Difuzija tekočin
Fizikalni Praktikum V

Matevž Demšar

22. 12. 2025

1 Teorija

Pri difuziji med plastema tekočina se spreminja lomni količnik zmesi. Če pošljemo skozi tekočino laserski žarek v smeri x, za odklon velja:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}$$

Skupni odklon pri prehodu skozi kivedo debeline d je

$$\alpha_N = \frac{d}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}$$

Ker se pri izhodu iz kivete žarek še enkrat zlomi, je končni odmik enak

$$\alpha_Z = d\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}$$

Žarek projeciramo na zaslon, ki je od kivete oddaljen za neko razdaljo b. Odmik na zaslonu je torej enak

$$Y = bd\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z},$$

kar pa dobro velja le za $\alpha \ll 1$ in $d \ll b$. Ker je n odvisen od snovi (predvidevamo, da je linearno odvisen od koncentracije - označimo f), lahko poskusimo izpeljati $n(z)$. Začnimo z difuzijsko enačbo:

$$D\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Naredimo transformacijo

$$x \to qx$$
$$t \to q^2 t$$

S tem transformiramo funkcijo $f(z,t)$ v $f(z/\sqrt{t}, 1)$. Uvedemo spremenljivko $s = z/\sqrt{t}$ in označimo $f(s,1) = F(s)$.

$$F' \cdot \left(-\frac{s}{2t}\right) = F'' \cdot \frac{D}{t}$$

Naredimo separacijo:

$$\frac{F''}{F} = -\frac{s}{2D}$$

Po integraciji po s dobimo

$$F'(s) = C\,e^{-s^2/4D}$$
$$F(s) = C' + C\int_0^s e^{-\zeta^2/4D}\mathrm{d}\zeta$$

Ko opravimo odbratno transformacijo, dobimo osnovno rešitev difuzijske enačbe:

$$f(z,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\,e^{-(z^2/4Dt)}$$

Za naš primer, ko je začetno stanje Heavyside funkcija, dobimo

$$f(z,t) = \frac{f_0}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right)\right]$$

Vse to smo počeli, da lahko lomni količnik n izrazimo kot linearno funkcijo f. Če z n_0 in n_1 označimo lomna količnika posameznih tekočin, je

$$n(z) = \frac{n_0 + n_1}{2} + \frac{n_0 - n_1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

Za vodo in alkohol imamo podatek $n_0 - n_1 = 0,029$, podatek $n_0 + n_1$ pa pri izračunih ne bo pomemben (saj bomo funkcijo n odvajali po z). Odmik na steni izrazimo kot

$$Y = bd\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} = bd(n_1 - n_0)\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\,e^{-z^2/4Dt}$$

Ploščino pod krivuljo izračunamo kot

$$S = \int Y\mathrm{d}z = \int bd\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = kbd(n_1 - n_0)$$

Predfaktor $k = \frac{a+b}{a}$ dodamo, ker gre za projeciranje na zaslon, ki je lahko poljubno oddaljen - kar pa vpliva na velikost slike. Razdaljo b smo definirali kot razdaljo med kiveto in zaslonom, razdaljo a pa kot razdaljo med izvorom in kiveto. Imamo še formulo za maksimalni odmik Y_{max} (ki jo dobimo z odvajanjem):

$$Y_{max} = \frac{S}{k\sqrt{4\pi Dt}}$$

Ker merimo difuzijsko konstanto, enačbo obrnemo:

$$Dt = \frac{1}{k^2 4\pi}\left(\frac{S}{Y_{max}}\right)^2$$

2 Meritve

Izmerimo a, b in d, nato iz njih izračunamo S (pri znanem podatku $n_0 - n_1 = 0.029$).

$$\begin{aligned} a &= (25 \pm 1)\,\mathrm{cm} \\ b &= (122 \pm 1)\,\mathrm{cm} \\ d &= (2.1 \pm 0.1)\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

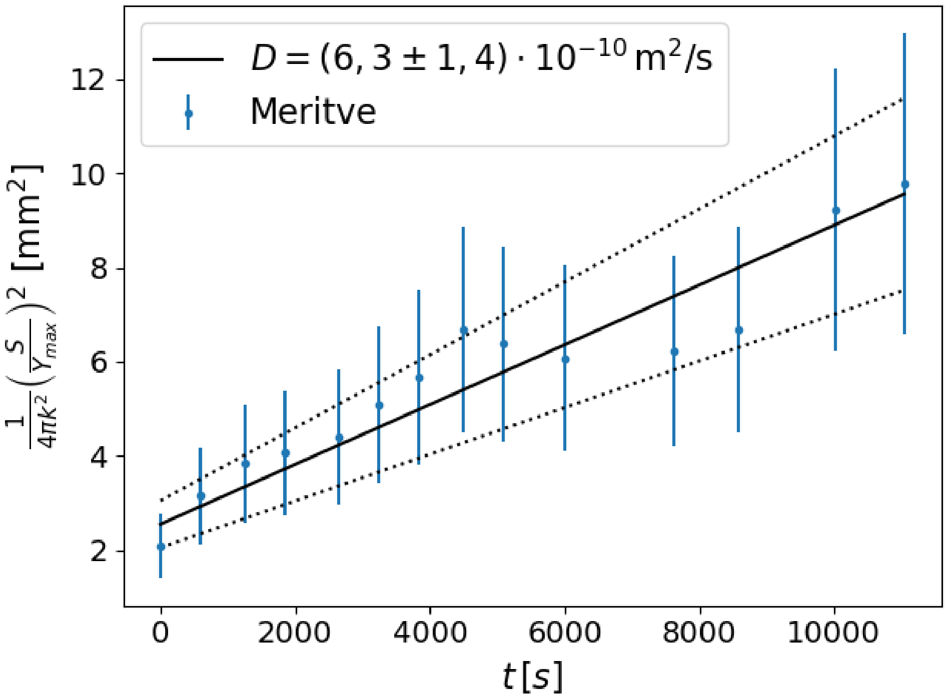
Tako dobimo $S = (44 \pm 5)\,\mathrm{cm}^2$. Vrednost S lahko ocenimo tudi drugače, in sicer tako, da na milimeterski papir narišemo krivuljo in izmerimo ploščino pod njo. Naša ocena pri $t = 0$ je $S \approx 29\,\mathrm{cm}^2$, kar se bolj slabo sklada z izmerjeno vrednostjo, ima pa takšna meritev ogromno napako, saj na listu verjetno nisem imel celotne krivulje.

Nazadnje narišimo graf $\frac{1}{k^2 4\pi}\left(\frac{S}{Y_{max}}\right)^2$. Pričakujemo graf linearne funkcije, ki gre skozi koordinatno izhodišče. Nanj bomo fitali funkcijo

$$\xi(t) = Dt + \xi_0$$

Na osnovi enačbe, pridobljene v uvodu, bi pričakovali, da bo nujno veljalo $\xi_0 \approx 0$, vendar bi to zahtevalo $Y_{max}(t = 0) = \infty$, česar pri merjenju nismo opazili. Dodatni člen lahko upravičimo z dejstvom, da smo z meritvami začeli nekaj sekund po tem, ko smo v kiveto nalili tekočini - to pomeni, da naš čas $t = 0$ ni enak času, ko se je difuzija začela. Ker tega časa nismo izmerili, zanj kompenziramo z dodatnim členom pri fitu.

Na sliki 1 dobimo $D = (6,3 \pm 1,4) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Člen ξ_0, ki smo ga uporabili pri fitu, je enak $(2,5 \pm 0,5)\,\mathrm{mm}^2$. Ta člen bi nam omogočil izračunati, koliko po začetku difuzije smo odčitali prvo meritev. To nas seveda ne zanima.



Slika 1: S `python`-ovo funkcijo `scipy.optimize.curve_fit` dobimo D$D = (6,3 \pm 1,4)\,\mathrm{m^2/s}$. Zaradi precejšnje napake v podatkih ($\Delta S/S = 11\%$ in $\Delta k/k = 5\%$) imamo tudi precejšnjo napako fita, ki narišemo kot črtkani črti.

3 Rezultati in zaključek

Dobili smo

$$D = (6,3 \pm 1,4) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m^2/s}$$

Rezultat je precej različen od rezultatov, ki so jih pri isti vaji dobivali moji vrstniki (večina poročil, ki sem jih našel, je prišlo do končne vrednosti $D \sim 1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m^2/s}$). Bolj uporabno primerjavo nudi podatek z Wikipedie [1]: Za difuzijo etanola v vodi imamo vrednost

$$D = 12,4 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m^2/s},$$

kar se ravno tako ne ujema z izmerjeno vrednostjo. Možnih vzrokov za odstopanje je več. Vrednost na Wikipediji verjetno velja za čisti etanol, pri vaji pa smo verjetno uporabljali vsaj nekoliko razredčenega. Ravno tako na difuzijsko konstanto vplivajo primesi v vodi. Na difuzijsko konstanto vpliva tudi temperatura. Dobra aproksimacija tega vpliva je Stokes-Einsteinova enačba pravi:

$$D(T) = D(T')\,\frac{T}{T'}\,\frac{\eta(T')}{\eta(T)}$$

kjer je η viskoznost tekočine pri dani temperaturi, $D(T')$ pa difuzijska konstanta pri referenčni temperaturi.

References

[1] Wikipedia: Mass Diffusivity `https://en.wikipedia.org/wiki/Mass_diffusivity#Example_values`