1 Delec v magnetnem polju

Opazujemo "precesijo" delca okoli osi magnetnega polja. Naš Hamiltomian je

$$H = -\overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{B} = \frac{\mu_B}{\hbar} \overrightarrow{L} \cdot \overrightarrow{B}$$

Spomnimo se, da ima $\overrightarrow{L}$ dve lastni vrednosti: $l \in \mathbb{N}$ in $m = -l, ..., l$. Poleg tega vemo:

$$L^2 \left|lm\right\rangle = \hbar^2 \, l(l+1) \left|lm\right\rangle$$

$$L_z \left|lm\right\rangle = \hbar m \left|lm\right\rangle$$

Obravnavamo $l = 1$, kjer imamo tri možnosti za $\left|lm\right\rangle$:

$$\left|lm\right\rangle = \begin{cases} \left|1,\, 1\right\rangle \\ \left|1,\, 0\right\rangle \\ \left|1,\, -1\right\rangle \end{cases}$$

$m = 1: \quad L_z \left|1,\, 1\right\rangle = \hbar \left|1,\, 1\right\rangle$. Ker L_z predstavlja komponento polja v smeti z, to pomeni:

$$\overrightarrow{L} \cdot \widehat{e}_z \left|1,\, 1\right\rangle = \hbar \left|1,\, 1\right\rangle$$

Na osnovi tega izberemo začetni pogoj:

$$\overrightarrow{L} \cdot \widehat{n} \left|\psi,\, 0\right\rangle = \hbar \left|\psi,\, 0\right\rangle$$

Označimo

$$\overrightarrow{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} \quad , \qquad \widehat{n} = \begin{bmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Zanima nas časovni razvoj $\left|\psi, t\right\rangle$.

Ker opazujemo precesijo, lahko na začetku uporabimo $\varphi = 0$. Pri $l = 1$ ravno tako lahko zapišemo začetno stanje kot linearno kombinacijo

$$\left|\psi,\, 0\right\rangle = \alpha \left|1,\, 1\right\rangle + \beta \left|1,\, 0\right\rangle + \gamma \left|1,\, -1\right\rangle$$

Pri $\varphi = 0$ je naš začetni pogoj

$$\overrightarrow{L} \cdot \widehat{n} = L_x \sin\vartheta + L_z \cos\vartheta$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L} \cdot \widehat{n} \left|\psi,\, 0\right\rangle &= (L_x \sin\vartheta + L_z \cos\vartheta) \left(\alpha \left|1,\, 1\right\rangle + \beta \left|1,\, 0\right\rangle + \gamma \left|1,\, -1\right\rangle\right) = \\ &= \hbar \left(\alpha \left|1,\, 1\right\rangle + \beta \left|1,\, 0\right\rangle + \gamma \left|1,\, -1\right\rangle\right) \end{aligned}$$

Gre za problem lastnih vrednosti, kjer je ena od njih ($\hbar$) že določena z začetnim pogojem. Vpeljemo (kot a in $a^\dagger$ pri LHO):

$$L_\pm = L_x \pm i L_y$$

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$$

$$L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i}$$

$$L_\pm \left|lm\right\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \; \left|l,\, m \pm 1\right\rangle$$

Zdaj lahko izračunamo vse kombinacije $L_x \left|lm\right\rangle$, ki jih bomo potrebovali v matričnih elementih.

$$L_x \left|1,\, 1\right\rangle = \frac{L_+ + L_-}{2} \left|1,\, 1\right\rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{2-2} \left|1,\, 2\right\rangle + \sqrt{2-0} \left|1,\, 0\right\rangle\right)$$

Stanje $\left|1,\, 2\right\rangle$ ne obstaja, sicer pa smo tako ali tako pred njim dobili koeficient 0.

$$L_x \left|1,\, 0\right\rangle = \frac{L_+ + L_-}{2} \left|1,\, 0\right\rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{2-0} \left|1,\, 1\right\rangle + \sqrt{2-0} \left|1,\, -1\right\rangle\right)$$

$$L_x\,|1,\,-1\rangle = \frac{L_+ + L_-}{2}\,|1,\,-1\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\sqrt{2-0}\,|1,\,0\rangle + \sqrt{2-2}\,|1,\,-2\rangle\right)$$

Spet smo pred prepovedanim stanjem $|1,\,-2\rangle$ dobili koeficient 0, kar je dobro. Naše vrednosti $L_x\,|lm\rangle$ in $L_z\,|lm\rangle$ so:

$$L_x\,|1,\,1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,|1,\,0\rangle \qquad L_z\,|1,\,1\rangle = \hbar\,|1,\,1\rangle$$

$$L_x\,|1,\,0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,(|1,\,1\rangle + |1,\,-1\rangle) \qquad L_z\,|1,\,0\rangle = 0$$

$$L_x\,|1,\,-1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,|1,\,0\rangle \qquad L_z\,|1,\,-1\rangle = -\hbar\,|1,\,-1\rangle$$

To vstavimo v začetni pogoj:

$$(L_x \sin\vartheta + L_z \cos\vartheta)\,(\alpha\,|1,\,1\rangle + \beta\,|1,\,0\rangle + \gamma\,|1,\,-1\rangle) = \hbar\,(\alpha\,|1,\,1\rangle + \beta\,|1,\,0\rangle + \gamma\,|1,\,-1\rangle)$$

$$\sin\vartheta\,\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,(\alpha\,|1,\,0\rangle + \beta\,(|1,\,1\rangle + |1,\,-1\rangle) + \gamma\,|1,\,0\rangle) +$$

$$+ \cos\vartheta\,\hbar\,(\alpha\,|1,\,1\rangle - \gamma\,|1,\,-1\rangle) = \hbar\,(\alpha\,|1,\,1\rangle + \beta\,|1,\,0\rangle + \gamma\,|1,\,-1\rangle)$$

Enačimo člene z $|1,\,1\rangle$, $|1,\,0\rangle$ in $|1,\,-1\rangle$, da dobimo sistem enačb za α, β in γ.

$$|1,\,0\rangle : \qquad \sin\vartheta\,\frac{\hbar}{\sqrt{2}}(\alpha + \gamma) = \hbar\beta$$

$$|1,\,1\rangle : \qquad \sin\vartheta\,\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\beta + \cos\vartheta\,\hbar\alpha = \hbar\alpha$$

$$|1,\,-1\rangle : \qquad \sin\vartheta\,\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\beta - \cos\vartheta\,\hbar\gamma = \hbar\gamma$$

Reševanje sistema:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}\,\beta = \frac{\sqrt{2}\,\sin(\vartheta/2)\cos(\vartheta/2)}{2\sin^2(\vartheta/2)}\,\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\,\beta$$

$$\gamma = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\,\beta = \frac{\sqrt{2}\,\sin(\vartheta/2)\cos(\vartheta/2)}{2\cos^2(\vartheta/2)}\,\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan\frac{\vartheta}{2}\,\beta$$

$$|\psi,\,0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan\frac{\vartheta}{2}\,\beta\,|1,\,1\rangle + 1\,\beta\,|1,\,0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\,\beta\,|1,\,-1\rangle$$

β izračunamo iz normalizacije:

$$\left(\frac{1}{2}\tan^2\frac{\vartheta}{2} + 1 + \frac{1}{2}\cot^2\frac{\vartheta}{2}\right)\,|\beta^2| = 1$$

$$\cdots = \frac{|\beta^2|}{2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta} = 1$$

$$\beta = \sqrt{2}\,\sin\frac{\vartheta}{2}\,\cos\frac{\vartheta}{2}$$

Zdaj znane člene α, β in γ vstavimo v začetno stanje:

$$|\psi,\,0\rangle = \cos^2\frac{\vartheta}{2}\,|1,\,1\rangle + \sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,|1,\,0\rangle + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\,|1,\,-1\rangle$$

Zdaj zapišemo časovni razvoj Hamiltoniana. Koordinatni sistem nastavimo tako, da je $\overrightarrow{B} = (0, 0, B)$ in tako poskrbimo, da imata H in L_z iste lastne vrednosti in lastne funkcije.

$$H\,|1,\,1\rangle = \lambda B\hbar\,|1,\,1\rangle \qquad H\,|1,\,0\rangle = 0\,|1,\,0\rangle \qquad H\,|1,\,-1\rangle = \lambda B\hbar\,|1,\,-1\rangle$$

Kje je $\lambda = \mu_B/\hbar$. Zdaj lahko ψ razvijemo po lastnih funkcijah in tako dobimo časovni razvoj $|\psi,\,t\rangle$.

$$|\psi,\,t\rangle = \cos^2\frac{\vartheta}{2}\,e^{-i\lambda Bt}\,|1,\,1\rangle + \sqrt{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\,|1,\,0\rangle + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\,e^{i\lambda Bt}\,|1,\,-1\rangle$$