Numerično odvajanje. Matematično je odvod definiran kot

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Manjši h pomeni boljši približek, toda v praksi to ni nujno dobro. Mislimo si, da z računalnikom vrednost funkcije v neki točki izračunamo na ε natančno (zaradi numerične napake). Denimo, da bo ε,$\varepsilon_2 \leq \varepsilon = 10^{-16}$

$$f(c+h) = \tilde{f}(c+h) + \varepsilon_1$$

$$f(c) = \tilde{f}(c+h) + \varepsilon_2$$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \frac{\tilde{f}(c+h) - \tilde{f}(c)}{h} + \frac{2\varepsilon}{h}$$

Vidimo, da nam majhen h da zelo veliko napako. Najbolj smiselno je vzeti h reda velikosti $\sqrt{\varepsilon}$.

Metoda nedoločenih koeficientov. Iščemo dobro formulo za računanje odvoda. Recimo, da imamo točke x_{-1}, x_0, x_1, in zapovrh naj bo $x_0 = 0$. Stvar si še nekoliko poenostavimo in recimo, da je $x_{-1} = -h$ in $x_1 = h$. Ideja je, da najdemo take koeficiente $\alpha_{-1}, \alpha_0 in \alpha_1$, da bo $f'(0) \approx \alpha_{-1} f(-h) + \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(h)$ Če za $f(x)$ vstavimo polinome $(1,\, x,\, x^2)$ in dobimo sistem treh enačb s tremi neznankami.

$$(1)' = 0 = \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1$$

$$(x)'_{x=0} = 1 = \alpha_{-1}(-h) + \alpha_0 \cdot 0 + \alpha_1 h$$

$$(x^2)'_{x=0} = 0 = \alpha_{-1}(-h)^2 + \alpha_0 \cdot 0^2 + \alpha_1 h^2$$

Rešitev tega sistema je $\alpha_{-1} = -1/2h$, $\alpha_0 = 0$ in $\alpha_1 = \frac{1}{2h}$ Dobili smo torej $f'(0) = \dfrac{1}{2h}\left(f(h) - f(-h)\right)$, s čimer smo izpeljali formulo za odvod.

Newtonova metoda. Druga možnost je, da skozi točke x_{-1}, x_0, x_1 potegnemo interpolacijski polinom Newtonove oblike, ga odvajamo in vstavimo $x = 0$.

$$p_2(x) = f(-h) + (x+h)\frac{f(0) - f(-h)}{h} + x(x+h)\frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{2h^2}$$

$$p_2'(x) = \frac{f(0) - f(-h)}{h} + (2x+h)\frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{2h^2}$$

$$p_2'(0) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$

Vaja. Funkcijo $f(x) = \sin x$ želimo interpolirati na intervalu $[0, \pi/2]$ z odsekoma linearno funkcijo v n ekvidistančnih točkah. Kolikšen mora biti n, da bo napaka manjša od nekega $\varepsilon > 0$?

Označimo $I_n \colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$. Imamo intervale $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-2}, x_{n-1}]$, za vsakega izmed njih velja $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{\pi}{2n}$

$$I_n\Big|_{[x_{i-1}, x_i]} = p_i, i = 1, 2, ..., n-1$$

p_i je linearna funkcija, ki se z f ujema v točkah x_i in x_{i-1}. Zanima nas največje odstopanje od funkcije f.

$$|p_i(x) - f(x)| = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_i)(x - x_{i-1})$$

$$\max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |p_i(x) - f(x)| = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \left|\frac{f''(\xi)}{2}\right| |(x - x_i)(x - x_{i-1})|$$

V našem primeru je f sinus, ki ga navzgor ocenimo na 1.

$$\max |p_i(x) - f(x)| = \frac{1}{2} \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |(x - x_i)(x - x_{i-1})|$$

$x - x_i$ in $x - x_{i-1}$ ocenimo na največ $h/2$. Sledi $|p_i(x) - f(x)| \le h^2/2$. Prej smo izračunali, da je $\frac{\pi}{2n}$. Ker želimo, da je $\frac{h^2}{8} \le \varepsilon$, mora biti

$$n > \sqrt{\frac{\pi^2}{32\varepsilon}}$$

Za $\varepsilon = 10^{-8}$ na primer dobimo $n = 5554$.

Vaja. Tokrat želimo $f(x)$ interpolirati s točkama $x_0 = 0$ in $x_1 = \pi/2$. Poleg vrednosti funkcije v teh točkah uporabimo še odvode do stopnje $k \in \mathbb{N}$. Koliko mora biti k, da je napaka pod ε?

Interpolacijski polinom dobimo iz točk

$$(x_0, f_0), (x_0, f_0'), ...(x_0, f_0^{(k)})$$

$$(x_1, f_1), (x_1, f_1'), ...(x_1, f_1^{(k)})$$

To nam da polinom stopnje $2k + 1$ (saj imamo $2k + 2$ točk).

$$f(x) - p_{2k+1}(x) = \frac{f^{2k+2}(\xi)}{(2k+2)!}\omega(x)$$

$$\omega(x) = (x - x_0)^{k+1}(x - x_1)^{k+1}$$

Spet upoštevamo $\sin(x) \le 1$, poleg tega to velja tudi za vse odvode sinusa.

$$|f(x) -_{2k+1}(x)| \le \frac{1}{(2k+1)!} \max_{0 \le x \le \pi/2} |\omega(x)|$$

Z odvodom $\omega'(x)$ ugotovimo, da ima odvod k-kratno ničlo pri $x_0 = 0$ in k-kratno ničlo pri $x_1 = \pi/2$,poleg tega pa še ničlo pri $\pi/4$, ki predstavlja maksimum. Velja torej

$$\max \omega(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+2}$$

Dobimo $\frac{1}{(2k+2)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+2} \le \varepsilon$.