Od prejšnjič nam je ostala trditev $\widehat{f*g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\cdot\hat{g}$

Dokaz. Predpostavimo najprej $f, g \in C_c(\mathbb{R})$

$$\widehat{f*g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)e^{-ix\xi}\mathrm{d}t$$

Uporabimo fubinijev izrek:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)e^{-ix\xi}g(t)\mathrm{d}x$$

Vzamemo novo spremenljivko $y = x - t$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-iy\xi}g(t)e^{-it\xi}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{2\pi}\hat{f}\right)\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-it\xi}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\hat{f}\cdot\hat{g}$$

Splošni primer (skiza dokaza): čim sta f, g v $L^1(\mathbb{R})$ morata obstajati zaporedji funkcij f_n in $g_n \in C_c(\mathbb{R})$, ki proti njima konvergirata. Pokazati bi bilo treba le, da tedaj tudi $\widehat{f*g}$ konvergira.

Definicija. Radi bi if $\hat{f}$ dobili f. Tega se ne da storiti za vse funkcije. Schwarzev razred funkcij je množica funkcij, za katere velja:

1. f je ∞-krat zvezno odvedljiva.
2. Funkcije $f^{(n)}(x)\,x^m$ so omejene funkcije za vse $m, n \geq 0$.

Primer take funkcije je $f(x) = e^{-x^2}$. Hkrati to velja za vse neskončnokrat zvezno odvedljive funkcije s kompaktnim nosilcem (označimo $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$). Njihmnožico označimo z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Trditev. $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$

Dokaz. Bodi $f \in \mathbb{R}$. Zanima nas $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x < \infty$

Ker je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, je $f(x)\left(1 + x^2\right)$ omejena. Recimo torej, da je

$$|f(x)\left(1 + x^2\right)| \leq M$$

$$|f(x)| \leq \frac{M}{1 + x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty}\frac{M}{1 + x^2}\mathrm{d}x = M\arctan x\Big|_{-\infty}^{\infty} = M\pi < \infty$$

Trditev. Naj bosta $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Potem so tudi naslednje funkcije v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

1. $f_t : x \mapsto f(x - t)$
2. $f_{[a]} : x \mapsto f(ax)$
3. $f^{(n)}$
4. $x \mapsto f(x)p(x)$, kjer je p polinom
5. $f * g$

Dokaz. Točke 1-4 so očitne, dokaz za 5. točko:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t)g(t)\mathrm{d}t = (f' * g)(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f * g)^{(n)}(x) = (f^{(n)} * g)(x)$$

Inverzna Fourierova transformacija. Bodi $g_0(x) = e^{-x^2/2}$

1. $\widehat{g_0} = g_0$
2. $\widehat{g_{0[a]}} = \frac{1}{a}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$

Dokaz. Točka 2) sledi iz točke 1), kajti $\widehat{g_{0[a]}}(x) = \frac{1}{a}\widehat{g_0}(\frac{\xi}{a})$

Dokaz točke 1):

$$\widehat{g_0}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2/2}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2}e^{-\xi^2/2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to\infty}\int_{-A+i\xi}^{A+i\xi} e^{-z^2/2}\mathrm{d}z$$

Vemo, da je $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. V kompleksnih številih to zahteva malo več truda, ampak na koncu dobimo $\widehat{g_0}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$

Trditev. Naj za neko funkcijo $g \in L^1(\mathbb{R})$ velja $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x = 1$. Za vsako zvezno $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ velja:

$$\lim_{\delta\to 0} f * \left(\frac{1}{\delta}g(\frac{x}{\delta})\right) = f$$

Ta konvergenca je enakomerna na nekem končnem zaprtem intervalu. Če je hkrati $f \in L^1(\mathbb{R})$, potem je

$$\lim_{\delta\to 0} ||f - f * \left(\frac{1}{\delta}g(\frac{x}{\delta})\right)||_1 = 0$$

Mimogrede: označimo $g_{(\delta)} = \dfrac{1}{\delta}g\left(\dfrac{x}{\delta}\right)$

Dokaz.

$$\left|(f * g_{(\delta)})(x) - f(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g_{(\delta)}(t)\mathrm{d}t - f(x)\int_{-\infty}^{\infty} g_{(\delta)}(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)| \cdot \frac{1}{\delta}|g\left(\frac{t}{\delta}\right)|\mathrm{d}t$$

Če je t majhen (manjši od nekega majhnega δ), je $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ za vsak x na izbranem intervalu. Če je t velik, gre $g\left(\dfrac{t}{\delta}\right)$ proti nič, saj je $g \in L^1$, $|f(x-t) - f(x)|$ pa je, zaradi omejenosti f, manjši od neke konstante M. Oba integrala ($t < \delta$ in $t \geq \delta$) gresta torej proti 0.

Izrek. (Weierstrassov aproksimacijski izrek). Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zvezna na nekem končnem zaprtem intervalu $[a, b]$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak polinom p, da velja $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ za poljuben $x \in [a, b]$.

Dokaz. (Ideja dokaza) Uporabimo prejšnjo trditev za $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Izrek. (Inverzna Fourierova transformacija.) Za $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ velja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

Opomba. $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x) = \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}}(x)$. Lahko si zamislimo linearno preslikavo $\mathcal{F} \colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, ki slika f v $\widehat{f}$ in zanjo velja $\mathcal{F}^4 = \mathrm{Id}$. Je bijektivna, njen inverz je $\mathcal{F}^3$. Na $L^1(\mathbb{R})$ pa trditev velja le skoraj povsod.