Nelinearni oscilatorji. Primer bi bil pri nihalu, ki ga odmaknem za dovolj velik kot, da Taylorjev razvoj kosinusa ni več ustrezen.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2(x + \gamma x^3) = A\cos\omega t$$

Temu pravimo Duffingova enačba - gre za vzbujanje nihanja s frekvenco γ. Ni analitično rešljiva, lahko pa jo analiziramo s pomočjo faznega diagrama. Uporabimo Van der Polovo transformacijo:

$$u = x\cos\omega t - \dot{x}\omega^{-1}\sin\omega t$$

$$v = -x\sin\omega t - \dot{x}\omega^{-1}\sin\omega t$$

$$\dot{u} = -\sin\omega t - \cos\omega t\,\dot{x}\frac{1}{\omega} + \cos\omega t\,\dot{x} - \ddot{x}\omega^{-1}\sin\omega t = -\frac{\sin\omega t}{\omega}(\ddot{x} + x\omega^2) =$$

$$= \frac{\sin\omega t}{\omega}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)x + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2\gamma x^3 - A\cos\omega t\right]$$

$$\dot{v} = \frac{\cos\omega t}{\omega}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)x + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2\gamma x^3 - A\cos\omega t\right]$$

Spet moramo namesto x in $\dot{x}$ vstaviti u in v.

$$\dot{u} = \frac{1}{\omega}\sin\omega t\left[(\omega_0^2 - \omega^2)(u\cos\omega t - v\sin\omega t) - 2\beta\omega(u\sin\omega t + v\cos\omega t) + \omega_0^2\gamma(u\cos\omega t - v\sin\omega t)^3 - A\cos\omega t\right]$$

$$\dot{v} = \frac{1}{\omega}\cos\omega t\left[(\omega_0^2 - \omega^2)(u\cos\omega t - v\sin\omega t) - 2\beta\omega(u\sin\omega t + v\cos\omega t) + \omega_0^2\gamma(u\cos\omega t - v\sin\omega t)^3 - A\cos\omega t\right]$$

To povprečimo po periodi in dobimo diferencialni enačbi

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\omega}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)u + 2\beta\omega u + \frac{3}{4}\omega_0^2\gamma(u^2 + v^2)v\right]$$

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\omega}\left[-(\omega_0^2 - \omega^2)u + 2\beta\omega u - \frac{3}{4}\omega_0^2\gamma(u^2 + v^2)u + A\right]$$

Dobili smo nekaj, kar ni odvisno od časa, torej sklepamo, da bo morda $\dot{u} = \dot{v} = 0$. Lahko poskusimo iti v polarne koordinate, in sicer označimo

$$v = r\sin\vartheta$$

$$u = r\cos\vartheta$$

$$\frac{3}{4}\omega_0^2\gamma r^3 + (\omega_0^2 - \omega^2)r = A\cos\vartheta$$

$$2\beta\omega r = -A\sin\vartheta$$

Tu je r amplituda vsiljenega nihanja, ϑ pa faza.

$$A^2 = ... = (4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)r^2 + \left(\frac{3}{4}\omega_0^2\gamma\right)r^6$$

To je sicer grdo, je pa funkcija ene spremenljivke. Dobili smo resonančno krivuljo v implicitni obliki, ne da bi reševali enačbo. Časovne odvisnosti ne moremo dobiti (na začetku leta smo že za nevsiljenu nihanje dobili neanalitične eliptične integrale), smo pa dobili nekaj informacij o sistemu.

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\omega_0^2 x - \beta v - \omega_0^2\gamma x^3 + F\cos\tau$$

$$\dot{\tau} = \omega$$

S tem smo vpeljali čas kot koordinato.

Poincarejev presek. Gledamo podmnožico faznega prostora.

Lorenzov '63 sistem. Je prvi sistem, za katerega se je izkazalo, da je kaotičen. Opisuje ga sistem diferencialnih enačb.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z$$

Gre nekako ze to, da se rešitev, kadar doseže sedlo, razcepi na dve rešitvi, ki se med seboj oddaljujeta eksponentno (dokler ne dosežeta velikosti sistema):

$$x(0) + \varepsilon \to x(t) + \varepsilon e^{\lambda t}$$

1 Oblike nelinearnosti

Parametrična resonanca. Primer je Mathieujeva enačba:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + (\omega_0^2 2\gamma \cos 2\omega t x = 0)$$

Rešujemo s Floquetovim nastavkom:

$$x(t) = e^{\lambda t} P(t)$$

Kjer je $P(t)$ periodična funkcija, vzemimo kar $a \cos\omega t + b \sin\omega t$.

$$(\lambda^2 - \omega^2 + \omega_0^2 + 2\beta\lambda)(a\cos\omega t + b\sin\omega t) + 2(\lambda+\beta)\omega(-a\sin\omega t + b\cos\omega t) - 2\gamma\cos(2\omega t)(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = 0$$

Da se znebimo člena $2\gamma\cos\omega t$, obe strani pomnožimo s $\cos\omega t$ in integriramo. Podobno naredimo še s $\sin\omega t$.

$$(\lambda^2 - \omega^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2)a + 2(\lambda+\beta)\omega b - \gamma a = 0$$
$$(\lambda^2 - \omega^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2)b - 2(\lambda+\beta)\omega a + \gamma b = 0$$

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} (\lambda^2 - \omega^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 - \gamma) & 2(\lambda+\beta)\omega \\ -2(\lambda+\beta)\omega & (\lambda^2 - \omega^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 + \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

Ker ima dobljena matrika neprazno jedro, mora biti njena determinanta enaka 0. Sledi

$$((\lambda+\beta)^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \beta^2)^2 - \gamma^2 + 4\omega^2(\lambda+\beta)^2 = 0$$

$\lambda = 0$ je nekakšna meja tega sistema, tedaj velja

$$|\gamma| = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

Van der Polov oscilator. Imamo diferencialno enačbo

$$\ddot{x} - \beta(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Če je $x > 1$, prihaja do dušenja, je $x < 1$, pa do vzbujanja. Spet uporabimo Van der Polovo transformacijo in dobimo:

$$\dot{u} = -\beta(1 - x^2)\dot{x}\sin t$$
$$\dot{v} = -\beta(1 - x^2)\dot{x}\cos t$$
$$\dot{u} = \beta\left(1 - (u\cos t - v\sin t)^2\right)(u\sin t + v\cos t)\sin t$$
$$\dot{u} = \beta\left(1 - (u\cos t - v\sin t)^2\right)(u\sin t + v\cos t)\cos t$$

Ko to povprečimo po periodi, dobimo

$$\dot{u} = \frac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{u^2 + v^2}{4}\right)u$$
$$\dot{v} = \frac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{u^2 + v^2}{4}\right)v$$

Imamo dve stacionarni točki: $u, v = 0$ je odbojna točka, saj pri majhnih u velja $u, v \sim e^{\beta t/2}$. Druga je $u^2 + v^2 = 4$, gre za limitni cikel - torej ne le ena točka, temveč celotna krožnica.