Primer. $\partial_{\vec{n}} u(\vec{r}) - \dfrac{\vec{r} - \vec{r_0}}{R^3} = ... = -\dfrac{1}{R^2}$

Greenove identitete. Naj bosta u in v dvakrat zvezno odvedljivi na okolici nekega območja D skupaj z robom (torej $\overline{D}$). Tedaj velja:

1. $\displaystyle\iint_{\partial D} v\partial_{\vec{n}} u \mathrm{d}S = \iiint_D (v\Delta u + \nabla u \nabla v)\mathrm{d}V$
2. $\displaystyle\iint_{\partial D} (v\partial_{\vec{n}} u - u\partial_{\vec{n}} v)\mathrm{d}S = \iiint_D (v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}V$
3. $\displaystyle\iint_{\partial D} \left[\frac{1}{||\vec{r} - \vec{r_0}||}\partial_{\vec{n}} (u(\vec{r})) - u(\vec{r_0})\partial_{\vec{n}} \left(\frac{1}{||\vec{r} - \vec{r_0}||}\right)\right] \mathrm{d}S - \iiint_D \frac{\Delta u}{||\vec{r} - \vec{r_0}||}\mathrm{d}V = 4\pi u(\vec{r_0})$

Dokaz.

$$\iint_{\partial D} v\partial_{\vec{n}} u \mathrm{d}S = \iint v\nabla u \vec{n} \cdot \mathrm{d}S = \iint_{\partial D} v\nabla u \mathrm{d}\vec{S}$$

Zdaj lahko uporabimo Gaussov izrek:

$$= \iiint_D \div(v\nabla u)\mathrm{d}V$$

$$\div(v\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Upoštevamo pravilo za odvod produkta:

$$= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla u \cdot \nabla v + v\Delta u$$

Druga točka sledi iz prve. Za tretjo točko pa ne bomo navajali celega dokaza, saj je predolg, temveč se zadovoljimo s tole skico: Za v vzamemo $v = \dfrac{1}{||\vec{r} - \vec{r_0}||}$ in uporabimo 2.. Greenovo formulo za območje $D - \overline{K}(\vec{r_0}, \delta)$ - v r_0 tako izbrana funkcija v namreč ni definirana. δ bomo nazadnje poslali proti 0. S tm dobimo željeni rezultat.

Posledica. Če je u harmonična na okolici $\overline{D}$, velja

$$\iint \partial_{\vec{n}} u \mathrm{d}S = 0$$

Dokaz: Uporabimo 1. Greenovo formulo za $v = 1$, kajti $\nabla v = 0$ in $\Delta u = 0$.

Posledica. Recimo, da je u harmonična na okolici $\overline{D}$. Naj bo $\vec{r_0} \in D$ in naj krogla $\overline{K}(\vec{r_0}, R)$ leži v D. Tedaj je

$$u(\vec{r_0}) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\partial K(\vec{r_0}, R)} u\vec{r}\mathrm{d}S$$

Dokaz. Uporabimo 3. Greenovo formulo in prejšnjo posledico.

Posledica. (princip maksima in minima) Naj bo u nekonstantna harmonična funkcija na povezani množici D. Potem u ne zavzame maksima ali minimuma na D. Če je K kompaktna množica in je u zvezna na okolici K ter harmonična znotraj K, potem zavzame maksimum in minimum na robu K.

Dokaz. Enak kot pri 15. predavanju, le v $\mathbb{R}^3$.

Dirichletov problem za območja v $\mathbb{R}^3$ Recimo, da je D omejeno območje z gladkim robom. Iščemo funkcije u, ki so harmonične na D in velja $u\big|_{\partial D} = f$, kjer je f zvezna na ∂D. Poleg tega zahtevamo, da je u zvezna na $\overline{D}$.

Recimo, da znamo problem rešiti za naslednji poseben primer:
Izberemo $\overrightarrow{r_0} \in D$. Recimo, da smo našli zvezno funkcijo v, ki je na robu D enaka $v\big|_{\partial D} = \dfrac{1}{4\pi||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}||}$

Zdaj poskusimo iz take rešitve sestaviti rešitev za poljubno funkcijo f. Vemo, da bo za u in v veljala 2. Greenova identiteta, za u pa 3. Greenova identiteta.

$$\iint_{\partial D} (v\partial_{\overrightarrow{n}} u - u\partial_{\overrightarrow{n}} v)\,\mathrm{d}S = 0$$

$$u(\overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial D} \left[\frac{1}{||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}||}\partial_{\overrightarrow{n}} u - u(\overrightarrow{r})\partial_{\overrightarrow{n}}\left(\frac{1}{||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}||}\right)\right]\mathrm{d}S$$

Ker je $\dfrac{1}{4\pi||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}||}$ ravno enako v, iz 3. Greenove identitete dobimo

$$u(\overrightarrow{r_0}) = \iint_{\partial D} v\partial_{\overrightarrow{n}} u - u\partial_{\overrightarrow{n}}\left(\frac{1}{4\pi||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}||}\right)\mathrm{d}S$$

Po zaslugi 2. Greenove formule lahko naredimo sledečo zamenjavo:

$$\iint_{\partial D} v\partial_{\overrightarrow{n}} u\mathrm{d}S = \iint_{\partial D} u\partial_{\overrightarrow{n}} v\mathrm{d}S$$

$$u(\overrightarrow{r_0}) = \iint_{\partial D} u(\overrightarrow{r})\partial_{\overrightarrow{n}}\left(v(\overrightarrow{r}) - \frac{1}{4\pi||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}||}\right)$$

Definiramo Greenovo funkcijo območja D: $G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = v(\overrightarrow{r}) - \dfrac{1}{4\pi||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}||}$
Zanjo velja, da je harmonična in da je za $\overrightarrow{r} \in \partial D$ enaka 0. Takšna funkcija je Poissonovo jedro območja D.
Zdaj lahko iščemo funkcijo u, za katero velja: $\Delta u = 0$, $u\big|_{\partial D} = f$. Če rešitev obstaja, je enaka

$$u(\overrightarrow{r_0}) = \iint_{\partial D} f(\overrightarrow{r})\partial_{\overrightarrow{n}} G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0})\mathrm{d}S$$

Najti moramo le Greenovo funkcijo. Tega se ne da enostavno narediti, lahko pa preverimo, ali je neka funkcija ustrezna. Da se jo mora namreč zapisati kot:

$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = v(\overrightarrow{r}) - \frac{1}{4\pi||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}||}$$

Pri čemer mora biti v harmonična. Poleg tega problem običajno rešujemo na krogli, torej lahko preverimo, ali velja $||\overrightarrow{r}|| = 1$ za $\overrightarrow{r} \in \partial D$. Če je to izpolnjeno, imamo opravka z Greenovo formulo in lahko izračunamo u.

1 Fourierova transformacija

Definicija. Bodi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Nosilec funkcije f je zaprta množica $\mathrm{supp}f = \overline{\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \neq 0\}}$ Najbolj preprost primer noslica je npr. nosilec karakteristične funkcije

$$\chi_{(a,b)} = \begin{cases} 1 & x \in (a,b) \\ 0 & x \notin (a,b) \end{cases}$$

Tedaj je $\mathrm{supp}\chi_n = [a, b]$