1. naloga: Valj s spiralnim vodilom. Okoli valja je navito vodilo, karakterizirano s konstantno $p = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}$. Po tem vodilu spustimo maso m, razen tega se valj lahko prosto vrti okoli svoje osi.

Uvedemo cilindrične koordinate:

$$x = R\cos\varphi$$

$$y = R\sin\varphi$$

$$z = z$$

Imamo vezi $r = R$ in $z = p(\varphi - \Phi)$. Zasuk valja označimo s Φ.

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}J\dot{\Phi}^2$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$

$$T = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + p^2(\dot{\varphi} - \dot{\Phi})^2\right) + \frac{MR^2}{4}\dot{\Phi}^2$$

$$V = mgp(\varphi - \Phi)$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + p^2(\dot{\varphi} - \dot{\Phi}^2) + \frac{Mr^2}{r}\dot{\Phi}^2\right) - mgp(\varphi - \Phi)$$

E-L enačba: imamo dve generalizirani koordinati, in sicer φ in Φ. Tedaj velja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{\partial L}{\partial \Phi}$$

Najprej obravnavajmo φ, nato Φ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m}{2}\left(2R^2\dot{\varphi} + 2R^2(\dot{\varphi} - \dot{\Phi})\right)\right] + mgp = 0$$

$$R^2\ddot{\varphi} + R^2(\ddot{\varphi} - \ddot{\Phi}) + gp = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m}{2}\left(2p^2(\dot{\varphi} - \dot{\Phi})\right) + \frac{MR^2}{2}\dot{\Phi} - mgp = 0\right]$$

$$-p^2\ddot{\varphi} + \left(\frac{MR^2}{2m} + p^2\right)\ddot{\Phi} - gp = 0$$

$$\ddot{\varphi}\left(R^2 + p^2\right) - \ddot{\Phi}p^2 + gp = 0 \tag{1}$$

$$\ddot{\Phi}\left(\frac{MR^2}{2m} + p^2\right) - \ddot{\varphi}p^2 - gp = 0 \tag{2}$$

Enačbo (1) pomnožimo z $\dfrac{MR^2}{2m} + p^2$, enačbo (2) pa s p^2, nato ju seštejemo (želimo se namreč znebiti spremenljivke Φ). Dobimo linearno enačbo za $\ddot{\varphi}$ s preprosto rešitvijo

$$\ddot{\varphi} = \frac{gp\left(\frac{MR^2}{2m}\right)}{p^4 - \left(\frac{MR^2}{2m} + p^2\right)\left(R^2 + p^2\right)}$$

To je konstantno, označimo z α. Tedaj je $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 + Ct + D$. Na podoben način bi lahko dobili tudi $\ddot{\Phi} = \beta$ in rešitev za $\Phi(t)$.

Izbira oblike vodila za harmonsko nihanje. Harmonsko nihanje pomeni, da je neodvisno od začetne amplitude. Njegova enačba je

$$\ddot{\vartheta} + w^2\vartheta = 0$$

Želimo najti vodilo, po katerem se bo masa gibala harmonično.
Želimo rezultat oblike

$$L = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}ks^2$$

Trenuto imamo

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Kinetični del:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2(\dot{x'}^2 + \dot{y'}^2)$$

(Pri tem smo uvedli nov koordinatni sistem x', y')

$$\dot{x} = x'\dot{s}$$

$$\dot{y} = y'\dot{s}$$

Torej mora biti $x'^2 + y'^2 = 1$ oziroma $(dx)^2 + (dy)^2 = (ds)^2$. Sledi $s = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.
To vstavimo v izraz za potencialno energijo:

$$k\frac{1}{2}\left[\int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\right]^2 = mgy$$

$$\sqrt{\frac{k}{2}} \int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \sqrt{mgy}$$

Z obojestranskim odvajanjem lahko izrazimo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{2ky}{mg - 2ky}}$$

Da izrazimo x in y, vzemimo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\varphi$. Z nekaj trigonometrije dobimo

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{k}{mg}\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

Z integriranjem dobimo

$$x = \frac{mg}{4k}(2\varphi + \sin 2\varphi + C)$$

$$y = \frac{mg}{4k}(1 \cos 2\varphi)$$

To je enačba cikloide. Izračunamo lahko tudi periodo nihanja (z integralom $\int \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{\sqrt{2g(y - y_0)}}$, kjer x in y izrazimo preko φ). Dobimo $T = 4\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}$