Smerna polja v eni dimenziji. Naj za neko skalarno funkcijo velja $\dot{v} = f(v)$. Točke v_0, za katere velja $f(v_0) = 0$, so stacionarne točke. V njihovi okolici velja

$$\dot{v} \approx f'(v_0)(v - v_0)$$

To je diferencialna enačba, katere rešitev je eksponentna funkcija, razen v primerih večkratnih ničel. Tedaj je $\dot{v} \approx A(v - v_0)^2$ - te enačbe veljajo za t.i. reakcije n-tega reda.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A(v - v_0)^n$$

Vzamemo spremenljivko $u = v - v_0$

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{u^n} = At$$

$$\left.\frac{u^{-n+1}}{-n+1}\right|_{u_0}^{u} = At$$

$$u^{1-n} = (1-n)A(t - t_0), \quad n \neq 1$$

Kvadratni zakon upora. $\dot{v} = -Kv^2$

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 K t}$$

Kvadratni zakon upora z gravitacijo: $\dot{v} = -Kv^2 + g = -K(v^2 - v_T^2)$, kjer je $v_T = \sqrt{g/K}$

$$\frac{1}{v_T}\mathrm{artanh}\frac{v}{v_T} = -K(t - t_0)$$

$$v = V_T \tanh(-v_T K(t - t_0))$$

Hlajenje po Stefanovem zakonu. $\dot{T} \propto T_0^4 - T^4$

$$t \propto \int \frac{\mathrm{d}T}{(T_0^2 - T^2)(T_0^2 + T^2)} = ... = -\frac{1}{2T_0^2}\left(\frac{1}{T_0}\arctan\frac{T}{T_0} - \frac{1}{T_0}\mathrm{artanh}\frac{T}{T_0}\right)$$

Integral je analitično rešljiv (pri polinomih je bolj ali manj vedno tako), le temperature ne znamo izraziti.

Dušeno nihanje.

- Linearno dušenje: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

- Kvadratno dušenje: $m\dot{v} = -kx - \beta v|v|$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kx - \beta v|v|$$

Rešujemo posebej za $v > 0$ in $v < 0$. V vsakem primeru dobimo nehomogeno diferencialno enačbo, katere homogena rešitev je eksponentna funkcija, partikularna pa polinom (v tem primeru stopnje 1, kajti najvišja potenca x je 1).

$$\frac{mv^2}{2} = W_0 e^{\mp\frac{2\beta}{m}v} \mp \frac{km}{2\beta} + k$$

Če hočemo dobiti $x(t)$, moramo najprej izračunati integral (ki najbrž ni analitično rešljiv), nato pa iz njega iztaziti x. Verjetno je to nemogoče, lahko pa iz faznega diagrama $v(x)$ že dobimo kar nekaj informacij.

- Konstantno dušenje (dušenje s trenjem): $m\dot{v} = -kx - \beta\frac{v}{|v|}$ Reševanje nam močno olajša dejstvo, da imamo opravka s skalarji in je $\dfrac{v}{|v|} = \pm 1$.

$$m\dot{v} = -k\left(x \pm \frac{\beta}{k}\right)$$

$$x = \mp\frac{\beta}{k} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Sistemi diferencialnih enačb drugega reda. Primer sta sklopljeni nihali.

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = -m_1gl\varphi_1 + b^2k(\varphi_2 - \varphi_2)$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 = -m_2gl\varphi_2 + b^2k(\varphi_1 - \varphi_2)$$

V matrični obliki sistem zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1gl - b^2k & b^2k \\ b^2k & -m_2gl - b^2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\vec{\varphi}} = -\underline{\underline{K}}\varphi$$

Uporabimo nastavek $\vec{\varphi} = e^{i\omega t}\varphi_0$

$$-\omega^2\underline{\underline{M}}\varphi_0 = -K\varphi_0$$

Dobili smo problem lastnih vrednosti:

$$\det(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}) = 0$$

Energija nihal:

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2}\dot{\vec{\varphi}}\cdot\underline{\underline{M}}\dot{\vec{\varphi}} + \frac{1}{2}\vec{\varphi}\underline{\underline{K}}\vec{\varphi}$$

$$L = W_k - W_p = \frac{1}{2}\dot{\vec{\varphi}}\cdot\underline{\underline{M}}\dot{\vec{\varphi}} - \frac{1}{2}\vec{\varphi}\underline{\underline{K}}\vec{\varphi}$$

$$W_p = \frac{1}{2}\varphi_i\varphi_jK_{ij}$$

$$W_p = x_i\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2}x_ix_j\frac{\partial V}{\partial x_i\partial x_j}$$

Disipacija sklopljenih nihal. $\underline{\underline{M}}\ddot{\vec{\varphi}} + \underline{\underline{B}}\dot{\vec{\varphi}} + \underline{\underline{K}}\vec{\varphi} = 0$. Spet z nastavkom $e^{\lambda t}$ dobimo problem lastnih vrednosti:

$$\det(\lambda^2\underline{\underline{M}} + \lambda\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{K}}) = 0$$