Eksaktna forma. Najprej razložimo, kaj mislimo s formami.

- 0-forma: Skalarji in skalarne funkcije.
- 1-forma: Vektorji (jakosti). Gre za gradient 0-forme.
- 2-forma: Vektorji (pretoki). Gre za rotor 1-forme.
- 3-forma: Skalarji (gostote). Gre za divergenco 2-forme.

Če je forma eksaktna, se jo da zapisati kot odvod $n-1$ forme.

Zaprta forma. Zaprta forma pomeni, da je njen integral po zaključeni zanki/ploskvi enak 0. Če je forma eksaktna, je gotovo tudi zaprta, obratno pa ne velja nujno, kajti:

$$\text{Bodi} \oint \vec{v}\, d\vec{r} = 0$$

$$\oint \vec{v}\, d\vec{r} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{v}) d\vec{S}$$

To zadnje pa obstaja le, če definicijsko območje nima lukenj.

Elektromagnetizem. Označimo potencial $\vec{A}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = \nabla U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Edini rahel problem je, da U in $\vec{A}$ nista enolično določena. Napetost U po dogovoru začnemo meriti pri ozemljitvi, vendar je to zgolj dogovor. Pri $\vec{A}$ je važen le rotor, zato ga lahko spremenimo za gradient poljubne skalarne funkcije. Če to storimo, moramo prilagoditi tudi U:

$$\vec{A'} = \vec{A} + \nabla f$$

$$\Rightarrow U' = U - \frac{\partial f}{\partial t}$$

V relativnosti definiramo sledeča četverca:

$$A^\mu = \left(\frac{U}{c}, \vec{A}\right)$$

$$\partial^\mu = \pm\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\nabla^2 U - \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Zdaj izberimo tak f, da je $\nabla^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ in definiramo $\vec{\nabla}\vec{A}' = \vec{\nabla}\vec{A} + \nabla^2 f$. Poskrbimo lahko tudi, da je $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. To pomeni, da je

$$-\nabla^2 U = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

To je Laplaceova enačba, ki je popolnoma rešljiva.

Amperov zakon. Na podlagi naše definicije $\overrightarrow{B}$ lahko izrazimo

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

$$-\nabla^2 A + \nabla(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}) = \mu_0 \overrightarrow{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \left(\nabla \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} \right)$$

Vemo, da je $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, torej je

$$-\nabla^2 \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \overrightarrow{A} + \nabla \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right) = \mu_0 \overrightarrow{j}$$

V prvih dveh členih prepoznamo $-\partial_\nu \partial^\nu A^\mu$, v drugem pa $\partial_\mu A^\mu$, za kar smo že prej rekli, da je enako 0. Operatorju $\partial_\nu \partial^\nu$ rečemo tudi d'Lambertov operator in ga včasih označimo s $\Box$, saj gre za Laplaceov operator (Δ) v štirih dimenzijah. Imamo torej diferencialno enačbo $\Box \overrightarrow{A} = \mu_0 \overrightarrow{j}$, rešitev katere so ravni valovi, ki potujejo s svetlobno hitrostjo.

Ta razmislek smo začeli z uvedbo fizikalne količine $\overrightarrow{A}$, ki ni fizikalno smiseln, saj ni merljiv. Vendar lahko izmerimo integral te količine:

$$\oint \overrightarrow{A} d\overrightarrow{r} = \oiint \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} d\overrightarrow{S} = \oiint \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \Phi_m$$

Ahmeronov-Bohmov pojav. Naša količina $\overrightarrow{A}$ se pojavi še nekje. Če vzamemo Feynmannov integral $e^{iS/\hbar}$, akcijo S dobimo z integralom

$$S = \int \mathcal{L} dt$$

Lagrangian $\mathcal{L}$ je enak

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\overrightarrow{r}}^2 - V(r) + e \dot{\overrightarrow{r}} \cdot \overrightarrow{A}$$

Sledi $S = e \int \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$. Če pošljemo delec okoli magnetnega polja B, lahko izmerimo jakost tega magnetnega polja, kajti potencialna razlika med potema je enaka integralu Lagrangiana po zaključeni poti.

$$S = e \oint \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$$

Prevajanje toplote:

$$\overrightarrow{j} = -\lambda \nabla T$$

Toplotni tok $\overrightarrow{j}$ je 2-forma, ∇T pa 1-forma. Sledi, da je λ pretvornih iz prostora 1-form v prostor 2-form. Pri ohranitvi energije pa velja:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} = 0$$

Tu ni težav: tako w kot $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j}$ sta 3-formi. V štirih dimenzijah bi veljalo $\partial_\mu j^\mu = 0$ - res pa je, da pri toploti posebne teorije relativnosti običajno ne potrebujemo.
Če zgornji enačbi združimo v eno samo, dobimo

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T$$

To pa je difuzijska enačba.

Viskoznost. Pri klasični fiziki smo viskoznost opisali z enačbo

$$\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}S_y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Prepišimo to z indeks notacijo, ki smo jo spoznali med prejšnjimi predavanji:

$$dF_i = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dS_j$$

To ni več odvisno od izbire koordinat.

$$F_i = \oiint \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dS_j = \eta \iiint \partial_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = \eta \iiint \nabla^2 v_i dV$$

S tem smo dobili Navier-Stokesovo enačbo:

$$\overrightarrow{f} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{F}}{\mathrm{d}V} = \eta \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{f} = -\nabla(p + \rho g h) + \eta \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v}) \overrightarrow{v} \right) = -\nabla(p + \rho g h) + \eta \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

Če se masa ohranja, lahko upoštevamo $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\overrightarrow{v}\rho) = 0$, čče je tekočina nestisljiva, pa velja tudi

$$(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v}) = 0$$

Ker pa je divergenca enaka 0, lahko kakor pri elektromagnetizmu uvedemo novo funkcijo $\overrightarrow{\psi}$:

$$\overrightarrow{v} = \nabla \times \psi$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{v} = \text{vrtinčnost} = \overrightarrow{\zeta} = -\nabla^2 \psi$$

Spet lahko dobimo Laplaceovo diferencialno enačbo $\nabla^2 \overrightarrow{\psi} = 0$ V dveh dimenzijah ima ψ le komponento z, kar nam stvari dodatno poenostavi.

Vektorski odvodi funkcij položaja. Recimo, da imamo $\overrightarrow{r} = (x, y, z) = r_i$

$$\partial_i r_j = \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\partial_i r_i$ nam da število dimenzij. $\partial_i r$ nam da enotski vektor v smeri r.

$$\overrightarrow{\nabla} r^n = n r^{n-1} \nabla r = n r^{n-1} \frac{\overrightarrow{r}}{r} = n r^{n-2} \overrightarrow{r}$$

$$\nabla r^{n-1} \overrightarrow{r} = [(n-1) r^{n-3} \overrightarrow{r}] \cdot \overrightarrow{r} + r^{n-1} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r}$$

Vemo že, da je $\nabla \overrightarrow{r}$ enako številu dimenzij, obravnavali pa bomo večinoma samo primere, ko je to enako 3. Sledi:

$$\nabla(r^{n-1} \overrightarrow{r}) = r^{n-1}(n - 1 + 3) = r^{n-1}(n+2)$$

$$\nabla^2 r^n = n \nabla(r^{n-2} \overrightarrow{r}) = n(n+1) r^{n-2}$$

Rešitev Laplaceove enačbe:

$$\nabla^2 f(r) = 0 :$$

$$f(r) = \frac{c}{r}$$

Brez izvorov povsod, razen pri $r = 0$. Če imamo na primer $U = \rho_e/\varepsilon_0$, je rešitev

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \rho_e(\vec{r}') \frac{1}{||\vec{r} - \vec{r}'||} d\vec{r}'$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{H}\right) = -\nabla^2 \vec{H} + \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) = \nabla \times \iiint j(\vec{r'})\delta(\vec{r} - \vec{r'})d\vec{r'}$$

Upoštevamo $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$, nato na obeh straneh pomnožimo z $1/\nabla^2$

$$\vec{H} \nabla \times \iiint \frac{\vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d\vec{r'}$$

Dobili smo Biot-Savartov zakon, upoštevati moramo le $\vec{j} = I\delta^2(\text{žice})\vec{t}$, kjer je $\vec{t}$ smerni vektor žice. Nazadnje izrazimo

$$\vec{H} = \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r'})d^3\vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

$$\vec{H} = I \int \frac{d\vec{r} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Helmholtzov razcep. V splošnem ne moremo pričakovati, da bo polje brez vrtincev ali brez izvorov. Morda pa ga lahko zapišemo kot vsoto brezvrtinčnega polja in polja brez izvorov:

$$\vec{v} = -\nabla\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Če na obeh straneh uporabimo divergenco:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = -\nabla^2\varphi$$

Dobimo $\varphi = \iiint \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV'$

Če na obeh straneh uporabimo rotor:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\nabla^2 \vec{A}$$

Dobimo $\vec{A} = \iiint \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{v})\vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV'$

Primer: Toplotna energija z izvori. Imejmo

$$\vec{j} = -\lambda\nabla T$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = q$$

$$-\lambda\nabla^2 T = q$$

$$T(\vec{r'}) = \frac{1}{\lambda} \iiint \frac{q(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV'$$

Nalogo se v dovolj preprostih primerih da rešiti tudi drugače, in sicer velja:

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^r 4\pi r'^2 q(r')dr'$$

Ker je prvi integral v dovolj preprostih primerih enak $4\pi r^2 j(r)$, lahko izrazimo

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \int_0^r r'^2 q(r')dr'$$

V dveh dimenzijah:

$$U = \frac{\ln(r)}{2\pi}$$

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}_0 \frac{\ln(r)}{2\pi} = \mu_0 I \frac{\ln(r)}{2\pi} \hat{e}_z$$

Tedaj je $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\varphi$

Naredimo lahko tabelo, kako izgledajo polja in potenciali v različnih dimenzijah: Opazimo, da ima v

	1D	2D	3D
Polje:	$\hat{e}_x$	$\frac{1}{2\pi r} \frac{\overrightarrow{r}}{r}$	$\frac{\overrightarrow{r}}{r}$
Potencial:	$\|x\|$	$\frac{\ln(r)}{2\pi}$	$\frac{1}{4\pi r}$

treh dimenzijah limito $r \to \infty$ enako 0, v eni in dveh ap nima limite. Sledi, da bi se vesolje, ko bi bilo eno- ali dvodimenzionalno, sesedlo samo vase.
V eni dimenziji operiramo v primeru ploščatega kondenzatorja, v dveh dimenzijah v primeru polj žic in cilindrov, v treh dimenzijah pa v primeru krogelnega kondenzatorja, točkastih nabojev, gravitacije, ipd.