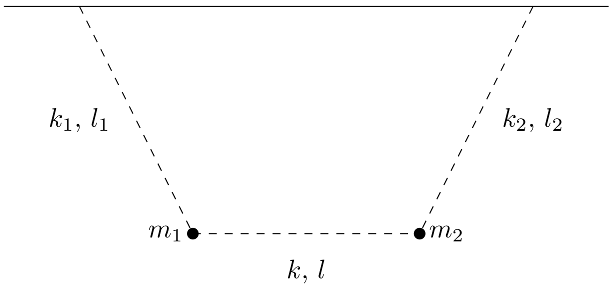
Milankovićevi cikli. Zanima nas, zakaj na Zamlji pride do ledenih dob. Zemljina os vrtenja je nagnjena glede na ekvator za $\vartheta = 23.44°$ in se s časom spreminja za $\pm 1°$. Na isti kot pride vsakih 41 000 let. Zemlja se vrti okoli Sonca po elipsi, ki se počasi vrti, in sicer s precesijskim časom 26 000 let. Posledično je na vsake toliko časa severna polobla hkrati nagnjena stran od Sonca in še na največji oddaljenosti od njega. (Trenutno je poleti Zemlja bolj oddaljena od Sonca kot pozimi). To vodi do ledene dobe.

Sommerfeldov model majhnih nihanj. Sledeči sistem obravnavajmo s pomočjo Lagrangeovega formalizma.



$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{l}_1^2 + l_1^2\dot{\varphi}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{l}_2^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2\right)$$

$$V = m_1 g l_1(1-\cos\varphi_1) + m_2 g l_2(1-\cos\varphi_2) + \frac{1}{2}k_1(l_{10}-l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(l_{20}-l_2)^2 + \frac{1}{2}k(l_0-l)^2$$

Iz tega sestavimo $L = T - V$ in uporabimo Euler-Lagrangeovo enačbo, ki pa ne bo rešljiva. (Dobimo nelinearne diferencialne enačbe, ki običajno niso analitično rešljive.) Največ, kar lahko naredimo, je da si ogledamo obnašanje sistema za majhne odmike okoli stabilne lege.

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{ij} w_{ij}(\underline{q})\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$V(\underline{q}) = V(\underline{q_0}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{q_{i,0}}(q_i - q_{i,0}) + \sum_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{\underline{q_0}}(q_i - q_{i,0})(q_j - q_{j,0}) + \ldots \text{ (Taylor)}$$

Prva vsota je enaka 0, saj je $\frac{\partial V}{\partial q_i}(q_0) = 0$. Navsezadnje je q_0 stabilna lega, torej mora imeti potencial v njej minimum. Mimogrede označimo $\eta_i = q_i - q_{i,0}$.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$$

$$T_{ij} = w_{ij}(\underline{q_0}) + \sum_k \frac{\partial w_i}{\partial q_k}\eta_k + \ldots$$

S tem smo dobili matriki T in V:

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{\underline{q_0}}$$

$$T_{ij} = w_{ij}(\underline{q_0}) + \sum_k \frac{\partial w_i}{\partial q_k}\eta_k$$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - V_{ij}\eta_i\eta_j\right)$$

To si smemo privoščiti za dovolj majhne odmike od ravnovesne lege. Zvaj uporabimo Euler-Lagrangeovo enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\eta}_i} - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\eta_i} = 0$$

$$\sum_j T_{ij}\ddot{\eta}_j + \sum_j V_{ij}\eta_j = 0 \quad \forall i$$

Dobimo sistem enačb, ki ga bomo znali rešiti.

Notacija. Pri tej analizi uporabljamo sledečo notacijo:

- $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ je vektor (stolpec).
- $\underline{a}^T = (a_1, a_2, ..., a_n)$ je vrstica.
- $\underline{\underline{A}}$ je matrika, $\underline{\underline{A}}^T$ je transponirana matrika.
- $\underline{\underline{A}}\underline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_j$
- $\underline{a}^T \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^{n} a_j A_{ij}$

V taki notaciji imamo opravka z enačbo

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \left(\underline{\dot{\eta}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\dot{\eta}} - \underline{\eta}^T \underline{\underline{V}} \underline{\eta} \right)$$