Nihanje neskončne strune. Imamo samo začetno obliko strune, prejšnjič smo dobili enačbo

$$G'(x) = \frac{1}{2}(f'(x) + \frac{g(x)}{c})$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s + D$$

$$F(x) = f(x) - G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s - D$$

Rešitev:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\mathrm{d}s$$

Prevajanje toplote na končni palici. Imamo toplotno enačbo

$$U_t = c^2 U_x$$

Robna pogoja: $u(0,t) = u(a,t) = 0$
Začetni pogoj: $u(x,0) = f(x)$
Kot zadnjič uporabimo separacijo spremenljivk:

$$\frac{1}{c^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Robna pogoja: $X(0) = 0$, $X(a) = 0$ (lahko je tudi $T = 0$, toda taka rešitev je nezanimiva)
X del poiščemo kot pri nihanju strune:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2,\ k > 0$$

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$$

T del:

$$\frac{T'}{T} = -\left(\frac{k\pi c}{a}\right)^2$$

$$T = e^{-\left(\frac{k\pi c}{a}\right)^2 t}$$

$$u_k(x,t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi c}{a}\right)^2 t}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$$

Začetni pogoj $t = 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$$

Gre torej za sinusno vrsto za $f(x)$:

$$A_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\,\mathrm{d}x$$

Sturm-Liouviellov problem. Iščemo neničelne $y(x)$ in $\lambda \in \mathbb{C}$, da bo veljalo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = -\lambda y$$

Pri čemer velja $x \in [a,b]$, P, Q, R zvezne na $[a,b]$, y pa naj zadošča robnima pogojema

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

Pri čemer so $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ realna števila z lastnostmi $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ in $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$
Kaj, če robni pogoji niso homogeni? Npr. pri toplotni enačbi:

$$U_t = c^2 U_x$$

$$u(0,t) = A, \quad u(a,t) = B, \quad a, b \text{ konstanti}$$

Tedaj poskusimo najprej rešiti primer, ko je enačba homogena, nato pa iz te vmesne rešitve dobimo iskano rešitev.

$$u(x,t) = v(x,t) + A + \frac{B-A}{a}x, \quad \text{kjer } v \text{ reši enačbo za homogena robna pogoja.}$$

Nazaj k Sturm-Liouviellovem problemu: Parametra λ še ne poznamo, želimo pa, da je tak, da bo imela enačbe

$$Py'' + Qy' + Ry = -\lambda y$$

imela netrivialne rešitve. Bonus točke, če je $\lambda \in \mathbb{R}$ in $y \in C^2[a,b]$.
Imejmo preslikavo $L\colon C^2[a,b] \to C[a,b]$ s predpisom:

$$Ly = Py'' + Qy' + Ry$$

L je linearne preslikava - posledica lastnosti odvoda in zveznih funkcij. Rešujemo problem

$$Ly = -\lambda y$$

Iščemo torej lastne vektorje in lastne vrednosti linearne preslikave L. Če hočemo, da so lastne vrednosti realne, mora biti A sebi adjungirana:

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^* v\rangle$$

$$\langle Lu, v\rangle = \int_a^b (Pu'' + Qu' + Ru)\,\overline{v}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b (P\overline{v})u''\,\mathrm{d}x + \int_a^b (Q\overline{v})u'\,\mathrm{d}x + \int_a^b Ru\overline{v}$$

To integriramo po metodi per partes:

$$= (P\overline{v})u'\Big|_a^b - \int_a^b (P\overline{v})'u'\,\mathrm{d}x + (Q\overline{v})u\Big|_a^b - \int_a^b (Q\overline{v})'u\,\mathrm{d}x + \int_a^b Ru\overline{v}q, \mathrm{d}x$$

Na integralu $\int_a^b (P\overline{v})'u'\,\mathrm{d}x$ še enkrat uporabimo per partes:

$$= \left[(P\overline{v})u' + Q\overline{v}u - (P\overline{v})'u\right]\Big|_a^b + \int_a^b u\left((Pv)'' - (Qv)' + Rv\right)\,\mathrm{d}x$$

Definiramo $L^* = (Pv)'' - (Qv)' + Rv$. Velja torej

$$\langle Lu, v\rangle = \left[P\overline{v}u' + Q\overline{v}u - (P\overline{v})'u\right]\Big|_a^b + \langle u, L^*v\rangle$$

Definicija. L je formalno sebi adjungirana, če velja $L = L^*$.