Problem dveh teles.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2\right)$$

Označimo $M = m_1 + m_2$ in $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ Tedaj velja:

$$\frac{M}{m_1}\vec{r}_T = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_T + \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_T - \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

Izrazimo kinetično in potencialno energijo. Predpostavili bomo, da je potencialna energija posledica centralnih sil, torej neodvisna od hitrosti.
Poseben primer: $m_2 \ll M$:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{r}_T^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

Sicer: Opazimo, da je $\vec{r}_T$ ciklična, torej je $\vec{p}_T = m\dot{\vec{r}}_T =$ konst. Oziroma:

$$\vec{r}_T(t) = \vec{r}_T(t_0) + \dot{\vec{r}}_T(t_0) \cdot t$$

Predpostavili smo, da je sila med telesoma centralna.

$$\vec{F} = -\nabla V(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r}$$

Opazimo $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, kar pomeni, da je L konstantna. Poleg tega je $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$, torej je tudi z konstantna.
(Pri tem $\vec{L}$ označuje vrtilno količino, ne Lagrangiana). Nekako tako dobimo Keplerjev zakon:

$$d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t),$$

označimo $dS = rdr = r^2 d\varphi$. Ker je L konstantna, je tudi $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ konstantna, kar je ravno 2. Keplerjev zakon.

Keplerjev problem. Enačba gibanja po elispi. Vpeljemo konstanto gibanja $\vec{A}$, imenovan Laplace-Runge-Lenz-Paulijev vektor. Pauli ga je uporabil za reševanje vodikovega atoma, ostali pa vsak za svoje namene. Mi bomo obravnavali gravitacijsko silo.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Mimogrede: $m_1 m_2 = mM$. Če je $m_1 \gg m_2$, običajno aproksimiramo $m_1 = M$ in $m_2 = m$.

$$m\ddot{\vec{r}} = f\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \dot{\vec{p}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} \times \vec{L} = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \vec{p} \times \dot{\vec{L}}$$

$$= \frac{f(r)}{r}\vec{r} \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = mf(r)r^2\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2}\vec{r}\right)$$

$$= mk\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Označili smo $k = GmM$, v primeru električne sile bi bil $k = \pm\frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0}$. S tem smo dobili želeno konstanto gibanja $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{L} - mk\frac{\overrightarrow{r}}{r}$.

$$\overrightarrow{A_0}\overrightarrow{r} = A_0 r \cos\varphi = \overrightarrow{r} \cdot \left(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{L}\right) - mkr = L_0^2 - mkr$$

$$(A_0 \cos\varphi + mk)r = L_0^2 = r_0^2 m^2 v_0^2$$

$$r\varphi = \frac{L_0^2}{mk\left(1' \frac{A_0}{mk}\cos\varphi\right)} = \frac{\tilde{r}_0}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

Dobili smo parametrizacijo elipse z ničlo v gorišču. ε je odvisen od začetne hitrosti, in sicer:

$$\varepsilon = \frac{A_0}{m^2 MG} = \frac{r_0 v_0^2}{MG} - 1$$

Ko se v_0 manjša, pa se ε približuje -1 $\rightarrow$ dobimo prosti pad.
Ko je $\varepsilon = 0$, dobimo krog. Za takšen ε je potrebna $v_1 = \sqrt{\frac{MG}{r_0}}$ ali prva kozmična hitrost.
Za $\varepsilon = 1$ je potrebna $v_2 = \sqrt{2\frac{MG}{r_0}}$. To je druga kozmična hitrost. Če si ponovno ogledamo enačbo $r(\varphi)$, bo za $\varepsilon \geq 1$ obstajal tak kot φ, da bo šel $r(\varphi)$ proti neskončno.