Posledica: Naj bo u harmonična na odprti množici D. Tedaj je u neskončnokrat odvedljiva.

Dokaz: u je v okolici neke točke $a \in D$ realni del kompleksne holomorfne funkcije f. Ker je f holomorfna, je neskončnokrat odvedljiva, saj jo lahko razvijemo v potenčno vrsto. Ker je f neskončnokrat odvedljiva, pa je tudi u neskončnokrat odvedljiva.

Izrek: (izrek o povprečni vrednosti) Bodi $u\colon D \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija in $\overline{D}(a,r) \subseteq D$. Tedaj je

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

Dokaz: $\overline{D}(a,r)$ je enostavno povezano območje, in vemo, da obstaja holomorfna funkcija f, za katero velja $u = \mathfrak{Re}(f)$. Uporabimo Cauchyjev izrek:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\varphi})}{re^{-\varphi}} rie^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

Upoštevamo, da je $u = \mathfrak{Re}(f)$

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\varphi})d\varphi$$

Izrek (princip minima in maksima) Bodi D odprta povezana množica v $\mathbb{R}^2$ in u nekonstantna harmonična funkcija na njej. Potem u na D ne zavzame maksimuma ali minimuma. Če je K kompaktna množica znotraj D, u zavzame minimum in maksimum na robu K.

Dokaz. Recimo, da obstaja $a \in D$, v kateri bi u zavzela maksimum:

$$u(a) = M$$

Oglejmo si množico vseh točk na D, kjer u zavzame maksimum:

$$U = \{z \in D; u(z) = M\}$$

Ta mora biti neprazna, saj smo predpostavili $a \in M = u^{-1}(\{M\})$ Ker je $\{M\}$ zaprta, mora biti tudi U zaprta, saj je u zvezna. Če nam uspe pokazati, da je U hkrati odprta, bo to protislovje, saj tedaj D ne bi bilo povezano območje. Izberimo torej $b \in U$ in si oglejmo krog $\overline{D}(b,R) \subseteq D$.
Trdimo: $D(b,R) \subseteq U$ Kolobar $D(b,R) \setminus \{b\}$ si lahko predstavljamo kot unijo krožnic $\partial D(b,\rho)$, $\rho < R$. Dovolj je torej dokazati, da je $\partial D(b,\rho) \subseteq U \ \forall \rho < R$.

$$M = u(b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(b + e^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

$$u(b + e^{i\varphi}) \leq M$$

$$2\pi M = \int_0^{2\pi} u(b + e^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} M\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} u(b + e^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left(M - u(b + e^{i\varphi})\right)\mathrm{d}\varphi = 0$$

To pa pomeni, da je $u(b + e^{i\varphi}) = M \ \forall \varphi$ oziroma je $\partial D(b,\rho) \subseteq U \ \forall \rho$

Dirichletov problem za krog. Na krogu $\overline{D}(0,1)$ iščemo funkcije z lastnostjo $\Delta u = 0$, ki naj bo poleg tega na $\partial D(0,1)$ zvezna.

Poissonova jedra. Vzamemo $0 \leq r < 1$. Definiramo

$$P_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \; P_r(\vartheta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\vartheta - r^2}$$

Opomba. $P_r(\vartheta) = \mathfrak{Re}\left(\frac{1 + re^{i\vartheta}}{1 - re^{i\vartheta}}\right)$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \frac{1 + re^{i\vartheta}}{1 - re^{i\vartheta}} &= \frac{(1 - re^{-i\vartheta})(1 + re^{i\vartheta})}{1 - r(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) + r^2} \\ &= \frac{1 - r^2 + 2i\sin\vartheta}{1 - 2\cos\vartheta + r^2} \end{aligned}$$

Trditev: Za Poissonova jedra veljajo sledeče trditve:

1. P_r so zvezne.
2. $P_r > 0$
3. P_r so sode.
4. P_r so periodične s periodo 2π.
5. Če je $0 \leq \delta \leq \vartheta \leq 2\pi$, je $P_r(\vartheta) \leq P_r(\delta)$, ali drugače, P_r je padajoča na $[0, \pi]$.
6. $\lim_{r \to 1} P_r 0 = \infty$
7. Čim je $0 < |\vartheta| \leq \pi$, $\lim_{r \to 1} = 0$ konvergira enakomerno.

Dokaz. Edina možna težava za zveznost se pojavi, če je $1 - 2r\cos\vartheta + r^2 = 0$. Poglejmo, pri katerih r se to lahko zgodi.

$$D = 4\cos^2 - 4 = 4(\cos^2\vartheta - 1) \leq 0$$

Če je $D < 0$, do polov sploh ne pride. $D = 0$ pa dobimo v primeru $\vartheta = 0 + 2k\pi$. Tedaj dobimo $r^2 - 2r + 1 = 0 = (r - 1)^2$, toda predpostavili smo, da $r \neq 1$. S tem smo dokazali točko 1, mimogrede pa tudi točko 6, kajti $\lim\limits_{r \to 1} P_r(0) = \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2} = \lim\limits_{r \to 1} \frac{r + 1}{r - 1} = \infty$.
Ker je diskriminanta negativna, je imenovalec pozitiven, pa tudi števec je gotovo pozitiven. S tem je točka 2 dokazana.
Točka 3 očitno velja: Če v P_r namesto ϑ vstavimo $-\vartheta$, lahko uporabimo $\cos(-\vartheta) = \cos\vartheta$ in dobimo isti rezultat.
S točko 4 je podobno: Namesto ϑ vstavimo $\vartheta + 2\pi$ in dobimo isti rezultat.
Točka 5: Če je $\delta \leq \vartheta$, je $\cos\vartheta \leq \cos\delta$. The rest is history.
Točka 6: Izberemo $\delta \in (0, \vartheta)$.

$$|P_r(\vartheta) - 0| = P_r(\vartheta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\vartheta + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2}$$

Zadnje je neodvisno od ϑ in konvergira proti 0.

Izrek. (Poissonova formula) Bodi u zvezna na $\overline{D}(0, 1)$ in harmonična na $D(0, 1)$. Potem za vsak $0 \leq r < 1$ velja

$$e(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\vartheta - \varphi) u(e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta$$

Opomba. To pomeni, da bo rešitev Dirichletovega problema, če obstaja, gotovo oblike

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\vartheta - \varphi) g(e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta,$$

kjer je g željena vrednost funkcije u na $\partial D(0, 1)$.