

Vaja 20: Prožnostni modul

Matevž Demšar

Januar 2024

Opis. Pri vaji opazujemo vpliv zunanje sile na žice iz različnih materialov.

Uvod. Pri dovolj majhnih silah lahko deformacijo žive opišemo s Hookovim zakonom:

$$F = kx$$

Koeficient k je odvisen od dimenzij žive S ter l in prožnostnega modula E .

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{E \cdot S}$$

Prožnostni modul je odvisen od materiala, zato ga je težko izračunati. Lahko pa ga določimo eksperimentalno, in sicer prav s Hookovim zakonom:

$$E = \frac{F \cdot l}{\Delta l \cdot S}$$

V prvem delu vaje bomo na ta način izmerili prožnostni modul in bakrene in jeklene žice.

Pri ve čji obremenitvi spremembe dolžine žice ne naraščajo več linearno. Obremenitvi, pri kateri se to zgodi, re čemo meja linearnosti.

V drugem delu vaje bomo izmerili največjo obremenitov, ki jo žica prenese, preden se pretrga. Tej količini pravimo meja natezne trdnosti.

Prožnostni modul. Na železno in bakreno živo postopoma obešamo uteži z maso $m = 100\text{ g}$ in vsakič izmerimo, koliko se je žica pri tem raztegnila.

Železo		Baker	
$m\text{ [g]}$	$\Delta l\text{ [cm]}$	$m\text{ [g]}$	$\Delta l\text{ [cm]}$
100	0,04	100	0,03
200	0,07	200	0,06
300	0,12	300	0,09
400	0,14	400	0,12
500	0,17	500	0,15
600	0,20	600	0,18
700	0,22	700	0,21
800	0,25	800	0,25

$$l = 2,02\text{ m}$$

$$r_{Jeklo} = 0,15\text{ mm}$$

$$r_{Baker} = 0,18\text{ mm}$$

S pomočjo grafa $\frac{\Delta l}{l}(\frac{F}{S})$ lahko izračunamo vrednost prožnostnega modula žic, tako da ocenimo koeficient premice, ki jo potegnemo skozi točke na grafu. Koeficient premice lahko tudi izračunamo z linearno regresijo:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n |(\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)|}{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

$$E = \frac{1}{k}$$

$$E_{bakra} = 7 \times 10^4\text{ N/mm}^2$$

$$E_{jekla} = 10 \times 10^4\text{ N/mm}^2$$

Znani vrednosti:

$$E_{bakra} = 12,5 \times 10^4\text{ N/mm}^2$$

$$E_{jekla} = 21,0 \times 10^4\text{ N/mm}^2$$

Ocena napake. Do merskih napak je lahko prišlo pri merjenju dolžine, polmera ter raztezka žice in mase vzmeti.

$$\Delta l = \pm 0,01 \text{ m}$$

$$\Delta r = \pm 0,01 \text{ mm}$$

$$\Delta(\Delta l) = 0,01 \text{ cm}$$

$$\Delta m = 1 \text{ g}$$

Na podlagi napak pri merjenju lahko ocenimo tudi napako pri prožnostnem modulu.

$$\Delta S/S = 2 \frac{\Delta r}{r}$$

$$\Delta S/S(Fe) = 0,133$$

$$\Delta S/S(Cu) = 0,111$$

$$\Delta F/F = \Delta m/m$$

$\frac{\Delta F_1/F_1}{10 \times 10^{-3}}$	$\frac{\Delta F_2/F_2}{5,0 \times 10^{-3}}$	$\frac{\Delta F_3/F_3}{3,3 \times 10^{-3}}$	$\frac{\Delta F_4/F_4}{2,5 \times 10^{-3}}$	$\frac{\Delta F_5/F_5}{2,0 \times 10^{-3}}$	$\frac{\Delta F_6/F_6}{1,7 \times 10^{-3}}$	$\frac{\Delta F_7/F_7}{1,4 \times 10^{-3}}$	$\frac{\Delta F_8/F_8}{1,3 \times 10^{-3}}$
--	---	---	---	---	---	---	---

$$\frac{\Delta F/S}{F/S} = \Delta S/S + \Delta F/F$$

Jeklo	$\frac{\Delta F}{S_1}$ 0,143	$\frac{\Delta F}{S_2}$ 0,138	$\frac{\Delta F}{S_3}$ 0,137	$\frac{\Delta F}{S_4}$ 0,136	$\frac{\Delta F}{S_5}$ 0,135	$\frac{\Delta F}{S_6}$ 0,135	$\frac{\Delta F}{S_7}$ 0,135	$\frac{\Delta F}{S_8}$ 0,135
Baker	$\frac{\Delta F}{S_1}$ 0,121	$\frac{\Delta F}{S_2}$ 0,116	$\frac{\Delta F}{S_3}$ 0,114	$\frac{\Delta F}{S_4}$ 0,114	$\frac{\Delta F}{S_5}$ 0,113	$\frac{\Delta F}{S_6}$ 0,113	$\frac{\Delta F}{S_7}$ 0,113	$\frac{\Delta F}{S_8}$ 0,112

Za izračun napake prožnostnega modula potrebujemo še relativno napako spremembe dolžine $\delta = \frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l}$

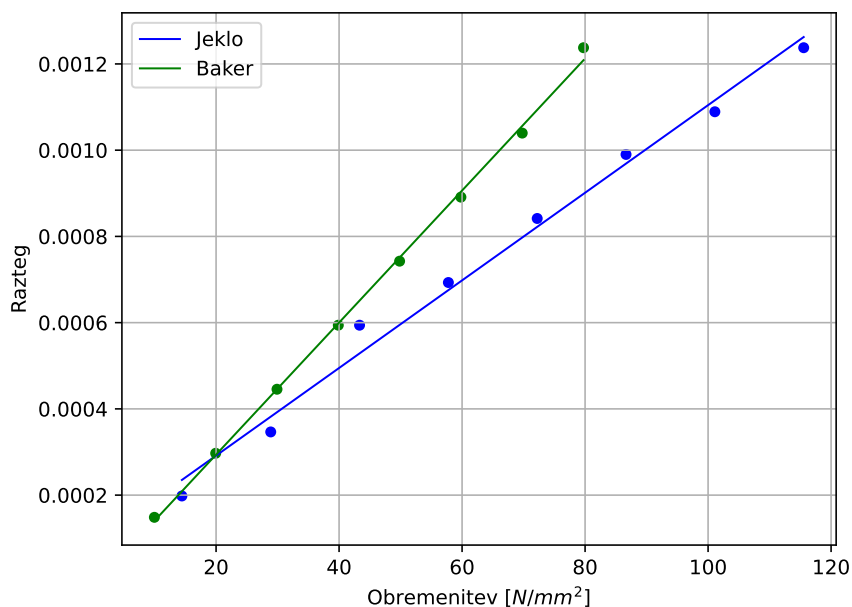
Jeklo	δ_1 0,250	δ_2 0,142	δ_3 0,083	δ_4 0,071	δ_5 0,059	δ_6 0,050	δ_7 0,045	δ_8 0,040
Baker	δ_1 0,333	δ_2 0,167	δ_3 0,111	δ_4 0,083	δ_5 0,067	δ_6 0,056	δ_7 0,047	δ_8 0,040

Za obe kovini je vrednost relativne napake prožnostnega modula enaka $\Delta E/E = 0,0173$. Absolutna napaka torej znaša

$$\Delta E_{Jekla} = 16,9 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta E_{Bakra} = 11,2 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$$

Graf. Na žalost se iz grafa ne vidi, kdaj pri bakru prekoračimo mejo linearnosti. Obremenitev žice je bila očitno premajhna.



Natezna trdnost. Mejo natezne trdnosti materiala izmerimo tako, da žico postopoma obremenjujemo z utežmi, dokler se ne pretrga. Ker zaradi omejitev z utežmi ne moremo natančno določiti mase, pri kateri se žica pretrga, lahko pričakujemo absolutno napako okoli 100 g.

Poskus	m_{max} [g]	F/S [N/mm ²]
1	2000	200
2	2400	240
3	2300	230
4	2000	200
5	2200	220
6	2300	230
7	2200	220
8	2200	220
Povp.	2300	230

Zaključek. Pri prožnostnem modulu je bilo odstopanje od znane vrednosti zelo visoko. Ne morem določiti, kako je do odstopanja prišlo, morda sem se zmotil pri računanju.

Pri meji natezne trdnosti bi utegnili priti do dodatnega odstopanja zaradi vozlov, v katerih bi žica utegnila biti krhkejša - pogosto se je prelomila prav zraven vozla. Vrednost te napake je verjetno med 20 % and 50 %.