Kompleten sistem med seboj komutirajočih operatorjev. Naj za operatorja A in B velja

$$[A, B] = 0$$

Naj bo a lastna vrednost A in $|a\rangle$ pripadajoči lastni vektor.

$$Ba|a\rangle = BA|a\rangle = AB|a\rangle$$

Oziroma $AB|a\rangle = aB|a\rangle$. Imamo dve možnosti: če je a nedegeneriran, je $B|a\rangle \propto |a\rangle$ in je potemtakem $|a\rangle$ hkrati lastno stanje operatorja B. Če je a degeneriran (torej je lastna vrednost za dve lastni stanji $|a_1\rangle$ in $|a_2\rangle$), pa lahko lastni stanji operatorja B zapišemo kot linearno kombinacijo lastnih stanj A:

$$|b_{1,2}\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$$

Lahko imamo tudi cele sisteme operatorjev, ki med seboj komutirajo. Primer so H, $\overrightarrow{L}$ in $\overrightarrow{S}$ (energija, vrtilna količina in spin).

Postulati (aksiomi) kvantne mehanike (Kopenhagenska interpretacija):

1. Kvantni pojavi na klasični skali niso zaznavni. Svet je ločen na klasičnega in kvantnega. Kvantni sistem je določen s kvantnim stanjem $|\psi\rangle$, ki je element Hilbertovega prostora stanj.
2. Vsaki merljivi količini (opazljivki) ustreza hermitski operator, npr. $A = A^\dagger$.
3. Pričakovana vrednost operatorja za neko stanje $|\psi\rangle$ je skalarni produkt $\langle\psi|A\psi\rangle$. Če poskus izvedemo velikokrat, bomo torej v povprečju dobili to vrednost.
4. Časovni razvoj je podan z unitarnim razvojem $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$, pri čemer je generator Hamiltonov operator $U(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)$. Od tod sledi tudi Schrödingerjeva enačba:

$$\frac{\mathrm{d}|\psi\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{iH}{\hbar}|\psi\rangle$$

5. Kvantna meritev:
   - Če lahko neko stanje razvijemo kot $|\psi\rangle = \sum_n c_n|a_n\rangle$ po lastnih stanjih operatorja A (velja torej $A|a_n\rangle = a|a_n\rangle$), je verjetnost, da bomo pri merjenju izmerili delec v lastnem stanju $|a_n\rangle$ enaka $P_n = |c_n|^2$. Vsota verjetnosti mora biti seveda 1, toraj morajo biti $\{c_n\}_n$ ortonormirana baza.
   - Po takšni meritvi je sistem v stanju $|a_n\rangle$, torej velja $|\psi\rangle = |a_n\rangle$. Temu pravimo kolaps kvantnega stanja. Tedaj je torej $c_m = 0$ za vsak $n \neq m$. Sistem se časovno razvija naprej od novega začetnega stanja.

Opazimo, da peti aksiom krši četrtega. Ima še eno zanimivo implikacijo: Pred meritvijo, je delec v linearni kombinaciji lastnih stanj in lastnosti, ki jih želimo izmeriti, pravzaprav nima. Dobi jih šele, ko jih mi izmerimo.

Harmonski oscilator. Klasični enodimenzionalni linearni harmonski oscilator v eni dimenziji opisujejo enačbe

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

V kvantni mehaniki to izrazimo kot:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}kx^2 = ...$$

Definiramo konstanto $\xi^2 = \dfrac{\hbar}{\omega m}$, kjer je ω definirana kot prej.

$$... = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{\xi^2} - \frac{1}{2}\xi^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)$$

Zdaj bomo naredili nekaj pikantnega: Matematika namreč pravi, da je $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$. Ker sta v našem primeru a in b operatorja, ki ne komutirata, moramo to narediti malo drugače, in sicer je:

$$... = \frac{\hbar\omega}{4}\left[\left(\frac{x}{\xi} + \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{x}{\xi} - \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{x}{\xi} - \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{x}{\xi} + \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right]$$

Definiramo operator $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{\xi} + \xi\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$. Ker je *displaystyle* $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\dagger = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, je $a^\dagger = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{\xi} + \xi\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$.
Operatorju $a^\dagger$ rečemo kreacijski, operatorju a pa anihilacijski.
Naša enačba torej dobi obliko

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\left(aa^\dagger + a^\dagger a\right)$$

Izračunamo $[a, a^\dagger]$:

$$aa^\dagger - a^\dagger a = ... = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\xi^2} + \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\xi}x - \xi^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{x}{\xi}\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\xi^2} - \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\xi}x + \frac{x}{\xi}\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \xi^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

Ta operator uporabimo na "testni" funkciji ψ:

$$[a, a^\dagger]\psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\psi - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi = \psi + x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \psi$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$$

To da naši enačbi da končno obliko:

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

Definiramo operator $\widehat{n} = a^\dagger a$. Izkaže se, da je sebi adjungiran: $\widehat{n}^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger a = \widehat{n}$. Zadošča torej poiskati lastne vrednosti in lastne vektorje $\widehat{n}$.

$$\widehat{n}\hat{\varphi}_\lambda - \lambda|\varphi_\lambda\rangle$$

Na obeh straneh skalarno pomnočimo z $\langle\varphi_\lambda|$.

$$\langle\varphi_\lambda|\widehat{n}|\varphi_\lambda\rangle = \lambda\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle$$

Vemo, da je $\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle \geq 0$. Iz lastnosti sebi adjungiranih operatorjev lasko sodimo, da je $\lambda \geq 0$.
Preverimo lahko, ali je λ lahko enaka 0. Dobimo diferencialno enačbo

$$\left(\frac{x}{\xi} + \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\varphi_0(x) = 0$$

Diferencialna enačba ima rešitev

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\xi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\xi^2}}$$

Torej je $\lambda = 0$ lahko lastna vrednost. Poiščimo še ostale lastne vrednosti.

$$[\widehat{n}, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger]a = a^\dagger = \widehat{n}a^\dagger - a^\dagger\widehat{n}$$

Če je φ_λ rešitev z lastno vrednostjo λ, računamo:

$$\widehat{n}|\varphi_\lambda\rangle = \lambda|\varphi_\lambda\rangle$$

$$\widehat{n}a^\dagger|\varphi_\lambda\rangle = (a^\dagger\widehat{n} + a^\dagger)|\varphi_\lambda\rangle$$
$$= (\lambda + 1)|\varphi_\lambda\rangle$$

Hkrati vemo, da je

$$|c_\lambda|^2\langle\varphi_{\lambda+1}|\varphi_{\lambda+1}\rangle = \langle a^\dagger\varphi_\lambda|a^\dagger\varphi_\lambda\rangle =$$
$$\langle\varphi_\lambda|aa^\dagger|\varphi_\lambda\rangle = \langle\varphi_\lambda|(1 + a^\dagger a)|\varphi_\lambda\rangle = (\lambda + 1)\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle$$

Se pravi dobimo rekurzivno zvezo za lastna stanja φ_λ:

$$|\varphi_{n+1}\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n+1}}|\varphi_n\rangle$$

Ali drugače:

$$|\varphi_n\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}}|\varphi_{n-1}\rangle = \frac{a^\dagger a^\dagger}{\sqrt{n(n-1)}}|\varphi_{n-2}\rangle = ...$$
$$= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|\varphi_0\rangle$$

Podobno:

$$[\widehat{n}, a] = ... = -a$$
$$\widehat{n}a|\varphi_n\rangle = ...(n-1)a|\varphi_n\rangle = (n-1)\tilde{c_n}|\varphi_{n-1}\rangle$$
$$|\varphi_n\rangle = \frac{a}{\sqrt{n+1}}|\varphi_{n+1}\rangle = ... = \frac{a^n}{\sqrt{(n+1)!}}|\varphi_n\rangle = |\varphi_0\rangle$$

Se pravi, da gre za naravna števila. Dobimo znani rezultat:

$$H = \hbar\omega\left(\widehat{n} + \frac{1}{2}\right)$$
$$H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$$
$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Ali so možna še kakšna druga lastna stanja? Vemo, da negativnih lastnih vrednosti ne moremo imeti. Med drugim velja:

$$a|\varphi_0\rangle = 0$$

Zaraadi rekurzivne zveze bi ne-cela lastna vrednosti zahtevala obstoj lastne vrednosti med -1 in 0, kar pa je nemogoče.