1. naloga Razvij funkcijo $f(z) = z^2 e^{1/z}$ v Laurentovo vrsto s središčem v 0 na kolobarju $0 < |z|$.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + ...$$

$$z^2 e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6z} + ...$$

Dana je funkcija $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. Razvij jo v Laurentovo vrsto na kolobarju

- $0 < |z-1| < 1$
- $|z-1| > 1$

Prvi del:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(z-1)-1}$$

$$= -\frac{1}{z-1} \frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{z-1} \left(1 + (z-1) + (z-1)^2 + ...\right) = \frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - ...$$

Drugi del:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(z-1)^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} \right) = \frac{1}{(z-1)^2} \left(1 + (z-1)^{-1} + (z-1)^{-2} + ...\right)$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} + ...$$

2. naloga Razvij $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ v Laurentovo vrsto s središčem v $z_0 = 0$ na kolobarjih

- $0 < |z| < 1$
- $1 < |z| < 2$
- $|z| > 2$

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2}$$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -3A - 2B - C &= 0 \\ 2A &= 1 \end{aligned}$$

Dobimo $f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{z}{2}}$$

Nato razvijemo vsako posebej.

3. naloga Dana je $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$.

- Določi definicijsko območje f
- Zapiši prve štiri člene Laurentove vrste. Kje dobljena vrsta konvergira?

Funkcija f ni definirana, kadar je $e^z - 1 = 0$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$|\cos y + i \sin y| = 1$, torej dobimo prvo zahtevo: $x = 0$. Zdaj želimo še, da je $\cos y + i \sin y = 1$. To dosežemo pri $y = 2\pi k$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.
Drugi del:

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + ... - 1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + ...}$$

Drugi faktor lahko zamenjamo z vrsto za $\dfrac{1}{1+x}$, kar pa lahko storimo le, če je $\left|\dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{6} + ...\right| < 1$. Ker je ta vrsta holomorfna, gotovo obstaja tak $r > 0$, da je za vse $|z| < r$ to res.

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z}{2} + z^2\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right] + z^3\left[\frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right] + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z + 0 \cdot z^2$$