Tenzor vztrajnostnega momenta. Imejmo togo telo, ki se vrti s hitrostjo $\vec{\omega}$. Vemo:

$$\mathrm{d}\Gamma = \vec{r} \times (\vec{v}\mathrm{d}m)$$

Pri togem vrtenju velja: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Sledi:

$$\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$
$$= \mathrm{d}m \left(r^2\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}\right)$$

Označimo $(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r} = (\vec{r} \otimes \vec{r})\vec{\omega}$ (tenzorski produkt)

$$\underline{\underline{J}} = \int (r^2\underline{\underline{1}} - (\vec{r} \otimes \vec{r}))\mathrm{d}m = \int \mathrm{d}m \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

Z $\underline{\underline{1}}$ označimo identično matriko ($\mathrm{diag}(1,1,1)$).

Steinerjev izrek. S tem smo izračunali vztrajnostni moment okoli težišča ($J = J^*$). Če telo vrtimo okoli kake druge osi, je

$$J_{ij} = m(\vec{r}^{\,*}\delta_{ij} - r_i^* r_j^*) + J*_{ij}$$

Naloga. Vrtimo tanko palico ($x \approx 0,\ y \approx 0$) pod kotom 45° glede na njeno dolžino.

$$J = \int \mathrm{d}m \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} \begin{pmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}z = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Izračunajmo še $\vec{\Gamma} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega}$. Vemo: $\vec{\omega} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}[0,1,1]^T$

$$\vec{\Gamma} = \frac{ml^2\omega_0}{12\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{ml^2\omega_0}{12\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}$$

Nadaljevanje vrtenja. Recimo $J_{ij} = J_0(\delta_{ij} a n_i n_j)$, kjer je $\dot{\vec{n}} = \vec{\omega} \times \vec{n}$ in a neka konstanta (če bo treba, jo bomo nastavili na 1). J_0 je konstanta, in sicer $\frac{ml^2}{12}$. Če na palico ne deluje noben navor, velja:

$$\dot{\vec{\Gamma}} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\underline{J}}\vec{\omega} + \underline{\underline{J}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} = 0$$

$$-J_0 a(\dot{\vec{n}}(\vec{n} \cdot \vec{\omega}) + \vec{n}(\dot{\vec{n}} \cdot \vec{\omega})) + \underline{\underline{J}}\dot{\vec{\omega}} = 0$$

Vstavimo $\dot{\vec{n}} = \vec{\omega} \times \vec{n}$. Zaradi lastnosti mešanega produkta je $(\vec{\omega} \times \vec{n}) \cdot \vec{\omega} = 0$.

$$-J_0 a(\vec{\omega} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \vec{\omega}) + J_0\dot{\vec{\omega}} - J_0 a\vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\omega}}) = 0$$

Na obeh straneh z desne skalarno pomnožimo z $\vec{n}$. Prvi člen bo tako enak 0 (mešani produkt).

$$J_0\vec{n} \cdot \dot{\vec{\omega}} - J_0 a\vec{n} \cdot \dot{\vec{\omega}} = 0$$

$$J_0(1-a)\vec{n} \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

Če je $a = 1$, bo to veljalo v vsakem primeru. V splošnem primeru pa mora biti $\vec{n} \cdot \dot{\vec{\omega}} = 0$.

Vztrajnostni moment "rogovile". Rogovilo razdelimo na tri dele - enega v smeri x, enega v smeri y in enega v smeri z.

$$J_1 = \frac{m}{l}\int \begin{pmatrix} y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}y = \frac{ml^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \frac{m}{l}\int \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}x = \frac{ml^2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = J^* + m(r^{*2}\underline{\underline{1}} - \overrightarrow{r}^* \otimes \overrightarrow{r}^*) = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + ml^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ml^2\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zdaj lahko izračunamo vztrajnostni moment okoli težišča. Le-to ima koordinate $\overrightarrow{r}_T = l(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0)$

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = ml^2\begin{pmatrix} \frac{5}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{12} \end{pmatrix}$$

$$J^* = J - 3m(r_T^2 I - (\overrightarrow{r}_T \otimes \overrightarrow{r}_T)) = ... = ml^2\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$