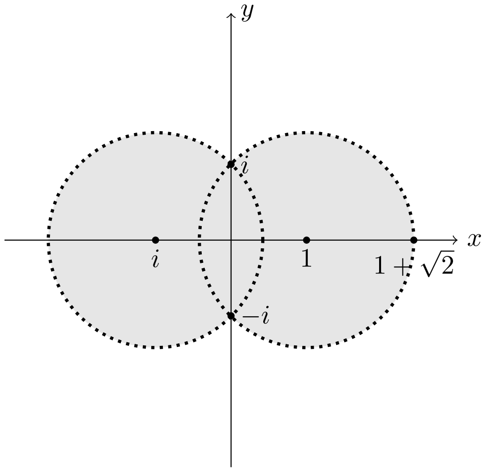
Naloga. Poišči biholomorfno $F : \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z+1| < \sqrt{2}\} \cup \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z+1| < \sqrt{2}\} \ \to\ D(0,1)$



Vidimo, ali pa izračunamo, da je kot v stičišču pri $-i$ enak $3\pi/2$. Poskusimo torej ta dva kroga preslikati v prve tri kvadrante:

$$
\begin{aligned}
-i &\mapsto 0 \\
i &\mapsto \infty \\
1+\sqrt{2} &\mapsto 3
\end{aligned}
$$

Vemo, da bo imela takšna preslikava obliko

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Iz zahtev $f(-i) = 0$ in $f(i) = \infty$ dobimo

$$b = ai, \quad d = -ci$$

Nazadnje izrazimo a:

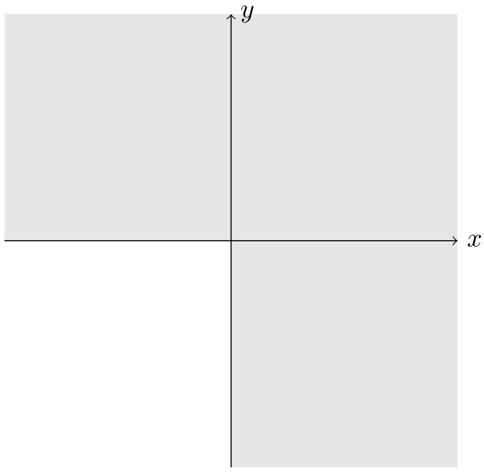
$$
\begin{aligned}
(1+\sqrt{2})a + ia &= 3((1+\sqrt{2})c - ic) \\
a &= \frac{3(1+\sqrt{2}-i)}{1+\sqrt{2}+i}\, c
\end{aligned}
$$

Sledi: $f(z) = 3\dfrac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}-i}\,\dfrac{z+i}{z-i}$

Nazadnje uporabimo funkcijo $z^{2/3}$, da dobljeno območje preslikamo v zgornjo polravnino, nato pa uporabimo že znano Möbiusovo preslikavo

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{-z-i},$$

da to preslikamo v odprti krog.



Dirichletov problem. Funkcija $u\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je harmonična, če velja $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Pri tem je $\mathcal{D}$ zaprta podmnožica $\mathbb{R}^2$. Dirichletov problem: Najti takšno funkcijo u, ki bo harmonična na $\mathcal{D}$, na $\partial\mathcal{D}$ pa zavzame vrednosti funkcije f.
Problem rešimo z Greenovo funkcijo $G\colon \overline{\mathcal{D}} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, ki naj ima dve lastnosti:

1. $G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = 0 \;\; \forall \overrightarrow{r} \in \partial\mathcal{D}$
2. $\Delta_{\overrightarrow{r}} G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})$

Nekoliko priročnejša verzija teh zahtev (vsaj pri vajah) je

1. $G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = 0 \;\; \forall \overrightarrow{r} \in \partial\mathcal{D}$
2. $G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{2\pi} \ln|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}| + \varphi(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0})$, pri čemer bodi φ harmonična.

Greenova funkcija hkrati reši Poissonov problem:

$$\Delta u = f(x,y), \quad u\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0$$

Njena rešitev je

$$u(\overrightarrow{r_0}) = \iint_{\mathcal{D}} f(\overrightarrow{r}) G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

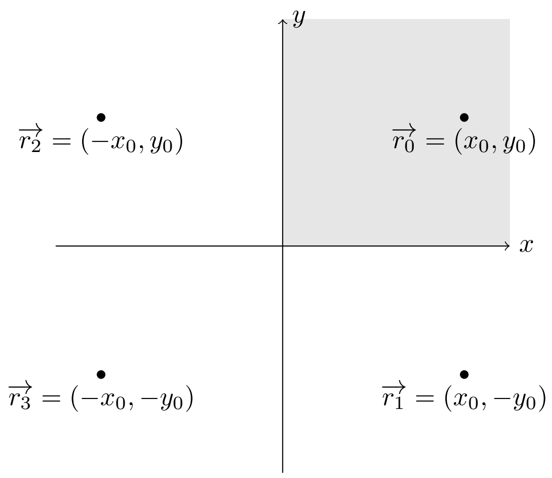
Naloga. Bodi $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \; y > 0\}$. Poišči Greenovo funkcijo območja D.

Vemo, da bo imela Greenova formula obliko

$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{2\pi} \ln|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}| + \varphi(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0})$$

Izberemo $\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0)$. Če jo prezrcalo+imo čez os $y = 0$, dobimo $\overrightarrow{r_1} = (x_0, -y_0)$ Greenova funkcija za tako območje je $G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \dfrac{1}{2\pi} \ln|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}| - \dfrac{1}{2\pi} \ln|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}|$ To storimo zato, da funkcija konvergira proti 0, če pošljemo y_0 proti 0 (tj. če se $\overrightarrow{r_0}$ približuje robu območja.)

Naloga. Poišči Greenovo funkcijo območja $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \; x, y > 0\}$



Spet pričakujemo, da bo Greenova funkcija oblike

$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}| + \varphi(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0})$$

Spet bomo naredili isto kot prej, in sicer moramo poskrbeti, da bo G na robu območja zavzela vrednost 0. Izkaže se, da ni dovolj odšteti le $\frac{1}{2\pi} \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}|$ in $\frac{1}{2\pi} \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_2}|$. Velja torej

$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}| - \frac{1}{2\pi} \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}| - \frac{1}{2\pi} \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_2}| - \frac{1}{2\pi} \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_3}|$$

Preveriti moramo le, da je funkcija φ harmonična na $\mathcal{D}$ (to velja, saj ima singularnosti le v $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$ in $\overrightarrow{r_3}$, ki ne ležijo na območju $\mathcal{D}$). Nazadnje preverimo, ali je $G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = 0\ \forall \overrightarrow{r} \in \partial\mathcal{D}$. To storimo tako, da jo izvrednotimo v poljubnih točkah $\overrightarrow{r} = (x, 0)$ in $\overrightarrow{r} = (0, y)$.