1 Greenove funkcije - nadaljevanje

1.1 Von Neumannov robni pogoj

Za operator $\mathcal{L} = \nabla^2 + q(\vec{r})$ iščemo rešitev Neumannovega problema:

$$\nabla^2 u = f, \qquad \frac{\partial u(\vec{r_B})}{\partial n} = g(\vec{r_n}),$$

ko $\vec{r_B}$ leži na robu domene. Funkcij f in g ne moremo izbrati poljubno, temveč mora veljati konsistenčni pogoj:

$$\int_{\partial\mathcal{D}} g(\vec{r_B})\,\mathrm{d}S_B = \int_{\mathcal{D}} f(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Naivno bi lahko poskusili kot prej poiskati Neumannovo Greenovo funkcijo G_N, za katero velja

$$\nabla^2 G_N = \delta(\vec{r} - \vec{r_0}) \text{ in } \frac{\partial G_N}{\partial n}(\partial\mathcal{D}) = 0$$

Težava se pojavi, ker pri integralu levega pogoja dobimo

$$\int \frac{\partial G_N}{\partial n}\,\mathrm{d}S = 1,$$

kar pa zaradi desnega pogoja ni mogoče. Enega od pogojev moramo relaksirati, in sicer recimo:

$$\nabla^2 G_N = \delta(\vec{r} - \vec{r_0}) - \frac{1}{V},\ V = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^3\vec{r} \quad \text{ in } \quad \frac{\partial G_N}{\partial n}(\partial\mathcal{D}) = 0$$

Zaradi dodatnega člena $1/V$ si robna pogoja ne nasprotujeta več. Izrazimo u:

$$u(\vec{r}) = \int_{\mathcal{D}} G_N(\vec{r}, \vec{r_0}) f(\vec{r_0})\,\mathrm{d}^3\vec{r_0} - \int_{\partial\mathcal{D}} g(\vec{r_B}) G_N(\vec{r}, \vec{r_B})\,\mathrm{d}S_B + \text{konst.}$$

1.2 Difuzijski operator

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2\right)$$

1.2.1 Dirichletov robni pogoj

Rešujemo problem $\mathcal{L}u = f(\vec{r}, t)$ z Dirichletovim robnim pogojem $u(\vec{r_B}, t) = g(\vec{r_B}, t)$ in nekakšnim začetnim pogojem $h(\vec{r})$ Greenovo funkcijo iščemo kot

$$\mathcal{L}G = \delta(\vec{r} - \vec{r_0})\delta(t - t_0), \qquad G(\vec{r_B}, \vec{r_0}) = 0$$

Ko jo enkrat imamo, deluje kot propagator in lahko izračunamo

$$u(\vec{r}, t) = \int_0^\infty \int_{\mathcal{D}} f(\vec{r_0}, \tau) G(\vec{r}, \vec{R_0}; t - \tau)\,\mathrm{d}^3\vec{r_0}\,\mathrm{d}\tau$$

$$+ \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r_0}) G(\vec{r}, \vec{r_0}; t)\,\mathrm{d}^3\vec{r} - D\int_0^\infty \int_{\partial\mathcal{D}} g(\vec{r_B}, \tau) \frac{\partial G}{\partial n_B}(\vec{r}, \vec{r_B}, t - \tau)\,\mathrm{d}^3\vec{r_B}\,\mathrm{d}\tau$$

Prvi integral je časovni razvoj nehomogenosti, drugi integral je časovni razvij začetnega pogoja, tretji integral pa časovni razvoj robnega pogoja.

1.3 Greenova funkcija za krog

1.3.1 Vsota neskončne funkcije in rešitve z robnim pogojem

Imamo laplaceov operator $\mathcal{L} = \nabla^2$ in Dirichletov robni pogoj za krog. Iščemo

$$\nabla^2 G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) = \frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0)$$

Predfaktor $1/r$ potrebujemo, da se bo pri integriranju krajšal z Jacobianom. To bomo naredili na tri načine, in sicer z nastavkon $G = G_\infty + g$. Za takšen problem je

$$G_\infty = \frac{\ln r}{2\pi}$$

Iščemo še g:

$$\nabla^2 g = 0$$

$$g\Big|_{\partial\mathcal{D}} = -\frac{1}{4\pi}\ln[R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)]$$

Rešitev Laplaceove enačbe na krogu so funkcije

$$g = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left(c_m \cos(m\varphi) + d_m \sin(m\varphi)\right)$$

Velja:

$$\ln\left[R^2\left(1 + \frac{r_0^2}{R^2} - \frac{2r_0}{R}\cos(\varphi - \varphi_0)\right)\right] = \ln R^2 + \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{r_0^m}{R^m}\frac{2}{m}\cos\left[m(\varphi - \varphi_0)\right]$$

To lahko dokažemo na primer s primerjavo vrednosti in odvodov v $\varphi - \varphi_0 = 0$. Uporabimo še adicijski izrek:

$$\cos[m(\varphi - \varphi_0)] = \cos(m\varphi)\cos(m\varphi_0) + \sin(m\varphi)\sin(m\varphi_0)$$

Da zadostimo robnemu pogoju, je

$$c_0 = -\frac{\ln R^2}{4\pi}$$

Nato pa primerjamo vrsti in preberemo koeficiente:

$$c_m = \frac{1}{R^m}\left(\frac{r_0}{R}\right)^m \frac{1}{2\pi m}\cos(m\varphi_0)$$

$$d_m = \frac{1}{R^m}\left(\frac{r_0}{R}\right)^m \frac{1}{2\pi m}\sin(m\varphi_0)$$

Vse skupaj lahko malo krajše zapišemo kot vrsto za g:

$$g(\vec{r}, \vec{r_0}) = \frac{1}{4\pi}\left[-\ln R^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m}\left(\frac{r_0 r}{R^2}\right)^m \cos(m(\varphi - \varphi_0))\right]$$

Uporabimo kar znano vsoto od prej in zapišemo

$$-\frac{1}{4\pi}\ln\left[R^2 + \frac{(r_0 r)^2}{R^2} - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)\right]$$

To seštejemo z G_∞. Označimo še $|\vec{r_*}| = R^2/r_0$, $\vec{r_*} \parallel \vec{r_0}$ (prezrcalimo čez rob kroga).

$$G(\vec{r}, \vec{r_0}) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{|\vec{r} - \vec{r_0}|^2}{\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 |\vec{r} - \vec{r_*}|^2}$$

1.3.2 Lepljenje

Krog razdelimo na zunanje in notranje območje. Notranje območje je krog s polmerom r_0, zunanje pa kolobar z zunanjim polmerom R (imejmo kot enoto $R = 1$) in notranjim polmerom r_0. Koordinatni sistem obrnemo tako, da je $\varphi_0 = 1$ Rešujemo Laplaceovi enačbi

$$\nabla^2 G_n = \frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(\varphi)$$

$$\nabla^2 G_z = \frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(\varphi)$$

Pomagamo si s splošno rešitvijo Laplaceove enačbe:

$$u = (A_0 + B_0 \ln r)(a_0 + b_0\varphi) + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(A_m r^{|m|} + B_m r^{-|m|}\right) e^{im\varphi}$$

Zapišemo:

$$\delta(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\varphi)$$

Enačimo koeficiente in vidimo, da nam v splošni rešitvi Laplaceove enačbe zadošča vzeti le člene s $\cos m\varphi$:

$$G_n = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m r^m \cos(m\varphi)$$

$$G_z = (A_0' + B_0' \ln r) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m' r^m + B_m' r^{-m}\right) \cos m\varphi$$

Hkrati želimo, da je G v $r = r_0$ zvezna v $r = r_0$.

Opomba. Če si zamislimo, da imamo pri G_n razvoj

$$G_n = \sum_m f_m(r)\cos(m\varphi),$$

Vidimo, da ima odvod f_m' okoli r_0 nezvezen skok:

$$f_m'' + \frac{f_m'}{r} - \frac{m^2}{r^2} f_m = \frac{\delta(r - r_0)}{r\pi}$$

$$(r f_m')' - \frac{m^2}{r} = \frac{\delta(r - r_0)}{\pi}$$

Na obeh straneh integriramo od $r_0 - \varepsilon$ do $r_0 + \varepsilon$:

$$r f_m'\Big|_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} = \frac{1}{\pi}$$

Se pravi:

$$\Delta(r_0 f_m') = \frac{1}{\pi}$$

$$\Delta(r_0 f_0') = \frac{1}{2\pi}$$

Iz zahteve po zveznosti v r_0 dobimo

$$A_0 = B_0' \ln r_0, \qquad A_m = B_m' \left(\frac{1}{r_0^{2m}} - 1\right)$$

Iz zahteve, da na robu $r = R$ velja $G_z = 0$, dobimo:

$$A_0' = 0, \qquad A_m' + B_m' = 0$$

Iz skoka v odvodu okoli r_0 dobimo

$$B_0' = \frac{1}{2\pi}, \qquad B_m' = -\frac{r_0^m}{2m\pi}$$

Dobili smo

$$G_n = \frac{1}{2\pi}\ln r_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}r^m\left(r_0^m - \frac{1}{r_0^m}\right)\cos(m\varphi)$$

$$G_z = \frac{1}{2\pi}\ln r + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}r_0^m\left(r^m - \frac{1}{r^m}\right)\cos(m\varphi)$$

Opazimo, da je edina razlika med funkcijama zamenjava spremenljivk r in r_0, torej gre za nekakšno zrcaljenje. Spomnimo, da smo to izračunali za $R = 1$ in $\varphi_0 = 0$. Za poljubem φ_0 in poljuben polmer bi morali zamenjati

$$\varphi \to \varphi - \varphi_0$$

$$r \to r/R$$

$$r_0 \to r_0/R$$

1.3.3 Razvoj po lastnih funkcijah

Recimo, da poznamo lastne funkcije, za katere je

$$\mathcal{L}u_n = \lambda_n u_n$$

in lahko razvijemo G in $\delta(\vec{r} - \vec{r_0})$. Razvoj za δ delta funkcijo je enostaven:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r_0}) = \sum_n c_n(\vec{r_0})u_n(\vec{r})$$

$$c_n(\vec{r_0}) = \langle u_n|\delta\rangle = u_n^*(\vec{r_0})$$

Razvoj Greenove funkcije je torej:

$$G = \sum_{\vec{n}}\frac{u_n(\vec{r})u_n^*(\vec{r_0})}{\lambda_n}$$

Opomba. Opazimo nekaj lastnosti:

- $G(\vec{r}, \vec{r_0}) = G^*(\vec{r_0}, \vec{r})$
- Če je $\lambda_n = 0$, te člene preprosto izpustimo. V tem primeru za našo Greenofo funkcijo velja

  $$\mathcal{L}G = \delta(\vec{r} - \vec{r_0}) - \frac{1}{V},$$

  kjer je $V = \sum_n u_n^*(\vec{r_0})u_n(\vec{r})$

Spet vzamemo $R = 1,\ \varphi_0 = 0$. Če je na primer za Laplaceov operator $\mathcal{L} = \nabla^2$ lastna funkcija

$$u_{mk} \propto J_m(\xi_{mk}r)\cos(m\varphi)$$

Potrebujemo še normalizacijsko konstanto, ki je

$$N_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}J_1(\xi_{0k})} \qquad \text{za } m = 0$$

$$N_{m>0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{J_{m+1}(\xi_{m,k})}$$

Lastne vrednosti so $-\xi_{m,k}^2$

$$G = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\xi_{0,k}r)J_0(\xi_{0,k}r_0)}{\pi\xi_{0,k}^2J_1^2(\xi_{0,k})} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2J_m(\xi_{m,k}r)J_m(\xi_{m,k}r)}{\pi\xi_{m,k}^2J_{m+1}^2(\xi_{m,k})}\cos(m\varphi)$$

Stvar lahko malo lepše napišemo z upoštevanjem lastnosti $J_{-m} = -J_m$:

$$G = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{J_m(\xi_{m,k} r) J_m(\xi_{m,k} r_0)}{\pi \xi_{m,k}^2 J_{m+1}^2(\xi_{m,k})} \cos(m\varphi)$$

Vidimo, da je

$$\frac{\delta(r - r_0)}{r} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_m(\xi_{m,k} r) J_m(\xi_{m,k} r_0)}{J_{m+1}^2(\xi_{m,k})} \qquad \forall m$$

1.4 Povzetek

za končen $\mathcal{D}$ lahko Greenovo funkcijo poiščemo na tri načine:

- Z nastavkom $G = G_\infty + g$.
- Z razvojem po lastnih funkcijah operatorja.
- Z lepljenjem, pri katerem upoštevamo skok v odvodu koeficientov $f_m'(r)$.