

**Kvantna meritev.** Primer: Stern-Gerlach - na delec z lastnim magnetnim momentom deluje magnetna sila.

$$\vec{F} = (\mu \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{r}) = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = -\nabla(-\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

V našem primeru deluje polje le v smeri osi  $z$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$F_z = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\delta p = mv_z = F_z \tau, \quad v_z = \pm \frac{e_0 \hbar}{2m^2} \frac{\partial B}{\partial z} \tau$$

Definirali smo  $\tau = L/v_y$ , torej čas, v katerem delec preleti magnetno polje. Rezultate eksperimenta opišemo kvantno (Bohm):

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{e}{m} \vec{S} \cdot \vec{B}$$

$$B_z = B_0 + \frac{\partial B_z}{\partial z} z + \dots$$

$$H = H_0 - E_0 \sigma_z - F_z z \sigma_z$$

Tu je

$$E_0 = \frac{e\hbar}{2m} B_0, \quad F_z = \frac{e\hbar}{2m} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Pri  $t > 0$  imamo Schrödingerjevo enačbo

$$Psi(\vec{r}, t) = \psi_0(x, y, z) \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(z, t) \\ \psi_{\downarrow}(z, t) \end{pmatrix}$$

Enačbe ne bomo reševali, je pa razvidno, da spin vpliva na krajevno komponento valovne funkcije, ki je merljiva. Kar pa v resnici ni meritev, temveč eksperiment. Postulat kvantne mehanike pravi, da kvantna meritev ireverzibilno določi stanje delca, ki ga opazujemo.

**Von Neumannova meritev.** Imamo delec s Hamiltonovo funkcijo  $H = H_0 + H_{int}$ , kjer bodi

$$H_{int} = -\frac{g\hbar}{\tau} \hat{A}q$$

$\hat{A}$  operator, ki ga želimo obravnavati, ima naj lastne vrednosti  $a_n$ ,  $q$  pa je neka koordinata (na primer  $z$ , če govorimo o Stern-Gerlach). Ob  $t = 0$  naredimo razvoj:

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \otimes \phi(q)$$

Nato razvijemo po času ( $\tau$ ):

$$U = e^{-i\frac{H_{int}\tau}{\hbar}} = e^{iq\hat{A}}$$

$$|\Psi(\tau)\rangle = U(\tau, 0) |\Psi(0)\rangle$$

$\phi(q)$  transformiramo v  $\tilde{\phi}(p)$ :

$$|\Psi(\tau)\rangle = U(\tau) \sum_n c_n \otimes \int \tilde{\phi}(p) |p\rangle dp =$$

$$= \sum_n c_n e^{iq a_n} |n\rangle \otimes \int \tilde{\phi}(p) |p\rangle dp =$$

Vstavimo  $|p\rangle \propto \exp(ipq/\hbar)$ :

$$= \sum_n c_n |n\rangle \otimes \int \tilde{\phi}(p) |p + \delta p_n\rangle dp$$

$$= \sum_n c_n |n\rangle \otimes \int \tilde{\phi}(p - \delta p_n) |p\rangle dp \propto e^{i(ga_n + p/\hbar)q}$$

Se pravi  $\hbar \delta p_n \sim ga_n$ . Iz  $p_n$  lahko torej izmerimo z gibalno količino, ki jo tako ali drugače znamo izmeriti. Dejansko zasnovati tak eksperiment je seveda druga stvar.

**Kvantna prepletenost.** Imejmo valovno funkcijo, ki je odvisna od dveh vrednosti, na primer  $x_1, x_2$ . Vzemimo

$$\psi(x_1, x_2) = C \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2 - L)^2}{4\sigma^2}\right)$$

V limiti  $\sigma \rightarrow 0$  gre to proti funkciji  $\delta(x_1 - x_2 + L)$ . Prva posledica je, da to pomeni, da če poznamo pozicijo enega delca, takoj poznamo tudi pozicijo drugega delca. Na primer, če naj velja  $x_2 = x_1 + L$ , dobimo

$$\psi(x_2) = \delta(x - x_1)$$

Če merimo gibalno količino teh delcev, je  $p_2 = -p_1$ , torej

$$\psi(x_2) = -i \frac{p_2 x}{\hbar}$$

Tu imamo enačbo za ravni val. Ali lahko valovna funkcija enega delca spremeni obliko, če opazujemo drugi delec? V praksi takega eksperimenta ne moremo izvesti, lahko pa eksperimentalno dokažemo Bellove neenačbe, ki opisujejo kvantno prepletenost spinov. Imamo fotona z valovno funkcijo

$$|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

Možnosti za spin sta  $\pm 1$ . Predpostavimo, da spin že pred meritvijo določajo neke spremenljivke  $\lambda_i$ : Za prvi foton (s spinom  $a = \pm 1$ ) so te spremenljivke  $\lambda_i^a$ , za drugi foton (s spinom  $b = \pm 1$ ) pa  $\lambda_i^b$ . Velja naj torej

$$a = b(\vartheta_b) = f(\lambda_1^a, \lambda_2^a, \dots, \lambda_n^a)$$

$$b = a(\vartheta_a) = f(\lambda_1^b, \lambda_2^b, \dots, \lambda_n^b)$$

Zdaj imamo dve možni predpostavki:

1. Obstajajo take skrite spremenljivke  $\lambda$ , ki so določene že pred meritvijo
2. Med fotonoma ni komunikacije

Ustvarimo pogoje, v pri katerih imamo štiri možnosti:  $a, b, a', b'$ . Naredimo tabelo: Povprečje vrednosti

| $a$      | $b$      | $a'$     | $b'$     | $ab + a'b + ab' - a'b' = C$ |
|----------|----------|----------|----------|-----------------------------|
| 1        | 1        | 1        | 1        | 2                           |
| 1        | 1        | 1        | -1       | 2                           |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$                    |
| -1       | -1       | -1       | -1       | -2                          |

v zadnjem stolpcu je  $pm2$ . Lahko pa jih izračunamo tudi drugače:

$$\overline{ab} = \int \rho(\vartheta_a, \underline{\lambda}^a) \rho(\vartheta_b, \underline{\lambda}^b) f(\vartheta_a, \underline{\lambda}^a) f(\vartheta_b, \underline{\lambda}^b) d^n \lambda^a d^n \lambda^b$$

Če to naredimo za vse ostale stolpce v tabeli, mora veljati

$$\overline{ab} + \overline{ab'} + \overline{a'b} + \overline{a'b'} = \overline{C'}$$

To pa lahko velja tudi, če je  $|\overline{C}| \geq 2$  (temu pravimo Bellova neenačba), in s pametno izbiro kotov  $\vartheta_a, \vartheta_b, \vartheta'_a, \vartheta'_b$  lahko eksperimentalno dobimo  $C' = 2\sqrt{2} > 2$ . Sledi, da je vsaj ena od prej predpostavljenih možnosti napačna. Izkazalo se je, da fotona med seboj "komunicirata", in to celo z nadsvetlobno hitrostjo. Se pa s tem izognemo kršenju postulata o tem, da stanje delca pred meritvijo ni določeno.