

Imamo vrteč naelektron disk, vzdolž osi vrtenja želimo izračunati jakost magnetnega polja.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 \vec{r}'$$

$d^3 \vec{r}'$ zapišemo kot $dS' \cdot dl'$, pri čemer je $\vec{j} dS' = I d\vec{t}$ in $dl' = r d\varphi$

$$\vec{r} = (0, 0, z)$$

$$\vec{r}' = (r' \cos \phi', r' \sin \phi', 0)$$

$$\vec{t} = (-\sin \phi', \cos \phi', 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{t}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin \phi' & \cos \phi' & 0 \\ -r' \cos \phi' & -r' \sin \phi' & z \end{vmatrix} = (z \cos \phi', z \sin \phi', r' \sin^2 \phi + r' \cos^2 \phi) \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \begin{bmatrix} z \cos \phi' \\ z \sin \phi' \\ r' \end{bmatrix} \frac{\sigma \omega r'^2 dr' d\phi'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Pogledamo samo z komponento (ki je po integriranju po ϕ' tudi edina neničelna). Uporabimo substitucijo $u = r'^2 + z^2$:

$$B_z = \dots = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \int_{z^2}^{a^2 + z^2} \left(u^{-1/2} - z^2 u^{-3/2} \right) du = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \left(2u^{1/2} + 2z^2 u^{-1/2} \right) \Big|_{z^2}^{a^2 + z^2}$$

Dobili smo končni izraz, ki pa je dokaj komplikiran:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left(\frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 2z \right)$$

Oglejmo si limito $z \gg a$:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left(\frac{a^2 + 2z^2}{z \sqrt{1 + a^2/z^2}} \right) - 2z$$

Ker je $a^2/z^2 \ll 1$, lahko imenovalez razvijemo po Taylorju:

$$B_z(z) \approx \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\frac{1}{z} \left(a^2 - \frac{1}{2} \frac{a^4}{z^2} + \frac{3}{8} \frac{a^6}{z^4} + 2z^2 - a^2 + \frac{3}{4} \frac{a^4}{z^2} \right) - 2z \right)$$

Ko se členi med seboj pokrajšajo (ali jih zanemarimo), ostane:

$$B_z(z) \approx \frac{\mu_0 \sigma \omega a^4}{4z^3}$$

To je ravno magnetno polje točkastega magnetnega dipola.

Koaksialni kabel. Skozi plašč teče tok I . Skozi sredico (žilo), teče tok $-I$ (torej v drugo smer). Zanima nas lahko, na primer, sila napetosti plašča. Za izračun magnetnega polja zunaj in znotraj plašča uporabimo Amperov zakon:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{tot}$$

Zunaj plašča ne teče noben tok, torej je $\vec{B} = 0$.

Znotraj plašča:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Plašč razdelimo na zunanji in notranji del. Na zunanjem delu je $\vec{B} = 0$ in posledično navznoter ne kaže nobena sila. Silo na plašč opišemo z napetostnim tenzorjem:

$$\overrightarrow{F_m} = \frac{1}{\mu_0} \oint \left[\vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} B^2 \vec{n} \right] dS$$

Imamo $dS = al d\varphi$. ker je $\vec{B} \perp \vec{n}$, velja:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= -\frac{1}{2\mu_0} \int_0^\pi B^2 \vec{n} al d\varphi = \frac{al}{2\mu_0} B^2 \int_0^\pi \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} d\varphi \\ &= \frac{al}{2\mu_0} B^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dobimo, da na notranji del plašča deluje raztezna sila

$$l = \frac{\overrightarrow{F_m}}{\frac{\mu_0 I^2}{b\pi a}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ker smo računali za zgornjo polovico plašča (integrirali smo od 0 do π), nam to pove, da plašč vleče narazen (dobljena sila namreč kaže v pozitivno smer y , torej navzgor).

Toroidna tuljava. Na telefonu.