Zadnjič smo obravnavali Besselovo funkcijo. Dokopali smo se do rešitve $J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\nu+2n} n! \Gamma(\nu + n + 1)}$ va $\mu = \mu_1 = \nu$. Zdaj poglejmo še drugo rešitev. Če velja $\mu_1 - \mu_2 = 2\nu \notin \mathbb{N}$, ni težav: Druga rešitev je $J_{-\nu}(z)$, ki je linearno neodvisna od prve. Splošna rešitev je torej

$$y = C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z)$$

Zdaj pa poglejmo še primer, ko je $2\nu \in \mathbb{N}$. Ločimo dva primera: Ko je 2ν sodo ali liho število. Obravnavajmo vsako možnost posebej.

- 2ν je liho število:

Od prej imamo rekurzivno zvezo: $c_k k(k - 2\nu) = -c_{k-2}$ Če je $k = 2\nu$, velja $c_{k-2} = 0$. Ker je 2ν liho število, je k liho število, $k - 2$ pa prav tako. Tedaj naj bojo vsi koeficienti $c_n = 0$, če je n lih. Kot prej izberemo c_0 in dobimo funkcijo $J_{-\nu}$. Pri členu $n = 0$ je J_ν člen omejen v okolici 0, $J_{-\nu}$ člen pa ne - torej imamo linearno neodvisni rešitvi.

- 2ν je sodo število

Ali drugače povedano: $\nu = m \in \mathbb{N}$. Spet lahko naredimo isto kot prej. Trdimo pa, da tedaj J_{-m} in J_m nista linearno neodvisni. Bolj specifično,

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$$

Dokaz:

$$J_{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{-m-2n} n! \Gamma(-m + n + 1)} z^{2n-m}$$

Če je $-m + n + 1 \leq 0$, imamo težavo z Γ funkcijo - v negativnih celih številih gre namreč v neskončno. Zanima nas torej le vsota od m naprej, označimo $k = n - m$.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{2^{m+2k}(m+k)! \Gamma(k+1)} z^{m+2k} = (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{m+2k}(m+k)! k!} z^{m+2k}$$

$$L_\nu(z)(-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{m+2n} n! \Gamma(m + n + 1)} z^{m+2n}$$

Vidimo, da sta si vrsti bolj ali manj enaki, le v imenovalcu moramo na primeren način izraziti Γ funkcijo.

Lastnosti Besselovih funkcij

$$J_{1/2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1/2} n! \Gamma(n + 3/2)} z^{2n+1/2}$$

$$\Gamma(n + 3/2) = (n + \frac{1}{2}) \cdot (n - \frac{1}{2}) \cdot ... \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(2n+1)(2n-1)... \cdot 3 \cdot 1}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$$

Sledi

$$J_{1/2}(z) = \sum_{0=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1/2} n! (2n+1)(2n-1)...5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi}} z^{2n+1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2 \cdot n \cdot (2n+1)(2n-1)... \cdot 3 \cdot 1} z^{2n+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^2}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Vidimo $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$. Na podoben način dokažemo $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$

Trditev. Veljajo naslednje enakosti:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^\nu J_{nu}(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z)\right)$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^{-\nu} J_\nu(z)\right) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(J_\nu(z)) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(J_\nu(z)) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = -J_{\nu+1}$
5. $\frac{2\nu}{z} J_\nu J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$
6. $2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(J_\nu(z)\right) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$

Dokaz. Točko (1) dokažemo tako, da funkcijo $z^\nu J_\nu(z)$ zapišemo kot vrsto in jo kot tako odvajamo po z. Točko (2) dokažemo podobno. Točko (3) dokažemo tako, da enakost pri točki (1) najprej na levi strani uporabimo pravilo za odvod produkta, nato pa obe strani delimo z z^ν. Točko (4) dokažemo tako, da isti postopek uporabimo na točki (2). Enakosti (5) in (6) pa sta razlika ter vsota enakosti (3) in (4).

1 Lastnosti celoštevilskih Besselovih funkcij

Izrek. $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)t^m = e^{\frac{z}{2}(t-1/t)}$ za neki $z, t \in \mathbb{C}$. Pravimo, da je funkcija $e^{\frac{z}{2}(t-1/t)}$ generirajoča ali rodovna funkcija celoštevilskih Besselovih funkcij - v resnici gre v tem izreku za njen razvoj v Laurentovo vrsto.

Dokaz.

$$e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} e^{\frac{zt}{2}} \cdot e^{-\frac{z}{2t}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{zt}{2}\right)^k\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n \left(\frac{z}{2t}\right)^n\right)$$

Dobimo produkt vrst, šlo bo za vrsto oblike $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} ?\, t^m$ Člen pri t^m je enak

$$\sum_{k-n=m} \frac{1}{k!}\frac{z^k}{2^k}(-1)^n \frac{z^n}{2^n}\frac{1}{n!}$$

Vstavimo $k = n + m$, dobimo vsoto po vseh pozitivnih n:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+n)!} \frac{(-1)^n z^{m+2n}}{n! 2^{m+2n}} = J_m(z)$$

Se pravi so koeficienti te vrste ravno Besselove funkcije.

Trditev. Veljajo naslednje lastnosti:

1. Za vse $z, w \in \mathbb{C}$ in $m \in \mathbb{N}$ velja
$$J_m(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z) J_k(w)$$
2. $1 = J_0(z^2) + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} J_k(z)^2$
3. $|J_0(z)| \leq 1$ in $|J_k(z)| \leq 1/\sqrt{2}$ za $k = 1, 2, ...$
4. Za $x \in \mathbb{R}$:
$$J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(m\varphi - x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

Dokaz. Prvo enakost dokažemo z rodovno funkcijo:

$$\sum_{\infty=-\infty}^{\infty} J_m(z+w)t^m = e^{\frac{z+w}{2}(t-1/t)} = e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} \cdot e^{\frac{w}{2}(t-1/t)}$$

Ti dve eksponentni funkciji zapišemo kot vrsti, zmnožimo in pogledamo eksponent pri t^m.

Druga točka: V prvo enakost vstavimo $w = -z$, dobimo

$$J_m(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z)J_k(-z)$$

$$J_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} ...z^{2n+k}$$

Če je k sod, je $J_k(-z) = J_k(z)$. Če je lih, je $J_k(z) = -J_k(z)$.

Točka (3) sledi direktno iz točke (2).

Točka (4): Dokazali bomo jutri z uporabo rodovne funkcije in spremenljivko $t = e^{i\varphi}$.