Prejšnjič smo za $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirali $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$
Gledali bomo zvezne funkcije f, katerih nosilci so kompletni (zaprti in omejeni). Množico takšnih funkcij označimo s $C_c(\mathbb{R})$.

Bodi $f \in C_c(\mathbb{R})$. Tedaj obstaja tak interval $[a, b]$, da je zunaj tega intervala $f \equiv 0$ (direktna posledica kompletnosti nosilca f). Poljeg tega zaradi zveznosti funkcije velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$$

Definicija. Bodi $f \in C - c(\mathbb{R})$. L^1-norma funkcije f je

$$||f||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$$

Definiramo lahko tudi razdaljo med f in g: $d(f, g) = ||f - g||_1$. Množico $C_c(\mathbb{R})$ lahko tedaj obravnavamo kot metrični prostor (preverimo lahko, da je tudi vektorski prostor.)

Zdaj vzamemo zaporedje funkcij f_n, ki konvergira proti neki funkciji f. To pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0 da za $n \geq n_0$ velja $||f_n - f|| < \varepsilon$. Ni pa nujno, da je f v $C_c(\mathbb{R})$. Lahko imamo na primer funkcije, ki so definirane na vedno večjem intervalu, tako da bi morala biti f definirana na celotni množici $\mathbb{R}$.

Metrični prostor $C_c(\mathbb{R})$ želimo dopolniti glede na L^1 mero. To pomeni, da moramo vanj vključiti limite vseh zaporedij $f_n \in C_c$. Definiramo $L^1(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ ||f||_1 c < \infty\}$

Definicija. Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Fourierova transformiranka funkcije f je funkcija $\hat{f}$, ki je za neki $\xi \in \mathbb{R}$ definirana kot

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ix\xi} \mathrm{d}x$$

Opomba. $|\hat{f}|_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ix\xi} \mathrm{d}x \right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot |e^{-ix\xi}| = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f||_1$

Trditev. (osnovne lastnosti Fourierovih transformirank)

1. $\hat{f}$ je zvezna, $|\hat{f}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f||_1$
2. Naj bo $t \in \mathbb{R}$, definiramo $e_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s predpisom
$$e_t(x) = e^{itx}$$
Tedaj velja:
$$\widehat{f \cdot e_t}(\xi) = \widehat{f}(\xi - t)$$
3. Naj bo $a > 0$ in $f_a(x) = f(ax)$. Tedaj je
$$\widehat{f_a}(\xi) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$
4. Za neki $t \in \mathbb{R}$ definiramo $f_t = f(x - t)$. Tedaj je
$$\widehat{f_t}(\xi) = e^{-it\xi} \hat{f}(\xi)$$
5. Bodi funkcija $(\mathrm{id} \cdot f) : x \mapsto x f(x)$ element množice $L^1(\mathbb{R})$. Tedaj je
$$\widehat{(\mathrm{id} \cdot f)}(\xi) = -\frac{1}{i} \hat{f}'(\xi)$$
6. Če je f zvezno odvedljiva in je $f' \in L^1(\mathbb{R})$, potem je
$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$
7. $\widehat{\alpha f + \beta g}(\xi) = \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi)$

Dokaz.

1. Zveznost dokažemo tako, da izrazimo razliko
$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\left(e^{-ixh}-1\right)\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\left|e^{-ixh}-1\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$
Ker mora biti $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|<\infty$, mora obstajati tak $A>0$, da je $\int_{|x|>A}|f(x)|\mathrm{d}x$ poljubno majhen. Poleg tega je $\lim_{h\to 0}|e^{-ihx}-1|=0$, torej lahko izberemo tak h, da je $|e^{-ihx}-1|<\varepsilon$, vsekakor pa je $|e^{-ihx}-1|\leq|e^{ihx}|+|1|=2$. Sledi:
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\left|e^{-ixh}-1\right|\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>A}|f(x)|\cdot 2\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}|f(x)|\mathrm{d}x$$
Oba člena lahko naredimo poljubno majhna. Prvega z izbiro A, drugega pa z izbiro h.
2. Po definiciji:
$$\widehat{f\cdot e_t}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{itx}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i(x-t)\xi}\mathrm{d}x$$
Vemo, da je $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x-t)$.
3. Spet po definiciji:
$$\widehat{f_a}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(ax)e^{-iax\xi}\mathrm{d}x$$
Uvedemo novo spremenljivko $t=ax,\ \mathrm{d}t=a\mathrm{d}x$:
$$=\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-it\xi}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$
4. Podobno.
5. Sledila bo iz naslednje trditve:
6. $$\widehat{f'}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x=\text{... per partes ...}=i\xi\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x=i\xi\hat{f}(\xi)$$
7. Integral je linearen.

Opomba. Za $f\in L^1(\mathbb{R})$ je $\hat{f}\in C(\mathbb{R})$. Lahko definiramo preslikavo $\Lambda\colon L^1(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})$, ki je zaradi lastnosti 7. linearna preslikava - pravimo ji Fourierova transformacija.

Konvolucija funkcij. Naj bosta $f,g\in L^1(\mathbb{R})$. kovolucija f in g je funkcija $(f*g)$, definirana kot:
$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(x)\mathrm{d}t$$

Trditev. Lastnosti konvolucije. Naj bodo $f,g,h\in L^1(\mathbb{R})$ in α,β skalarja. Velja:

1. $f*g=g*f$
2. $(f*g)*h=f*(g*h)$
3. $(\alpha f+\beta g)*h=\alpha f*h+\beta f*h$
4. $f*g\in L^1(\mathbb{R}),\ ||f*g||\leq||f||\cdot||g||$

Dokaz. Večinoma sledi iz lastnosti integrala.

Izrek. $\widehat{f*g}=\sqrt{2\pi}\hat{f}\cdot\hat{g}$