Trditev. Na območju $\mathcal{D}$ naj ima funkcija $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ singularnosti le v obliki polov.
Naj bo $\overline{D}(a,r)$ cel vsebovan v $\mathcal{D}$ in na robu tega kroga naj ne bo ne ničel ne polov funkcije f. Potem je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$

kjer smo z N označili število ničel znotraj $D(a,r)$ - pri čemer upoštevamo morebitno večkratnost ničel, s P pa število polov znotraj $D(a,r)$.

Dokaz. Po izreku o stekališčih je ničel končno mnogo. Ker so poli funkcije f ničle funkcije $1/f$, je tudi teh končno mnogo.
Naj bojo $a_1, a_2, ..., a_n$ ničle s kratnostmi $m_1, m_2, ..., m_n$
poli pa $b_1, b_2, ..., b_p$ s kratnostmi $n_1, n_2, ..., n_p$
$N = m_1 + m_2 + ... + m_n$ in $P = n_1 + n_2 + ... + n_p$
Za funkcijo f vemo, da mora biti oblike $f(z) = \dfrac{(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}...(z-a_n)^{m_n}}{(z-b_1)^{n_1}(z-b_2)^{n_2}...(z-a_p)^{n_p}}g(z)$, pri čemer $g(z)$ na $D(a,r)$ nima ničel ali polov.
Zdaj bomo morali to odvajati. Začnimo z najenostavnejšim primerom, ko ima $f(z)$ le eno ničlo.

$$f(z) = (z-a)^k g(z)$$

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1}g(z) + (z-a)^k g'z$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

V našem primeru imamo produkt takšnih funkcij, torej:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z-a_1} + \frac{m_2}{z-a_2} + ... + \frac{m_n}{z-a_n} - \frac{n_1}{z-b_1} + \frac{n_2}{z-b_2} + ... + \frac{n_p}{z-b_p} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = m_1\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{1}{z-a_1}dz + m_2\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{1}{z-a_2}dz + ...\\
-n_1\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{1}{z-b_1}dz - n_2\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{1}{z-b_2}dz - ...\\
+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{g'(z)}{g(z)}dz\end{aligned}$$

Izrazi oblike $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{1}{z-z_0}dz$ so enaki 1 (gre za indeks krivulje), izraz $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{g'(z)}{g(z)}dz$ pa bo po Cauchyjevem izreku enak 0.

Izrek. Izrek o odprti preslikavi:
bodi $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorfna in nekonstantna. Potem je f odprta preslikava, kar pomeni, da je $f(U)$ odprta v $\mathbb{C}$, čim je U odprta v $\mathcal{D}$.

Dokaz. (skica dokaza) Recimo, da je U odprta v $\mathcal{D}$. Iščemo $\varepsilon > 0$, da bo $D(f(\alpha),\varepsilon) \subseteq f(U)$. To sledi iz naslednjega rezultata:
Recimo, da je $f(\alpha) = \beta$; tedaj je α ničla funkcije $f(z) - \beta$. Recimo, da je α n-kratna ničla. Tedaj ima $f(z) - \beta$ natanko n rešitev. Potem $\exists \delta > 0$ in $\exists \varepsilon > 0 :\ w \in D(\beta,\varepsilon)$, $w \neq \beta$ ima enačba $f(z) = w$ natanko n rešitev (tega dela ne bomo dokazovali). Ker je U odprta, lahko dosežemo $D(\alpha,\delta) \subseteq U$. Zadošča dokazati, da je $D(\beta,\varepsilon) \subseteq U$. To pa je posledica tega, da ima enačba $f(z) - w$ natanko $n \geq 1$ rešitev za $w \in D(\beta,\varepsilon)$.

Opomba. Že na začetku smo povedali, da je pri funkciji $f\colon A \to B$ množica $V \subset B$ odprta v B, če je $f^{-1}(V)$ odprta v A. To sledi iz definicije zveznosti. Zdaj smo to nadgradili, saj odprtost f zagotavlja zveznost f^{-1}.

Posledica. $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ bodi holomorfna in $\alpha \in \mathcal{D}$ taka točka, da $f'(\alpha) \neq 0$. tedaj obstaja okolica α (v nadaljnje označena z U), da bo $f\big|_U\colon U \to f(U)$ bijektivna in f^{-1} holomorfna.

Dokaz. (skica dokaza) Označimo $f(\alpha) = \beta$. Tedaj je α ničla funkcije $g(z) = f(z) - \beta$. Ker je $f'(\alpha) = 0$, je α enkratna ničla funkcjie g.

$$g(z) = (z-\alpha)^k h(z)$$

$$f'(z) = g'(z) = k(z-\alpha)^{k-1}h(z) + (z-\alpha)^k h'(z)$$

V točki α mora biti to različno od 0, torej mora biti $k = 1$, da prvi člen ne bo enak 0.
Naj bo g inverz f. To pomeni, da je $f(z) = w$ in $g(w) = z$.

$$\lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z)}$$

Kaj, če je $f'(z) = 0$? Ker je f' zvezna in je $f'(\alpha) \neq 0$, lahko poiščemo dovolj majhen δ, da na krogu $D(\alpha, \delta)$ velja $f'(z) \neq 0$