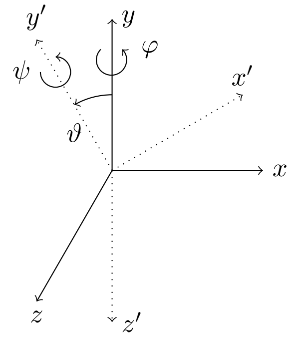
Formalna obravnava vrtavke. Radi bi opisali gibanje vrtavke kot funkcijo časa. Imamo Eulerjeve kote φ, ψ in ϑ.



Uporabili bomo Lagrangeov formalizem:

$$T = \frac{1}{2}J_1{\omega'}_1^2 + \frac{1}{2}J_1{\omega'}_2^2 + \frac{1}{2}J_3{\omega'}_3^2$$

$$\overrightarrow{\omega} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_3} + \dot{\vartheta}\overrightarrow{e_1''} + \dot{\psi}\overrightarrow{e_3}$$

$\dot{\varphi}\overrightarrow{e_3}$ pomeni precesijo, $\dot{\vartheta}\overrightarrow{e_1''}$ pomeni nagibanje, $\dot{\varphi}\overrightarrow{e_3}$ pa vrtenje okoli lastne osi.
V različne baze ($[x', y', z']$, $[x'', y'', z'']$, $[x''', y''', z''']$) pridemo z rotacijskimi matrikami, obravnavani v poglavju o Eulerjevih kotih. S temi rotacijskimi matrikamo $\overrightarrow{\omega}$ preslikamo v $\overrightarrow{\omega'}$, nato pa izračunamo kinetično energijo.

$$T = \frac{1}{2}J_1({\omega'}_1^2 + {\omega'}_2^2) + \frac{1}{2}J_3{\omega'}_3^2$$

$${\omega'}_1^2 + {\omega'}_2^2 \sin^2\vartheta \sin^2\psi\,\dot{\varphi}^2 + \sin^2\vartheta\cos^2\psi\,\dot{\varphi}^2 + (\cos^2\psi + \sin^2\psi)\,\dot{\vartheta}^2 + 2(\sin\vartheta\sin\psi\cos\psi - \in\vartheta\sin\psi\cos\psi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}$$
$$= \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2$$

$${\omega'}_3^2 = \left(\dot{\psi} + \cos\vartheta\,\dot{\varphi}\right)^2$$

Potencialna energija: Če označimo z l višino težišča vrtavke, ko ta stoji pokonci, je potencialna energija pri nekem kotu ϑ enaka

$$V = mgl\cos\vartheta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}J_1\left(\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2\right) + \frac{1}{2}J_3\left(\dot{\psi} + \cos\vartheta\,\dot{\varphi}\right)^2 - mgl\cos\vartheta = L(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$$

Iz ohranitve energije:

$$E = T + V = \text{konst.}$$

Iz Lagrangeovega formalizma vidimo, da sta konstantni tudi količini

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = J_3\left(\dot{\psi} + \cos\vartheta\,\dot{\varphi}\right) = J_1 a = \text{konst.}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = J_1\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} + J_3\cos\vartheta\left(\dot{\psi} + \cos\vartheta\,\dot{\varphi}\right) = J_1 b = \text{konst.}$$

Iz p_ψ lahko izrazimo:

$$J_3\dot{\psi} = J_1 a - J_3\cos\vartheta\,\dot{\varphi}$$

To nam vstavimo v p_φ:

$$(J_1\sin^2\vartheta + J_3\cos^2\vartheta)\,\dot{\varphi} + \cos\vartheta(J_1 a - J_3\cos\vartheta\,\dot{\varphi}) = J_1 b$$

Na obeh straneh delimo z J_1. Člen $J_3\cos^2\vartheta$ se odšteje. Izrazimo $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

To vstavimo v enačbo za energijo:

$$E = \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{(b - a\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta} + \dot{\vartheta}^2 \right) + \frac{1}{2} J_3 {\omega'}_3^2 + mgl\cos\vartheta = E_0$$

Dobili smo diferencialno enačbo z eno neznanko. Zdaj uvedemo novo količino.

$$\tilde{E} = E_0 - \frac{1}{2} J_3 {\omega'}^2 = \tilde{E}_0 = \tilde{E} + \tilde{V}(\vartheta)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{J} \left(\tilde{E}_0 - \tilde{V}(\vartheta) \right)}$$

Integriramo po ϑ:

$$t = \sqrt{\frac{J_1}{2}} \int_{\vartheta(0)}^{\vartheta(t)} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{\tilde{E}_0 - \tilde{V}(\vartheta)}}$$

Tu uvedemo spremenljivko $u = \cos\vartheta$. Vemo, da bo $-1 \leq u \leq 1$:

$$t = \int \sqrt{\frac{J_1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sin^2\vartheta \tilde{E}_0 - \sin^2\vartheta \tilde{V}} =: \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{f(u)}}$$

Definirali smo $f(u) = \frac{2}{J_1} \left(\sin^2\vartheta \tilde{E}_0 - \sin^2\vartheta \tilde{U} \right)$. V korenu bomo dobili nekakšen polinom. Upoštevamo $u = \cos\vartheta$, $\sin^2\vartheta = (1 - u^2)$.

$$f(u) = \frac{2}{J_1} \left((1 - u^2)\tilde{E}_0 - (1 - u^2) \frac{J_1}{2} \frac{(b - au^2)^2}{(1 - u^2)} + mglu \right)$$

Med $u_2 = -1$ in $u_1 = 1$ je $f(u) \geq 0$, torej je integral definiran.