

# Vaja 16: Vztrajnostni moment

Matevž Demšar

Januar 2024

**Opis.** Pri vaji smo opazovali vrtenje različnih sistemov pri stalnem navoru.

**Uvod.** Vrteči sistem je bilo kolo z radijem  $r_k$ , na katerega smo pritrjevali dodatne uteži in s tem spreminjali njegov vztrajnostni moment. Zunanji navor smo ustvarili z utežjo z maso  $m_u$ , obešeno na vrv, tako da je sila gravitacije ustvarjala stalen navor  $M = F_g \cdot r_m$ . Vztrajnostni moment nato izrazimo iz zakona  $M = J \cdot \alpha$ .

Merili smo vztrajnostni moment treh sistemov: pri prvem poskusu je bilo kolo neobteženo, pri drugem smo nanj na togo pritrdili valja z maso  $m_v$  in radijem  $r_v$  na razdalji  $s$  od osi vrtenja, pri tretjem pa smo ista valja pritrdili v kroglična ležaja na enaki oddaljenost od osi.

$$r_k = 14,9 \text{ cm}$$

$$m_u = 50 \text{ g}$$

$$r_m = 2,0 \text{ cm}$$

$$r_v = 4,9 \text{ cm}$$

$$s = 7,6 \text{ cm}$$

$$m_v = 514 \text{ g}$$

Ker bo na vrtenje kolesa vplivala tudi sila trenja, želimo oceniti njen navor. To storimo tako, da kolo zavrtimo brez zunanjih navorov in izmerimo njegov kotni pojemek  $\alpha_t$ .

$$\alpha_t = -0,08 \text{ s}^{-2}$$

**Meritve.** Meritve opravljamo s programom LoggerPro. Na obodu kolesa so na enakomernih razdaljah narejene zareze. Z optičnimi vrati, povezanimi z merilnikom časa lahko izračunamo tangentno in tangentni pospešek kolesa. Kotni pospešek nato izračunamo po formuli:

$$\alpha_{tr} = \frac{a_t}{r_k}$$

Opravimo šest meritev z dvema različnima zunanjsima navoroma:  $M_1 = mgr_m$  in  $M_2 = 2mgr_m$ , nato postopek ponovimo s pritrjenima valjema.

Brez valjev.	$\alpha$	$\Delta\alpha$
$M_1 = 9,8 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$0,33 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,03 \text{ s}^{-2}$
	$0,33 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,03 \text{ s}^{-2}$
	$0,25 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,04 \text{ s}^{-2}$
$M_2 = 19,6 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$0,71 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,04 \text{ s}^{-2}$
	$0,75 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,04 \text{ s}^{-2}$
	$0,73 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,04 \text{ s}^{-2}$
Togo vpeta valja.		
$M_1 = 9,8 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$0,22 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,03 \text{ s}^{-2}$
	$0,22 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,03 \text{ s}^{-2}$
	$0,22 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,03 \text{ s}^{-2}$
$M_2 = 19,6 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$0,47 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,03 \text{ s}^{-2}$
	$0,47 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,03 \text{ s}^{-2}$
	$0,47 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,04 \text{ s}^{-2}$
Gibljivo vpeta valja.		
$M_1 = 9,8 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$0,23 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,02 \text{ s}^{-2}$
	$0,22 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,02 \text{ s}^{-2}$
	$0,23 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,02 \text{ s}^{-2}$
$M_2 = 19,6 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$0,45 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,03 \text{ s}^{-2}$
	$0,45 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,03 \text{ s}^{-2}$
	$0,43 \text{ s}^{-2}$	$\pm 0,03 \text{ s}^{-2}$

**Izračuni.** Vztrajnostni moment sistema izračunamo po formuli  $J = M/\alpha$ . Vrednosti  $\alpha$  moramo prišteti še izgube, ki so nastale zaradi trenja. V kontrolnem poskusu smo velikost teh izgub ocenili na  $\alpha_{tr} = 0,08 \text{ s}^{-2}$ . Vztrajnostni moment pa lahko določimo tudi računsko:

$$J_T = J + \frac{1}{2}m_v r_v^2 + m_v s^2$$

$$J_G = J + m_v s^2$$

Vrednosti  $J$  z izmerjenimi podatki ne moremo izračunati, zato uporabimo povprečje izmerjenih vrednosti.

<b>Brez valjev.</b>		
$M_1 = 9,8 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$\alpha_1 = 0,38 \text{ s}^{-2}$	$J_1 = 25,8 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$
$M_2 = 19,6 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$\alpha_2 = 0,81 \text{ s}^{-2}$	$J_2 = 24,2 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$
<b>Togo vpeta valja.</b>		
$M_{T1} = 9,8 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$\alpha_{T1} = 0,30 \text{ s}^{-2}$	$J_{T1} = 32,7 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$
$M_{T2} = 19,6 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$\alpha_{T2} = 0,55 \text{ s}^{-2}$	$J_{T2} = 35,6 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$
<b>Gibljivo vpeta valja.</b>		
$M_{G1} = 9,8 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$\alpha_{G1} = 0,31 \text{ s}^{-1}$	$J_{G1} = 31,6 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$
$M_{G2} = 19,6 \times 10^{-3} \text{ Nm}$	$\alpha_{G2} = 0,52 \text{ s}^{-1}$	$J_{G2} = 37,7 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$

**Primerjava s pričakovanimi vrednostmi.**

Izračunane vrednosti.

$$J_T = 28,6 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$J_G = 28,0 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

Izmerjene vrednosti.

$$J_{T1} = 32,7 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$J_{T2} = 35,6 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$J_{G1} = 31,6 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$J_{G2} = 37,7 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

**Zapis rezultata z napako.** Do napake je lahko prišlo pri meritvah  $r_k, r_m, r_u$  in  $s$  ter  $m_v$  in  $m_u$ . Vrednost napak dolžin ocenimo na  $\pm 1 \text{ mm}$ , vrednosti napak mas pa na  $\pm 1 \text{ g}$ . Program LoggerPro je rezultate zaokrožil na dve decimalni mesti, kar je vodilo do napake pri izmerjenem pospešku  $a$ .

$$\begin{aligned}\frac{\Delta J}{J} &= \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \\ \frac{\Delta M}{M} &= \frac{\Delta m_u}{m_u} + \frac{\Delta r_m}{r_m} \\ \Delta \alpha &= \left( \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta r_k}{r_k} \right) \cdot \alpha + \Delta \alpha_{tr} \\ \frac{\Delta J}{J} &= 0,36\end{aligned}$$

$$J = 0,025 \text{ kgm}^2 \pm 0,009 \text{ kgm}^2$$

$$J_T = 0,034 \text{ kgm}^2 \pm 0,012 \text{ kgm}^2$$

$$J_G = 0,035 \text{ kgm}^2 \pm 0,012 \text{ kgm}^2$$

**Zaključek.** Razlika med izmerjeno in izračunano vrednostjo je v okviru napake. Najbolj je na natančnost meritev vplivala občutljivost merilnika LoggerPro, saj je pri merjenju izgube pospeška zaradi majhne občutljivosti prišlo do velike relativne napake.