Prejšnjič:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} z^{n-2k}$$

Rodriguesova formula: $P_n(z) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \left((z^2-1)^n \right)$

Dokaz. Oglejmo si $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \left(z^{2n-2k} \right)$

$$= (2n-2k)(2n-2k-1)...(n-2k+1) z^{n-2k} = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} z^{n-2k}$$

Vidimo, da lahko to vstavimo v formulo za $P_n(z)$:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \left(z^{2n-2k} \right)$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} (z^2)^{n-k}$$

$1/n!$ nesemo iz oklepaja. Na preostanku vsote uporabimo binomski izrek, pri čemer lahko upoštevamo, da je za $k > n/2$ n-ti odvod člena z^{n-k} enak 0.

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (z^2)^{n-k} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \left((z^2-1)^n \right)$$

\end{proof}

Zdaj lahko računamo Legendrove polinome, npr. $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, $P_2(z) = \dfrac{3z^2-1}{2}$, $P_3(z) = ... = \dfrac{5z^3-3z}{2}$

Rodovna funkcija Podobno kot za Besselove funkcije imamo tudi za Legendrove polinome funkcijo, katere koeficienti so ravno Legendrovi polinomi.

Trditev. Okolli točke 0 velja razvoj:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n$$

Ideja dokaza. Uporabimo posplošeno binomsko vrsto

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n$$

$$(1-2zt+t^2)^{-1/2} = \left((t-z)^2 + 1 - z^2 \right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left(1 + \frac{(t-z)^2}{1-z^2} \right)^{-1/2}$$

To razvijemo v vrsto in pogledamo člene z istim z^n. S tovrstnim računanjem se zaradi časovne zahtevnosti postopka ne bomo ukvarjali.

Posledica.

$$(n+1)P_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{2} z P_n(z) - n P_{n-1}(z)$$

Dokaz. $\dfrac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}$ odvajamo po t.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n \tag{1}$$

$$\frac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z)t^{n-1} \tag{2}$$

Enačbo (1) pomnožimo z $z-t$, enačbo (2) pa z $1-2zt+t^2$. Nato ju odštejemo in dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z)t^{n-1}(1-2zt+t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n(z-t)$$

Primerjamo koeficiente pri t^n in dobimo iskano rekurzivno zvezo.

Posledica. $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$

Dokaz. Imamo rekurzivno zvezo, torej lahko uporabimo indukcijo. P_0 in P_1 lahko izračunamo direktno.

Izrek.

$$\int_{-1}^{1} P_n(z)P_m(z)' \,\mathrm{d}z = \delta_{mn}\frac{2}{2n+1}$$

Ideja dokaza. Polinome zapišemo z Rodriguezovo formulo, vstavimo v integral in uporabimo per partes.

S tem smo definirali skalarni produkt na $C([-1,1])$ kot

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

S skalarnim produktom je definirana tudi norma v $C([-1,1])$:

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

In razdalja:

$$d(f,g) = ||f-g||_2$$

Napolnitev metričnega prostora $C[-1,1]$ označimo z $L^2[-1,1]$.

Weierstrassov izrek: Za neko $f \in C[-1,1]$ obstajajo polinomi q_n, da velja

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f(x)-q_n(x)| \to 0$$

Sledi $||f-q_n||_2 \to 0$, kajti $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)-q_n(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)-q_n(x)|^2 \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x$ Ker so funkcije v L^2 limite takih zaporedij, mora to veljati tudi za L^2. Drugače povedano, Za vsako funkcijo $f \in L^2[-1,1]$ lahko najdemo zaporedje polinomov, ki konvergira proti njej. To hkrati pomeni, da so polinomi gosti v L^2 z normo $||\cdot||_2$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n q_n(x)$$

Vsak $q_n(x)$ pa lahko zapišemo kot linearno kombinacijo Legendrovih polinomov. Se pravi lahko vsako funkcijo v L^2 zapišemo kot linearno kombinacijo Legendrovih polinomov.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n(x)$$

Ker so P_n med sabo pravokotni, je

$$\beta_n = \frac{\langle f,P_n\rangle}{||P_n||_2^2} = (2n+1)\langle f,P_n\rangle = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Pridruženi Legendrovi polinomi. Za $m = 0, 1, ..., n$ definiramo

$$P_n^m(z) = (-1)^m (1-z^2)\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m} P_n(z)$$

Trditev. Pridruženi Legendrovi polinomi rešijo enačbo

$$((1-z^2)y')' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right] y = 0$$

Dokaz. Vstavimo v enačbo.

Pomen. Definiramo preslikavo $L\colon C^2[-1,1] \to C[-1,1]$, ki slika y v $\big((1-z^2)y'\big)' - \dfrac{m^2}{1-z^2} y$ in se izkaže za linearno.

Trditev. P_n^m so lastni vektorji tako definirane preslikave L. Če je L hermitska, so lastne vrednosti realne in iz lastnih vektorjev lahko napravimo ortogonalno bazo.

Izrek. $m \geq 0$ fiksiramo. Potem so $(P_n^m)_{n=0}^{\infty}$ ortogonalna baza $L^2[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_k^m(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{nk}\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Hermitovi polinomi. Imamo še druge ortogonalne polinome, najbolj znani med njimi so Hermitovi polinomi. Gre za rešitve diferencialne enačbe

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0$$

Takšna diferencialna enačba sploh nima singularnosti, kot v primeru Legendrove enačbe pa recimo, da je $\nu \in \mathbb{N}$. Da dobimo Hermitov polinom $H_n(z)$, pri z^n izberemo koeficient 2^n. Ima sledeče lastnosti:

$$H_0(z) = 1, \quad H_1(z) = 2z$$

Rodriguesova formula: $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} e^{-z^2}$

Rodovna funkcija: $e^{2zt-t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n$ Rekurzivne formule:

- $H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - H_{n-1}'(z)$
- $H_n'(z) = 2nH_{n-1}(z)$
- $H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z)$