Vektorski račun 2. kolokvij 2011: Električno polje okoli traku dolžine $2a$ s površinsko gostoto naboja σ. To smo delali pri prejšnjih vajah in dobili

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\sigma \mathrm{d}x(\vec{r} - \vec{r}\,')}{2\pi\varepsilon_0|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2}$$

$$\vec{E} = \int_{-a}^{a} \frac{\sigma(x - x', y)}{2\pi\varepsilon_0[(x - x')^2 + y^2]}\mathrm{d}x'$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} \frac{x - x'}{(x - x')^2 + y^2}\mathrm{d}x'$$

$$E_y = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} \frac{y}{(x - x')^2 + y^2}\mathrm{d}x'$$

Za itračun E_x uporabimo substitucijo $u = (x - x')^2,\ \mathrm{d}u = -2(x - x')\mathrm{d}x'$

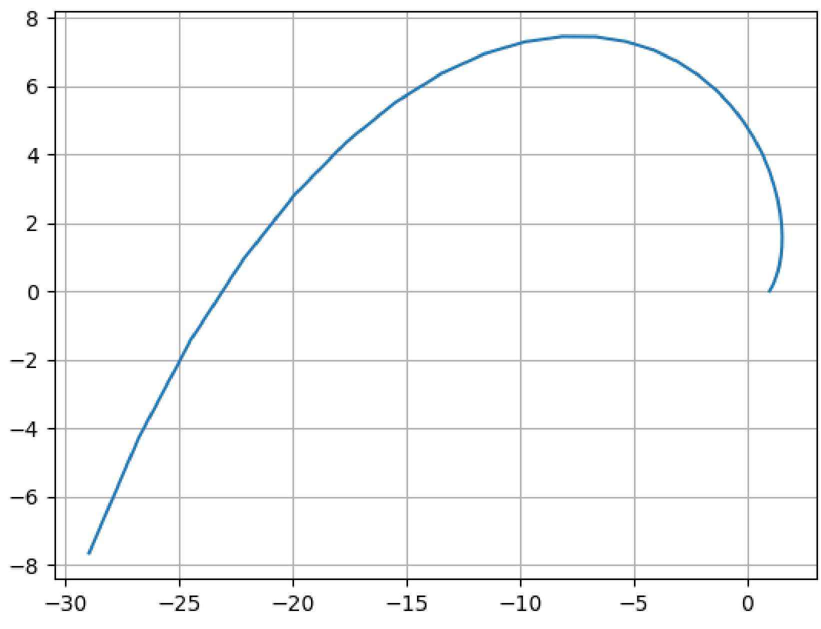
$$E_x = \frac{\sigma}{-4\pi\varepsilon_0}\int_{-u_2}^{u_1} \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{\sigma}{-4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}$$

$$E_y = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left[\arctan\frac{x-a}{y} - \arctan\frac{x+a}{y}\right]$$

E_x dobimo iz razmerja razdalij, E_y pa iz zornega kota. Če kanimo izračunati silo na nabit delec v tovrstem polju, nam zadošča naboj delca množiti z dobljenim vektorjem (E_x, E_y).

2. kolokvij 2015: Izraziti želimo potencial $V(\vec{r} = 0)$ in $\vec{E}(\vec{r} = 0)$ za nabito spiralo oblike $r = e^{k\varphi}$ dolžine l.

Skica spirale:



V polarnih koordinatah to spiralo parametriziramo kot $\vec{r} = r\hat{e}_r = ae^{k\varphi}\hat{e}_r$. Seveda je $\mathrm{d}l = |\mathrm{d}\vec{r}|$, to pa je enako:

$$\mathrm{d}\vec{r} = ake^{k\varphi}\hat{e}_r\mathrm{d}\varphi + ae^{k\varphi}\hat{e}_\varphi\mathrm{d}\varphi$$

Interval, po katerem teče φ, izrazimo kot $[0, \varphi_0]$, v upanju, da bomo lahko φ_0 brez večjih težav izrazili z l.

Potencial točkastega naboja:

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\mathrm{d}V = \frac{\mu|\mathrm{d}\vec{r}|}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|} = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{(ake^{k\varphi})^2+(ae^{k\varphi})^2}\mathrm{d}\varphi}{ae^{k\varphi}} = \frac{\mu\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{k^2+1}$$

$$V = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0}\varphi_0\sqrt{k^2+1}$$

Potrebujemo le še izraz za φ_0. Vemo:

$$l = \int_0^{\varphi_0}|\mathrm{d}\vec{r}| = \int_0^{\varphi_0} ae^{k\varphi}\sqrt{k^2+1}d\varphi = \frac{a\sqrt{k^2+1}}{k}\left(e^{k\varphi_0}-1\right)$$

$$\varphi_0 = \ln\left(1+\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\frac{l}{a}\right)$$

Torej:

$$V = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(1+\frac{k}{\sqrt{k^2+1}\frac{l}{a}}\right)\sqrt{k^2+1}$$

Električno polje $\vec{E}$ izračunamo po formuli

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$$

. V splošnem pa je $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$

$$\vec{E} = \frac{-\mu}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(\varphi_0)}\frac{\vec{r}|\mathrm{d}\vec{r}|}{|\vec{r}|^3} = \dots\ (\text{pokrajšamo } ae^{k\varphi}) = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\varphi_0}\frac{\sqrt{k^2+1}}{a}e^{-k\varphi}(\cos\varphi,\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

Tak integral lahko najdemo v Matematičnem priročniku, lahko pa se malo znajdemo in ga prevedemo na kompleksna števila: $(\cos\varphi,\sin\varphi)\to(\cos\varphi+i\sin\varphi)=e^{i\varphi}$

$$I = \frac{-\mu}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{k^2+1}}{a}\int_0^{\varphi_0}e^{\varphi(i-k)}\mathrm{d}\varphi = \frac{-\mu}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{k^2+1}}{a}\frac{-i-k}{k^2+1}\left(e^{\varphi_0(i-k)-1}\right)$$

$$E_x = \mathfrak{Re}I = \frac{-\mu}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{k^2+1}}\left(-k(e^{-k\varphi_0}\cos\varphi_0-1)+e^{-k\varphi_0}\sin\varphi_0\right)$$

$$E_y = \mathfrak{Im}I = \frac{-\mu}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{k^2+1}}\left(-(e^{-k\varphi_0}\cos\varphi_0-1)-ke^{-k\varphi_0}\sin\varphi_0\right)$$

Kodre 54/7: $\vec{H}$ v središču in goriščih elipse, po kateri teče tok I.
Enačba elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Parametrizacija elipse: $\vec{r}' = (a\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$ Uporabimo Biot-Savartov zakon:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Najprej obravnavajmo primer $\vec{r}=(0,0,0)$. Pri računanju vektorskega produkta ugotovimo, da sta x in y komponenti enako 0:

$$H_z = \dots = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}ab\frac{\mathrm{d}\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

To je eliptični integral 2. vrste, ki ni analitično rešljiv. Z uporabo Mathematice dobimo $H_z(\vec{r}) = \frac{I}{\pi b}E\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$, kjer je $E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$. Označimo $\varepsilon = 1-\frac{b^2}{a^2}$ - ekscentričnost elipse. V posebnem primeru, ko je $\varepsilon=0$, tj. imamo krog z radijem R, dobimo $H_z=\frac{I}{2R}$.

V gorišču elipšse imamo vzamemo drugačno parametrizacijo za $\vec{r}'$. Uvedemo goriščni parameter $p = \frac{b^2}{a}$.

$$|\vec{r}'| = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

$$\vec{r}' = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\hat{e}_r$$

Ker nova parametrizacija upošteva, da je naše izhodišče v gorišču, spet velja $|\vec{r}' - \vec{r}| = \vec{r}'$.

$$H_z(\vec{r}) = ... = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{r'} = \frac{I}{4\pi p}\int_0^{2\pi}(1 + \varepsilon\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

Funkcija cos je periodična, torej lahko ta člen izpustimo iz integrala, ostane nam

$$H_z = \frac{I}{2p}$$

Kodre 4.8: Polje krožnega loka (v središču kroga in na nasprotni strani kroga)
V središču:

$$\mathrm{d}\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}e}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Uvedemo $\mu = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}l}$ oziroma $\mathrm{d}e = \mu\hat{e}_r\mathrm{d}l = \mu R(\cos\varphi, \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}(\cos\varphi, \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= -\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\sin\varphi\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0}, -\cos\varphi\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0}\right) \\ &= -\frac{\mu}{2\pi\varepsilon_0 R}(\sin\varphi_0, 0)\end{aligned}$$

Za $(0, -R)$ bi lahko poiskali novo parametrizacijo $r(\varphi)$. Vendar se nam ne da.

$$\vec{r} = (R, 0) + R(\cos\varphi, \sin\varphi) = R(1 + \cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{-\mathrm{d}e}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{R\mathrm{d}\varphi}{|\vec{r}' + (R, 0)|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$|R(1 + \cos\varphi, \sin\varphi)|^2 = R^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2R^2(\cos\varphi + 1)$$

$$\vec{E} = \frac{\mu}{8\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{(\cos\varphi + 1, \sin\varphi)}{\sqrt{2\cos\varphi + 2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi + 1}$$

Označimo $A = \frac{\mu}{8\pi\varepsilon_0 R}$. Poleg tega vemo, da lahko $\cos\varphi + 1$ zapišemo kot $2\cos^2\frac{\varphi}{2}$

$$E_x = -A\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

Dobimo integral, ki je v bistvu precej grd, je pa v matematičnem priročniku:

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \ln\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$E_x = \sqrt{2}A\ln\frac{\tan\frac{\pi - \varphi_0}{4}}{\tan\frac{\pi + \varphi_0}{4}}$$

V primeru E_y gre za liho funkcijo na simetričnem intervalu, tako da je rezultat enak 0.

$$\vec{E} = \left(\sqrt{2}A\ln\frac{\tan\frac{\pi - \varphi_0}{4}}{\tan\frac{\pi + \varphi_0}{4}}, 0\right)$$