Naloga. Imamo Gaussov valovni paket:

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4\sigma^2}} e^{i\frac{\langle p\rangle}{\hbar}x}$$

Zanima nas časovni razvoj $\langle x, t\rangle$ pri konstantnem potencialu. Spomnimo se:

$$\langle x, t\rangle = \int \psi^*(x,t) x \psi(x,t)\,\mathrm{d}x$$

O začetnem stanju vemo:

$$\langle x, 0\rangle = \langle x\rangle \qquad \langle p, 0\rangle = \langle p\rangle$$

$$\delta x(0) = \sigma$$

$$\delta p(0) = \frac{\hbar}{2\sigma}$$

Funkcijo ψ lahko razvijemo po lastnih funkcijah. Dobimo:

$$\psi(0) = \int c(k) e^{ikx}\,\mathrm{d}k$$

V tem prepoznamo Fourierovo transformacijo:

$$c(k) = \frac{1}{2\pi}\int \psi(x,0) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

In spet nazaj:

$$\psi(x,t) = \int c(\kappa) e^{-i\frac{E_k t}{\hbar}} e^{i\kappa x}\,\mathrm{d}\kappa$$

Iz spodnjih dveh izrazov bi lahko dobili rešitev, vendar bi bila to le dolgotrajna vaja iz integriranja. Obstaja elegantnejši način.

$$|\psi, t\rangle = e^{-iHt\hbar}|\psi t\rangle$$

$$\langle \psi, t| = |\psi, t\rangle^\dagger = \langle \psi, 0| e^{iHt/\hbar}$$

Za poljuben operator A torej velja:

$$\langle \psi, t|A|\psi, t\rangle = \langle \psi, 0|e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar}|\psi, 0\rangle = \langle \psi, 0|A(t)|\psi, 0\rangle$$

Nekaj koristnih posledic tovrstnega zapisa:

$$(\alpha A + \beta B)(t) = \alpha A(t) + \beta B(t)$$

$$(AB)(t) = A(t)B(t)$$

$$A^\dagger(t) = (A(t))^\dagger$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = e^{iHt/\hbar}\frac{iH}{\hbar}Ae^{-iHt/\hbar} + e^{iHt/\hbar}Ae^{-iHt/\hbar}\left(-\frac{iH}{\hbar}\right)$$

Ker operatorja $f(A)$ in A komutirata (kar bi lahko dokazovali z razvojem v funkcijsko vrsto), izpostavimo:

$$e^{-Ht/\hbar}\left(\frac{iH}{\hbar}A - A\frac{iH}{\hbar}\right)e^{iHt/\hbar}$$

V izrazu na sredini prepoznamo komutator $[H, A]$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A](t)$$

To je v resnici diferencialna enačba za operator A z začetnim pogojem $A(0) = A$. Nas posebej zanimajo operatorji x, p, x^2, p^2.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{i}{\hbar}[H, x](t)$$

Izračunamo komutator $[H, x]$:

$$[H, x] = [\frac{1}{2m}p^2, x]$$

Za lažje računanje tu omenimo nekaj lastnosti komutatorja:

$$AB, C = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$$

$$[p, x] = -i\hbar$$

Sledi:

$$[H, x] = \frac{1}{2m}\left(p(-i\hbar) - (i\hbar)p\right) = -\frac{i\hbar p}{m}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{p(t)}{m}$$

Poglejmo si zdaj operator p:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) = \frac{i}{\hbar}[H, p](t) = \frac{1}{2m}[p^2, p] = 0$$

Dobili smo sistem linearnih diferencialnih enačb. Rešitev je dokaj enostavna:

$$p(t) = p(0) = p = \text{konst.}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}$$

$$x(t) = \frac{p}{m}t + x(0)$$

Dobili smo premo enakomerno gibanje (kar je smiselno, saj smo predpostavili konstanten potencial, torej ni sil). Izrazimo še časovni razvoj:

$$\langle x, t\rangle = \frac{t}{m}\langle p\rangle + \langle x\rangle$$

$$\langle p, t\rangle = \langle p\rangle$$