1 Robni pogoji

1.1 Nihanje končne strune

Imamo parcialno diferencialno enačbe

$$U_{tt} = c^2 U_{xx}$$

Struna naj bo vpeta, torej sta naša robna pogoja $U(0,t) = 0$ in $U(a,t) = 0$. Ob času $t = 0$ imamo začetna pogoja $u(x,0) = f(x)$ in $u_t(x,0) = g(x)$ (začetna oblika strune in začetna hitrost). Iščemo dvakrat zvezno odvedljivo rešitev.

Fourierova metoda separacije spremenljivk. Iščemo funkcijo, ki vsaj okvirno reši problem in je lepe oblike. Vzamemo nastavek

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Vstavimo v originalno enačbo, nato delimo z XT:

$$XT'' = c^2 X'' T$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}$$

Ker je leva stran neodvisna od x, desna pa od t, morata biti obe strani konstantni (označimo $-\lambda$). Dobimo torej diferencialni enačbi

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$T'' + c^2 \lambda T = 0$$

Naš primer bo lahko zadoščal robnima pogojema $X(0)T(t) = 0$ in $X(a)T(t) = 0$. $T(t) = 0$ nam da trivialno rešitev, posebej moramo obravnavati robna pogoja $X(0) = 0$ in $X(a) = 0$.
Najprej rešujmo enačbo za X. Ker imamo opravka z linearno diferencialno enačbo 2. reda, bodo rešitve eksponentne funkcije. Imamo več možnosti glede na izbiro λ:

1. $\lambda = 0$: $X_1 = e^{0x} = 1$, $X_2 = xe^{0x} = x$. Dobimo linearno funkcijo, ki mora biti zaradi začetnih pogojev enaka $X = 0$
2. $\lambda < 0$: $X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$, kar je pri upoštevanju robnih pogojev mogoče le, če je $C_1 = C_2 = 0$ ali $a = 0$
3. $\lambda > 0$: $\mu_1 = i\sqrt{\lambda}$, $\mu_2 = i\sqrt{\lambda}$, dobimo vsoto sinusne in kosinusne funkcije. Robna pogoja nam data $C_1 = 0$ in $\sqrt{\lambda} = k\pi,\ k \in \mathbb{N}$. Dobimo neskončno družino rešitev $X_k = \sin(\sqrt{\lambda_k}x)$, $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$.

Zdaj, ko poznamo λ, rešimo še enačbo za T.

$$T'' + \left(\frac{ck\pi}{a}\right)^2 T = 0$$

$$T(t) = A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{a}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{a}t\right)$$

$$U_k(x,t) = X_k(x) T_k(t)$$

Tako pridobljena $U_k(x,t)$ zadošča enačbi in robnima pogojema, ne pa nujno tudi začetnima pogojema. Da dobimo enačbo, ki ustreza začetnima pogojema, poskusimo z vsoto več U_k.

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x,t)$$

tudi (vsaj formalno) zadošča valovni enačbi in robnima pogojema. Predvidevamo, da bomo lahkokoeficiente A_k in B_k nastavili tako, da bo vsota zadoščala začetnima pogojema.

$$U(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\left(A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{a}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{a}t\right)\right)$$

Začetna pogoja:

- $U(x,0) = f(x)$
- $U_t(x,0) = g(x)$

Tedaj je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$$

Prepoznamo sinusno vrsto, ki smo jo obravnavali pri Matematiki III. Iz drugega pogoja pa dobimo

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{ck\pi}{a} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$$

Spet imamo sinusno vrsto. Funkciji f, g sta definirani na intervalu $[0, a]$. Razširimo ju do lihih funkcij na intervalu $[-a, a]$. To moremo storiti, saj morata biti v $x = 0$ enaki 0 in lahko definiramo $f(-x) = -f(x)$ in $g(-x) = -g(x)$. Zdaj lahko ti funkciji razvijemo v sinusno vrsto in pri tem dobimo koeficiente A_k ter $B_x \frac{k\pi c}{a}$.

$$A_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^a g(x) \in \left(\frac{k\pi}{a}x\right)$$

Zadošča integrirati od 0 do a, saj sta produkta $f(x)\sin(\lambda x)$ in $g(x)\sin(\lambda x)$ sodi funkciji.

Opomba. Ker potrebujemo dvakrat zvezno odvedljivo rešitev, imamo določene zahteve za f in g. V splošnem bo dobljena u dovoljkrat zvezno odvedljiva, če bosta tudi f in g dovolj gladki (v našem primeru moramo zahtevati, da sta štirikrat zvezno odvedljivi). Fourierova vrsta po točkah konvergira, dokler sta f in g vsaj odsekoma zvezni (s fizikalnega stačišča to običajno ni težava, saj je nihanje nezvezne strune precej težko doseči).

1.2 Nihanje neskončne strune.

Tu ni robnih pogojev, imamo le začetna pogoja:

$$U(x,0) = f(x)$$

$$U_t(x,0) = g(x)$$

D'Lambertova metoda. Vpeljemo novi spremenljivki $\xi = x - ct$ in $\eta = x + ct$.

$$U_t = U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = -cU_\xi + cU_\eta$$

$$U_{tt} = (U_t)_\xi \xi_t + (U_t)_\eta = c^2 U_{\xi\xi} - 2c^2 U_{\xi\eta} + c^2 U_{\eta\eta}$$

Pri tem smo upoštevali, da je U zvezno parcialno odvedljiva in lahko enačimo $U_{\eta\xi} = U_{\xi\eta}$.

$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + U_\eta$$

$$U_{xx} = ... = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$$

Iz podatka $T_{tt} = c^2 U_x x$ dobimo

$$-2c^2 U_{\xi\eta} = 2c^2 U_{\xi\eta}$$

$$I_{\xi\eta} = 0$$

Sledi:

$$U = F(\xi) + G(\eta)$$

$$U(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Določiti moramo F in G. To storimo na podlagi začetnih pogojev, dobimo

$$F(x) + G(x) = f(x)$$

$$-cF'(x) + cG'(x) = g(x)$$

Dobili smo dve enačbi za neznani funkciji F in G. Lahko na primer prvo enačbo odvajamo (zahtevali bomo, da je tu vse odvedljivo):

$$F'(x) + G'(x) = f'(x)$$

$$-cF'(x) + cG'(x) = g(x)$$

$$2cG'(x) = cf'(x) + g(x)$$

$$G'(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) + \frac{g(x)}{c}\right)$$

To bomo naslednjič integrirali in iz G izrazili F.