1 Legendrova diferencialna enačba in Legendrovi polinomi

Gre za diferencialno enačbo oblike

$$(z^2-1)y''+2zy'-\nu(\nu-1)=0$$

$$y''+\frac{2z}{z^2-1}y'-\frac{\nu(\nu-1)}{z^2-1}=0$$

Imamo dve pravilni singularni točki: $z=\pm1$. Točka 0 je regularna, torej lahko poiščemo holomorfno funkcijo v okolici točke 0.

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$$

$$(z^2+1)\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_kz^{k-2}+2\sum_{k=0}^{\infty}kc_kz^k-\nu(\nu+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=0$$

Poiščimo koeficient pri $z^k=0$:

$$k(k-1)c_k-(k+2)(k+1)c_{k+2}+2kc_k+\nu(\nu+1)c_k$$

$$c_k\left(k^2+k-\nu(\nu+1)\right)=(k+2)(k+1)c_{k+2}$$

$$c_k(k-\nu)(k+\nu+1)=(k+2)(k+1)c_{k+2}$$

$$c_{k+2}=\frac{(k-\nu)(k+\nu+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$$

Eno rešitev dobimo tako, da nastavimo $c_0=1$ in $c_1=0$:

$$c_2=\frac{(-\nu)(\nu+1)}{2}$$

$$c_4=\frac{(2-\nu)(-\nu)\cdot(\nu+1)(\nu+3)}{4!}$$

$$c_6=\frac{(4-\nu)(2-\nu)(-\nu)\cdot(\nu+1)(\nu+3)(\nu+5)}{6!}$$

$$\vdots$$

Druga rešitev: $c_0=0$, $c_1=1$

$$c_3=\frac{(1-\nu)\cdot(\nu+2)}{3!}$$

$$c_5=\frac{(3-\nu)(1-\nu)\cdot(\nu+2)(\nu+4)}{5!}$$

Ti dve rešitvi sta linearno neodvisni, splošne rešitev je torej linearna kombinacija teh dveh rešitev.

$$c_{2n}=\frac{(-\nu)(-\nu+2)...(-\nu+2n-2)(\nu+1)(\nu+3)...(\nu+2n-1)}{(2n)!}$$

$$c_{2n+1}=(-1)^n\frac{(\nu-1)(\nu-3)...(\nu-2n+2)(\nu+2)(\nu+4)...(\nu+2n)}{(2n+1)!}$$

Oglejmo si poseben primer, ko je $\nu=m\in\mathbb{N}$

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}z^{2k}$$

Člen $c_{2(m+1)}$ je enak 0 zaradi faktorja $-\nu+2m$. Sledi, da je za vsak $n\geq m+1$ veljalo $c_{2n}=0$ in dobili bomo polinom stopnje $n=2m$. Podoben sklep naredimo za rešitev y_2. Sklep: Če je $\nu\in\mathbb{N}$, je ena od rešitev Legendrove enačbe polinom stopnje ν.

Nastavimo $c_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$ in dobimo

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}z^{n-2k}$$

To je Legendrov polinom stopnje n (Lahko preverimo, da je temu res tako).

Trditev. (Rodriguesova formula) $P_n(z)$ lahko izračunamo tudi kot

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left((z^2-1)^n\right)$$