1 Diferencialne enačbe v kompleksnih številih

Imamo linearno diferencialno enačbo 2. reda:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Čim imamo dve rešitvi, npr y_1 in y_2, ki sta linearno neodvisni, so ostale rešitve linearne kombinacije teh dveh rešitev, saj tvorite vektorski prostor. Če imamo eno rešitev (y_1), lahko drugo dobimo s pomočjo determinante Wronskega:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}$$

Dobimo diferencialno enačbo 1. reda za y_2.

Problem: Rešitve običajno ni lahko uganiti. Namesto tega poskusimo sledeče: Diferencialno enačbo prestavimo v kompleksna števila:

$$y'' + p(z)y' + q(z) = 0$$

$$y = y(z)$$

Recimo, da sta p in q holomorfni na nekem $D(0, R)$. Tedaj ju razvijmo v potenčni vrsti:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$$

Poglejmo primer, da je y holomorfna:

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$$y'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} z^k$$

$$y''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2}^k$$

To vstavimo v enačbo, imamo produkt dveh vrst.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+1}z^k + \sum_{i=0}^{\infty} (p_i z^i) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)c_{j+1}z^j + \sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$$

Poglejmo, kakšen bo koeficient pri z^k:

$$(k+1)(k+2)c_{k+2} + \sum_{j=0}^{k} p_{k-j}(j+1)c_{j+1} + \sum_{j=0}^{k} q_{k-j}c_j = 0$$

Dobimo rekurzivno formulo za c_k, vemo pa, da je $c_0 = y(0)$ in $c_1 = y'(0)$. Tako dobimo številsko vrsto za y.

Izrek. Recimo, da sta p in q holomorfni in imamo diferencialno enačbo

$$y'' + py' + qy = 0$$

Tedaj ima enačba natanko eno rešitev y, ki je holomorfna na $D(\alpha, R)$ in zadošča pogojema $y(\alpha) = A$ in $y'(\alpha) = B$. Pri tem naj bosta A in B kompleksni števili.

Dokaz. (ideja dokaza) Razvijemo kot prej, nato pokažemo, da je konvergenčni radij tako pridobljene številske vrste večji od 0.

Definicija. Dana je enačba $y'' + py' + qy = 0$. $\alpha \in \mathbb{C}$ je regularna točka enačbe, če sta p in q holomorfni v α. Sicer pa je α ingularna točka enačbe. Pravimo, da je α pravilna singularna točka, če ima $p(z)$ v njej polj stopnje ≤ 1, $q(z)$ pa pol stopnje ≤ 2.

Primer: $z = 0$ je pravilna singularna točka Besselove enačbe

$$y'' = \frac{1}{z}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0$$

Recimo torej, da je 0 pravilna singularnost neke enačbe $y'' + py' + qy = 0$. Funkciji $z \mapsto zp(z)$ in $z \mapsto z^2 q(z)$ sta holomorfni, zato ju razvijmo v vrsti:

$$zp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

$$y^2 q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$$

Rešitev y zato iščemo z nastavkom

$$y = z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = c_k z^{k+\mu}$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu) c_k z^{k+\mu-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu)(k+\mu-1) c_k z^{k+\mu-2}$$

To vstavimo v enačbo $z^2 y'' + z^2 p(z) y' + z^2 q(z) y = 0$ in spet dobimo rekurzivno zvezo

$$(k+\mu)(k+\mu-1)c_k + \sum_{j=0}^{k} (j+\mu) c_j p_{k-j} + \sum_{j=0}^{k} c_j q_{k-j} = 0$$