# 1 $\Gamma$ funkcija

**Izrek.** Kompleksna $\Gamma$ funkcija je holomorfna.

**Dokaz.** Definiramo zaporedje funkcij

$$F_n(z) = \int_{1/n}^{n} e^{z-1} e^{-t} dt$$

$F_n(z)$ so holomorfne, ker je $f(z,t) \to t^{z-1}e^{-t}$ zvezna in je njen odvod zvezen. Očitno zaporedje $(F_n)n \in \mathbb{N}$ konvergira proti $\Gamma$ funkciji, torej moramo pokazati le še, da je ta konvergenca enakomerna. To dokažemo v dveh korakih:

1. Pokazati moramo, da je za vsak $z$ iz definicijskega območja

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/n} t^{z-1}e^{-t}dt = 0$$

2. in da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = 0$$

Spomnimo se: $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t} = e^{(x-1)\ln t} \cdot e^{iy \ln t}$, če $z$ zapišemo kot $x + iy$. Sledi, da je $|t^{z-1}| = t^{x-1}$.

$$\left| \int_0^{1/n} t^{z-1}e^{-t}dt \right| \leq \int_0^{1/n} t^{\mathfrak{Re} z-1}e^{-t}dt \leq \int_0^{1/n} t^{M-1}e^{-t}dt \leq \int_0^{1/n} t^{M-1}dt = \frac{t^M}{M}\Bigg|_0^{1/n} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{n}\right)^M$$

Ocenili smo $\mathfrak{Re}(z) \leq M$.

$$\left| \int_n^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \right| \leq \int_n^{\infty} t^{M-1}e^{-t}dt$$

Tak integral pa veno konvergira.

**Opomba.** Kakor v množici realnih števil tudi tu velja $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Če je $\mathfrak{Re}(z) \in (-1,0)$, lahko še vedno definiramo $\Gamma$ funkcijo kot $\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1)$, saj je $\Gamma(z+1)$ gotovo definirana. Podobno lahko funkcijo definiramo povsod, kjer $\mathfrak{Re}(z)$ ni negativno celo število ali 0.

**Zanimivost.** Še ena slavna funkcija je Riemannova Zeta funkcija:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Domneva se, da ima ničle le vzdolž osi $\mathfrak{Re}(z) = 1/2$, vendar tega še nikomur ni uspelo dokazati.

# 2 Harmonične funkcije

**Definicija.** Bodi $\mathcal{D}$ odprta v $\mathbb{R}^n$ in bodi $u\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva. Pravimo, da je $u$ harmonična na $\mathcal{D}$, če je

$$\Delta u = 0$$

Pri tem smo z $\Delta$ označili Laplaceov operator $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.

**Zgled.** Obravnavajmo najprej primer $n = 1$.

$$\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2} = 0 \Rightarrow u = Ax + B$$

Kjer sta $A, B$ konstanti.

Poseben primer so harmonične funkcije, ki so radialno simetrične, torej odvisne le od $r$, kjer je $r$ oddaljenost telesa glede na koordinatno izhodišče. Označimo $f(r) = u(x_1 + x_2 + ... + r_n)$

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r)\frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f'(r)}{r} \cdot x_i\right) = \frac{f''(r) \cdot r - f'(r)}{r^3}x_i^2 + \frac{f'(r)}{r}$$

$$\Delta u = f''(r) + (n+1)\frac{f'(r)}{r} \equiv 0$$

Rešujemo diferencialno enačbo ene spremenljivke. Uvedemo $g(r) = f'(r)$:

$$g'(r) = (1-n)\frac{g(r)}{r}$$

Ločimo spremenljivke in integriramo na obeh straneh.

$$g(r) = Ar^{1-n}$$

Nato lahko izrazimo še $f$:

$$f(r) = \begin{cases} A \cdot \ln(r) + B & n = 2 \\ A\frac{1}{r^{n-2}} + B & n \neq 2 \end{cases}$$

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} A\ln(|x|) + B & n = 2 \\ A\frac{1}{|x|^{n-2}} + B & n \neq 2 \end{cases}$$

Običajno si za $B$ izberemo vrednost $B = 0$, za $A$ pa

$$A = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)w_n} & n \neq 2 \end{cases}$$

$$w_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

$w_n$ je površina n-dimenzionalne sfere s polmerom 1. Za $n = 3$ je to ravno $4\pi$. Funkcijam $u$ s to izbior konstant pravimo Newtonovi potenciali.

**Harmonične funkcjie v $\mathbb{R}^2$** Bodi $\mathcal{U}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ taka, da je $\Delta\mathcal{U} = 0$ in $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. $\mathcal{D}$ lahko obravnavamo kot podmnožico $\mathbb{C}$. Naj bo $f$ holomorfna na $D$:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Ker je $f$ holomorfna, je neskončnokrat odvedljiva. Tedaj je

$$f'(x+iy) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Upoštevamo Cauchy-Riemannovi enakosti in dobimo

$$\Delta u = v_{xy} - v_{yx} = 0$$

Sledi: Če je $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorfna, je $u = \mathfrak{Re}(f)$ harmonična na $\mathcal{D}$.

**Izrek.** Bodi $\mathcal{D}$ enostavno povezano območje v $\mathbb{R}^2$ in funkcija $u$ na njem harmonična. Tedaj obstaja holomorfna funkcija $f$, da je $u = \mathfrak{Re}(z)$.

**Dokaz.** Definirati moramo tako $v(x,y)$, da bo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfna. Iz razlogov, ki bodo postali očitni pozneje, izberemo

$$v(x,y) = \int_\gamma (-u_y dx + u_x dy)$$

Pokazati moramo, da je ta definicija neočitna od izbire poti. Dovolj je pokazati, da je funkcija $u$ potencialno polje (to lahko storim npr. z Greenovo formulo).