Polarizacija korgle. Krogla z radijem a je magnetno polarizirana tako, da velja:

$$\overrightarrow{P} = k\overrightarrow{r} \propto \overrightarrow{r}, \quad k > 0$$

Poznamo k, iščemo $\rho_v, \sigma_v, e(r), \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r})$. Po definiciji:

$$\rho_v = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{P} = -k\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r} = -3k$$

$$\sigma_v = \overrightarrow{P} \cdot \widehat{n}\Big|_{r=a} = k\overrightarrow{r} \cdot \widehat{n}\Big|_{r=a} = ka$$

$$e_{tot} = \int_V \rho_v \,\mathrm{d}V + \int_{\partial V} \sigma_v \,\mathrm{d}S = -3k\frac{4\pi a^3}{3} + ka4\pi a^2 = 0$$

$$e(r) = \varepsilon_0 \int E(r)\,\mathrm{d}S$$

$$-k4\pi r^2 = \varepsilon_0 E(r) 4\pi r^2$$

$$E(r) = -\frac{kr}{\varepsilon_0} = -\frac{P}{\varepsilon_0}$$

Homogeno polarizirana krogla. Imamo kroglo, sestavljena iz dvek polkrogel; spodnja je nabita negativno, zgornja pa pozitivno. Naboj je porazdeljen tako, da velja:

$$\overrightarrow{P} = P\widehat{e}_z$$

Zanima nas $U(\overrightarrow{r})$, $\overrightarrow{E}$ v notranjosti polkrogel in $\overrightarrow{E}$ v špranji med kroglama.
Poiščimo vezano gostoto naboja (ρ_v in σ_v).

$$\rho_n = -\nabla P\widehat{e}_z = 0$$

$$\sigma_n = \overrightarrow{P} \cdot \widehat{n} = P\widehat{e}_z \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = P\cos\vartheta$$

Nekaj podobnega smo že delali (na 1. kolokviju). Iz nastavka za Poissonovo enačbo v sferičnih koordinatah dobimo nastavek

$$U(r,\vartheta) = \begin{cases} A_1 r\cos\vartheta & r < a \\ B_1 r^{-2}\cos\vartheta & r > a \end{cases}$$

Robni pogoj 1: Zveznost U. $B_1 = a^3 A_1$ Robni pogoj 2: Gauss na površini.

$$\frac{\sigma_v}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial U_{zun}}{\partial r}\Big|_a + \frac{\partial U_{not}}{\partial r}\Big|_a \Rightarrow 3A_1\cos\vartheta = \frac{P\cos\vartheta}{\varepsilon_0}$$

Končni rezultat:

$$U(r,\vartheta) = \begin{cases} \frac{P}{3\varepsilon_0} r\cos\vartheta & r \le a \\ \frac{Pa^3}{3\varepsilon_0} r^{-2}\cos\vartheta & r \ge a \end{cases}$$

Zdaj izračunajmo $\overrightarrow{E_{not}}$

$$\overrightarrow{E_{not}} = -\nabla\left(\frac{P}{3\varepsilon_0} r\cos\vartheta\right)$$

Tu lahko dosti računamo, vendar si precej poenostavimo delo, če opazimo, da je $r\cos\vartheta = z$:

$$\overrightarrow{E_{not}} = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\nabla z = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\widehat{e}_z$$

Električno polje znotraj polkrogel je torej homogeno. V špranji imamo prispevek oboda krogle in prispevek ploščatega kondenzatorja:

$$\overrightarrow{E_{zun}} = -\frac{P}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\widehat{e}_z = \frac{2}{3}\frac{\overrightarrow{P}}{\varepsilon_0}$$