

Kvantna meritev. Primer: Stern-Gerlach - na delec z lastnim magnetnim momentom deluje magnetna sila.

$$\vec{F} = (\mu \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{r}) = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = -\nabla(-\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

V našem primeru deluje polje le v smeri osi z :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ F_z &= \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ \delta p &= mv_z = F_z \tau, \quad v_z = \pm \frac{e_0 \hbar}{2m^2} \frac{\partial B}{\partial z} \tau\end{aligned}$$

Definirali smo $\tau = L/v_y$, torej čas, v katerem delec preleti magnetno polje. Rezultate eksperimenta opišemo kvantno (Bohm):

$$\begin{aligned}H &= -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{e}{m} \vec{S} \cdot \vec{B} \\ B_z &= B_0 + \frac{\partial B_z}{\partial z} z + \dots \\ H &= H_0 - E_0 \sigma_z - F_z z \sigma_z\end{aligned}$$

Tu je

$$E_0 = \frac{e\hbar}{2m} B_0, \quad F_z = \frac{e\hbar}{2m} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Pri $t > 0$ imamo Schrödingerjevo enačbo

$$Psi(\vec{r}, t) = \psi_0(x, y, z) \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(z, t) \\ \psi_{\downarrow}(z, t) \end{pmatrix}$$

Enačbe ne bomo reševali, je pa razvidno, da spin vpliva na krajevno komponento valovne funkcije, ki je merljiva. Kar pa v resnici ni meritev, temveč eksperiment. Postulat kvantne mehanike pravi, da kvantna meritev ireverzibilno določi stanje delca, ki ga opazujemo.

Von Neumannova meritev. Imamo delec s Hamiltonovo funkcijo $H = H_0 + H_{int}$, kjer bodi

$$H_{int} = -\frac{g\hbar}{\tau} \hat{A} q$$

\hat{A} operator, ki ga želimo obravnavati, ima naj lastne vrednosti a_n , q pa je neka koordinata (na primer z , če govorimo o Stern-Gerlachu). Ob $t = 0$ naredimo razvoj:

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \otimes \phi(q)$$

Nato razvijemo po času (τ):

$$U = e^{-i \frac{H_{int} t}{\hbar}} = e^{iq\hat{A}q}$$

$$|\Psi(\tau)\rangle = U(\tau, 0) |\Psi(0)\rangle$$

$\phi(q)$ transformiramo v $\tilde{\phi}(p)$:

$$\begin{aligned}|\Psi(\tau)\rangle &= U(\tau) \sum_n c_n \otimes \int \tilde{\phi}(p) |p\rangle \, dp = \\ &= \sum_n c_n e^{iq a_n q} |n\rangle \otimes \int \tilde{\phi}(p) |p\rangle \, dp =\end{aligned}$$

Vstavimo $|p\rangle \propto \exp(ipq/\hbar)$:

$$\begin{aligned}&= \sum_n c_n |n\rangle \otimes \int \tilde{\phi}(p) |p + \delta p_n\rangle \, dp \\ &= \sum_n c_n |n\rangle \otimes \int \tilde{\phi}(p - \delta p_n) |p\rangle \, dp \propto e^{i(g a_n + p/\hbar) q}\end{aligned}$$

Se pravi $\hbar \delta p_n \sim g a_n$ Iz p_n lahko torej izmerimo z gibalno kolikočino, ki jo tako ali drugače znamo izmeriti. Dejansko zasnovati tak eksperiment je seveda druga stvar.

Kvantna prepletost. Imejmo valovno funkcijo, ki je odvisna od dveh vrednosti, na primer x_1, x_2 . Vzemimo

$$\psi(x_1, x_2) = C \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2 - L)^2}{4\sigma^2}\right)$$

V limiti $\sigma \rightarrow 0$ gre to proti funkciji $\delta(x_1 - x_2 + L)$. Prva posledica je, da to pomeni, da če poznamo pozicijo enega delca, takoj poznamo tudi pozicijo drugega delca. Na primer, če naj velja $x_2 = x_1 + L$, dobimo

$$\psi(x_2) = \delta(x - x_1)$$

če merimo gibalno količino teh delcev, je $p_2 = -p_1$, torej

$$\psi(x_2) = -i \frac{p_2 x}{\hbar}$$

Tu imamo enačbo za ravni val. Ali lahko valovna funkcija enega delca spremeni obliko, če opzaujemo drugi delec? V praksi takega eksperimenta ne moremo izvesti, lahko pa eksperimentalno dokažemo Bellove neenačbe, ki opisujejo kvantno prepletost spinov. Imamo fotona z valovno funkcijo

$$|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

Možnosti za spin sta ± 1 . Predpostavimo, da spin že pred meritvijo določajo neke spremenljivke λ_i : Za prvi foton (s spinom $a = \pm 1$) so te spremenljivke λ_i^a , za drugi foton (s spinom $b = \pm 1$) pa λ_i^b . Velja naj torej

$$\begin{aligned} a &= b(\vartheta_b) = f(\lambda_1^a, \lambda_2^a, \dots, \lambda_n^a) \\ b &= a(\vartheta_a) = f(\lambda_1^b, \lambda_2^b, \dots, \lambda_n^b) \end{aligned}$$

Zdaj imamo dve možni predpostavki:

1. Obstajajo take skrite spremenljivke λ , ki so določene že pred meritvijo
2. Med fotonomi ni komunikacije

Ustvarimo pogoje, v pri katerih imamo štiri možnosti: a, b, a', b' . Naredimo tabelo: Povprečje vrednosti

a	b	a'	b'	$ab + a'b + ab' - a'b' = C$
1	1	1	1	2
1	1	1	-1	2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
-1	-1	-1	-1	-2

v zadnjem stolpcu je $pm2$. Lahko pa jih izračunamo tudi drugače:

$$\overline{ab} = \int \rho(\vartheta_a, \underline{\lambda^a}) \rho(\vartheta_b, \underline{\lambda^b}) f(\vartheta_a, \underline{\lambda^a}) f(\vartheta_b, \underline{\lambda^b}) d^n \lambda^a d^n \lambda^b$$

Če to naredimo za vse ostale stolpce v tabeli, mora veljati

$$\overline{ab} + \overline{ab'} + \overline{a'b} + \overline{a'b'} = \overline{C'}$$

To pa lahko velja tudi, če je $|\overline{C}| \geq 2$ (temu pravimo Bellova neenačba), in s pametno izbiro kotov $\vartheta_a, \vartheta_b, \vartheta'_a, \vartheta'_b$ lahko eksperimentalno dobimo $C' = 2\sqrt{2} > 2$. Sledi, da je vsaj ena od prej predpostavljenih možnosti napačna. Izkazalo se je, da fotona med seboj "komunicirata", in to celo z nadsvetlobno hitrostjo. Se pa s tem izognemo kršenju postulata o tem, da stanje delca pred meritvijo ni določeno.