Kartezične koordinate:

$$\overrightarrow{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = x^i\hat{e}_i$$

To ni čisto točno vektor, saj $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ in $\hat{e}_z$ niso vektorji. Lokalne bazne vektorje dobimo z odvodom:

$$\overrightarrow{e_i} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^i}$$

$$\overrightarrow{v} = v^i\hat{e}_i = v^i\partial_i$$

(Načeloma $\partial_i \overrightarrow{r}$)

V cilindričnih koordinatah:

$$\overrightarrow{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$\overrightarrow{e_r} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

Infinitezimalni premik:

$$d\overrightarrow{r} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^i}dx^i = \overrightarrow{e}_i dx^i$$

Taka oznaka je pravilna v vseh koordinatnih sistemih.

$$|d\overrightarrow{r}|^2 = d\overrightarrow{r}\cdot d\overrightarrow{r} = dx^i\overrightarrow{e}_i\cdot\overrightarrow{e}_j dx^j = g_{ij}dx^i dx^j$$

Pri tem je g metrični tenzor. Dobimo ga s skalarnim množenjem baznih vektorjev. V cilindričnih koordinatah je na primer enak

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

Gradient. Obravnavamo skalarno polje f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i = (\nabla f)_i dx^i$$

Mimogrede, tu se ponovno pokaže misel od prejšnjič, da so kontravariantni vektorji primerljivi s plastnicami.

Operator ∇ .
Kartezčne koordinate: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
Polarne koordinate: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$
In tako naprej. Obstajajo tabele ∇ v različnih koordinatnih sistemih, za poljuben sistem pa jih lahko tudi izpeljemo, če ∇ v kartezičnih koordinatah zapišemo kot $\nabla = \hat{e}^i\partial_i$ in izrazimo $\hat{e}_i$ za iskani koordinatni sistem (npr. $\hat{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$).

Menjava koordinat. To ni nujno linearen proces. Recimo, da preslikamo $x^i \to u^j$.

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial u^j}T^i$$

S T smo označili posplošeno linearno preslikavo - gre za matriko z elementi $T^{ij} = \frac{\partial u^j}{\partial x^i}$

Integral gradienta. Primer: Vzgon

$$F_v = \oiint p\,d\overrightarrow{S} = \oiint \rho g h\,d\overrightarrow{S} = \rho g V = \iiint \rho g\,dV = \iiint \nabla p\,dV$$

V splošnem:

$$\oiint f\,d\overrightarrow{S} = \iiint \nabla f\,dV$$

Usmerjeni odvod. Imamo parametrizirano krivuljo $\vec{r}(t)$. Opazujemo odvod neke funkcije f v smeri tangente na $\vec{r}$ (označimo s t).

$$\frac{\mathrm{d}f(\vec{r})}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} = (\nabla f)\vec{T}$$

Označimo $\vec{t} \cdot \vec{\nabla}$ - operator odvoda v smeri $\vec{t}$

$$(\vec{t} \cdot \vec{\nabla})f = \frac{f(\vec{r} + h\,\vec{t}) - f(\vec{r})}{h}$$

To velja tudi, če je f vektorska funkcija.

Nekaj primerov:
Advekcijski člen za pretok temperature v toku tekočine:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T$$

Advekcijski člen za gibanje tekočin:

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \text{druge sile}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$

Sile na dipol v nehomogenem polju:

$$F_m = (\overrightarrow{p_m} \cdot \nabla)\vec{B} = (p_j\partial_j)B_i = p_j\partial_i B_j = p_j(\partial_i B_j) = \vec{p}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$$

$$-\overrightarrow{p_m}\vec{B} = W_m$$

Sledi:

$$\vec{F} = -\nabla W_m = \nabla_i(p_j B_j) = p_j\partial_i B_j$$

Gradient vektorja. Za primer vzemimo $\vec{B}$

$$\partial_i B^j = \begin{bmatrix} \partial_x B_x & \partial_x B_y & \partial_x B_z \\ \partial_y B_x & \partial_y B_y & \partial_y B_z \\ \partial_z B_x & \partial_z B_y & \partial_z B_z \end{bmatrix}$$

Divergenca. Videli smo jo že v Gaussovem izreku, na splošno pa pri pretokih vektorjev skozi ploskve. Najbolj nas bo zanimal pretok skozi zaključeno ploskev:
$\oiint \vec{v}\,d\vec{S}$ v pošljimo v limito $V \to 0$

$$\begin{aligned}\oiint \vec{v}\,d\vec{S} &= v_x(x+dx,y,z)\,dy\,dz - v_x(x,y,z)\,dy\,dz \\ &+ v_y(x,y+dy,z)\,dx\,dz - v_x(x,y,z)\,dx\,dz \\ &+ v_z(x,y,z+dz)\,dx\,dy - v_x(x,y,z)\,dx\,dy \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\end{aligned}$$

Izraz $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$ imenujemo divergenca (označimo $\vec{\nabla}$ ali div).

$$\vec{\nabla}\vec{v} = div\,\vec{v} = \partial_i v^i$$

Tudi divergenca ima v različnih koordinatnih sistemih različne oblike, ki so ravno tako tabelirane, da pa se jih tudi izpeljati.

Rotor. Rotor je uporaben pri integralih po zaključenih krivuljah. Na primer:

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot d\vec{r} &= v_y(x+dx,y,z)\,dy - v_x(x,y+dy,z)\,dx \\ &\quad - v_y(x,y,z)\,dy + v_x(x,y,z)\,dx \\ &= \frac{\partial v_y}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial v_x}{\partial y}\,dx\,dy \\ &= (\vec{\nabla}\times\vec{v})\,d\vec{S}_{xy}\end{aligned}$$

Uvedli smo rotor:

$$(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \varepsilon_{ijk}\partial_j v_k$$

Kombinirani diferencialni operatorji.

$$\nabla\times(\nabla f) = 0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v}) = 0$$

V elektromagnetizmu:

$$\oint \vec{H}\,d\vec{e} = \iint \left(\dot{\vec{D}} + \vec{j}\right) d\vec{S}$$

Kajti:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{j}$$

Laplaceov operator. $\nabla^2 f = \vec{\nabla}(\nabla f) = \partial_i\partial_i f$

V kartezičnih koordinatah je enak $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

V fiziki je izjemno uporaben, npr. pri difuzijski enačbi:

$$D\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Poissonova enačba:

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

Laplaceova enačba:

$$\nabla^2 U = 0$$

(Poissonova, če nimamo izvorov)

Valovna enačba:

$$c^2\nabla^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

V cilinddričnih koordinatah:

$\nabla^2 f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

V sferičnih koordinatah:

$\nabla^2 f = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\dfrac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\varphi}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right]$

Vektorski Laplaceov operator. Definiran je enako, se ga pa običajno da napisati drugače.

$$\nabla^2\vec{v} = div\,grad\,\vec{v} = \partial_j\partial_j v_i$$

Vendar:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{v}) - \nabla^2\vec{v}$$

To je običajno lažje izračunati.

Zunanji odvod in diferencialne forme. Skalarno funkcijo spremenimo v vektorsko z gradientom.

$$\int_r v_i dx^i[\vec{r}(t)] = \int_r \vec{v} d\vec{r} = \int \vec{v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}dt$$

Vektorje, povezane s ploskvami (tj. jih moramo integrirato po ploskvah), včasih imenujemo tudi psevdovektorji ali bivektorji. Do njih pridemo tako, da na vektorjih izvedemo rotor.

Skalarje, povezane s prostornino (razne gostote), imenujemo tudi psevdoskalarji. Do njih pridemo tako, da na psevdoskalarjih uporabimo divergenco. Lahko jim rečemo tudi trivektor, gre namreč za mešani produkt $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$.

Zunanji odvod definiramo kot $df = \nabla_i f dx^i$

$$d(v_i dx^i) = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j$$

Z $\wedge$ smo označili zunanji produkt vektorjev (gre za nekakšen vektorski produkt). Ker nam zunanji produkt vrne nekaj podobnega rotorju, velja $d(df) = 0$

Stokesov izrek: Zunanji odvod nam omogoči, da v integralu izrazimo dejstvo, da integriramo po robu množice.

$$\oint_\partial M\omega = \int d\omega$$

Posledično je naša ugotovitev $d(df) = 0$ ekvivalentna trditvi $\partial(\partial M) = 0$, ali drugače: Rob množice nima roba.