

Končna struna. Valovno enačbo rešujemo s separacijo:

$$c^2 X'' T = X T''$$

$$c^2 \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\omega^2$$

Časovni del:

$$T_n(t) = \alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)$$

Prostorski del:

$$X_n(x) = \zeta_n \cos(kx) + \eta_n \sin(kx)$$

Imamo robna pogoja: $X(0) = X(L) = 0$. Sledi:

$$\zeta_n = 0, \quad k = n\pi/L, \quad n \in \mathbb{N}$$

Rešitev lahko še normiramo:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Kaj pa, ko je nihanje vzbujano?

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t)$$

Robni pogoja pogoja: $u(0, t) = u(L, t) = 0$

Začetna pogoja: $u(x, 0) = \varphi(x)$ in $\dot{u}(x, 0) = \psi(x)$

Vzamemo nastavek:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_n c_n(t) X_n(x) \\ f(x, t) &= \sum_n f_n(t) X_n(x) \\ \sum_n \ddot{c}_n X_n &= \sum_n -\omega_n^2 c_n X_n + \varphi_n X_n \\ \ddot{c}_n &= \omega_n^2 c_n = f_n(t) \end{aligned}$$

Imamo sistem n med seboj neodvisnih navadnih diferencialno enačbo (za razliko od prej, ko smo imeli eno parcialno). Začetna pogoja sta $c_n(0) = \varphi_n$ in $\dot{c}_n(0) = \psi_n$

Za homogeni del dobimo rešitev:

$$c_n(t) = \varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

za partikularni del pa:

$$c_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t_0 - \tau)) f_n(\tau) d\tau$$

Lahko se primeri tudi, da je robni pogoj nehomogen, enačba pa homogena:

$$u(0, t) = \eta_1(t)$$

$$u(L, t) = \eta_2(t)$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Zamislimo si, da je naša funkcija u vsota funkcij u_1 in u_2 . Za u_1 naj velja prvi robni pogoj, za u_2 pa drugi robni pogoj. Tako postane naš robni pogoj homogen, enačba pa nehomogena.

Opna. Opno opisuje enačba

$$dF = \gamma ds$$

Vsota zunanjih sil mora biti torej enaka (pri predpostavki, da v oni ni lukenj):

$$F_z = \int_{\partial D} \dots ds = \iint_D z(x, y) \cdot \dots dx dy$$

Z uporabo Stokesovega izreka izračunajmo spremembo gibalne količine:

$$\Delta G = \int_{t_1}^{t_2} \iint_D Z_{tt}(x, y, \tau) h \rho dx dy d\tau = \int_{t_1}^{t_2} F_z d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \iint_D p dx dy d\tau$$

Sledi:

$$z_{tt} = c^2 \nabla^2 z + \frac{p}{\rho h}, \quad c^2 = \frac{\gamma}{\rho h}$$

h označuje debelino opne, ostale oznake so verjetno dovolj jasne.

Druge relevantne enačbe Nihanje vzdolž palice:

$$\frac{F}{S} = E \frac{du}{dx}$$

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}$$

Zvok: Uporabili bomo Navier-Stokesovo enačbo in kontinuitetno enačbo.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Dobili smo nelinearen sistem nehomogenih diferencialnih enačb. Da ga lahko rešimo, potrebujemo nekaj predpostavk. Zahtevali bomo, da je

$$\frac{v}{c} \ll 1$$

Tako se bomo znebili nelinearnih členov.