1 Cilindrične koordinate - nadaljevanje

Primer. Besselobve funkcije z necelimi indeksi. Imejmo na primer odsek cilindra, ki bodi v z smeri neskončen (translacijska invariantnost pomeni, da obravnavamo le odvisnost od r in φ). Robni pogoj je Dirichletov, torej $u(\partial D) = 0$. Spet rešujemo s separacijo, začnimo s kotno smerjo.

$$\phi(\varphi) \sim \sin\left(\frac{m\pi}{\varphi_0}\phi\right), \; m = 1, 2, ...$$

Označimo $\mu = m\pi/\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Za r torej dobimo:

$$r^2 R'' + rR' + [r^2\lambda - \mu^2]R$$

Ta enačba ni v Sturm-Liouvillovi obliki, jo pa lahko na obeh straneh delimo z r in dobimo Sturm-Liouvillov problem z utežjo $w = r$. Pri rešitvi imamo sledeče primere:

- $\lambda = 0$: Nimamo nobene rešitve, ki zadoščajo Dirichletovemu robnemu pogoju.
- $\lambda < 0$: Naše rešitve bi bile modoficirane Besselove funkcije, ki ne zadoščajo robnim pogojem.
- $\lambda > 0$: Rešitve so Besselove funkcije $J_\mu(\xi_{\mu,n} r/R_0)$, kjer je $\mu \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, ...$ Lastne vrednosti pa so $\lambda = (\xi_{\mu,n}/R_0)^2$. Funkcije ϕ_m so ortogonalne za različne m,

1.1 Laplaceova enačba

$$\nabla^2 u = 0$$

Imejmo valj in robna pogoja $u = f(r, \varphi)$ na zgornji ploskvi, $u = h(r, \varphi)$ na spodnji ploskvi in $u = 0$ na plašču valja. Rešujemo s separacijo, v smeri φ dobimo $\phi(\varphi) = \exp(im\varphi)$, $m = 0, 1, 2, ...$ V radialni smeri imamo spet Besselove funkcije $J_m(\xi_{m,n} r/R_0)$.

V z smeri smo imeli pri Helmholtzovi enačbi možnosti kotnih ali hiperboličnih funkcij. Upoštevamo tudi lastnost

$$\nabla_r^2 J_m = -\frac{\xi}{R_0} J_m$$

Tako je v smeri z rešitev linearna kombinacija funkcij

$$\left\{\begin{matrix} \sinh\left(\frac{\xi_{m,n}}{R_0} z\right) \\ \cosh\left(\frac{\xi_{m,n}}{R_0} z\right) \end{matrix}\right\}$$

Določiti moramo koeficiente za lastne funkcije $Z(z)$. Definiramo naslednji funkciji:

$$v(z) = \sinh\left(\xi_{m,n}\frac{z}{R_0}\right)\cosh\left(\xi_{m,n}\frac{0}{R_0}\right) - \sinh\left(\xi_{m,n}\frac{0}{R_0}\right)\cosh\left(\xi_{m,n}\frac{z}{R_0}\right)$$

$$w(z) = \sinh\left(\xi_{m,n}\frac{z}{R_0}\right)\cosh\left(\xi_{m,n}\frac{H}{R_0}\right) - \sinh\left(\xi_{m,n}\frac{H}{R_0}\right)\cosh\left(\xi_{m,n}\frac{z}{R_0}\right)$$

Funkciji sta sestavljeni tako, da je $v(0) = 0$ in $w(H) = 0$. Tako je končna rešitev

$$u = \sum_{m,n} \left(\alpha_{m,n} v(z) + \beta_{m,n} w(z)\right) J_m\left(\xi_{m,n}\frac{r}{R_0}\right) e^{im\varphi}$$

koeficiente $\alpha_{m,n}$ dobimo z razvojem funkcije f, koeficiente $\beta_{m,n}$ pa z razvojem funkcije h.

2 Sferične koordinate

Obravnavali bomo Helmholtzovo enačbo, pri Laplaceovi je stvar podobna.

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

Zapišimo Laplaceov operator v sferičnih koordinatah:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{r^2} r$$

Definirali smo operator L, in sicer tako, da je

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}, \quad \overrightarrow{p} = -i\nabla$$

Ali drugače:

$$L^2 = \overrightarrow{L} \cdot \overrightarrow{L} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Rešujemo kar s separacijo, najprej kotni del, ki ima lastne funkcije $Y(\varphi, vartheta)$. po vzoru kvantne mehanike pišemo problem lastnih vrednosti kot

$$L^2 Y(\vartheta, \varphi) = l(l+1) Y(\vartheta, \varphi)$$

Spet uporabimo separacijo:

$$Y(\vartheta, \varphi) = \phi(\varphi) \cdot \theta(\vartheta)$$

V smeri φ:

$$\frac{\phi''}{\phi} = -m^2$$

$$\phi = \begin{Bmatrix} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{Bmatrix}, \qquad \begin{matrix} L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ L_z^2\phi = m^2\phi \end{matrix}$$

V smeri ϑ: Vzamemo spremenljivko $t = \cos\vartheta$ in jo vstavimo v definicijo L^2.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right]\theta + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right]\theta = 0$$

Gre za diferencialno enačbo, imenovano Legendrova diferencialna enačba z znanimi rešitvami

$$\theta = \begin{Bmatrix} P_l^m \\ Q_l^m \end{Bmatrix}$$

Funkcijam P_m^l in Q_l^m pravimo pridružene Legendrove funkcije. Parametra m in l sta odvisna od oblike problema. Če imamo opravka s celo sfero, se izkaže, da so dovoljene vrednosti m in l ravno cela števila. Sama enačba o tem ničesar ne pove. Pri kvantni mehaniki zahteve o m in l izpeljemo z algebrajskim postopkom: definiramo operatorja $L_\pm = L_x \pm L_y$ in opazimo, da nam operator zveča ali zmanjša m za ± 1. Nato zahtevamo, da imamo pri neki vrednosti m končno vrednost možnosti za l, kar je mogoče le, če sta m in l celi ali polceli števili. Vzrok za to je v zahtevi po konvergenci lastnih funkcij, ki pa je mogoča, če je L sebi adjungiran operator.

2.1 Sferični harmoniki

Za kotni del Helmholtzove enačbe v sferičnih koordinatah smo dobili lastne funkcije

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \sim P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

ki so ortonormirane:

$$\int Y_{lm}^* Y_{l'm'}\, \mathrm{d}\varphi \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \delta_{m,m'}\delta_{l,l'}$$

Opomba. Funkcije Q_l^m imajo za cele indekse logaritemske singularnosti, zato običajno niso primerne kot rešitve. Kot primer:

$$Q_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}, \qquad Q_1 = \frac{t}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} - 1$$

Raidalni del:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 R'\right) + \lambda R - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0$$

Naredimo substitucijo $R(r) = Z(r)/\sqrt{r}$

$$r^2 Z'' + rZ' + \left[\lambda r^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right] Z = 0$$

To je Besselova diferencialna enačba, katere rešitve so Bessli s polcelimi indeksi (če je l celo število, o čemer smo že govorili). Spet ločimo primere:

- $\lambda = 0$: V resnici gre za Laplaceovo enačbo.

$$R = \begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{Bmatrix}$$

  Za celotno Laplaceovo enačbo je rešitev oblike

$$u(\overrightarrow{r}) = \sum_{l,m} c_{l,m} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi) \begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{Bmatrix}$$

- $\lambda < 0$: Rešitev zapišemo z modificirani sferičnimi Besselovimi funukcijami (označimo $-\lambda = k^2$):

$$R = \begin{Bmatrix} i_l(kr) \\ k_l(kr) \end{Bmatrix}$$

  Funkcije i_l in k_l so eksponentne narave: i_l padajo, k_l naraščajo, ničel pa nimajo ne ene, ne druge.

- $\lambda > 0$: Rešitev zapišemo s sferičnimi Besselovimi funkcijami:

$$R = \begin{Bmatrix} j_l(kr) \\ y_l(kr) \end{Bmatrix}$$

  Sferične Besseflove funkcije so definirane kot

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{l+1/2}(x), \qquad j_0 = \frac{\sin x}{x}$$

$$y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, Y_{l+1/2}(x), \qquad y_0 = -\frac{\cos x}{x}$$

  V limiti $x \to 0$ spet velja $y_l \to x^{-(l+1)}$.

2.2 Lastnosti Legendrovih funkcij

Sferni harmoniki so navedeni kot

$$Y_{lm}(t = \cos\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(t)\, e^{im\varphi}$$

Za sferne harmonike velja, da so ortogonalni in normirani:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_{lm}^* Y_{l'm'}^* \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}t = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Gre v bistvu za to, da so $P_l^m \perp P_{l'}^m$.

Definicija. Legendrove funkcije so definirane kot

$$P_l^m = (-1)^m (1-t^2)^{m/2} dd^m t^m P_l(t)$$

$P_l(t)$ so Legendrovi polinomi, npr. $P_0 = 1$, $P_1 = t$, ...

Legendrovi polinomi. Takoj vidimo, da velja $P_l^m = 0$, če je $m > l$. Legendrovi polinomi so definirani kot

$$P_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} \left[(t^2 - 1)^l \right]$$

So ortogonalni, velja:

$$\int_{-1}^{1} P_l P_{l'} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Imamo tudi rekurzivno zvezo

$$(2l+1) t P_l = (l+1) P_{l+1} + l P_{l-1}$$

Generatrisa. Legendrove funkcije so koeficienti razvoja funkcije

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(t) x^l$$

To lahko s pridom uporabimo, npr.

$$\frac{1}{|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|} = \frac{1}{\max(r_1, r_2)} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\min(r_1, r_2)}{\max(r_1, r_2)} \right)^l P_l(\cos\alpha)$$

2.3 Legendrove funkcije z necelimi indeksi

Spomnimo se, da so Legendrove funkcije lastne funkcije kotnega dela enačbe

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

Za $m = 0$ zaradi rotacijske simatrije velja:

$$\begin{aligned} P_\nu(1) &= 1 \qquad && \forall \nu \\ P_\nu(-1) &= \infty && \forall \nu \notin \mathbb{Z} \\ Q_\nu(1) &= \infty && \forall \nu \\ Q_\nu(-1) &= \infty && \forall \nu \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Da naše rešitve ustrezajo Dirichletovim robim pogojem, smemo torej uporabljali le cele ν in funkcije P. To pa velja le, če rešujemo enačbo na celi krogli. Če gre za odsek krogle, lahko dobimo poljubne vrednosti ν, malo tako kot pri odsekih valja.