

Meritve magnetnega polja z indukcijo

Fizikalni praktikum III.

Matevž Demšar

16. oktober 2024

Uvod. Pri vaji merimo gostoto magnetnega polja, ki ga ustvari tuljava. Pri merjenju uporabimo tuljavico, ki jo postavimo na izbrano mesto vzdolž osi tuljave. Ker s tem spremenimo magnetni pretok skozi tuljavico, zaradi indukcije na njej nastane električna napetost. Velja:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -NS\frac{dB}{dt}\cos\alpha \quad (1)$$

Pri tem z N označimo število ovojev na tuljavici, z S njeno površino, z α pa kot med osjo tuljavice in osjo obravnavane tuljave. Φ predstavlja pretok magnetnega polja skozi tuljavo, B pa njegovo gostoto.

Želimo upoštevati tudi, da so navoji merilne tuljavice porazdeljeni med notranjim (r_1) in zunanjim polmerom (r_2), torej moramo prilagoditi vrednost površine S . To storimo tako, da merilno tuljavico obravnavamo kot množico manjših tuljav z dN ovoji, ki inducirani napetosti prispevajo majhen dU . Za lažjo predstavbo si pomagamo s Sliko 1. dN želimo izraziti s spremembo polmera dr in skupno inducirano napetost izraziti tako, da enačbo (1) integriramo po radiju. Pri predpostavki, da je gostota navojev konstantna, dobimo integral:

$$U = -\frac{dB}{dt} \frac{2N\pi}{r_2^2 - r_1^2} \cos\alpha \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr \quad (2)$$

$$U = -\frac{dB}{dt} N\pi \frac{r_2^2 + r_1^2}{2} \cos\alpha \quad (3)$$

$$\text{Označimo } \hat{S} = \frac{\pi}{2}(r_2^2 + r_1^2)$$

$$U = -N\hat{S}\frac{dB}{dt}\cos\alpha \quad (4)$$

Ta se od enačbe (1) seveda razlikuje v vrednosti \hat{S} . Enačbo preoblikujemo tako, da izrazimo gostoto magnetnega polja kot integral napetosti po času.

$$\Delta B = -\frac{1}{N\hat{S}\cos\alpha} \int_{t_1}^{t_2} U dt \quad (5)$$

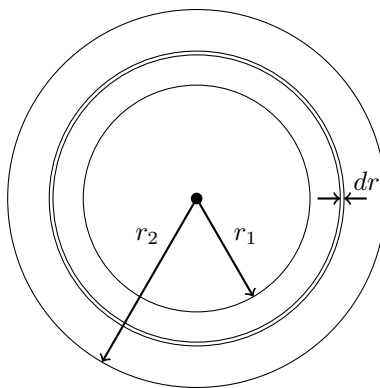
Pri merjenju napetosti uporabimo integrator, ki na svojem izhodu ustvari napetost, sorazmerno z integralom napetosti po času, in sicer:

$$U_{iz} = -\frac{1}{RC} \int_{t_1}^{t_2} U dt \quad (6)$$

Napetost na integratorju vstavimo v enačbo (5).

$$\Delta B = (B_2 - B_1) = \frac{RC}{N\hat{S}\cos\alpha} U_{iz} \quad (7)$$

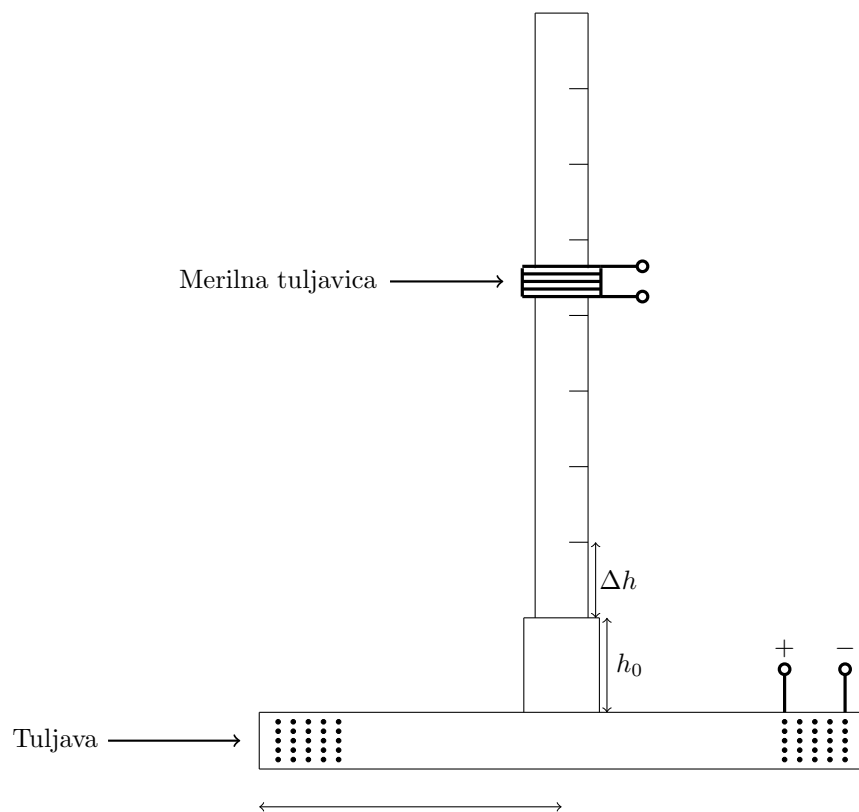
Privzamemo, da velja $B_1 = 0 T$ in $\alpha = 0^\circ$, merimo pa gostoto magnetnega polja B_2 .



Slika 1: Pri klasični fiziki smo običajno predpostavili, da so zanke v tuljavi neskončno tanke, toda vsaka tuljava ima notranji polmer r_1 in zunanji polmer r_2 . Tako moramo v enačbi, ki nam opisuje induksijsko napetost v tuljavi, popraviti vrednost S , in sicer tako, da tuljavo razdelimo na majhne tuljavnice, pri katerih je razlika med polmeroma zelo majhna (dr) in nato z integralom seštejemo induksijske napetosti dU , ki jih doprinesejo te namišljene tuljavnice.

Meritve. Pri merjenju opazujemo dva pojava: prvi je odvisnost gostote magnetnega polja tuljave od oddaljenosti med merilno tuljavico in obravnavano tuljavo (označimo s h), drugi pa odvisnost magnetnega polja v okolici tuljave od električnega toka, ki teče skozi tuljavo (označimo z I). Najprej se posvetimo odvisnosti magnetnega polja od h .

Oddaljenost od tuljave. Skozi obravnavano tuljavo spustimo tok I_0 . Pravokotno na njeno površino je pritrjena merilna palica z enakomerno razporejenimi zarezi. Merilno tuljavico natakne na merilno palico tako, da je njeno središče približno med dvema zarezama. Na višini h_0 se merilna palica razširi, tako da merilne tuljavnice ne moremo bolj približati obravnavani tuljavi (glej Sliko 2). Merilna tuljavica je priklopljena na integrator, ta pa na voltmeter, na katerem odčitamo izhodno napetost U_{iz} . Po vsaki meritvi ponastavimo integrator. Rezultate vpišemo v Tabelo 1.



Slika 2: Skica prikazuje merjenje gostote magnetnega polja v odvisnosti od višine. Skozi tuljavo teče tok I_0 , zaradi katerega nastane magnetno polje. To v merilni tuljavici inducira napetost, ki jo izmerimo z integratorjem. Ker želimo izmeriti odvisnost gostote magnetnega polja od višine h , moramo izmeriti tudi vrednosti Δh in h_0 .

Pričakujemo, da se izmerjene vrednosti $B_t(h)$ ne bodo bistveno razlikovale od teoretičnih vrednosti $B_t(h)$, ki jih dobimo z enačbo:

$$B_t(h) = \frac{N_0 \mu_0 I_0 r_0^2}{2(r_0^2 + h^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

v kateri N_0 predstavlja število navojev obravnavane tuljave, μ_0 induksijsko konstanto, I_0 tok skozi obravnavano tuljavo in r_0 njen polmer. Vsi ti podatki so nam znani, in sicer:

$$\begin{aligned} N_0 &= 200 \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \\ I_0 &= 4 \text{ A} \pm 0.05 \text{ A} \\ r_0 &= 12.5 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm} \end{aligned}$$

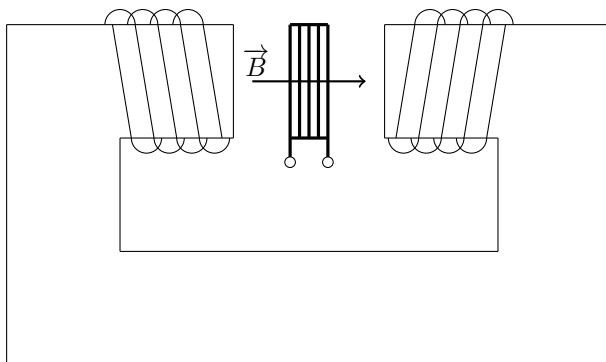
Poleg tega izmerimo sledeče podatke:

$$\begin{aligned} h_0 &= 1.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm} \\ 46 \Delta h &= 46.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm} \\ N &= 2000 \\ r_1 &= 9.0 \text{ mm} \pm 0.05 \text{ mm} \\ r_2 &= 11.5 \text{ mm} \pm 0.25 \text{ mm} \\ R &= 10.0 \text{ k}\Omega \pm 0.5 \text{ k}\Omega \\ C &= 1.0 \mu\text{F} \pm 0.1 \mu\text{F} \end{aligned}$$

h [cm]	U_{iz} [mV]	h [cm]	U_{iz} [mV]
1.5	256	12.5	85
2.5	239	13.5	74
3.5	222	14.5	66
4.5	205	15.5	59
5.5	186	16.5	53
6.5	169	17.5	47
7.5	151	18.5	42
8.5	133	19.5	37
9.5	119	20.5	33
10.5	106	21.5	30
11.5	94		

Tabela 1: V tabeli so meritve izhodne napetosti integratorja v odvisnosti od višine h . Na merilni palici so označene reže, višinska razlika med režami je 1 cm. Ocenimo, da je središče tuljave pri vsaki meritvi 0.5 cm nad režo. Velikost merske napake pri merjenju višine torej ocenimo na 0.5 cm, velikost napake pri merjenju napetosti pa na 1 mV.

Električni tok. Pričakujemo, da bo magnetno polje elektromagneta linearno odvisno od toka, ki ga spustimo skozenj. To preverimo tako, da med pola elektromagneta, skozi katerega poženemo tok I , vstavimo merilno tuljavico, priklopljeno na integrator. Na Sliki 3 je prikazana skica meritve. Opravimo več meritev pri različnih vrednostih toka I . Integrator po vsaki meritvi ponastavimo.



Slika 3: Med pola elektromagneta vstavimo merilno tuljavico. Zaradi spremembe magnetnega pretoka skozi tuljavico se v njej inducira napetost, katere integral je sorazmeren z velikostjo magnetnega polja med poloma elektromagneta.

I [A]	U_{iz} [mV]
0.00	62
0.50	557
1.00	989
1.50	1476
2.00	1935
2.50	2379
3.00	2838
3.50	3335
4.00	3777
4.50	4203
5.00	4642

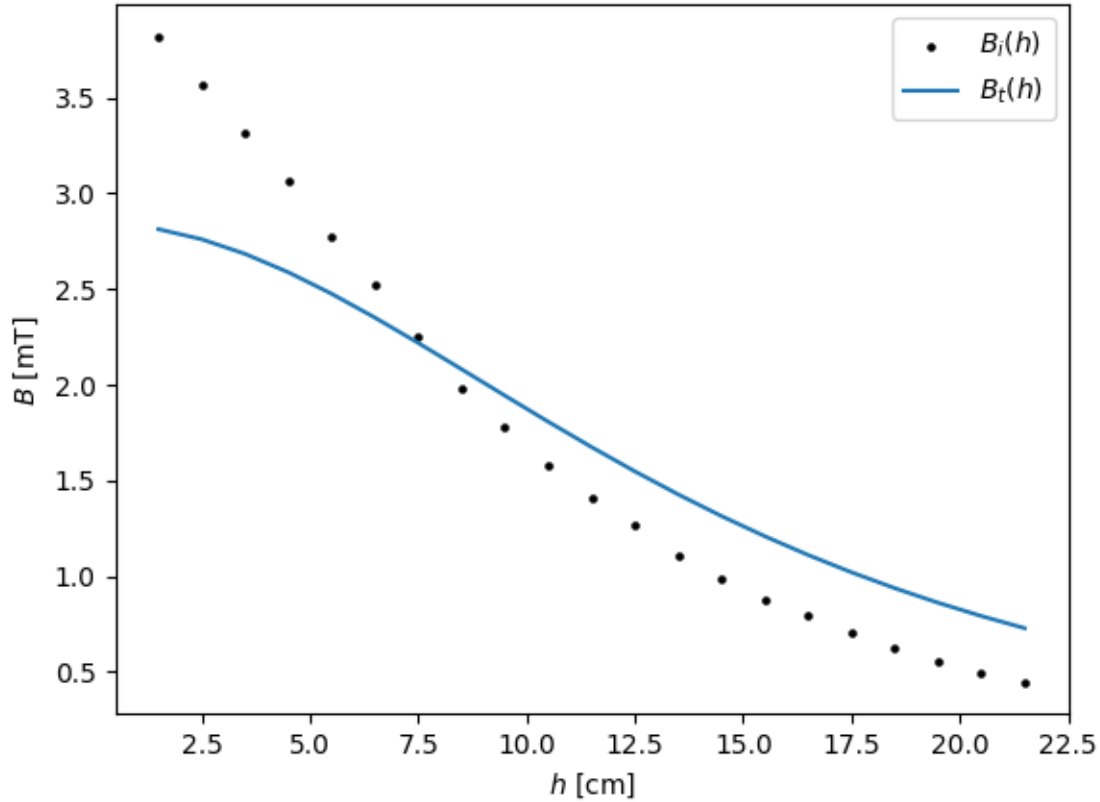
Tabela 2: V tabeli so zapisane meritve izhodne napetosti integratorja ob različnih velikostih električnega toka I . Opazimo, da smo tudi pri toku $I = 0$ na integratorju izmerili napetost. Seveda pričakujemo, da je gostota magnetnega polja v okolici tuljave, skozi katero ne teče tok enaka 0 T, vendar je odstopanje dovolj majhno, da ga lahko odpišemo kot posledico merske napake.

Analiza podatkov. Pri prvem delu poskusa smo želeli izmeriti odvisnost gostote magnetnega polja tuljave v odvisnosti od oddaljenosti od tuljave vzdolž njene osi. Izmerjene vrednosti U_{iz} in h vstavimo v enačbo (7).

h [cm]	B_i [mT]	h [cm]	B_i [mT]
1.5	3.8	12.5	1.3
2.5	3.6	13.5	1.1
3.5	3.3	14.5	1.0
4.5	3.1	15.5	0.9
5.5	2.8	16.5	0.8
6.5	2.5	17.5	0.7
7.5	2.3	18.5	0.6
8.5	2.0	19.5	0.6
9.5	1.8	20.5	0.5
10.5	1.6	21.5	0.4
11.5	1.4		

Tabela 3: V tabeli so zapisane izmerjene vrednosti gostote magnetnega polja B_i pri različnih vrednostih višine h . Pri zaokroževanju rezultatov upoštevamo napako meritve, ki jo ocenjujemo na približno 11%.

Vrednost $B_i(h)$, izračunano na podlagi meritev, želimo primerjati s teoretičnimi vrednostmi $B_t(h)$, ki so odvisne le od višine h in lastnosti obravnavane tuljave. To najlažje storimo tako, da narišemo graf $B(h)$, kakršnega prikazuje Slika 4. Kot vidimo, se naše meritve ne ujemajo s pričakovanji.



Slika 4: Slika prikazuje graf funkcije $B_t(h)$, ki jo opisuje enačba (8), in vrednosti $B_i(h)$, pridobljene iz meritev. Pri risanju grafa uporabimo pythonovi knjižnici `numpy` in `matplotlib.pyplot`. Kot vidimo, se meritve ne ujemajo s pričakovanji, s knjižnico `numpy` izračunamo, da vrednosti odstopanj $(B_t - B_i)/B_t$ dosežejo vrednosti okoli 40%.

Najverjetnejši vzrok za odstopanje je merska napaka, zato jo ocenimo.

$$\Delta h = 0.5 \text{ cm}$$

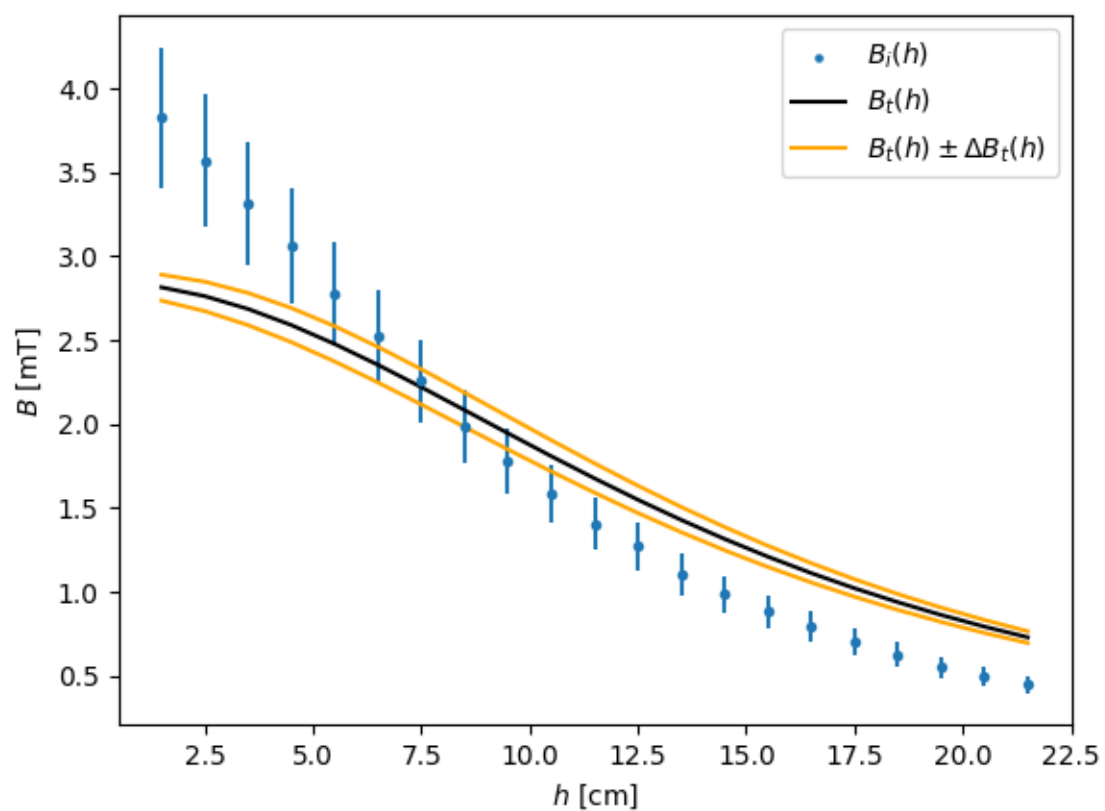
$$\Delta U_{iz} = 0.1 \text{ mV}$$

Napaka teoretične vrednosti $B_t(h)$ je odvisna od napake pri merjenju I_0 , r_0 in h . Najlažje jo prikažemo tako, da funkcijo $B_t(h)$ ocenimo navzgor in navzdol na podlagi merskih napak. Na graf $B(h)$ narišemo krivulji, ki ju funkcija $B_t(h)$ kljub merskim napakam gotovo ne preseže.

Napako meritve $B_i(h)$ določimo računsko in dobimo:

$$\frac{\Delta B_i}{B_i} = \pm(0.11 + \frac{\Delta U_{iz}}{U_{iz}})$$

Na Sliki 5 ponovno narišemo graf $B(h)$, tokrat upoštevamo mersko napako.



Slika 5: Kot vidimo, odstopanje izmerjenih vrednosti $B_i(h)$ od teoretične vrednosti ni vedno v okviru pričakovane merske napake. Verjetno je vzrok za to pretirano optimistična ocena napake, morda pa tudi površnost pri izvedbi vaje.

Pri drugem delu vaje pričakujemo linearno zvezo med vrednostima B in I . Za dolge prazne tuljave (kar obravnavana tuljava ni) velja med gostoto magnetno polje in tokom zveza:

$$B = \frac{\mu_0 N}{L} I \quad (9)$$

Vrednosti B izračunamo po enačbi (7), nato narišemo graf $B(I)$ in meritvam s pythonovo knjižnico *scipy.optimize* priredimo premico. Iz koeficienta te premice lahko na podlagi enačbe (9) izračunamo razmerje N/L , ki bi ga morala imeti dolga prazna tuljava, da bi ustvarila enako polje.

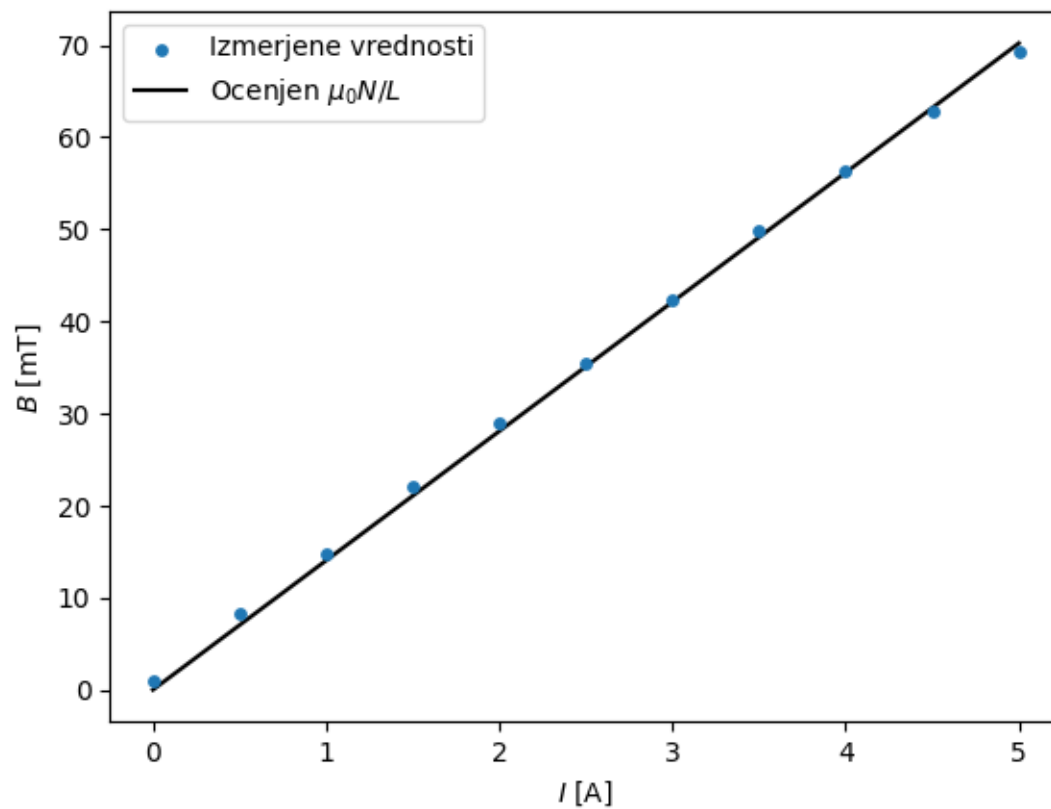
I [A]	B [mT]
0.00	1
0.50	8
1.00	14
1.50	22
2.00	29
2.50	36
3.00	42
3.50	50
4.00	56
4.50	63
5.00	69

Tabela 4: V tabelo zapišemo vrednosti B med poloma elektromagneta pri razlizu cnih tokovih I . Pri zaokroževanju upoštevamo mersko napako, ki jo na podlagi ocene napak pri merjenju izračunamo s pomočjo modula *numpy* in znaša okoli 20%.

Zdaj nam ostane le še izračun razmerja N/L , ki bi ga morala imeti prazna tuljava, da bi imela enako zvezo med B in I kot obravnavani elektromagnet. Zvezo med gostoto magnetnega polja in tokom enačimo s koeficientom premice, ki smo jo na Sliki 6 priredili meritvam - recimo mu k .

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 N}{L} &= k \\ \frac{N}{L} &= k/\mu_0 \\ \frac{N}{L} &= \frac{14.0 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} / \text{m} \\ \frac{N}{L} &= 11\,000 / \text{m} \pm 100 / \text{m} \end{aligned}$$

Zaključek. Pri merjenju sem opazil nekaj pojavov, ki bi lahko dodatno povečali napako meritev. Prvi je segrevanje tuljave, kar bi lahko vplivalo na njeno induktivnost, ali pa vsaj upornost žice. Ocenjujem, da se je segrela za vsaj 30 K, vendar bi moral za zanesljivo oceno napake pri vsaki meritvi zabeležiti tudi temperaturo tuljave. Drugi pojav, ki je gotovo vplival na napako, je tako imenovano "lezenje" izhoda integratorja - nenadzorovano spreminjanje izhodne napetosti. Potrudil sem se integrator nastaviti tako, da bi bilo lezenje čim manjše, a sem bil pri tem le delno uspešen. Zazdelo se mi je tudi, da je na hitrost lezenja vplivalo tudi, ali sem imel v njegovi bližini integratorja roko. V vezju, ki sestavlja integrator, se pojavi tudi kondenzator, katerega kapaciteta je v določenih pogojih zelo nestabilna, zato se mi vpliv položaja moje roke med merjenjem na zanesljivost meritev ne zdi popolnoma neverjeten, čeprav najbrž zelo majhen.



Slika 6: Izmerjenim vrednostim s pomočjo pythonove knjižnice `scipy.optimize` priredimo premico. Koeficient premice znaša 14.0 mT/A , numerično napako koeficienta premice `scipy.optimize` ocenjuje na $1,4\%$.