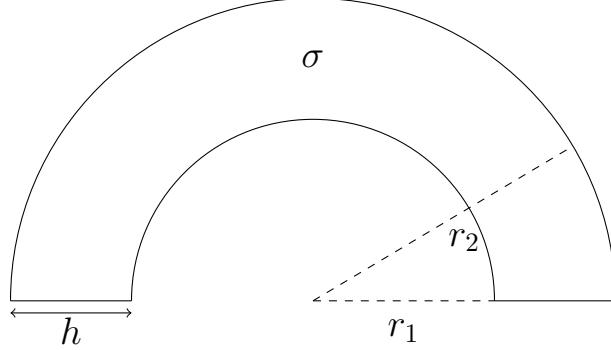


Tok po kolobarju. Upornost prevodne ploščice. Ploščica je oblike polovice kolobarja z notranjim premerom r_1 in zunanjim premerom r_2 . Na kratkih robovih naredimo elektrodi (tako, da je napetost na celotnem posameznem robu enaka) in ju priključimo na vir napetosti. Zanima nas upornost. Stacionarni



tok opisuje enačba

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \nabla U$$

Zakon o ohranitvi naboja:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

V našem primeru je prvi člen enak 0, torej nam ostane

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\sigma \nabla^2 U = 0$$

Dobili smo Laplaceovo enačbo. V cilindričnih koordinatah ima ta rešitev

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)(C_n r^m + D_n r^{-n}) + U_0$$

U_0 izračunamo z uporabo separacije:

$$U(r, \varphi) = R(r)\phi(\varphi)$$

To vstavimo v Laplaceovo enačbo in dobimo:

$$r^2 R'' + r R' = 0 \Rightarrow R = c \ln r + d$$

$$\phi'' = 0 \Rightarrow \phi(\varphi) = a\varphi + b$$

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)(C_n r^m + D_n r^{-n}) + (a\varphi + b)(c \ln r + d)$$

Robni pogoji: Problem je nastavljen tako, da je potencial na elektrodah konstanten. Torej:

$$U(r, 0) = 0, \quad U(r, \pi) = -U_0$$

Sledi, da morata biti tako C_n kot D_n enaka 0, saj bi sicer pri kotu $\varphi = 0$ dobili radialno odvisnost. Z istim argumentom dobimo $c = 0$. Naša vrsta torej postane:

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot 0 + (a\varphi + b) \cdot d = A_0 \varphi + B_0$$

Iz robnega pogoja $U(r, 0) = 0$ dobimo $B_0 = 0$, iz robnega pogoja $U(r, \pi) = -U_0$ pa izračunamo A_0 :

$$U(r, \varphi) = -\frac{U_0}{\pi} \varphi$$

Izračunajmo električni tok.

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int j \cdot h dr = \int \sigma \frac{\partial E}{\partial \varphi} h dr =$$

$$\text{Uporabimo } \frac{\partial E}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$= - \int_{r_1}^{r_2} \sigma \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} h \, dr = \frac{\sigma U_0 h}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\sigma U_0 h}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Iz Ohmovega zakona dobimo:

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{\pi}{\sigma h \ln(r_2/r_1)}$$

Cabrerov eksperiment. Gre za eksperiment, s katerim so poskušali zaznati magnetne monopole. Imamo obroč z radijem A in induktivnostjo L . Proti njemu izstrelimo magnetni monopol. Zanima nas, magnetni pretok ϕ : tako $\phi(d)$ kot $\phi(t)$ (z d smo označili razdaljo med monopolom in obročem), nato pa še potek $I(t)$.

Magnetno polje monopolja:

$$\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Kjer g označuje magnetni naboj z enoto Am. Izračunati moramo integral

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$dS = 2\pi\rho \, d\rho$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g}{(\rho^2 + d^2)}$$

Zanima nas x komponenta polja, saj je vzporedna z osjo obroča.

$$B_x = B \frac{d}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} = \frac{\mu_0 g}{4\pi} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

To integriramo po ρ in s substitucijo $u = \rho^2 + d^2$ dobimo:

$$\phi(d) = \frac{\mu_0 g d}{4} (-2) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2} - \frac{1}{d}} \right) = \frac{\mu_0 g}{2} \left(1 - \frac{a}{d^2 + a^2} \right)$$

Označimo s $t = 0$ čas, ko pride monopol v sredino obroča. Tedaj je $d = \pm vt$, kjer predznak izberemo tako, da d ni negativen.

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{\mu_0 g}{2} \left(1 + \frac{vt}{\sqrt{(vt)^2 + a^2}} \right) & t < 0 \\ -\frac{\mu_0 g}{2} \left(1 - \frac{vt}{\sqrt{(vt)^2 + a^2}} \right) & t > 0 \end{cases}$$

Zadnji del naloge: kakšna je odvisnost $I(t)$? Uporabimo indukcijski zakon, pri katerem upoštevamo morebitni obstoj monopolov:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{j}_m$$

Obe strani integriramo po S in uporabimo Stokesov zakon:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} - \mu_0 \int \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$$

V vseh treh integralih prepoznamo znane fizikalne spremenljivke:

$$U_i = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu_0 I_m$$

Ker tok teče skozi zanko samo v času $t = 0$, pišemo $I_m = g\delta(t)$

$$U_i = -\dot{\phi} - \mu_0 g\delta(t) = L\dot{I}$$

Integriramo po času od $-\infty$ do t , da dobimo I .

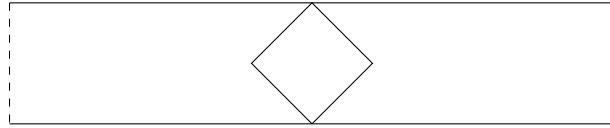
$$[\phi(t) - \phi(-\infty)] - \mu_0 g \delta(t) = L [I(t) - I(-\infty)]$$

S θ smo označili Heavyside funkcijo. Člene v neskončnosti označimo z 0 in dobimo

$$I = -\frac{1}{L} (\phi(t) + \mu_0 g \theta(t))$$

Cabrero se je nato spravil meriti, ali v zanki kdaj pride tdo takega toka, in dejansko dobil nekakšen pulz, kar bi kazalo na obstoj magnetnih monopolov, vendar eksperimenta nikomur ni uspeло uspešno ponoviti.

Magnetna indukcija v kvadratnem okvirju. Imamo dolga vodnika na medsebojni razdalji d , ki sta nekje daleštran povezana - tvorita torej zunanj zanko. Znotraj te zanke je še ena kvadratna zanka. Zanima nas medsebojna induktivnost L_{12} .



$$\phi_1 = L_{11} I_1$$

$$\phi_2 = L_{21} I_1$$

Stvar formalno definiramo kot:

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Opazimo, da lahko indeksa i in j brez posledic zamenjam, se pravi je $L_{ij} = L_{ji}$. Te naloge ne bomo reševali po definiciji, saj nam ni treba. Vemo, da lahko izračunamo magnetno polje B , ki ga ustvarja ena zanka, in nato primerjamo s pretokom, ki gre zavoljo tega polja skozi drugo zanko.

$$\phi_2 = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$B(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-y)}$$

$$dS = 2y dy$$

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi} \int_0^{d/2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right) 2y dy = \dots = 2 \ln 2 \frac{\mu_0 d I}{\pi}$$

Sledi $L_{12} = (2 \ln 2) \mu_0 d / \pi$.