Zadnjič smo reševali Laplaceovo enačbo z robnimi pogoji

1. $U(x,0)=0$
2. $U(x,a)=0$
3. $U(0,0<y<a)=U_0$
4. $U(x\to\infty,y)<\infty$

Uporabili bomo separacijo spremenljivk:

$$X''Y+XY''=0$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0$$

Sledi:

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\kappa^2$$

Dobimo splošno rešitev

$$X=Ce^{\kappa}+De^{-\kappa x}$$

$$Y=A\sin(\kappa y)+B\cos(\kappa y)$$

Zaradi četrtega robnega pogoja je $C=0$, zaradi prvega pa $B=0$. Sledi:

$$U(x,y)=K\sin(\kappa y)e^{-\kappa x}$$

Iz drugega robnega pogoja je $a\kappa=n\pi$ Iz tretjega pogoja dobimo, da je

$$\sum_n K_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)=U_0$$

To nam pove nekaj o koeficientih K_n. Izračunajmo najprej skalarni produkt z neko drugo lastno funkcijo:

$$\int_0^\infty\sum_{n=0}^\infty K_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\,\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^\infty K_n\int_0^\infty\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\,\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^\infty\frac{K_na}{2}\delta_{mn}=\frac{K_ma}{2}$$

Zdaj izračunajmo še koeficiente K_n:

$$\int_0^\infty U_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)y\,\mathrm{d}y=...=-\frac{U_0a}{m\pi}(\cos m\pi-1)=\frac{U_0a}{m\pi}(1-(-1)^m)$$

Se pravi je

$$K_m=\frac{2\,U_0}{m\pi}(1-(-1)^m)$$

Končni rezultat je tedaj:

$$U(x,y)=\sum_{m=1}^\infty\frac{2U_0}{m\pi}(1-(-1)^m)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\,e^{-\frac{m\pi}{a}x}$$

Tega ne moremo izraziti analitično, lahko pa si ogledamo limito $x\gg a$:

$$U(x,y)\approx\frac{4\,U_0}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\,e^{-\frac{\pi}{a}x}$$

Izračunamo lahko tudi $\overrightarrow{E}(x,\frac{a}{2})$ in izrazimo le komponento x:

$$E_x(x)=-\frac{\partial U(x,a/2)}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^\infty\frac{2\,U_0}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin\left(\frac{n\pi}{a}\frac{a}{2}\right)\,e^{-\frac{n\pi}{a}x}$$

$$= \frac{2\,U_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (1-(-1)^n) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) e^{-\frac{m\pi}{2}x}$$

Vidimo, da velja:

$$(1-(-1)^n)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 2, & \mathrm{mod}_4\ n = 1 \\ -2, & \mathrm{mod}_4\ n = 3 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Se pravi je

$$E_x = \frac{4\,U_0}{a}\left[e^{-\frac{\pi}{a}x} - e^{-\frac{3\pi}{a}x} + e^{-\frac{5\pi}{a}x} + ...\right]$$

Označimo $\alpha = \exp\left(-\frac{2\pi}{a}x\right)$

$$E_x(x) = \frac{4\,U_0}{a} e^{-\frac{\pi x}{a}}\left[1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + ...\right]$$

Prepoznamo geometrijsko vrsto in iz dobljenega izrazimo hiperbolično funkcijo:

$$E_x(x) = \frac{2\,U_0/a}{\cosh(\pi x/a)}$$

Naloga. Prepolovljena prevodna cev s polmerom a. Uporabimo jo kot kondenzator in ga napojimo z napetostjo U_0. V cilindričnih koordinatah želimo izraziti U, kar seveda naredimo z Laplaceovo enačbo $\nabla^2 U(r,\varphi) = 0$.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

Uporabimo separacijo: $U(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ Po nekaj računanja dobimo enačbo

$$\frac{\frac{1}{r}R' + r^2 R''}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: m^2$$

Dobimo dve diferencialni enačbi:

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0$$

$$r^2 R'' + rR' - m^2 R = 0$$

Rešitev prve so kotne funkcije:

$$\Phi(\varphi) = A_m \sin(m\varphi) + B_m \cos(m\varphi)$$

Iz periodičnosti dobimo pogoj, da mora biti m celo število, in sicer $m = 1, 2, 3, ...$ (negativna ne pridejo v poštev zaradi antisimetričnosti sinusa?)
Diferencialno enačbo za R rešijo potenčne funkcije.

$$R(r) = C_m r^m + D_m r^{-m}$$

Konstante A_m, B_m, C_m, D_m določimo z robnimi pogoji:

$$U(a,\varphi) = \begin{cases} \frac{U_0}{2}, & 0 < \varphi < \pi \\ -\frac{U_0}{2}, & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

$$U(0,\varphi) < \infty \text{ (sledi } D_m = 0)$$

Opazimo: Robni pogoj pri $r = a$ je liha funkcija φ, torej je tudi funkcija U liha. Sledi $B_m = 0$.

$$U_m(r,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sin(m\varphi) r^m$$

Skalarno množimo dve lastni funkciji:

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m a^m \sin(m\varphi) = \begin{cases} \frac{U_0}{2} \\ -\frac{U_0}{2} \end{cases}$$

Na obeh straneh skalarno pomnožimo z U_n. Leva stran:

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m a^m \int_0^{2\pi} \sin\left(m\varphi\right) \sin\left(n\varphi\right)\, \mathrm{d}\varphi = \pi a^n K_n$$

Desna stran:

$$\int_0^{\pi} \frac{U_0}{2} \sin(n\varphi)\, \mathrm{d}\varphi - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{U_0}{2} \sin(n\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = \frac{U_0}{2n} \left[(1-(-1)^n) + (1-(-1)^n)\right]$$

Sledi:

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_0}{n\pi} \left(1-(-1)^n\right) \sin(n\varphi) \left(\frac{r}{a}\right)^n$$