Gibanje dveh teles pri centralni sili. Med telesoma deluje potencial $U(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, kjer je $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Izračunamo $\vec{r}_T = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$, definiramo $M = m_1 + m_2$ in $m = \dfrac{m_1 m_2}{M}$ S tem smo iz $L = L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2)$ dobili $L = L(\vec{r}, \vec{r}_T, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}_T)$. Če je sila centralna, je potencial neodvisen tudi od hitrosti: $V = V(r)$. Lahko si mislimo, da telesi eno na drugega delujeta s skupnim navorom $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} = 0$. Tedaj j e tudi vrtilna količina $\vec{L} = -\vec{p} \times \vec{r}$ konstantna. Tedaj je

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}\right) = 0$$

$$mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = \text{konst.} = |\vec{L}| =: p_\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\vartheta}\right) - \frac{m}{2}\left(r^2 2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$\frac{1}{r^2\sin^\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}) - \cos\vartheta\left(\frac{1}{r\sin^2\vartheta}\right) = 0$$

Uporabimo še relacijo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\cot\vartheta = -\dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\dfrac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\varphi}$

$$\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}(\cot\vartheta) + \cot\vartheta\right] = 0$$

Rešitev takšne diferencialne enačbe je $\cot\vartheta = A\cos(\varphi - \varphi_0)$. Pokažemo lahko, da se telesi gibljeta po neki ravnini (če ni očitno). Uvedemo $H = T + V$ (celotna energija sistema). V polarnih koordinatah je ta enaka $H = \dfrac{m}{2}\dot{r}^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r)$

Delec v potencialu $V \propto r^{-1}$ Imejmo $-\dfrac{k}{r}$, $k > 0$. Zanima nas zveza $r(\varphi)$, ki ji pravimo tudi orbita.

$$H = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

Kot prej uporabimo zvezo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}$, poleg tega pa je $\dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{mr^2}$. Nato uvedemo novo spremenljivko: $\dot{r} = -\dfrac{1}{v^2}\dot{v} = -\dfrac{1}{v^2}\dfrac{p_\varphi}{mr^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = -\dfrac{p_\varphi}{m}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}$
Tedaj je

$$H = \frac{m}{2}\frac{p_\varphi^2}{m^2}v'^2 + \frac{p_\varphi^2 v^2}{2m} - kv$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{p_\varphi^2}{m}v'v'' + \frac{p_\varphi^2}{m}vv' - kv' \equiv 0$$

$$v'\left(\frac{p_\varphi^2}{m}v'' + \frac{p_\varphi^2}{m}v - k\right) = 0$$

Imamo dve možnosti: Če je $v' = 0$, je rešitev oblike $v = v_0 = \frac{1}{r}$, torej je $r = \frac{1}{u_0} =$ konst. in imamo gibanje po krožnici. Sicer imamo nehomogeno diferencialno enačbo:

$$v'' + v = \frac{mk}{p_\varphi^2}$$

Rešimo jo z nastavkom $v = e^{\lambda\varphi}$ in dobimo $u(\varphi) = Ae^{i\varphi} + Be^{-i\varphi}$, kar je po adicijskem izreku enako

$$u(\varphi) = C\cos(\varphi - \varphi_0)$$

Za partikularni del lahko hitro uganemo $v = \dfrac{mk}{p_\varphi^2}$. Tedaj je torej

$$u(\varphi) = C\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{mk}{p_\varphi^2}$$

Uporabimo še začetni pogoj: $u'(\varphi_0) = 0$ - pri kotu 0 ni radialnega gibanja. To pomeni, da je $u(\varphi_0) = C + \frac{mk}{p_\varphi^2}$ Z večjo količino računanja, ki se mi ga ni dalo prepisati (gre pa za vstavljanje $u(\varphi_0)$ v H), dobimo $C = \pm\frac{mk}{p_\varphi^2}\sqrt{\frac{2Hp_\varphi^2}{mk^2} + 1}$ Izbira znaka $+$ ali $-$ je dokaj irrelevantna, saj konstanto C postavimo pred $\cos(\varphi - \varphi_0)$, cos pa je soda funkcija, torej je $-\cos x = \cos x$. Dobimo:

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = \frac{1}{\frac{km}{p_\varphi^2}\left(-\sqrt{\frac{2Hp_\varphi^2}{mk} + 1}\cos(\varphi - \varphi_0) + 1\right)}$$

Uvedemo konstanti $p = \dfrac{p_\varphi^2}{mk}$ in $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{2Hp_\varphi^2}{mk} + 1}$. Ostane nam enačba

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

To je enačba stožnice (krožnice, elipse, parabole ali hiperbole).

Klasifikacija orbit. Iz enačbe potenciala V lahko že vnaprej uganemo obliko orbite. Najprej si oglejmo efektivni potencial za $V \propto \dfrac{1}{r}$:

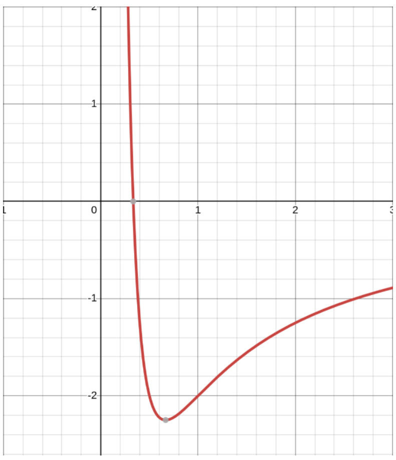

Figure 1: Slika je simbolična.

Vidimo, da imamo nek radij r_0, kjer je energija minimalna: Tam pride do krožnice. Če je $r < r_0$, vendar je $H < 0$, imamo elipso. Če je $H = 0$ imamo parabolo, sicer imamo hiperbolo.