Napetostni tenzor. Najbolj očitna primera se pojavita pri viskoznosti in elastičnosti.

$$\mathrm{d}F_i = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathrm{d}S_j$$

$$\mathrm{d}F_i = E \frac{\Delta l_x}{l_x} \mathrm{d}S_x$$

Uvedemo napetostni tenzor $F_i = \sigma_{ij} S_j$

$$\oiint \mathrm{d}F_i = \oiint \sigma_{ij} \mathrm{d}S_j = \iiint \nabla_j \sigma_{ij} \mathrm{d}V$$

Dobimo Cauchyjevo enačbo (ki je v bistvu 2. Newtonov zakon v snovi):

$$\rho \dot{v}_i = \nabla_j \sigma_{ij} + f_i$$

Tu f označuje vsoto zunanjih sil, na primer ρg.

V izotropni snovi je $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, sledi $\rho \dot{v}_i = -\nabla_i p + f_i$ in tako naprej. Če naj velja ravnovesje (torej $\dot{v} = 0$), mora biti

$$\nabla_j \sigma_{ij} + f_i = 0$$

Hkrati želimo, da je tudi navor enak 0:

$$\mathrm{d}M_i = \varepsilon_{ijk} r_j \mathrm{d}F_k = \varepsilon_{ijk} r_j \left(\sigma_{kl} \mathrm{d}S_l + f_k \mathrm{d}V \right)$$

$$\oiint \mathrm{d}M_i = \iiint \nabla_l \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} \mathrm{d}V + \iiint \varepsilon_{ijk} r_j f_k \mathrm{d}V$$

$$= \iiint \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \mathrm{d}V + \iiint \varepsilon_{ijk} r_j \left(\nabla_l \sigma_{kl} + f_k \right) \mathrm{d}V$$

Zadnji integral je po predpostavki statičnosti enak 0. Za ravnovesje mora veljati $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}V} = 0$

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0$$

$$\left(\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_i kj \right) \sigma_{kj} = 0$$

$$\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$$

To mora veljati, da se vrtilna količina ohranja. Simetričen mora biti tudi viskozni napetostni tenzor:

$$\nabla_j \sigma_{ij} = \eta \left(\nabla_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{r} + \nabla^2 v_i) \right)$$

V elastomehaniki:

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right)$$

V prvem členu nastopa (simetrični) deformacijski tenzor $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right)$. Drugi člen je antisimetričen in predstavlja nekakšno rotacijo materiala, na katerega deluje sila.
Iščemo splošno zvezo med napetostjo in deformacijo snovi. Dobimo sledečo enačbo:

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda \delta_{ij} u_{kk}$$

Tu sta μ in λ Lamejeva koeficienta, načeloma je $\mu = G$ oziroma strižni modul. Poleg tega smo z u_{kk} v bistvu označili $\Delta V/V$. Da dobimo deformacijski tenzor (ki ga po navadi želimo izračunati in ga nimamo že od prej), izračunajmmo najprej sled te enačbe:

$$\sigma_{ii} = 2\mu u_{ii} + 3\lambda u_{ii} = (3\lambda + 2\mu) u_{ii}$$

V izotropni snovi velja

$$-3p = (3\lambda + 2\mu) \frac{\Delta V}{V}$$

in lahko izrazimo stisljivostni koeficient $\chi = \dfrac{3}{3\lambda + 2\mu}$ Iz prvotne enačbe izrazimo $2\mu u_{ij}$:

$$2\mu u_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}u_{kk} = \sigma_{ij} - \lambda\frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}$$

S tem lahko izrazimo tenzor deformacije, in sicer:

$$u_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

Elastični tenzor:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{kl}$$

σ_{ij} bo imel v 3D šest komponent $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz})$. Podobno z u. Tedaj bo imel c_{ijkl} 36 komponent. Na podlagi zgornjih enačb ga lahko tudi izrazimo:

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda u_{kk}\delta_{ij} = (\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{kl}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl})\,u_{kl} \equiv c_{ijkl}u_{kl}$$

S tem smo izrazili c_{ijkl}. Če rečemo, da ima snov neko preferenčno smer $\overrightarrow{a}$, lahko elastični tenzor sestavimo na podlagi komponent, za katere je verjetno, da jih bo tenzor spreminjal.

$$c_{ijkl} = [\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ji}\delta_{il}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + A(a_ia_j\delta_{kl} + \delta_{ij}a_ka_l) + B(a_ia_k\delta_{jl} + a_ja_k\delta_{il} + a_ia_l\delta_{jk} + a_ja_l\delta_{ik}) + D(a_ia_ja_ka_l)]$$

Elektromagnetni napetostni tenzor.

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial\overrightarrow{T}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \rho_e$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

Definiramo Poyntingov vektor: $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}$ in gostoto gibalne količine $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B}$.

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_0\left[E_iE_j - \frac{1}{2}E^2\delta_{ij}\right] + \mu_0\left[H_iH_j - \frac{1}{2}H^2\delta_{ij}\right]$$

$$\nabla_j\sigma_{ij} = \varepsilon_0\left[(\partial_jE_i)E_j + E_i(\partial_jE_j) - \frac{1}{2}\partial_iE^2\right] + ...$$

Vemo, da se nam bo izraz za magnetno polje precej poenostavil, saj magnetno polje (kolikor vemo) nima monopolov. Upoštevamo tudi $\partial_jE_j = \rho/\varepsilon_0$

$$= \rho\overrightarrow{E} + \varepsilon_0\left[\overrightarrow{E} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E})\right] - \mu_0\left[\overrightarrow{H} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H})\right]$$

$$= \rho\overrightarrow{E} + \varepsilon_0\overrightarrow{E} \times \frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} - \mu_0\overrightarrow{H} \times \left(\overrightarrow{j} + \frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}\right) = \rho\overrightarrow{E} + \overrightarrow{D} \times \frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} - \overrightarrow{B} \times \left(\overrightarrow{j} + \frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}\right)$$

To pa je pravzaprav Lorentzova sila. Velja

$$\nabla_j\sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{g}_{\text{delca}} + \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{g}_{\text{polja}}$$

Nazadnje poglejmo Pointingov vektor, začenši z njegovim časovnim odvodom.

$$\frac{\partial\overrightarrow{P}}{\partial t} = \frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \times \overrightarrow{H} + \overrightarrow{E} \times \frac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\nabla \times \overrightarrow{H} - \overrightarrow{j}\right) \times \overrightarrow{H} - \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E} \times \left(\nabla \times \overrightarrow{E}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(-\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{H}\right) - \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\nabla\frac{H^2}{2} - (\overrightarrow{H}\nabla)\overrightarrow{H}\right) - \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\frac{E^2}{2} - (\overrightarrow{E}\nabla)\overrightarrow{E}\right)$$

To je spet podobno kot prej, se bomo pa s podobnim primerom še ukvarjali, zato zaenkrat zaključimo s tem.

EM tenzor v prostoru-času. Pri posebni teoriji relativnosti smo uvedli četverce. Za EM polje je te oblike

$$A^\mu = \left(\frac{\mathcal{U}}{c}, \overrightarrow{A}\right)$$

$$\overrightarrow{E} = -\nabla\mathcal{U} - \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

Predvsem nas zanima izraziti silo:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Pri tem μ predstavlja čas, ν pa prostor. Dobili smo elektromagnetni tenzo, ki smo ga izpeljali že pri relativnosti.