1. naloga: V posodo z barvilom priteka voda, raztopina lahko izteka na drugi strani. Podan imamo ϕ_V, zanima nas konventracija $c(t)$.

$$c = \frac{m_b}{V}$$

$$\mathrm{d}m = c\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\phi_V \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}c = -\frac{\phi_v}{V}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}c = -c\frac{\phi_V}{V}\mathrm{d}t$$

$$c(t) = c_0 e^{-\frac{\phi(t)}{V}t}$$

2. naloga: Isto kot prej, le da namesto čiste vode v posodo priteka voda z barvilom s koncentracijo c_1.

$$\mathrm{d}c = -c\frac{\phi_V}{V}\mathrm{d}t + c_1\frac{\phi_V}{V}\mathrm{d}t$$

Zdaj imamo nehomogeno diferencialno enačbo. Homogena rešitev je enaka prejšnji, za partikularno rešitev uporabimo varioacijo konstante, torej nastavek:

$$c_p = Ae^{-\frac{\phi_v}{V}t} + B$$

$$-A\frac{\phi_V}{V}e^{\frac{\phi_V}{V}} + \frac{\phi_V}{V}\left(Ae^{-\frac{\phi_V}{V}t + B} = \frac{c_1\phi_V}{V}\right)$$

$$B = c_1$$

Imamo robni pogoj $c_p(0) = c_0$, kar nam da $A = -B = c_1$.

$$c_p(t) = (c_0 - c_1)e^{-\frac{\phi_V}{V}t} + c_1$$

Rešitev diferencialne enačbe je vsota teh dveh rešitev.

3. naloga: V valj črpamo konstanten masni tok idealnega plina, iz njega pa konstanten volumski tok. Računamo $p(t)$.

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

$$p = \rho\frac{RT}{M}$$

$$\dot{\rho} = (\phi_m - \phi_V\rho)\frac{1}{V}$$

Imamo linearno nehomogeno diferencialno enačbo za ρ, iz rešitve bomo izrazili p. Iskanje partikularne rešitve z integracijo:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{\phi_V}{V}\rho = \frac{\phi_m}{V}$$

$$\frac{V\mathrm{d}\rho}{\phi_m - \phi_V\rho} = \mathrm{d}t$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{V\mathrm{d}\rho}{\phi_m - \phi_v\rho} = \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\frac{V}{\phi_V}\ln\frac{\phi_m - \phi_v\rho}{\phi_m - \phi_v\rho_0} = t$$

$$\phi_m - \phi_v\rho = (\phi_m - \phi_v\rho_0)e^{-\frac{\phi_V}{V}t}$$

4. naloga: Trajektorija dušenega elektrona v magnetnem polju. $\vec{v}(\vec{r}, t) = ?$

$$\vec{F} = e_0 \vec{v} \times \vec{B} - \eta \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{v_\parallel} + \vec{v_\perp}$$

Vzdolž $\vec{B}$:

$$\vec{v_\parallel} = \vec{v_\parallel}_0 \, e^{-\frac{\eta}{m} t}$$

$$\vec{v}_\perp = (v_x, v_y, 0)$$

$$m\dot{v}_x = e_0 v_y B - \eta v_x$$

$$m\dot{v}_y = -e_0 v_x B - \eta v_y$$

Drugo enačbo pomnožimo z i in ju seštejemo, uvedemo novo spremenljivko $u = v_x + iv_y$

$$m\dot{u} = -ie_0 Bu - \eta u$$

$$m\dot{u} = -(\eta + ie_0 B)u$$

$$\frac{\dot{u}}{u} = -\frac{\eta + ie_0 B}{m}$$

$$u(t) = u_0 \exp\left[-\frac{\eta + ie_0 B}{m} t\right] = u_0 e^{-\beta t} e^{-i\omega t}$$

Označili smo $\beta = \eta/m$ in $\omega = e_0 B/m$. Da dobimo v_x in v_y, dobljeno hitrost u razstavimo na realno in imaginarno komponento.

$$v_x = v_{x0} e^{-\beta t} \cos(\omega t) + v_{y0} e^{-\beta t} \sin(\omega t)$$

$$v_y = v_{y0} e^{-\beta t} \cos(\omega t) + v_{x0} e^{-\beta t} \sin(\omega t)$$