Konstante gibanja lahko pogosto uganemo iz Lagrangeove funkcije, npr.:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Tedaj q_i imenujemo ciklična koordinata. Iz Euler-Lagrangeove enačbe dobimo zahtevo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.}$$

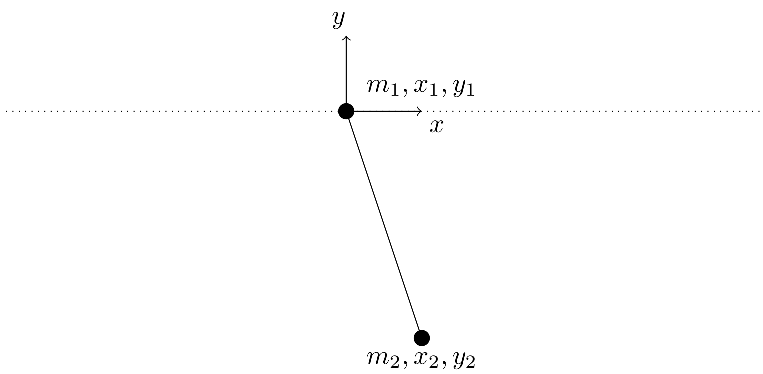
Količini $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ rečemo tudi posplošeni impulz ali p_i.

Označimo lahko tudi energijsko funkcijo $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$

Če L ni odvisna od časa, je H konstantna, torej:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$$

1. naloga: Matematično nihalo na premičnem pritrdišču.



Izberemo sledeče vezi:

$$y_1 = z_1 = 0$$
$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + y_2^2$$

$$x_2 = l\sin\varphi + x_1 \rightarrow \dot{x}_2 = l\cos\varphi\,\dot{\varphi} + \dot{x}_1$$
$$y_2 = -l\cos\varphi \rightarrow \dot{y}_2 = l\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}_1\cos\varphi + \dot{x}_1^2\right)$$
$$V = -m_2 g l\cos\varphi$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}_1\cos\varphi + \dot{x}_1^2\right) + m_2 g l\cos\varphi$$

$$x_1:\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_1}$$
$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = 0$$

$$\varphi: \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

$$l\ddot\varphi + \ddot x_1 \cos\varphi = -g\sin\varphi$$

Vstavimo izraz za $\ddot x_1$ v enačbo, pridobljeno iz φ, in dobimo:

$$l\ddot\varphi + \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\left(\varphi^2 \sin\varphi\cos\varphi - \ddot\varphi\cos^2\varphi\right) = -g\sin\varphi$$

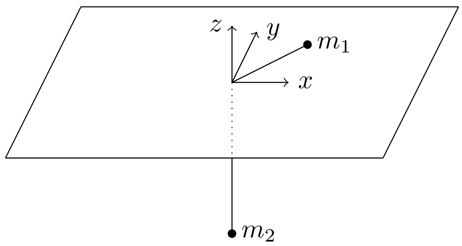
Pri majhnih odmikih lahko stvar poenostavimo:

$$l\ddot\varphi\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) = l\ddot\varphi\frac{m_1}{m_1+m_2} = -g\varphi$$

Dobimo nihanje s frekvenco

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)$$

2. naloga: Dve uteži, ena izmed katerih je na plošči.



Pojdimo v cilindrične koordinate:

$$m_1: \ x_1, y_1 \to \varphi, r$$

$$z_2 = l - r$$

Splošna formula za kinetično energijo v polarnih koordinatah:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right)$$

V našem primeru moramo prišteti še kinetično energijo m_2:

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right) + \frac{1}{2}m_2\dot r^2$$

$$V = gm_2(r-l)$$

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \frac{1}{2}m_2\dot r^2 - gm_2(r-l)$$

Z uporabo Euler-Lagrangeove enačbe dobimo

$$(m_1+m_2)r^2 = m_1 r\dot\varphi^2 - gm_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = 0 \Rightarrow p_\varphi = m_1\dot\varphi r^2$$

Recimo, da je naše začetno stanje $r = r_0$, $\dot r = \ddot r = 0$

$$p_\varphi^2 = r_0^3 g m_1 m_2$$

$$\dot\varphi = \sqrt{\frac{gm_2}{r_0 m_1}}$$

Če ima začetno stanje nekolikšen odmik, npr. $r = r_0 + \delta$:

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2)\ddot{\delta} &= \frac{p_\varphi^2}{m_1(r_0+\delta)^3} - gm_2 \\
&= \frac{p_\varphi^2}{m_1 r_0^3 \left(1 + \frac{\delta}{r_0}\right)^3} - gm_2 \\
&\approx \frac{p_\varphi^2}{m_1 r_0^3}\left(1 - 3\frac{\delta}{r_0}\right) - gm_2
\end{aligned}
$$

V začetnem stanju je veljalo $\frac{p_\varphi^2}{m_1 r_0^3} - gm_2 = 0$. Ko to upoštevamo, dobimo

$$(m_1 + m_2)\ddot{\delta} = -\frac{3p_\varphi^2}{m_1 r_0^4}\delta$$

Dobimo enačbo nihanja s frekvenco

$$\omega = \sqrt{\frac{3p_\varphi^2}{m_1(m_1+m_2)r_0^4}} = \sqrt{\frac{3r_0^3 g m_1 m_2}{m_1(m_1+m_2)r_0^4}} = \sqrt{\frac{3gm_2}{(m_1+m_2)r_0}}$$

3. naloga: Gibanje po krogli brez trenja. Zanima nas, kdaj se odlepi.
Uporabimo generalizirane koordinate r, ϑ.

$$T = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{r}^2\right)$$

$$V = mgr\cos\vartheta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) - mgr\cos\vartheta$$

Pri tem nismo upoštevali sile podlage:

$$Q_r = \overrightarrow{F}_p \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial r} = F_p\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = F_p$$

$$Q_\vartheta = F_p\hat{e_r} \cdot \hat{e_\vartheta} = 0 \text{ (vsaj za polarne koordinate)}$$

Zapišemo E-L enačbi za r in ϑ. Mimogrede: Na neki točki bo F_p postala 0, ker se bo klada odlepila od podlage.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{r}) = m\ddot{r} = mr\dot{\vartheta}^2 + F_p - mg\cos\vartheta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} + 0$$

$$2\dot{r}\vartheta + r^2\ddot{\vartheta} = gr\sin\vartheta$$

Trenutek, ko se klada odlepi, poiščemo z ohranitvijo energije:

$$t = 0: \; E = mgR$$

$$mgR = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + mgr\cos\vartheta$$

Dokler se ne odcepi, je $r = R$ in $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$R\dot{\vartheta}^2 = 2g(1 - \cos\vartheta)$$

Izraz vstavimo v enačbo, pridobljeno iz E-L enačbe, in dobimo:

$$2mg(1 - \cos\vartheta) - mg\cos\vartheta + F_p = 0$$

$$F_p = mg(3\cos\vartheta - 2)$$

Želimo $F_p = 0$, torej mora biti

$$\cos\vartheta = \frac{2}{3} \Rightarrow \vartheta \approx 48^\circ$$