Tenzorski račun.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma E^j \hat{e}_j$$
$$j_i = \hat{e}_i \sigma \hat{e}_j E^j = \sigma_{ij} E^j$$

Izrazili smo tenzor drugega reda: $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \hat{e}^i \hat{e}^j = \sigma_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$

$$\underline{\underline{\sigma}} \vec{E} = \sigma_{ij} \vec{E}_j \hat{e}_i \left[\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i\right]$$

Se pravi gre za nekakšno projekcijo. Če je $\underline{\underline{\sigma}}$ simetričen, obstaja baza, v kateri je diagonalen:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} \hat{e}_x \otimes \hat{e}_x + \sigma_{yy} \hat{e}_y \otimes \hat{e}_y + \sigma_{zz} \hat{e}_z \otimes \hat{e}_z$$

Pri tem ponovno poudarimo, da je $\vec{n} \otimes \vec{n}$ projekcija na $\vec{n}$, kajti:

$$(\vec{n} \otimes \vec{n}) \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{v})$$

V nekaterih snoveh lahko uporabljamo izotopni tenzor:

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij}$$

To pomeni, da so lastnosti snovi neodvisne od osi (tj. v smeri x enake kot v smeri y in z). V snoveh, kot so voda, to dobro velja, v snoveh, kot je les, pa ne nujno. Les je namreč sestavljen iz vlaken, ki po navadi tečejo v isto smer.

Simetrije in dekompozicija. Obravnavajmo na primer gostoto moči: $q = \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{E} \underline{\underline{\sigma}} \vec{E}$ Temu pravimo kvadratna forma.
Za električno polje dobimo podoben primer: $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 (\vec{E} \underline{\underline{\varepsilon}} \vec{E})$. Takšna simetrija po navadi izhaja iz ohranitvenih zakonov (in variacijskega principa):

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) - \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) =: S_{ij} + A_{ij}$$

Če to zapišemo v tenzorski obliki:

$$T = \frac{1}{2}\left(T + T^T\right) + \frac{1}{2}\left(T - T^T\right)$$

Čim velja $A_{ij} = 0$, je $T = T^T$

Vztrajnostni moment. Pustili si bomo predpostaviti, da gre za togo telo. Tedaj velja $\vec{\Gamma} = \underline{\underline{J}} \vec{\omega}$

$$\mathrm{d}\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{G} = \rho \vec{r} \times (\overrightarrow{omega} \times \vec{r}) \mathrm{d}V$$

$$\vec{\Gamma}_i = \int \mathrm{d}\Gamma_i = \iiint \rho \varepsilon_{ijk} r_j \varepsilon_{klm} \omega_l r_m \mathrm{d}V$$

$$= \iiint \rho (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{lj}) r_j r_m \mathrm{d}V \omega_l = \iiint \rho (\delta_{ij} r^2 - r_j r_j) \mathrm{d}V \omega_j$$

$$J_{ij} = \iiint \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \rho \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

Steinerjev izrek izrazimo kot $J'_{ij} = J_{ij} + m\left(\delta_{ij} r'^2 - r'_i r'_j\right)$. Nazadnje za rotacijsko energijo spet dobimo kvadratno formo:

$$W_r = \frac{1}{2} \vec{\omega} \underline{\underline{J}} \vec{\omega}$$

Primer: Vrtenje togega telesa. Upoštevamo ohranitev $\overrightarrow{\Gamma}$:

$$\dot{\overrightarrow{\Gamma}} = 0 = \dot{J}\overrightarrow{\omega} + J\dot{\overrightarrow{\omega}}$$

Naj bo lastni sistem $\hat{e}'_i$:

$$\hat{e}'_i = T_{ij}\hat{e}_j$$

$$\dot{\hat{e}}'_i = \Omega_{ij}\hat{e}'_j = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{e}'_j$$

$$\underline{\underline{J}} = J_{11}\hat{e}'_1 \otimes \hat{e}'_1 + J_{22}\hat{e}'_2 \otimes \hat{e}'_2 + J_{33}\hat{e}'_3 \otimes \hat{e}'_3$$

$$\dot{\underline{\underline{J}}} = J_{11}\dot{\hat{e}}'_1 \otimes \hat{e}'_1 + J_{22}\dot{\hat{e}}'_2 \otimes \hat{e}'_2 + J_{33}\dot{\hat{e}}'_3 \otimes \hat{e}'_3 + J_{11}\hat{e}'_1 \otimes \dot{\hat{e}}'_1 + J_{22}\hat{e}'_2 \otimes \dot{\hat{e}}'_2 + J_{33}\hat{e}'_3 \otimes \dot{\hat{e}}'_3$$

Ko to izrazimo s koordinatami $\hat{e}'_x, \hat{e}'_y, \hat{e}'_z$, dobimo:

$$-J\dot{\overrightarrow{\omega}} = \dot{J}\overrightarrow{\omega} =$$

$$= J_x(\omega \times \hat{e}'_x)(\overrightarrow{\omega} \cdot \hat{e}'_x) + J_y(\omega \times \hat{e}'_y)(\overrightarrow{\omega} \cdot \hat{e}'_y) + J_z(\omega \times \hat{e}'_z)(\overrightarrow{\omega} \cdot \hat{e}'_z)$$

Dobimo sistem enačb:

$$J_x \dot{\overrightarrow{\omega}}_x = (J_z - J_y)\,\omega_y\omega_z$$

$$J_y \dot{\overrightarrow{\omega}}_y = (J_x - J_z)\,\omega_z\omega_x$$

$$J_x \dot{\overrightarrow{\omega}}_z = (J_y - J_x)\,\omega_x\omega_y$$

Ta sistem je matematično rešljiv (lahko dobimo ω), vendar je naša rešitev rahlo neuporabna. Če si pustimo nekoliko poenostaviti problem, lahko na primer zahtevamo, da je vrtenje eno-osno, kar pomeni:

$$J_z = J_{\|}$$

$$J_x = J_y = J_{\perp}$$

Ta poenostavitev nam takoj da $\dot{\omega}_z = 0$, torej $\omega_z =$ konst., ostali dve enačbi pa imata rešitev

$$\omega_x = \omega_0 \cos \omega_p t$$

$$\omega_y = \omega_0 \sin \omega_p t$$

Torej precesijo ω okoli $\hat{e}_z$ s frekvenco ω_p.

Inverzi in robni pogoji. Vzemimo za primer toplotno prevodnost skozi ploščo debeline d:

$$\overrightarrow{j}_Q = -\underline{\underline{\lambda}}\nabla T$$

Recimo, da podamo T na obeh ploščah.

$$\overrightarrow{j} = -\lambda \frac{\Delta T}{d}\hat{e}_x$$

$$j_x = \hat{e}_x \cdot \overrightarrow{j} = -\frac{\Delta T}{d}\left(\hat{e}_x \lambda \hat{e}_y\right) = -\lambda_{xx}\frac{\Delta T}{d}$$

$$j_y = -\frac{\Delta T}{d}\left(\hat{e}_y \lambda \hat{e}_x\right) = -\lambda_{yy}\frac{\Delta T}{d}$$

Lahko si izberemo tudi drugačen robni pogoj: Recimo, da tok teče samo pravokotno na ploskev, torej le vzdolž osi x:

$$j\hat{e}_x = -\lambda\nabla T = -\lambda\left(\frac{\Delta T_x}{d_x}\hat{e}_x + \frac{\Delta T_y}{d_y}\hat{e}_y\right)$$

$$\hat{e}_x j \hat{e}_x = j = -\left(\frac{\Delta T_x}{d_x}\lambda_{xx} + \frac{\Delta T_y}{d_y}\lambda_{xy}\right)$$

Podobno dobimo za j_y:

$$\hat{e}_y j \hat{e}_x = 0 = -\left(\frac{\Delta T_x}{d_x}\lambda_{xy} + \frac{\Delta T_y}{d_y}\lambda_{yy}\right)$$

Enačbi odštejemo, da dobimo:

$$\frac{\Delta T_y}{d_y} = -\frac{\Delta T_x}{d_x}\frac{\lambda_{xx}}{\lambda_{yy}}$$

$$j = -\frac{\Delta T_x}{d_x}\left(\lambda_{xx} - \frac{\lambda_{xy}^2}{\lambda_{yy}}\right) = \frac{\Delta T}{d_x}\left(\frac{\lambda_{xx}\lambda_{yy} - \lambda_x y^2}{\lambda_{yy}}\right)$$

Dobili smo ravno nasprotno vrednost determinante inverza:

$$\frac{\Delta T}{d_x} = -\frac{\lambda_{yy}}{\det \lambda} j$$

$$\nabla T = -\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\vec{j}$$

Če se postavimo v lastni sistem (lastna vektorja $\vec{n}, \vec{m}$), je naša naloga še lažja:

$$\begin{bmatrix} \lambda_\parallel^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_\perp^{-1} \end{bmatrix} = \lambda_\parallel^{-1}\vec{n} \otimes \vec{n} + \lambda_\perp^{-1}\vec{m} \otimes \vec{m}$$

V lastni koordinatni sistem bomo prišli z rotacijo za nek kot φ:

$$\hat{e}_x \underline{\underline{\lambda}} \hat{e}_x = \lambda_\parallel^{-1}\cos^2\varphi + \lambda_\perp^{-1}\sin^2\varphi$$

Iz tega dobimo originalno λ. Vidimo tudi, da je $\dfrac{\lambda_{yy}}{\det \underline{\underline{\lambda}}} = \dfrac{\lambda_\perp \cos^2\varphi + \lambda_\parallel \sin^2\varphi}{\lambda_\perp \lambda_\parallel}$.

Laplaceov operator v anizotropni snovi. Velja $\nabla \cdot \vec{j} = 0$

$$\partial_i \lambda_{ij} \partial_j T = 0$$

Ta enačba vsebuje mešane odvode. Definirali smo

$$T = \frac{C}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{C}{\sqrt{\frac{x^2}{\lambda_x} + \frac{y^2}{\lambda_y} + \frac{z^2}{\lambda_z}}}$$

Tedaj je $x'_i = T_{ij}^{-1}x_j$, torej je tudi $\dfrac{\partial}{\partial x_j} = T_{ji}^{-1}x\dfrac{\partial}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\lambda_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} = \left(T_{ik}^{-1}\frac{\partial}{\partial x'_k}\lambda_{ij}T_{jl}^{-1}\frac{\partial}{\partial x'_l}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x'_k}\frac{\partial}{\partial x'_k}$$

Torej je $\delta_{kl} = T_{ik}^{-1}\lambda_{ij}T_{jl}^{-1}$
Če je T "koren" λ (kar se za matrike da definirati), je v x' bazi $\nabla\lambda\nabla = \nabla^2$

Tekoči kristali. Snov opišemo s tako imenovanim direktorjem (vektorjem, ki opisuje (povprečno?) smer molekul v kristlu). Iščemo način, da ga določimo.
Najprej uvedemo tenzorski parameter:

$$Q_{ij} = \frac{S}{2}\left(n_i n_j - \delta_{ij}\right)$$

Vidimo, da je $\det Q \neq 0$. S predstavlja skalarni ureditveni parameter, ki je izotropen.

Snov bo zavzela tako stanje, da bo prosta energija čim manjša. Prosta energija pa je sestavljena iz dveh delov, in sicer ureditvenega ter elastičnega dela:

Ureditveni del opisuje enačba:

$$F = \frac{1}{2}A\mathrm{tr}(Q^2) + \frac{1}{3}B\mathrm{tr}(Q^3) + \frac{1}{4}C\left(\mathrm{tr}(Q^2)\right)^2$$

Elastični del:

$$\frac{1}{2}L_1\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}L_2\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial Q_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}L_3 Q_{ij}\frac{\partial Q_{kl}}{\partial x_i}\frac{\partial Q_{kl}}{\partial x_j}$$

Da to minimiziramo, uporabimo smerni odvod, kar nam da $\vec{n}$.