1 Greenove funkcije

Imejmo linearni operator $\mathcal{L}_l$ in diferencialno enačbo

$$\mathcal{L}_{\overrightarrow{r}} u(\overrightarrow{r}) = f(\overrightarrow{r})$$

Greenova funkcija je funkcija z lastnostjo

$$\mathcal{L}_{\overrightarrow{r}} G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})$$

Če poznamo to funkcijo, je rešitev diferencialne enačbe

$$u(\overrightarrow{r}) = \int G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) f(\overrightarrow{r_0}\, \mathrm{d}^3\overrightarrow{r_0})$$

Formalno je $u = \mathcal{L}_{\overrightarrow{r}}^{-1} f$ (če operator $\mathcal{L}$ zapišemo kot matriko), torej bi lahko rekli, da je Greenova funkcija integralsko jedro inverza $\mathcal{L}_{\overrightarrow{r}}$. V kartezičnih koordinatah zapišemo:

$$\delta(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

V polarnih (2D) ali sferičnih (3D) pa:

$$2D: \quad \delta(\overrightarrow{r}) = \frac{\delta(r)}{2\pi r}$$

$$3D: \quad \delta(\overrightarrow{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$$

Poznamo že Greenovo funkcijo za difuzijsko enačbo v eni dimenziji:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla_x^2\right) G = \delta(x - x_0)\delta(t)$$

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\, e^{-(x - x_0)^2/4Dt}$$

Rešitev iz začetnih pogojev dobimo s konvolucijo

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x_0, t) u(x_0, 0)\, \mathrm{d}x_0$$

Poznamo tudi Greenovo funkcijo za Poissonovo enačbo:

$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|}$$

Da rešimo nehomogeno enačbo

$$\nabla^2 \varphi = f,$$

dobimo rešitev iz integrala

$$\varphi(\overrightarrow{r}) = \int G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) f(\overrightarrow{r_0})\, \mathrm{d}^3\overrightarrow{r_0}$$

1.1 Helmholtzova enačba v neskončnem prostoru

Obravnavamo operator $\mathcal{L} = \nabla^2 + q(\overrightarrow{r})$

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})$$

1.1.1 2D prostor

- $k^2 = 0$: V bistvu iščemo rešitev rešitev Laplaceove enačbe, ki ima singularnost. Tej zahtevi ustreza logaritemska funkcija.
$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = A \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|$$
Ko Laplaceovo enačbo integriramo po prostoru, dobimo:
$$\int \nabla^2 G \, \mathrm{d}^3 \overrightarrow{r} = \int \delta \, \mathrm{d}^3 \overrightarrow{r}$$
Integral prevedemo na integral po površini.
$$\int \frac{\partial G}{\partial n} \, \mathrm{d}S = 1 = \lim_{r \to \infty} A \cdot 2\pi r \frac{1}{r} \Rightarrow A = \frac{1}{2\pi}$$
Sledi:
$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|$$

- $k^2 > 0$: Singularna rešitev za tak robni pogoj je $Y_0(kr)$ ali Hanklovi funkciji $H_0^{(1)}(kr)$ in $H_0^{(2)}(kr)$. Običajno gre za nekakšno valovanje, in obravnavamo lahko tri različne primere: če valovanje potuje navzven, imamo Greenovo funkcijo
$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = -\frac{1}{4} H_0^{(1)}(k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|)$$
Če valovanje potuje navznoter, imamo
$$g(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{4} H_0^{(2)} k(|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|)$$
Če gre za stoječe valovanje, pa je Greenova funkcija za neskončen 2D prostor
$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{4} Y_0(k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|)$$

- $k^2 < 0$: singularna rešitev je modificirane Besselova funkcija K_0. Velja torej
$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = -\frac{1}{2\pi} K_0(k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|)$$

1.1.2 3D prostor

- Za $k^2 = 0$ že vemo:
$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|}$$
Po navadi se pojavi pri reševanju Poissonove enačbe

- $k^2 > 0$: Običajno gre za nekakšno valovanje ali sipanje. Ločimo primera, ko gre za potujoče ali stoječe valovanje. Za potujoče valovanje:
$$G = \frac{1}{4\pi r} e^{\pm ikr}$$
Za stoječe valovanje:
$$G = -\frac{\cos(kr)}{2\pi r}$$

- $k^2 < 0$:
$$G = -\frac{e^{-kr}}{4\pi r}$$
Takšno Greenovo funkcijo bi potrebovali za npr. obravnavo difuzije radiaoktivnega elementa, ko število atomov eksponentno pojema.

Primer: Greenova funkcija za harmonski oscilator.

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2\right)$$

Vzemimo primer, ko oscilator na začetku miruje. Iščemo funkcijo G, za katero velja

$$\mathcal{L}G(t, t_0) = \delta(t - t_0)$$

Pri začetnem pogoju, da oscilator na začetku (do časa t_0) miruje, nato pa zaradi nekakšnega vzbujanja začne nihati. Ker oscilator do t_0 miruje, nato pa niha, želimo pa, da je Greenova funkcija zvezna, se nam ponuja Greenova funkcija

$$G(t, t_0) = \frac{\sin(\omega[t - t_0])}{\omega} H(t - t_0)$$

Zdaj lahko s to Greenovo funkcijo izračunamo $u(t)$ za vsakršno nehomogenost ali robni pogoj, opisan z enačbo

$$\mathcal{L}u = f$$

$$u(t) = u(0)G'(t, 0) + u'(0)G(t, 0) + \int_0^\infty G(t, t_0)f(t_0)\,\mathrm{d}t_0$$

1.2 Končno območje

Za območje $\mathcal{D}$ in Dirichletov robni pogoj potrebujemo takšno $G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0})$, da je

$$G(\overrightarrow{r_B}, \overrightarrow{r_0} = 0) \text{ za } \forall \overrightarrow{r_B} \in \partial\mathcal{D}$$

Zapišemo

$$G = G_\infty + g$$

G_∞ je Greenova funkcija za neskončno območje, g pa je rešitev homogene enačbe

$$\mathcal{L}g = 0$$

z robnim pogojem $g(\partial\mathcal{D}) = -G_\infty(\partial\mathcal{D})$. Enačba je homogena, vendar ima lahko zahteven robni pogoj. Ko dobimo G, pa lahko izračunamo $u(\overrightarrow{r})$ po sledečem postopku: Greenova zveza:

$$\int_\mathcal{D} (u\mathcal{L}v - v\mathcal{L}u)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{D}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

V tem primeru uporabimo G in u:

$$\int_\mathcal{D} \left(u\nabla^2 G - G\nabla^2 u\right) = \int_\mathcal{D} \left(u\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) - G\nabla^2 u\right)\mathrm{d}V = \int_{\partial D} \left(u(\overrightarrow{r})\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

Zahtevali smo, da je $G\big|_{\partial\mathcal{D}} = 0$:

$$u(\overrightarrow{r_0}) - \int G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0})f(\overrightarrow{r})\,\mathrm{d}^3\overrightarrow{r} = \int_{\partial\mathcal{D}} u(\overrightarrow{r_B})\frac{\partial G(\overrightarrow{r_B}, \overrightarrow{r_0})}{\partial n_B}\,\mathrm{d}S_B$$

Zamenjamo spremenljivki $\overrightarrow{r}$ in $\overrightarrow{r_0}$ - to smemo, saj je Greenova funkcija simetrična:

$$u(\overrightarrow{r}) = \int G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0})f(\overrightarrow{r_0})\,\mathrm{d}^3\overrightarrow{r} + \int u(\overrightarrow{r_B})\frac{\partial G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_B})}{\partial n_B}\,\mathrm{d}S_B$$

To je rešitev nehomogene enačbe s predpisanim $u(\overrightarrow{r_B})$. Za to pa smo potrebovali Greenovo funkcijo, ki je na robu domene $\mathcal{D} = 0$ - Diricletov problem.

Primer. Polneskončni prostor v 2D

$$\nabla^2 u = f$$

Robni pogoj: $u(\overrightarrow{r_B}) = h(y, x = 0) = h(y)$

$$\nabla^2 G = \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}), \qquad \overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0)$$

$$G_\infty = \frac{1}{2\pi} \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|$$

Iščemo:

$$\nabla^2 g = 0, \qquad g(0, y) = -G_\infty$$

Kadar so meje območja premice ali krožnice, lahko uporabimo zrcaljenje. Vemo namreč, da bo prezrcaljena rešitev ravno tako zadoščala obema pogojema. Označimo $\overrightarrow{r_*} = (-x_0, y_0)$:

$$g = -\frac{1}{2\pi} \ln |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_*}|$$

Tako je skupna Greenova funkcija enaka

$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_*}|}$$