkta sledi norma $||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Označimo z $L^2(S)$ napolnitev prostora zveznih funkcij $f\colon S \to \mathbb{R}$ glede na to normo. (V praksi gre za tiste funkcije, za katere integral kvadrata funkcije obstaja.) Na tem prostoru je $-\nabla^2$ linearna preslikava.

Izrek. Preslikava $-\nabla^2$ je glede na dani skalarni produkt sebi adjungirana. Sledi, da ima realne lastne vrednosti, katerim pripadajoče funkcije so med seboj pravokotne.

Dokaz. V sferičnih koordinatah ima Laplaceov operator obliko

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(u_\vartheta \sin\vartheta\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}$$

Preveriti želimo $\langle \nabla^2 u, v\rangle = \langle u, \nabla^2 v\rangle$

$$\langle \nabla^2 u, v\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}(u_\vartheta \sin\vartheta) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} v(\vartheta, \varphi)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}(u_\vartheta \sin\vartheta) v(\varphi, \vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta + \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin\vartheta} v \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

Oba integrala rešujemo z metodo per partes:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left(v u_\vartheta \sin\vartheta\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u_\vartheta v_\vartheta \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(0 - \int_0^{\pi} u_\vartheta v_\vartheta \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sin\vartheta} v u_\varphi\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin\vartheta} v_\varphi u_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi}\left(0 - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin\vartheta} v_\varphi u_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$$

Vsota teh je

$$\langle \nabla^2 u, v\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \left(-u_\vartheta v_\vartheta \sin\vartheta - \frac{1}{\sin\vartheta} v_\varphi u_\varphi\right)$$

Opazimo, da je dobljeni integral simetričen glede na u in v - brez težav bi ju lahko zamenjali in dobili isti rezultat. Sledi:

$$\langle \nabla^2 u, v\rangle = \langle \nabla^2 v, u\rangle = \langle u, \nabla^2 v\rangle$$

\end{proof}
Vrh tega lahko pokažemo, da je $-\nabla^2$ pozitivno semi-definitna linearna preslikava, kar pomeni, da so vse lastne vrednosti večje ali enake 0.

Iščemo ortogonalno bazo $L^2(S)$, sestavljeno iz lastnih funkcij operatorja $-\nabla^2$:

$$\nabla^2 u = -\lambda u$$

Vzamemo nastavek $u(\varphi,\vartheta)=\phi(\varphi)\theta(\vartheta)$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\phi(\theta'\sin\vartheta)'+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\theta\phi''=-\lambda\phi\theta$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\vartheta'\sin\vartheta}{\theta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\phi''}{\phi}=-\lambda$$

$$\sin\vartheta\frac{(\theta'\vartheta)'}{\vartheta}+\lambda\sin^2\vartheta=-\frac{\phi''}{\phi}=m^2$$

Tu bodi m neko naravno število, ki naj ne bo 0 (saj ne iščemo trivialne rešitve).

Nekaj podobnega smo že reševali. Za ϕ dobimo

$$\phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi$$

Za θ del imamo diferencialno enačbo

$$\sin\varphi\frac{(\theta'\sin\vartheta)'}{\theta}+\lambda\sin^2\vartheta=m^2$$

Uporabimo substitucijo $\cos\vartheta=s$

$$(1-s^2)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-2s\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-s^2}\right)\theta=0$$

Če je $\lambda=n(n+1),\ n\in\mathbb{N}$, so rešitve te enačbe pridruženi Legendrovi polinomi $P_n^m(\cos\vartheta)$. Tedaj je

$$u=(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)P_n^m(\cos\vartheta)$$

Definiramo sferične harmonike:

$$Y_n^0(\varphi,\vartheta)=P_n(\cos\vartheta)$$

$$\begin{aligned}
Y_n^{(-1)}(\varphi,\vartheta)&=P_n^1(\cos\vartheta)\sin\varphi & Y_n^1(\varphi,\vartheta)&=P_n^1(\cos\vartheta)\cos\varphi\\
Y_n^{(-2)}(\varphi,\vartheta)&=P_n^2(\cos\vartheta)\sin 2\varphi & Y_n^2(\varphi,\vartheta)&=P_n^2(\cos\vartheta)\cos 2\varphi\\
&\vdots & &\vdots\\
Y_n^{(-m)}(\varphi,\vartheta)&=P_n^2(\cos\vartheta)\sin m\varphi & Y_n^m(\varphi,\vartheta)&=P_n^2(\cos\vartheta)\cos m\varphi
\end{aligned}$$

Izrek. $Y_n^{(\pm k)},\ k=0,1,...$ tvorijo ortogonalno bazo prostora $L^2(S)$. Velja tudi

$$||Y_n^0||^2=\frac{4\pi}{2n+1}$$

$$||Y_n^{(\pm m)}||^2=\frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Posledica tega je, da lahko vsako funkcijo $f\colon S\to\mathbb{R},\ f\in L^2(S)$, zapišemo kot linearno kombinacijo sferičnih funkcij:

$$f(\varphi,\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_{nm}Y_n^{(-m)}(\varphi,\vartheta)+B_{nm}Y_n^{(m)}(\varphi,\vartheta)\right)$$

Za $m\neq 0$ najdemo koeficiente A_{nm} in B_{nm} s skalarnim produktom:

$$A_{nm}=\frac{\langle f,Y_n^{(-m)}\rangle}{||Y_n^{(-m)}||^2}$$

$$B_{nm}=\frac{\langle f,Y_n^{(m)}\rangle}{||Y_n^{(m)}||^2}$$

Pri $m=0$ imamo $c_n=A_{n0}+B_{n0}=\langle f,Y_n^{(0)}\rangle/||Y_n^{(0)}||^2$