Lokalne umeritvene transformacije. Zapišemo:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = e\vec{E} + \vec{r} \times \vec{B}$$

Vemo, da je $\vec{A}$ nedoločen do gradienta neke funkcije. Lokalna umeritvena transformacija torej pomeni, da mu prištejemo nek gradient.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda(\vec{r}, t)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Ko to vstavimo v Schrödingerjevo enačbo, dobimo enačbo za ψ':

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A}')^2}{2m}\psi' + e\phi'\psi'$$

Globalna umeritvena transformacija. Uporabimo nastavek

$$\psi' = e^{i\delta(\vec{r}, t)}$$

Ko ga vstavimo v Schrödingerjevo enačbo, dobimo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial e}^{i\delta} \psi = \frac{1}{2m} \sum_\alpha \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \left(eA'_\alpha - \hbar \frac{\partial \delta}{\partial x_\alpha} \right) \right)^2 \psi + e\phi'\psi$$

Ko to rešimo, ugotovimo, da mora biti $\delta(\overrightarrow{r, t}) = \frac{e}{\hbar}\Lambda$. Tako imamo za ψ in ψ' enako enačbo in velja:

$$\psi' = e^{i\frac{\hbar}{e}\Lambda}\psi$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda(\vec{r}, t)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Aharonov-Bohmov pojav. Zamislimo si elektron v ravnini, skozi katero teče tuljava. Znotraj tuljave je polje enako $\vec{B}$, zunaj pa 0, vendar ima še vedno magnetni potencial, ki lahko vpliva na elektron.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{A} = \nabla\Lambda \neq 0$$

$$\Lambda(\vec{r}) = \lambda(\vec{r_0}) - \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{R}) \, \mathrm{d}\vec{R}$$

Mislimo si, da integral od $\vec{r_0}$ do $\vec{r}$ poteka po neki poti - ker je $\vec{A}$ očitno potencialno polje, izbira poti ni pomembna. Poglejmo dva primera: $\vec{B} = 0, \vec{A} \neq 0$ in $\vec{B} = 0, \vec{A} = 0$.
Prvi primer:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_A}{\partial t} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m}\psi_A + V\psi_A$$

Tega ne znamo, zato si najprej oglejmo drugi primer: $\vec{A} = 0$. To je sicer popolnoma nemogoče, vendar nam bo pomagalo pri računanju.

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = \frac{p^2}{2m}\psi_0 + V\psi_0$$

Lahko si zamislimo, da smo naredili transformacijo $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla(-\Lambda) = 0$

$$\psi_A(\vec{r}, t) \exp\left(i\frac{e}{\hbar} \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot \mathrm{d}\vec{r}' \right) \psi_0(\overrightarrow{r, t})$$

. Mislimo si, da mora elektron priti okoli območja z neničelnim $\vec{B}$ - od točke I do točke II. V to ga "prisilimo" tako, da iz teh točk napeljemo žici, skozi kateri teče kot I. Okoli magnetnega polja lahko gre elektron po levi ali po desni (pot 1 ali pot 2). Zaradi kontinuitete velja:

$$\psi_{\mathrm{II},0} = \psi_1 + \psi_2, \qquad \vec{B} = 0, \vec{A} = 0$$

Če elektrona ne motimo, ga torej do točke II pride toliko, kolikor ga je šlo skupaj po levi in po desni. Zdaj naj bo $\vec{B} \neq 0$ in $\vec{A} \neq 0$. Velja:

$$\psi_{\mathrm{II},B} = e^{i\delta_1}\psi_1 + e^{i\delta_2}\psi_2$$

$$\delta_{1,2} = \frac{e}{\hbar}\int_{\gamma_1,\gamma_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Izpostavimo $e^{i\delta_2}$:

$$\psi_{\mathrm{II},B} = e^{i\delta_2}\left(e^{i(\delta_1-\delta_2)}\psi_1 + \psi_2\right) \approx$$

Predpostavimo $\psi_1 \approx \psi_2$

$$\approx e^{i\delta}\left(1 + e^{i(\delta_1-\delta_2)}\right)\psi_2$$

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{e}{\hbar}\oint \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{e}{\hbar}\iint \nabla \times \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{e}{\hbar}\iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{e}{\hbar}\Phi_B$$

Sledi:

$$\frac{I_B}{I_0} = \frac{|\psi_{\mathrm{II},B}|}{|\psi_{\mathrm{II},0}|} = \frac{1}{4}\left|1 + e^{i\frac{e}{\hbar}\Phi_B}\right| = \cos^2\left(\frac{e}{2\hbar}\Phi_B\right)$$

Maksimume dobimo, ko je

$$\frac{e}{\hbar}\Phi_B = 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Phi_B = \frac{2\pi\hbar}{e}n = \frac{h}{e}n$$

Označimo $\Phi_0 = h/e$. V primeru superprevodnika je $e = 2e_0$, torej je najmanjši možni magnetni pretok skozi superprevodnik najmanj $h/2e_0 \sim 10^{-19}$ T.

Superprevodnik. Ima sledeče lastnosti:

1. $B = 0$. Temu pravimo Meissnerjev pojav, zato je superprevodnik idealen diamagnet. Na to lastnost superprevodnika se lahko vedno zanašamo (jo je pa precej težko dokazati).
2. $R = 0$. V njem ni opaznega upora, je idealen prevodnik.
3. Energijska vrzel med valenčnim in prevodnim pasom ima neke posebne lastnosti.
4. Levitacija. Ko je superprevodnik dovolj ohlajen ($T < T_c$), znotraj njega ni magnetnega polja, skozi določene "luknje" pa še vedno teče magnetni pretok, ki je celi večkratnik osnovnega magnetnega pretoka $n\Phi_0$. Polje znotraj superprevodnika je enako 0, ker je superprevodnik ustvaril nasprotno polje, in sicer tako, da je okoli "lukenj" stekel tok. Tako v superprevodniku nastane nekakšna obratna slika magneta.