Trditev. Imejmo funkcijo u, ki bodi zvezna na $\partial D(0,1)$ in harmonična na $D(0,1)$. Tedaj je (za $r<1$)

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r\left(\vartheta-\varphi\right) u(e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$$

Dokaz. Najprej predpostavimo, da je u harmonična na neki okolici $\overline{D}(0,1)$, tedaj je realni del neke holomorfne funkcije. Uporabimo Cauchyjev izrek:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)}$$

V splošnem velja $\dfrac{1}{\zeta} = \overline{\zeta}$. Torej:

$$f(z) = \int_{\partial D(0,1)} \frac{f(\zeta)}{1-\overline{\zeta}z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

Čeprav v integrirani funkciji nastopa $\overline{\zeta}$, je še vedno holomorfna, saj nima pola. Do pola bi namreč prišlo pri $\zeta = 1/\overline{z}$ ali $\zeta = z$, kar pa se ne more zgoditi, saj je ζ vedno zunaj $D(0,1)$, z pa vedno znotraj. Poleg tega hitro pokažemo: $\dfrac{1}{1-\overline{z}\zeta} - 1\dfrac{1}{\zeta} = \dfrac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,1)} f(\zeta)\left(\frac{1}{1-z\overline{\zeta}} + \frac{1}{1-\overline{z}\zeta} - 1\right)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,1)} f(\zeta)\frac{1-\overline{z}\zeta + 1 - z\overline{\zeta} - 1 + \overline{z}\zeta + z\overline{\zeta} - z\overline{z}\zeta\overline{\zeta}}{|1-\overline{z}\zeta|^2}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

ζ leži na robu enotske krožnice, torej je $|\zeta| = 1$.

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,1)} f(\zeta)\frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{\zeta}|^2}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta})\frac{1-r^2}{|1-re^{i\varphi}e^{-i\vartheta}|}\frac{ie^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta}}\mathrm{d}\vartheta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta})\frac{1-r^2}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^2}\mathrm{d}\vartheta$$

V ulomku prepoznamo $P_r(\varphi-\vartheta) = P_r(\vartheta-\varphi)$.

Zdaj na realnem delu te funkcije (pri nekem specifičnem kotu φ - uznačimo u_φ) uporabimo Poissonovo formulo:

$$u_\varphi(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\vartheta-\varphi)u_\varphi(e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$$

Označimo, za $\rho < 1$:

$$u(r\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\vartheta-\varphi)u(\rho e^{e^{i\vartheta}})\mathrm{d}\vartheta$$

Pošljemo ρ proti 1. Ker je u zvezna, integral pa enakomerno zvezen, dobimo

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\vartheta-\varphi)u(e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$$

Posledica.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = 1$$

Dokažemo s Poissonovo formulo za $u=1, \varphi=1$

Izrek. Naj bo g zvezna funkcija na $\partial D(0,1)$. Potem obstaja funkcija u, ki je zvezna na $\partial D(0,1)$, harmonična v $D(0,1)$ in $u\Big|_\partial = g$. Takšna u je enolično določena.

Dokaz. Najprej pokažimo, da je takšna funkcija kvečjemu ena sama. Naj bosta u_1 in u_2 dve takšni funkciji. Tedaj bodi $u = u_1 - u_2$

$$\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 \equiv 0$$

Torej je tudi u harmonična na $D(0,1)$

$$u\Big|_{\partial D(0,1)} = u_1\Big|_{\partial D(0,1)} - u_2\Big|_{\partial D(0,1)} = g - g = 0$$

Uporabimo izrek o minimumih in maksimumih: če u zavzame na $\partial D(0,1)$ tako minimum kot maksimum, je $0 \leq u \leq 0$ oziroma $u = 0$.
Zdaj s Poissonovo formulo definirajmo u:

$$u(re^{i\varphi}) = \begin{cases} g & r = 1 \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\vartheta - \varphi) g(e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta & r < 1 \end{cases}$$

Pokažimo še, da ima takšna u želene lastnosti, torej da je harmonična na $D(0,1)$.
Vemo: $P_r(\vartheta) = \mathfrak{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \mathfrak{Re}\left(\dfrac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\right)$

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left(\frac{1+re^{i(\varphi-\vartheta)}}{1-re^{i(\varphi-\vartheta)}}\right) g(e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left(\frac{e^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta}} \frac{1+re^{i(\varphi-\vartheta)}}{1-re^{i(\varphi-\vartheta)}}\right) g(e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left(\frac{e^{i\vartheta}+re^{i\varphi}}{e^{i\vartheta}-re^{i\varphi}}\right) g(e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$$

$$u(z) = \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z} g(e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta\right)$$

Ker je integrand zvezen in parcialno zvezno odvedljiv po z, je funkcija $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z} g(e^{i\vartheta}\mathrm{d}\vartheta)$ odvedljiva, torej je holomorfna, torej je u harmonična. Nazadnje je treba preveriti, da je u zvezna ko se približujemo robu, torej da je

$$\lim_{r\to 1} u(re^{i\varphi}) = g(e^{i\varphi})$$

Izkoristimo dejstvo, da je $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\vartheta-\varphi)\mathrm{d}\vartheta = 1$

$$|u(re^{i\varphi}) - g(e^{i\varphi})| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi-\vartheta)g(e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta - g(e^{i\varphi})\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi-\vartheta)g(e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta - g(e^{i\varphi})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi-\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} P_r(\varphi-\vartheta)\left(g(e^{i\vartheta}) - g(e^{i\varphi})\right)\mathrm{d}\vartheta\right|$$

Ker je g zvezna, lahko poskrbimo, da je $\left|g(e^{i\vartheta}) - g(e^{i\varphi})\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, dokler je $|\vartheta - \varphi| < \delta$. Poleg tega je P_r omejena, torej ga lahko navzgor ocenimo z M. To pomeni, da je

$$|u(re^{i\varphi}) - g(e^{i\vartheta})| \leq \frac{1}{2\pi}\left(M\int_{|\varphi-\vartheta|<\delta} |g(e^{i\vartheta}) - g(e^{i\varphi})|\mathrm{d}\vartheta + \int_{|\varphi-\vartheta|\geq\delta} P_r(\vartheta-\varphi)|g(e^{i\vartheta}) - g(e^{i\varphi})|\mathrm{d}\vartheta\right)$$

Prvi integral je navzgor omejen z $\varepsilon/2$. Drugi integral je integral produkta omejene količine s funkcijo P_r, ki gre v limiti $r \to 1$ proti 0.

Splošno:

$$\left|u(re^{i\varphi}) - g(e^{i\psi})\right| = \left|u(re^{i\varphi}) - g(e^{i\psi}) + g(e^{i\varphi}) - g(e^{i\varphi})\right| \leq \left|u(re^{i\varphi}) - g(e^{i\varphi})\right| + \left|g(e^{i\varphi}) - g(e^{i\psi})\right|$$

Za prvi člen smo ravno dokazali, da gre proti 0, drugi pa gre proti 0 zaradi zveznosti g.

Harmonične funkcije v $\mathbb{R}^3$ Poseben primer: $u\colon \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ radialno simetrična okoli 0, harmonična. Označimo $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$. Tedaj je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Če je u radialno simetrična okoli 0, je

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{||x - x_0||}$$

fundamentalna rešitev enačbe $\Delta u = 0$.

Greenove identitete. Bodi D območje v $\mathbb{R}^3$, naj bo omejeno in ima gladek rob ∂D, ki je torej ploskev. Ploskev parametriziramo: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t, s)$. Zahtevamo $\overrightarrow{r}_t \times \overrightarrow{r}_s \neq 0$. Tedaj je normala ploskve enaka

$$\overrightarrow{n} = \pm \frac{\overrightarrow{r}_t \times \overrightarrow{r}_s}{||\overrightarrow{r}_t \times \overrightarrow{r}_s||}$$

Definicija. Bodi u odvedljiva v okolici $\overline{D}$ in $\overrightarrow{r} \in \partial D$ normalni odvod v točki $\overrightarrow{r}$ definiramo kot

$$(\partial_{\overrightarrow{n}} u)(\overrightarrow{r}) = (\nabla u)(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{n}$$