Orbite v potencialu $1/r^2$

$$H = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{ef}$$

$$V_{ef} = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{\kappa}{r^2} = \frac{p_\varphi^2}{2m}\left(1 - \frac{\kappa 2m}{p_\varphi^2}\right)\frac{1}{r^2}$$

Označimo $\gamma = \dfrac{\kappa 2m}{p_\varphi^2}$. Naša rešitev bo odvisna od γ: Če je $\gamma < 1$, so orbite neomejene in opazovano telo bo odletelo stran. Če je $\gamma > 1$, so orbite omejene, toda potencial gre v centru kroženja proti neskončno, zato bo Petja padla v center. Če je $\gamma = 1$, pa je $V_{ef} = 0$, kar pomeni kroženje.

$$H = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2m}(1-\gamma)\frac{1}{r^2}$$

Uvedemo $u = 1/r$, $\dot{r} = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{p_\varphi}{mr^2u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\dfrac{p_\varphi}{m}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$.

$$H = \frac{m}{2}\frac{p_\varphi^2 u'^2}{m^2} + \frac{p_\varphi^2}{2m}\left(1-\gamma\right)^2 u^2$$

Da dobimo enačbo gibanja, še na obeh straneh odvajamo po φ:

$$0 = \frac{p_\varphi^2}{m}u'\left(u'' + (1+\gamma)u\right)$$

Enačba ima dve rešitvi: $u' = 0$ in $u'' + (1-\gamma)u = 0$. Prva rešitev je kroženje (saj je tedaj radij konstanten), druga rešitev pa je diferencialna enačba:

$$u'' + (1-\gamma)u = 0$$

Tu se pokaže odvisnost gibanja od γ:

Če je $\gamma < 1$, dobimo za rešitev kosinusno funkcijo:

$$r = \frac{1}{C\cos\left(\sqrt{1-\gamma}(\varphi - \varphi_0)\right)}$$

Če je $\gamma = 1$:

$$u'' = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{A\varphi + B}$$

Kar je spirala: $\lim_{\varphi\to\infty} r = 0$. Če je hkrati $u' = 0$ pa gre kot prej za krožnico.

Če je $\gamma > 1$, dobimo enačbo oblike

$$u'' - \alpha u = 0,\ \ \alpha > 0$$

$$u = Be^{\sqrt{\alpha}\varphi} + Ce^{\sqrt{\alpha}\varphi}$$

$$r = \frac{1}{u}$$

Če je $B \neq 0$ in $C \neq 0$, $r(\varphi)$, je r omejen. Sicer pač ne.