Zadnjič smo prišli do zaključka, da togo telo opišemo s 6N koordinatami: koordinatami točke in orientacijo telesa glede na to točko. Obravnavamo torej gibanje telesa z eno nepremično točko. Glede na to očko vrtenje telesa opišemo kot

$$\vec{L} = \sum_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i (\vec{r}_i \times (\vec{w} \times \vec{r}_i))$$

$$= \sum_i m_i \left[(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{w} - (\vec{r}_i \cdot \vec{w})\vec{r}_i\right]$$

$$= \sum_i m_i \left[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(w_x\hat{e}_x + w_y\hat{e}_y + w_z\hat{e_z}) - (x_i w_x + y_i w_y + z_i w_z)(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z)\right]$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ x_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

Vsoto aproksimiramo z integralom:

$$\vec{L} \approx \int \rho(\vec{r}) \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}^3 r = \underline{\underline{J}}\dot{\vec{w}}$$

Zdaj uporabimo ortogonalno transformacijo:

$$\vec{L'} = R\vec{L} = R\underline{\underline{J}}\dot{\vec{w}} = R\underline{\underline{J}}R^{-1}R\dot{\vec{w}} = J'\dot{\vec{w}'}$$

Poiščimo lastni sistem, v katerem je $\underline{\underline{J}}$ diagonalna matrika. Tedaj je

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} J_{xx}w_x \\ J_{yy}w_y \\ J_{zz}w_z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} J_x w_x \\ J_y w_y \\ J_z w_z \end{bmatrix}$$

Tapišimo še kinetično energijo:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v_i}$$

Spomnimo se, da je $\vec{v} = (\vec{w}_i \times \vec{r}_i)$. Od tod pa lahko uporabimo pravila za mešani produkt:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{w} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2}\vec{w}\sum_i m_i \cdot (\vec{v}_i \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2}\vec{w}\underline{\underline{J}}\vec{w}$$

Frizbi. Izberemo koordinate $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ki tvorijo lastni sistem frizbija. Ti vektorji imajo nekakšno časovno odvisnost. Če naj bo b točka na frizbiju, njen položaj opišemo kot

$$\vec{b}(t) = \sum_\alpha b_\alpha \vec{e}_\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}\right)_{nein} + \vec{w} \times \vec{b}$$

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \vec{M} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right)_{nein} + \vec{w} \times \vec{L}$$

Tu je $\vec{L} = \sum_\alpha J_{\alpha\alpha} w_\alpha \vec{e}_\alpha$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right)_{nein} = \sum_\alpha J_{\alpha\alpha}\dot{w}_\alpha \vec{e}_\alpha$$

$$\vec{w} \times \vec{L} = ((J_{33} - J_{22})w_2 w_3,\ (J_{11} - J_{33})w_3 w_1, (J_{22} - J_{11})w_1 w_2)$$

Posamezne komponente nam dajo tri Eulerjeve enačbe:

$$J_{11}\dot{w}_1 - (J_2 - J_3)(w_2 w_3) = M_1$$
$$J_{22}\dot{w}_2 - (J_3 - J_1)(w_2 w_3) = M_2$$
$$J_{33}\dot{w}_3 - (J_1 - J_2)(w_2 w_3) = M_3$$

Te enačbe so analitično rešljive le v posebnih primerih. Najpreprostejši je $J_1 = J_2 = J_3$ in $\overrightarrow{M} = 0$ (krogla, ki se vrti brrez vpliva zunanjih navorov) - tedaj je $\overrightarrow{w} = \text{konst.}$

Nekoliko bolj zanimiv primer je primer osne simetrije : $J_1 = J_2 \neq J_3$ in $\overrightarrow{M} = 0$. Iz tretje enačbe takoj dobimo $w_3 = \text{konst.} = w_0$ Prvi dve enačbi predelamo takole:

$$J_1\dot{w}_1 = (J_1 - J_3)w_2 w_0$$
$$J_1\dot{w}_2 = (J_3 - J_1)w_1 w_0$$

Ker je w_0 konstanta, sta enečbi linearni in ju zmoremo rešiti Vpeljemo konstanto $\Omega = \dfrac{J_3 - J_1}{J_1} w_0$

$$\dot{w}_1 = -\Omega w_2$$
$$\dot{w}_2 = -\Omega w_1$$

Najenostavneje ta sistem rešimo tako, da prvo enačbo odvajamo po času in vstavimo $\dot{w}_2$ iz druge enačbe.

$$\ddot{w}_1 = -\Omega^2 w_1$$
$$w_1 = A\cos(\Omega t + \delta)$$
$$w_2 = A\sin(\Omega t + \delta)$$

(Mimogrede: $w_1^2 + w_2^2 = A^2 = \text{konst.}$)
Sledi, da se os frizbija vrti okoli vektorja $\overrightarrow{w}$, ki je zaradi odsotnosti navora konstanten. Takšno vrtenje je videti kot tresenje (wobbling). Lastno je slabo vrženemu frizbiju (tudi dobro vrženemu frizbiju, ampak v tem primeru sta ω in $\overrightarrow{e}_3$ vzporedna in se nič ne vidi), vrtavki, planetom itd.

Stabilnost vrtavke. Zdaj si mislimo, da je $\overrightarrow{M}$ še vedno 0, vztrajnostni momenti pa so si med seboj paroma različni. Opazimo, da je

$$w_1 = w_2 = 0,\ w_3 = w_0$$

Rešitev Eulerjevih enačb, vendar takšna rešitev velja le, če telo zavrtimo v ravno pravi smeri. Zdaj si zamislimo, da je os telesa za nek $\overrightarrow{\eta}$ izmaknjena iz osi vrtenja.

$$\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ w_0 + \eta_3 \end{bmatrix}$$

Eulerjeve enačbe tedaj postanejo

$$J_1\dot{\eta}_1 - (J_2 - J_3)\eta_2(w_0 + \eta_3) = 0$$
$$J_2\dot{\eta}_2 - (J_3 - J_1)\eta_1(w_0 + \eta_3) = 0$$
$$J_1\dot{\eta}_1 - (J_1 - J_2)\eta_1\eta_2 = 0$$

Ker to ni rešljivo, recimo, da je $\overrightarrow{\eta}$ dovolj majhen, da lahko zanemarimo vse člene reda velikosti η^2. Takoj iz tretje enačbe dobimo $\dot{\eta}_3 = 0$ Iz ostalih dveh enačb dobimo:

$$J_1\dot{\eta}_1 = (J_2 - J_3)\, w_0\eta_2$$
$$J_2\dot{\eta}_2 = (J_3 - J_1)\, w_0\eta_1$$

To spet združimo v eno samo enačbo 2. reda, in sicer:

$$J_1\ddot{\eta}_1 = \frac{(J_3 - J_2)(J_3 - J_1)}{J_1 J_2}\eta$$

Zdaj imamo dve možnosti, in sicer zaradi predznaka izraza $(J_3 - J_2)(J_2 - J_1) =: w_c^2$. Če je ta pozitiven, je rešitev sinusna funkcija in dobimo isto kot prej. Če je negativen, je rešitev $\eta(t) = Ae^{\pm i w_c t}$ oziroma nekakšna hiperbolična funkcija. Tako dobimo pojav Dzhanenbekova (video na spletni učilnici).