Uteženi prostori. Definiramo skalarni produkt kot

$$\langle u, v\rangle_w = \int u(x)v(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

Tedaj w imenujemmo utež. Biti mora pozitivna. Ker smo spremenili definicijo skalarnega produkta, moramo hkrati ponovno definirati tudi normo (označimo $||\cdot||_w$) in prostor $L^2(\mathbb{R})$ (označimo $L^2_w(\mathbb{R})$).

Izrek. (Sturm Liouviellov izrek) Dan je operator

$$Ly = (Py')' + Ry, \quad y \in C(a, b)$$

kjer bodi P zvezno odvedljiva, R pa zvezna. Bodi w utež, ki bodi zvezna in pozitivna na (a, b). Rešujemo uteženi lastni problem

$$Ly = -\lambda wy$$

Kjer y zadošča ločenima robnima pogojema

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

1. (Posplošene) lastne vrednosti so realne
2. (Posplošeni) lastni funkciji, ki pripadata različnima (posplošenima) lastnima vrednostima, sta uteženo ortogonalna.
3. Lastni podprostor, ki pripada neki (posplošeni) lastni vrednosti, je enorazsežen.
4. Obstaja zaporedje posplošenih lastnih funkcij $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za lastne vrednosti $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki tvorijo ortonormirano bazo $L^2_w(a, b)$ Torej za vsak $y \in L^2_w(a, b)$ velja

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, y_n\rangle_w y_n$$

   (Imamo konvergenco po točkah) Pri tem velja še $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$

Dokaz. L je formalno sebi adjungiran:

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$$

1. Bodi λ lastna vrednost in u pripadajoča lastna funkcija:

$$Lu = -\lambda wu$$

$$\langle Lu, u\rangle = -\lambda\langle wu, u\rangle = -\lambda \int_a^b wu\overline{u}\,\mathrm{d}x = -\lambda||u||^2_w$$

   Hkrati je $\langle Lu, u\rangle = \langle u, Lu\rangle = -\overline{\lambda}\langle u, wu\rangle = ... = -\overline{\lambda}||u||^2_w$. Sledi $\lambda||u||^2_w = \overline{\lambda}||u||^2_w$. Ker $u \neq 0$, mora biti $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Naj bosta u in v lastni funkciji z različnima lastnima vrednostima.

$$\langle Lu, v\rangle = -\lambda_1\langle wu, v\rangle = -\lambda_1\langle u, v\rangle_w$$

   Hkrati je $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle = ... = -\lambda_2\langle u, v\rangle_w$. Ker sta si λ_1 in λ_2 po predpostavki različni, mora biti $\langle u, v\rangle_w = 0$.

3. Naj bosta u in v dve lastni funkciji za isto lastno vrednost λ. Dokazujemo, da sta linearno odvisni. Upoštevamo robna pogoja:

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$$

$$\alpha_1 v(a) + \alpha_1 v'(a) = 0$$

$$\beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0$$

Lahko si zamislimo, da gre za skalarni produkt dveh vektorjev:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(b) \\ v'(b) \end{bmatrix}$$

(α_1, α_2) je neničeln vektor, ki je hkrati pravokoten na $(u(a), u'(a))$ in $(v(a), v'(a))$. To je v $\mathbb{R}^2$ mogoče le, če sta vektorja linearno odvisna. Sledi, da obstajata taka C_1, C_2, da je

$$\left[C_1 \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{bmatrix} = 0 \right]$$

Če je $y = C_1 u + C_2 v$ in dokažemo $y = 0$, vemo, da sta u, v linearno odvisni.

$$Ly = -\lambda w y$$

$$y(a) = C_1 u(a) + C_2 v(a) = 0$$

$$y'(a) = 0$$

Imamo Cauchyjevo nalogo za y'. Vemo, da ima taka naloga natanko eno rešitev, in vidimo, da je $y = 0$ rešitev. Torej sta u, v linearno odvisni.

4. Ne bomo dokazovali.