Bodi $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Če $c \neq 0$, ima f pol pri $-\dfrac{d}{c}$. Definirajmo $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in $f\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$. Dobimo $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Če $c = 0$, dobimo $f(z) = \dfrac{az+b}{d}$ in je $f(\infty) = \infty$, če stvar definiramo na $\hat{C}$.

Zamislimo si, da namesto funkcije f pišemo matriko:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ...f_A$$

Kompozitum funkcij si lahko zamislimo kot množenje takih matrik:

$$B = \begin{bmatrix} u & v \\ w & t \end{bmatrix} ...f_B$$

$$(f_A \circ f_B)(z) = ... = \frac{(au+bw)z + (av+bt)}{(cu+dw)z + (cv+dt)} ...C = \begin{bmatrix} au+bw & av+bt \\ cu+dw & cv+dt \end{bmatrix} = A \cdot B$$

Opomba: $f_I(z) = \frac{1z+0}{0z+1} = z = id(z)$

Inverz take funkcije torej izračunamo tako, kot da bi računali inverz matrike:

$$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}},\ A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Hitro vidimo, da $det(A) = 0 \Leftrightarrow f_A = \text{konst.}$ Če je namreč $ad = bc$, lahko za primer $d \neq 0$ izrazimo $a = \dfrac{bc}{d}$

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(bc)z+bd}{d(cz+d)} = \frac{b}{d}$$

V primeru $d = 0$ dokaz ni dosti težji.

Posebni primeri ulomljenih linearnih transformacij:
1. Translacija: $f(z) = z + b$
2. Razteg: $f(z) = az,\ a \in \mathbb{R}$
3. Rotacija: $f(z) = a(z),\ a \in \mathbb{C},\ |a| = 1$ oziroma $f(z) = ze^{i\varphi}$. Če zapišemo $z = re^{i\psi}$, je $f(z) = re^{i(\psi+\varphi)}$
4. Inverzija: $f(z) = 1/z$

Trditev. Vsaka ulomljenalinearna transformacija je kompozitum preslikav tipa 1-4.

Dokaz. Bodi $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

- $c = 0,\ d \neq 0$: $f(z) = \dfrac{az+b}{d} = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$, kar je kompozitum raztega in translacije.
- $c \neq 0,\ d = 0$: $f(z) = \dfrac{az+b}{cz} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}\dfrac{1}{z}$, kar je kompozitum inverzije, raztega in translacije.
- $c \neq 0,\ d \neq 0$: $z \to cz \to cz + d \to \dfrac{1}{cz+d} \to \left(b - \dfrac{ad}{c}\right)\dfrac{1}{cz+d} \to \dfrac{a}{c} + \left(b - \dfrac{ad}{c}\right)\dfrac{1}{cz+d}$
- Zadnji izraz pa je enak $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ (izpustili smo nekaj računanja).

Izrek. Ulomljene linearne preslikave slikajo premice/krožnice v premice/krožnice.
(Opomba: v sferični geometriji, na katero lahko prevedemo $\hat{\mathbb{C}}$, je premica le krožnica, ki prečka pol.)

Dokaz. Najprej želimo opisati premice in krožnice. Oglejmo si enačbo $\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$, pri čemer naj bo $\beta \neq 0$ in $|\beta|^2 > \alpha\gamma$. Označimo $z = x + iy$ in $\beta = a + ib$

$$\alpha(x^2 + y^2) + (x + iy)(a + ib) + (x - iy)(a - ib) + \gamma = 0$$

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2(ax - by) + \gamma = 0$$

Če je $\alpha = 0$, dobimo enačbo premice v $\mathbb{R}^2$. Če je $\alpha \neq 0$, dobimo enačbo krožnice, za kar nam poskrbi pogoj $|\beta|^2 > \alpha\gamma$.
Dovolj je pokazati, da translacija, razteg, rotacija in inverzija slikajo krožnice in premice v krožnice ali premice. Za prve tri je to očitno, posebno pozornost pa namenimo inverziji:

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma,\ \backslash z \to \frac{1}{z},\ \text{nato}\ \cdot |z^2|$$

$$\alpha + \beta\overline{z} + \overline{\beta} z + \gamma|z|^2 = 0$$

Dobili smo enačbo, ki je enake oblike kot enačba za krožnico/premico, torej mora tudi sama opisovati krožnico/premico.

Trditev: Izberimo točke $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ki naj bodo paroma različne. Poleg tega izberimo w_1, w_2, w_3, ki naj si bodo prav tako paroma različne. Tedaj obstaja ulomljena linearna transformacija, ki slika

$$z_1 \to w_1$$
$$z_2 \to w_2$$
$$z_3 \to w_3$$

Dokaz: Najprej si oglejmo poseben primer: $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$

$$f(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

Splošen primer: z_1, z_2 in z_3 znamo preslikati v $0, 1, \infty$. Na popolnoma enak način znamo tudi w_1, w_2 in w_3 preslikati v $0, 1, \infty$. Vzamemo torej inverze preslikav, ki preslikajo w_1, w_2 in w_3 v $0, 1, \infty$ in naredimo kompozitum.

Riemannov upodobitveni izrek. Vsako enostavno povezano območje $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{C}$ lahko z biholomorfno preslikavo preslikamo v $D(0,1)$. Točna definicija enostavno povezanega območja je, da mora biti $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D}$ povezano.

Kompleksna Γ funkcija.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,\ \mathfrak{Re}(z) > 0$$

Izrek. $\Gamma(z)$ je holomorfna na $\{z \in \mathbb{C}; \mathfrak{Re}(z) > 0\}$

Dokaz. Najprej potrebujemo sledečo pomožno trditev:

Pomožna trditev. Bodi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje holomorfinh funkcij, ki enakomerno konvergira po kompaktni množici v $\mathcal{D}$ proti neki funkciji f. Tedaj je tudi f holomorfna.

Pomožni dokaz. Uporabimo lahko Cauchyjevo formulo:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

kar enakomerno konvergira proti

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

Ker lahko $f(z)$ zapišemo na tak način, jo lahko po neki trditvi zapišemo kot potenčno vrsto, torej je holomorfna.