1 Greenova funkcija - nadaljevanje

1.1 Numerični pristopi

Imamo operator

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \qquad x \in [0,1],\ u(0) = u(1) = 0$$

Primer je očitno analitično rešljiv, imamo lastne vrednosti $-\lambda_n = n^2\pi^2$ in lastne funkcije $\sim \sin(n\pi)$. Greenova funkcija je zlepek dveh daljic, ki se zlepi v x_0, razlika med naklonoma daljic je enaka 1. To je vse znano, zato bomo lahko primerjali z numeričnii rešitvami.

$$\mathcal{L}u = u'' \to \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2},$$

kjer je h dolžina intervala, na katere diskretno razdelimo interval $[0,1]$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Nato numerično poiščemo lastne vrednosti matrike. To lahko počnemu tudi z gršimi operatorji, zato je metoda uporabna, ko problem ni analitično rešljiv, moramo pa paziti, da imamo dovolj fino diskretizacijo območja. Če rešujemo nehomogen sistem $\mathcal{L}u = f(x)$, lahko rešitev razumemo kot sistem linearnih enačb, oziroma

$$\vec{u} = \mathcal{L}^{-1}\vec{f}$$

1.2 Sipanje

Imejmo linearni $\mathcal{L}$ (lahko Laplaceov, Helmholtzov, etc.), homogeno enačbo

$$\mathcal{L}u = 0$$

in Greenovo funkcijo G_∞ za območje $\mathcal{D}$, na katerem rešujemo enačbo.

$$\mathcal{L}G_\infty(\vec{r}, \vec{r_0}) = \delta(\vec{r} - \vec{r_0})$$

1.2.1 Notranji problem

Za notranjost območja $\mathcal{D}$ z Greenovo funkcijo dobimo

$$u(\vec{r}) = \int_{\partial\mathcal{D}} \left[u(\vec{r_B}) \frac{\partial G_\infty}{\partial n_B}(\vec{r}, \vec{r_B}) - \frac{\partial u(\vec{r_B})}{\partial n_B} G_\infty(\vec{r}, \vec{r_B}) \right] \mathrm{d}S_B$$

Vrednosti $u(\vec{r_B})$ in $\partial_{n_B} u(\vec{r_B})$ v splošnem nista neodvisni: eno si lahko izmislimo, drugo pa moremo izraziti le z rešitvijo enačbe - ki jo še računamo. Prej te težave nismo imeli, saj je bila na robu območja Greenova funkcija ali pa njen odvod enaka 0.

Opomba. Če integriramo $u(\vec{r})$, ko $\vec{r}$ leži na robu, moramo pred integral dodati faktor 1/2.

1.2.2 Zunanji problem

Želimo ugotoviti, kako Greenova funkcija opiše rešitev zunaj nekega objekta. Za rob območja definiramo n_∞ in S_∞, za rob objekta pa n_1 in $\S_1$.

$$u(\vec{r}) = \int_{S_\infty} \left[u\frac{\partial G_\infty}{\partial n_\infty} - \frac{\partial u}{\partial n_\infty} \right] \mathrm{d}S_\infty + \int_{S_1} \left[u\frac{\partial G_\infty}{\partial n_\infty} - \frac{\partial u}{\partial n_\infty} G_\infty \right] \mathrm{d}S_\infty$$

Če v limiti $|\vec{r}| \to \infty$ u pada proti 0, lahko prvi integral enačimo z 0. Gre namreč za integral funkcije $\sim r^{-2}$.

Primer. Imamo ravni val oblike $u_i = \exp(ikz)$, ki se siplje na barieri. Označimo vpadno valovanje u_i in sipano valovanje u_s.

$$u = u_i + u_s$$

Vemo, da gre u_s v neskončnosti proti 0 (fizikalna razlaga bi bila, da se skupna energija ne sme povečevati). Prvi člen v izrzu za $u(\overrightarrow{r})$ bi dal nazaj ravno u_i, torej mora drugi člen predstavljati sipano valovanje.

$$u(\overrightarrow{r}) = e^{ikz} + \int \left[\frac{\partial u(\overrightarrow{r_B})}{\partial n_B} G_\infty(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_B}) - \frac{\partial G_\infty(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_B})}{\partial n_B} u(\overrightarrow{r_B}) \right] \mathrm{d}S_B$$

Spet smo dobili integral, ki je rešljiv le, če je eden od produktov v integralu enak 0. Za akustično sipanje na trdni steni na primer vemo, da je

$$\frac{\partial u(\overrightarrow{r_B})}{\partial n_B} = 0$$

in problem postane rešljiv.

1.3 Sipanje na trdni sferi

Velja robni pogoj

$$\frac{\partial u}{\partial n_B} = 0$$

Valovna enačba za npr. zvok je

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \nabla^2 \varphi$$

Običajno takšno enačbo rešujemo z nastavkom

$$\varphi = u(\overrightarrow{r}) e^{-i\omega t}$$

Za krajevni del dobimo Helmholtzovo enačbo

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

Ker obravnavamo sipanje, spet razdelimo

$$u = u_i + u_s$$

Lastne funkcije v sferičnih koordinatah so sferični harmoniki in sferične Besselove ali Hanklove funkcije. Mi bomo vzeli Hanklove:

$$u_s = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos\vartheta) h_l^{(1)}(kr)$$

$$e^{ikz} = u_i = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (2l+1) i^l P_l(\cos\vartheta) j_l(kr)$$

Zdaj odvajamo:

$$\frac{\partial u}{\partial n_{r=R}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[(2l+1) i^l P_l(\cos\vartheta)\, k j_l'(kR) + c_l\, k h_l^{(1)\prime}(kR) \right]$$

Dobili smo funkcijo, ki je odvisna le od ϑ, poleg tega mora biti to enako 0. Izrazimo lakho c_l:

$$c_l = -(2l+1) i^l \, \frac{j_l'(kR)}{h_l^{(1)}}' (kR)$$

$$u(\overrightarrow{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{j_l'(kR)}{h_l^{1\prime}(kR)} P_l(\cos\vartheta) h_l^{(1)}(kr)$$

Ogledamo si lahko limito dolgih valov: $kR \to 0$ Vodilna reda sta $c_0, c_1 \sim (kR)^3$

$$u_s \sim \frac{(kR)^3}{3} \frac{e^{ikr}}{kr} \left(1 - \frac{3}{2} \cos\vartheta \right)$$

Ogledamo si sipalni presek:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = r^2 \frac{|u_s|^2}{|u|^2}$$

V limiti dolgih valov je

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \sim k^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}$$

1.4 Integralska formulacija Greenove funkcije

Imamo problem

$$\mathcal{L} - \lambda V(\overrightarrow{r})u(\overrightarrow{r})$$

z nekimi robnimi pogoji. λ tu ne pomeni lastne vrednosti, temveč zgolj neko konstantno. Predpostavimo, da poznamo G_0 za $\mathcal{L}$. Kot vemo, lahko rešitev $u(\overrightarrow{r})$ zapišemo kot konvolucijo G_0 in $\lambda V(\overrightarrow{r})$:

$$u(\overrightarrow{r}) = h(\overrightarrow{r}) + \lambda \int_{\mathcal{D}} G_0(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}) V(\overrightarrow{r_0}) u(\overrightarrow{r_0})\, \mathrm{d}^3\overrightarrow{r_0}$$

Tej enačbi pravimo Fredholmova integralska enačba. Označili smo $h(\overrightarrow{r})$, ki je rešitev enačbe

$$\mathcal{L}h = 0$$

in zadosti robnim pogojem.