

Točkasti naboj nad ozemljeno prevodno ploščo. Okoli naboja se ustvari električno polje, ki vpliva tudi na razporeditev naboja na plošči. Imamo robni pogoj $\vec{E} = 0$ pod ploščo. Poznamo naboj e in odmik od plošče d .

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(z-d)^2 + \rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{(z+d)^2 + \rho^2}} \right) \\ \sigma_{\text{ind}} = \epsilon_0 E_{\perp} \Big|_0 &= \epsilon_0 E_z \Big|_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial z} U \Big|_{z=0} = \dots = -\frac{ed}{2\pi\epsilon_0} (\rho^2 + d^2)^{3/2} \end{aligned}$$

Oglejmo si limiti $\rho \gg d$ in $\rho \ll d$:

$\rho \gg d$: $\sigma_{\text{ind}} \sim \rho^{-3}$

$\rho \ll d$: Uporabimo Taylorjev razvoj $(1 + \varepsilon)^p \approx 1 + p\varepsilon$.

$$(\rho^2 + d^2)^{3/2} = \left[d^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{d^2} \right) \right]^{-3/2} \approx d^{-3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{d^2} \right) = \frac{1}{d^3} - \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{d^5}$$

Limiti sta si bili ogledani.

$$\begin{aligned} d e_{\text{ind}} &= \sigma_{\text{ind}} dS \\ e_{\text{ind}} &= -ed \int_0^\infty \rho (\rho^2 + d^2)^{-3/2} d\rho = -\frac{ed}{2} \int_{d^2}^\infty u^{-3/2} du = \dots = -e \end{aligned}$$

Električna sila na točkasti naboj nad prevodno ploščo. Silo lahko računamo z napetostnim tenzorjem:

$$\vec{F}_e = \epsilon_0 \oint_D \left[(\vec{E} \otimes \vec{E}) - \frac{1}{2} E^2 \underline{I} \right] \vec{n} dS$$

Integrirati moramo po zaključani ploskvi, zato si mislimo, da je obravnavana plošča prvi del te ploskve, drugi del pa je polkroga, katere radij pošljemo proti neskončno. Hitro lahko pokažemo, da gre drugi prispevek proti 0.

Integral vzdolž plošče pa računamo takole: Vemo, da je normala vzporedna z električnim poljem ob plošči.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{n}) &= E^2 \vec{n} \\ \vec{F} &= \epsilon_0 \int_S \frac{1}{2} E^2 \vec{n} dS = \frac{\epsilon_0 \vec{n}}{2} \int_S E^2 dS \end{aligned}$$

Od prej imamo

$$\begin{aligned} E &= -\frac{ed}{2\pi\epsilon_0} (\rho^2 + d^2)^{-3/2} \\ dS &= 2\pi\rho d\rho \end{aligned}$$

Ko to vstavimo v enačbo, dobimo:

$$\vec{F}_e = \frac{e^2 \epsilon_0 2\pi}{8\pi^2 \epsilon_0^2} \vec{n} \int_0^\infty \frac{\rho}{d} \left(1 + \frac{\rho^2}{d^2} \right)^{-3} \frac{d\rho}{d} =$$

Uporabimo substitucijo $u = (1 + \rho^2/d^2)$ in dobimo

$$\vec{F}_e = \frac{e^2 \vec{n}}{16\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} (-\hat{e}_z)$$

Sila je torej enaka, kot bi bila sila med pozitivnim in negativnim nabojem na razdalji $2d$.

Točkasti naboj med dvema pravokotnima ploščama. Fiksen naboj leži na simetrali med ploščama, od vsake plošče je oddaljen za neko razdaljo a , odmik od presečišča ploskev pa označimo z \vec{r} . Zanima nas $U(\vec{r})$.

Obravnavali bomo primer $r \gg a$. Naredimo multiploni razvoj:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e}{r} + \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r}^T Q \vec{r}}{r^5} + \dots \right]$$