1 Sturm-Luviellov problem

Imamo linearni operator $\mathcal{L}$ (na primer odvod). Na prostoru kompleksnih funkcij definiramo skalarni produkt kot:

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u^*(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Adjungirani operator definiramo kot

$$\langle u, \mathcal{L}\rangle = \langle \mathcal{L}^\dagger u, v\rangle$$

Operator je sebi adjungiran, če velja:

$$\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}, \quad D(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L}^\dagger)$$

Operator in adjungiran operator morata torej imeti enaki domeni. Če to drugo ne velja, temveč je $D(\mathcal{L}) < D(\mathcal{L}^\dagger)$, pa je operator hermitski.

Primer. Neskončna potencialna jama širine 1. Imamo operator

$$\widehat{p} = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

Če s κ označimo prostor vseh valovnih funkcij (ki je Hilbertov), domeno tega operatorja zapišemo kot:

$$D(\widehat{p}) = \left\{\psi | \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi \in \kappa,\ \psi(0) = \psi(1) = 0\right\}$$

$$\langle \psi, \widehat{p}\varphi\rangle = \int_0^1 \psi^(x)(-*\hbar)\varphi'\,\mathrm{d}x =$$

Uporabimo per partes:

$$= -i\hbar(\psi^*\varphi) + i\hbar\int_0^1 \psi^{*\prime}\varphi\,\mathrm{d}x = i\hbar\int_0^1 \psi^{*\prime}\varphi\,\mathrm{d}x$$

Ker smo pri per partesu člen, ki je vključeval robne pogoje, enačili z 0, nam pri opisu domene $\widehat{p}^\dagger$ ni treba zahtevati. Sledi, da je

$$D(\widehat{p}^\dagger) = \left\{\psi | \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi \in \kappa\right\} \neq D(\widehat{p})$$

Sledi, da $\widehat{p}$ ni sebi adjungiran, temveč le simetričen. Operator $\widehat{p}$ pa lahko dopolnimo do sebia adjungiranega operatorja tako, da mu dodamo predfaktor $e^{i\alpha}$.

Sturm-Luviellov problem. Imamo operator

$$\mathcal{L}(u) = (p(x)u'(x))' - q(x)u(x), \quad \mathcal{L}u + \lambda w(x)u(x) = 0$$

p, q in w so realne funkcije, w je povsod večja ali enaka 0.

Oglejmo si, čemu je enak izraz

$$u^*\mathcal{L}v - (\mathcal{L}u)^*v = u^*\left[(pv')' - qv\right] - (pu^{*\prime})'v + qu^*v =$$

$$\left(u^*(pv')' - (pu^{*\prime})'v = pu^*v' - pu^{*\prime}v\right)'$$

$$\langle u, \mathcal{L}v\rangle - \langle \mathcal{L}u, v\rangle = \int_a^b \left[u^*\mathcal{L}v - (\mathcal{L}u)^*v\right]\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u^*(pv')' - (pu^{*\prime})'v\right)\,\mathrm{d}x = \left(pu^*v' - pu^{*\prime}v\right)\Big|_a^b$$

To ni nujno enako 0. $\mathcal{L}$ je sebi adjungiran, če:

$$\alpha_a u(a) + \beta_a u(a) = 0$$

$$\alpha_b u(b) + \beta_b u(b) = 0$$

Ali pa, če je $u(a) = u(b)$ Posebni primeri:

Dirichlet:

$$u(a) = u(b) = 0$$

Neuman:

$$u'(a) = u'(b) = 0$$

Regularni Sturm-Luviellov problem: lastne vrednosti operatorja $\mathcal{L}$ so nedegenerirane.

Lastnosti in posledice.
$*$ Ortogonalnost lastnih funkcij: naj bosta u, v lastni funkciji.

$$0 = \langle u, \mathcal{L}v\rangle - \langle \mathcal{L}u, v\rangle = \langle u, -\lambda_v wv\rangle - \langle -\lambda_u wu, v\rangle =$$

$$(\lambda_u^* - \lambda_v)\int wu^* v\,\mathrm{d}x$$

Če je $u = v$:

$$\lambda_u \in \mathbb{R}$$

Če je $\lambda_u \neq \lambda_v$:

$$\langle u, v\rangle_w = 0$$

$\langle u, v\rangle_w$ označuje skalarni produkt z utežjo w.

$*$ Kompletnost: Vsako funkcijo se da razviti po lastnih funkcijah $\mathcal{L}$:

$$f(x) = \sum_n c_n u_n(x)$$

$$c_n = \langle u_n, f\rangle_w$$

Za to vrsto velja:

- Konvergira.
- Enakost funkciji f v smislu mer ali integralov.
- Končna vsota
  $$\sum_{n=0}^{N} c_n u_n(x)$$
  je najboljši približek $f(x)$ v smislu minimuma
  $$\int \left(f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n u_n(x)\right)^2 w(x)\,\mathrm{d}x$$

$*$ Variacijska formulacija:

$$S = \int \left(pu'^2 + qu^2\right)\,\mathrm{d}x$$

Lastne funkcije f so ekstremi S ob vezi $\int w|u|^2\,\mathrm{d}x = 1$. Lahko izračunamo Lagrangeove multiplikatorje in imamo $S(u_n) = \lambda_n$.

$*$ Problem $\mathcal{L}u = fu'' + gu + hu,\ g \neq f'$ se prevede na standardno obliko, če ga pomnožimo z

$$\frac{1}{f}\exp\left(\int \frac{g}{f}\,\mathrm{d}x\right)$$