1. naloga Imamo safirno ploščico, njena toplotna prevodnost ima lastni vrednosti $\lambda_\parallel$ in dvojno lastno vrednost $\lambda_\perp$.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_\parallel & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\perp \end{bmatrix}$$

Ploščica ima debelino $a = 5\,mm$, širino $100\,mm$, velja $\lambda_\parallel = 36\,W/mK$ in $\lambda_\perp = 32\,W/mK$. Velja $\Delta T_x = 10\,K$. Os, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_\parallel$, je za kot $45°$ nagnjena glede na $\hat{e}_x$. Zanima nas toplotni tok skozi ploščico.

Reševanje. Po definiciji je

$$\overrightarrow{j} = -\underline{\underline{\lambda}}\nabla T$$

$\underline{\underline{\lambda}}$ moramo zapisati v laboratorijski (xyz) bazi. Takšno rotacijo opisuje

$$A' = RAR^T$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zavrteti moramo za $-45°$.

$$\underline{\underline{\lambda}}' = R\underline{\underline{\lambda}}R^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\parallel & & \\ & \lambda_\perp & \\ & & \lambda_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\parallel \cos\varphi & \lambda_\parallel \sin\varphi & 0 \\ -\lambda_\perp \sin\varphi & \lambda_\perp \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_\parallel \cos^2\varphi + \lambda_\perp \sin^2\varphi & \lambda_\parallel \sin\varphi\cos\varphi - \lambda_\perp \sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ \lambda_\parallel \sin\varphi\cos\varphi - \lambda_\perp \sin\varphi\cos\varphi & \lambda_\parallel \sin^2\varphi + \lambda_\perp \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zdaj izračunamo $\overrightarrow{j}$. Pričakujemo, da ta teče v smeri y, saj imamo tam temperaturno razliko:

$$\overrightarrow{j} = j\hat{e}_y, \quad \nabla T = \begin{bmatrix} \partial_x T \\ \partial_y T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \partial_y T = \frac{\Delta T}{d}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_\parallel \cos^2\varphi + \lambda_\perp \sin^2\varphi & \lambda_\parallel \sin\varphi\cos\varphi - \lambda_\perp \sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ \lambda_\parallel \sin\varphi\cos\varphi - \lambda_\perp \sin\varphi\cos\varphi & \lambda_\parallel \sin^2\varphi + \lambda_\perp \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x T \\ \partial_y T \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$j_y = -\left(\lambda_\parallel \cdot \frac{1}{2} - \lambda_\perp \cdot \frac{1}{2}\right)\partial_x T - \left(\lambda_\parallel \cdot \frac{1}{2} + \lambda_\perp \cdot \frac{1}{2}\right)\partial_y T$$

$$j_x = 0 = -\left(\lambda_\parallel \cdot \frac{1}{2} + \lambda_\perp \cdot \frac{1}{2}\right)\partial_x T - \left(\lambda_\parallel \cdot \frac{1}{2} - \lambda_\perp \cdot \frac{1}{2}\right)\partial_y T$$

Izračunamo lahko $\partial_x T = \frac{\frac{1}{2}(\lambda_\parallel - \lambda_\perp)}{\frac{1}{2}(\lambda_\parallel + \lambda_\perp)}\partial_y T = ... = \frac{1}{17}\partial_y T$ (iz začetnih podatkov). Nazadnje vstavimo številke, da izračunamo j_y.

Naloga. Imamo kondenzator, v katerem velja:

$$\overrightarrow{j} = \underline{\underline{\sigma}}\overrightarrow{E}$$

Tu $\underline{\underline{\sigma}}$ označuje tenzor električne prevodnosti. Njegov inverz je tenzor električne upornosti $\underline{\underline{\zeta}}$. Označimo

$$\overrightarrow{E} = \underline{\underline{\zeta}}\overrightarrow{j}$$

Kot prej ima v lastnem sistemu $\underline{\underline{\sigma}}$ obliko

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\parallel} & & \\ & \sigma_{\perp} & \\ & & \sigma_{\perp} \end{bmatrix}$$

Kot prej je lastni vektor σ nagnjen za nek kot glede na os x, vzdolž katere deluje polje.