Naloga: V okolici $z = 0$ poišči splošno rešitev enačbe

$$z^2 y'' + z(z+1)y' - y = 0$$

$$y'' + \frac{z+1}{z}y' - \frac{1}{z^2}y = 0$$

$$p_0 = \lim_{z\to 0} zp(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{z+1}{z} = 1$$

$$q_0 = \lim_{z\to 0} z^2 q(z) = -1$$

$$\mu(\mu-1) + \mu - 1 = 0$$

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_1 = -1$$

Ker je $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{N}$, se stvari malo zakomplicirajo. Najprej izberemo $\mu = -1$

$$y = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n-1}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n-1) z^{n-2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n-1)(n-2) z^{n-3}$$

Vstavimo v originalno enačbo, poiščemo člene z isto potenco z^m:

$$c_{m+1}m(m+1) + c_m(m-1) + c_{m+1}m - c_{m+1} = 0$$

$$c_{m+1} = -\frac{m-1}{m^2-1}c_m = -\frac{c_m}{m+1}$$

Če imamo $c_0 \in \mathbb{C}$, mora biti $c_1 = -c_0$, Za c_2 pa spet zadošča poljubno kompleksno število.

$$y = c_0\left(\frac{1-z}{z}\right) + c_2\left(z - \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{3\cdot 4} - ...\right) = c_0\left(\frac{1-z}{z}\right) + c_2\left(\frac{2(e^{-z} - 1 + z)}{z}\right)$$

Dobili smo linearno kombinacijo dveh funkcij. Preveriti moramo le še, da sta ti dve funkciji linearno neodvisni.