Izrek. (Izrek o maksimumih in minimumih)
Bodi $f: \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorfna in nekonstantna. Potem $|f(z)|$ ne zavzame maksimuma na D. Minimum $f(z)$ lahko doseže le v ničlah f na D.

Dokaz. Recimo, da imamo tak $z_0 \in \mathcal{D}$, da je $|f(z_0)|$ maksimalna možna na D. Ker je $\mathcal{D}$ območje, je odprto, in tedaj je tudi $f(\mathcal{D})$ odprta. To pomeni, da obstaja tak $r > 0$, da je $D(f(z_0), r) \subseteq f(\mathcal{D})$. Izmed točk znotraj $D(f(z_0), r)$ bo zagotovo kakšna točka w, za katero bo veljalo $|w| > |f(z_0)|$, recimo, da je $w = f(z_1)$. To pomeni, da je $|f(z_1)| > f(z_0)$ in prišli smo do protislovja.

Kar pa se tiče minimumov: Recimo, da $f(z)$ zavzame minimum v točki $z_0 \in \mathcal{D}$. Ker f nima ničel, je $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ holomorfna. Tedaj bi imela g maksimum v z_0, ravnokar pa smo dokazali, da to ni mogoče.

Posledica. Bodi $f: \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorfna in nekonstantna in $K \subseteq \mathcal{D}$ kompaktna. Tedaj lahko $f(z)$ doseže maksimum le na ∂K, minimum pa na robu in v ničlah.

1 Biholomorfne preslikave.

Definicija. Biholomorfne preslikave so preslikave, ki so hkrati bijektivne in holomorfne. V nadaljnjem bomo obravnavali bijektivne preslikave kroga. Bolj specifično nas zanimajo vse možne preslikave $f: D(0,1) \to D(0,1)$.

Lema. (Schwartzeva lema) Bodi $f: D(0,1) \to D(0,1)$ holomorfna in naj velja $f(0) = 0$. Tedaj:

- $|f(z)| \leq |z|$ za vsak $z \in D(0,1)$
- $|f'(0)| \leq 1$
- Če obstaja $z_0 \in D(0,1)$, da je $|f(z_0)| = |z_0|$ ali $f'(0) = 1$, potem je $f(z) = \alpha z$, kjer je α konstanta in $|\alpha| = 1$

Dokaz. Najprej dokažimo prvo točko:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... \; a_0 = 0$$

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + ...$$

V $z = 0$ ima g singularnost, toda vidimo, da je odpravljiva. Poleg tega lahko definiramo $g(0) = a_1$, torej je g holomorfna. Uporabimo princip maksimuma:

$$|g(z)| \leq \max |g(\zeta)|, \;\; |\zeta| = r$$

Pri tem bodi r polmer zaprtega kroga $D(0,r) \subset D(0,1)$. Tedaj je

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{|f(z_0)|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

Ker je $r \leq 1$, velja $|f(z)| \leq |z|$.
Druga točka: $f'(0) = |a_1| = g(0)$, kar pa je po prvi točki ≤ 1.
Tretja točka: Recimo, da obstaja tak z_0, da je $|f(z_0)| = |z_0|$. Tedaj je $|g(z_0)| = 1$, torej v z_0 funkcija g zavzame maksimum. Ker se to ne sklada z izrekom o maksimumih, mora biti g.

$$\forall z \in \mathcal{D}: \;\; g(z) = \alpha \Rightarrow f(z) = \alpha z$$

Če velja $|f'(0) = 1|$, to pomeni $|g(0)| = 1$ in ima g ponovno maksimum v z.

Oglejmo si naaslednje preslikave:
Za neki $\alpha \in D(0,1)$ definiramo

$$f_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

Imamo pol $z = 1/\overline{\alpha}$, $|z| = \frac{1}{|\alpha|} > 1$. Poleg tega je f holomorfna na neki okolici $\overline{D}(0,1)$

Trditev. $f_\alpha(\partial D(0,1)) \subseteq \partial D(0,1)$ in $f_\alpha(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$

Dokaz. V resnici moramo dokazati $|z| = 1 \Leftarrow |f(z)| = 1$

$$|f_\alpha(z)| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\alpha\overline{z}}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\alpha/z}\right| = \left|\frac{z(z-\alpha)}{z-\alpha}\right| = |z| = 1$$

Zdaj dokažimo še $|z| < 1 \Leftarrow |f(z)| < 1$. Recimo, da obstaja $z_0 \in D(0,1)$, da bo $|f_\alpha(z_0)| \geq 1$ Potem $|f_\alpha(z)|$ zavzame maksimum v $D(0,1)$. Po principu maksimuma bi morala biti $f_\alpha(z)$ konstantna, kar pa očitno ni res.

Trditev. f_α je bijektivna in velja $f_\alpha(\partial D(0,1)) = \partial D(0,1)$ ter $f_\alpha(D(0,1)) = D(0,1)$.

Dokaz. Dovolj je pokazati, da ima α obojestranski inverz. Ugibamo, da je ta inverz $f_{-\alpha}$.

$$\left(f_{-\alpha} \circ f_\alpha\right)(z) = \frac{\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} + \alpha}{1 + \overline{\alpha}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}} = \frac{z - \alpha\overline{\alpha}z}{1-\alpha\overline{\alpha}} = z$$

Z enakim postopkom pokažemo, da je $\left(f_\alpha \circ f_{-\alpha}\right)(z) = z$.

$$\begin{aligned} \partial D(0,1) &= \mathrm{id}\left(\partial D(0,1)\right) = f_\alpha\left(f_{-\alpha}\left(\partial D(0,1)\right)\right) \\ &\subseteq f_\alpha\left(\partial D(0,1)\right) \subseteq \partial D(0,1) \end{aligned}$$

Sledi, da morajo biti povsod enačaji. Enak postopek naredimo za odprti krog $D(0,1)$.

Izrek. Vsaka biholomorfna preslikava $f\colon D(0,1) \to D(0,1)$ je oblike

$$f(z) = \beta f_\alpha(z);\ \beta \in \partial D(0,1)$$

Ločimo dva primera: $f(0) = 0$. Po Schwarzevi lemi mora veljati

$$|f(z)| \leq |z|\ \forall z \in D(0,1)$$
$$|f'(0)| \leq 1$$

f ima inverz, kar pomeni:

$$f^{-1}\colon D(0,1) \to D(0,1)$$
$$f^{-1}(0) = 0$$
$$|z| = |f^{-1}\left(f(z)\right)| \leq |f(z)| \leq z$$

Sledi, da morajo biti povsod enačaji: $|f(z)| = |z|$ za vsak z. Po Schwarzevi lemi je torej $f(z) = \beta z = \beta f_\alpha(z)$, pri čemer vzamemo $\alpha = 0$. Če je $f(0) = \gamma$, konstruiramo funkcijo $g := f_\gamma \circ f$. Ker sta f in f_γ biholomorfni, je tudi g biholomorfna.

$$g(0) = f_\gamma(f(0)) = f_\gamma(\gamma) = 0$$

Imamo torej biholomorfno funkcijo, ki 0 slika v 0.

$$g(z) = \beta z;\ \beta = 1$$

$$f(z) = f_{-\gamma}(\beta z) = \frac{\beta z + \gamma}{1 + \overline{\gamma}\beta z} = \beta\frac{z + \gamma/\beta}{1 + \overline{\gamma}\beta z} = \beta\frac{z + \gamma\overline{\beta}}{1 + \overline{\gamma\overline{\beta}}z} = \beta f_{-\gamma\overline{\beta}}(z)$$

2 Ulomljene linearne transformacije

Definicija. Ulomljena linearna transformacija je preslikava $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dana s predpisom

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

Opomba: Če je $c \neq 0$, ima f(z) pol pri $z = -d/c$.