Numerično reševanje (navadnih) diferencialnih enačb. Rešujemo začetni problem prvega reda:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_a$$

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_a$$

Numerično seveda ne bomo dobili analitične rešitve, lahko pa poiščemo njen približek v čim več točkah. Želimo torej množico točk $y_i \approx y(x_i)$. Imamo začetni pogoj $y_0 = y(x_0)$. Ostale točke izračunamo na dva načina: z eksplicitno ali implicitno metodo.
Eksplicitna metoda: Nov približek izračunamo neposredno iz prejšnjih.
Implicitna metoda: Nov približek dobimo z reševanjem enačbe. Ta metoda je zahtevnejša, a pogosto zanesljivejša.
Obe metodi delimo na enočlensko in veččlensko - gre za to, ali pri računanju točke vzamemo eno ali več že znanih točk.

Lokalna in globalna napaka. Lokalna napaka je razlika med $y_{n+1} inz(x_{n+1})$, kjer je z rešitev diferencialne enačbe ($z' = f(x, z)$). Globalna napaka je vsota vseh lokalnih napak.
Lokalna napaka je reda $p \in \mathbb{N}$, če je $y_{n+1} - z(x_{n+1}) \propto h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$, kjer je h razlika med točkami x_i.

Eulerjeva metoda. Gre v bistvu za prvi člen Taylorjevega razvoja.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Izpeljava reda eksplicient Eulerjeve metode:

$$y_{n+1} - y(x_{n+1}) = y_n + h(fx_n, y_n) - y(x_n + h)$$

Uporabimo Taylorjev razvoj.

$$y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) - \left(y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + ... \right)$$

Upoštevamo $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ in pokrajšamo, kar je moč pokrajšati.

$$= -\frac{h^2}{2} y''(x_n) + \mathcal{O}(h^3)$$

Ostanejo nam členi reda velikosti h^2, torej je metoda reda 1.

$$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y' = f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)$$

Metoda Runge-Kutta. Tu je npr. metoda Range-Kutta četrtega reda.

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Koeficienti so nastavljeni tako, da se pri analizi napake vsi členi do h^5 pokrajšajo. Da se poiskati tudi metode, ki nam dajo višji red, vendar na neki točki postane nepraktično.

Eksplicitne veččlenske metode. Dobimo jih s pomočjo interpolacijeskega polinoma za funkcijo f. Ker potrebujemo prvih k točk, moramo najprej uporabiti enočlensko metodo, da jih dobimo. Primer dvočlenske metode je

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2} \left(3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})\right)$$

Običajno je najbolje, da je enočlenska metoda, ki jo uporabimo za račun prvih k členov, istega reda kot izbrana veččlenska metoda (nižji red pomeni manj zanesljivi začetni podatki, višji red pa je nepotrebno časovno in spominsko zahteven.)

Enokoračne implicitne metode. Splošna oblika implicitne metode je

$$y_{n+1} = \phi(h, x_n, y_n, y_{n+1}, f)$$

Za izračun novega približka moramo torej rešiti enačbo, ki bo običajno nelinearna. Za reševanje uporabimo kar iteracijo oblike

$$y_{n+1} = \tilde{\phi}(y_{n+1})$$

Začetni približek za y_{n+1} pa dobimo po neki eksplicitni metodi.
Implicitna Eulerjeva metoda:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Primer:

$$f(x, y) = xy$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - hx_{n+1}} y_n$$

Običajno nimamo tako preprostih funkcij.

Trapezna metoda.

$$y_{n+1} * y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

Metoda je drugega reda (lokalna napaka reda velikosti h^3). Navadna iteracija za $y_{n+1} = \tilde{\phi}(y_{n+1})$ konvergira, če je

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial y}(h, x_n, y_n, y, f) \right| \leq 1,$$

kar je pri dovolj majhnih h po navadi izpolnjeno.
Če imamo opravka z več funkcijami, imamo vektorsko enačbo, ki pa jo rešujemo na podoben način.