1 Sturm-Liouviellov problem - nadaljevanje

1.1 Liouville-Greenov (WKB) približek

Od prejšnjega predavanje nam ostane, da imamo za lastne funkcije v Sturm-Liouvilleovem problemu približek

$$u_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{wp}}\, e^{\pm i \int_0^x \sqrt{\lambda_n w/p}\, \mathrm{d}y},$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} D_{eff}, \qquad D_{eff} = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \sqrt{\frac{w}{p}}\, \mathrm{d}y \right)^{-2}$$

Končna rešitev pri danih robnih pogojih je torej linearna kombinacija teh funkcij. Poglejmo si še, kaj se zgodi, če imamo Liouviellov problem oblike

$$\mathcal{L}u = fu'' + gu' + hu, \qquad f' \neq g$$

Če pomnožimo s funkcijo, definirano pri prejšnjem predavanju, torej

$$\frac{1}{f} \exp\left(\int \frac{g}{f}\, \mathrm{d}y \right),$$

dobimo standardni Sturm-Liouviellov problem.

Primer. Prevajanje toplote v nehomogeni končni palici. Imamo Dirichletov robni pogoj $T_{rob} = 0$, podana je toplotna prevodnost $\lambda(x) = p(x)$, in podatka $\rho(x)$ in $c_p(x)$, za katera velja $\rho(x)c_p(x) = w(x)$ - w pa je naša utež. Recimo, da imamo

$$\lambda(x) = 1 - \frac{1}{1 + \cosh(A\left[x - \frac{1}{2}\right])}$$

$$\rho c_p = w(x) = 1 + \beta \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

Tako dobimo Sturm-Liouvillov problem, ki ga lahko rešujemo npr. numerično ali z WKB približkom in preverimo, da so lastne funkcije pri uteženem skalarnem produktu tudi pri nehomogenem problemu ortogonalne (vsaj v okviru natančnosti približka in numerične natančnosti).

1.2 Splošni povzetek

Delamo na primeru difuzijske enačbe

$$D\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Naredimo nastavek za lastne funkcije

$$u(\overrightarrow{r}, t) = \sum_n c_n u_n(\overrightarrow{r}) T_n(t)$$

Za difuzijsko enačbo dobimo na primer nastavek

$$T_n(t) = e^{-k_n^2 D t}$$

Za valovno enačbo imamo nastavek

$$T_n(t) = e^{i\omega_n t}, \qquad \omega^2 = k_n^2 c^2$$

Drugi korak je obravnava valovnega dela, pri katerem smo dobili Sturm-Liouviellov problem

$$\nabla^2 u_n + k_n^2 u = 0$$

Poiščemo lastne funkcije $u_n(\overrightarrow{r})$ za homogene robne pogoje - zahtevamo $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$. Nato z razvojem po lastnih funkcijah rešimo problem za poljubne začetne pogoje $f(\overrightarrow{r})$.

$$u(\overrightarrow{r},t) = \sum_n c_n u_n(\overrightarrow{r}) e^{-k_n^2 Dt}$$

$$c_n = \frac{\langle u_n, f\rangle}{\langle u_n, u_n\rangle}$$

Če imamo nehomogeno enačbo

$$D\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

lahko razvijemo tudi nehomogenost g:

$$u(\overrightarrow{r},t) = \sum_n c_n(t) u_n(\overrightarrow{r})$$

$$g(\overrightarrow{r},t) = \sum_n c_n(t) g_n(\overrightarrow{r})$$

Dobimo navadne diferencialne enačbo za c_n:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c_n = -k_n^2 Dt c_n + g_n$$

ki imajo znane rešitve

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-k_n^2 Dt} + \int_0^t e^{-k_n^2 Dt\tau} g_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Če imamo nehomogene robne pogoje, problem prevedemo na reševanje nehomogene diferencialne enačbe s homogenimi robnimi pogoji ($u = v + g$).

2 Cilindrični koordinatni sistem

2.1 Besselove funkcije

Iz Keplerjevega problema imamo enačbo

$$\theta = \psi - \varepsilon \sin\psi$$

ki opisuj obliko obrite. Želeli bi poiskati izraz za ψ, vendar gre za transcendentno enačbo, zato tega ne moremo storiti na analitičen način. Besselove funkcije imajo ime po Priedrichu Besselu, ki je z njmi izrazil ψ, in sicer:

$$\psi = \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon)\sin(n\theta)$$

V osnovi pa gre za rešitve diferencialne enačbe

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

2.2 Helmholtzova enačba

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

Namesto v kartezičnih koordinatah rešujemo enačbo v cilindričnih:

$$u = R(r) Z(z) \phi(\varphi)$$

Najprej rešujemo kotni del:

$$\frac{\phi''}{\phi} = -m^2 \to \phi = \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix}$$

ali v posebnem primeru $m = 0$:

$$\phi = \begin{Bmatrix} 1 \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

Vzdolž osi z imamo dve možnosti, odvisni od robnih pogojev:

$$\frac{Z''}{Z} = \begin{cases} +\beta^2, \quad \text{rešitev je} \begin{Bmatrix} \cosh(\beta z) \\ \sinh(\beta z) \end{Bmatrix} \\ -\beta^2, \quad \text{rešitev je} \begin{Bmatrix} \cos(\beta z) \\ \sin(\beta z) \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Enačba za radij je

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left[\pm\beta^2 R - \frac{m^2}{r^2}R\right] + \lambda R$$

To prepišemo v

$$r^2 R'' + rR' + \left[r^2 \left(\lambda \pm \beta^2 - m^2\right) R = 0\right]$$

Dobili smo Besselovo diferencialno enačbo. Rešitve so cilindrične Besselove funkcije. Poglejmo si nekaj primerov:

- $\lambda \pm \beta^2 = 0$: Rešitve so linearna kombinacija r^m in r^{-m}, za $m = 0$ pa $1 + \ln(r)$.
- $\lambda \pm \beta^2 > 0$: definiramo $k^2 = \lambda \pm \beta^2$ in dobimo rešitev kot linearno kombinacijo $J_m(kr)$ in $Y_m(kr)$ (Y_m včasih imenujemo Neumannova funkcija). Lahko omenimo tudi limite

$$J_\nu \sim x^\nu, \qquad x \ll 1$$

$$Y_\nu \sim x^{-\nu}, \qquad x \ll 1$$

$$Y_0 \sim \ln x, \qquad x \ll 1$$

  V limiti $x \gg 1$ pa velja

$$J_\nu \asymp \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_\nu \asymp \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

  Gre v bistvu za cilindrične stoječe valove. Omenimo tudi Hanklovi funkciji:

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + iY_\nu$$

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu - iY_\nu$$

- $\lambda \pm \beta^2 < 0$: Definiramo $k^2 = -\left(\lambda + \beta^2\right)$, da je k lahko realno število. Nato izrazimo rešitev z modificiranimi Besselovimi funkcijami $I_\nu(kr)$ in $K_\nu(kr)$. V limiti $kr \ll 1$ se obnašata podobno kot navadni Besselovi funkciji (z izjemo $K_0 \sim -\ln kr,\ kr \ll 1$), v limiti $kr \gg 1$ pa velja

$$I_\nu \sim e^x/\sqrt{x}$$

$$K_\nu \sim e^{-x}/\sqrt{x}$$

  Modificirane Besselove funkcije so torej eksponentne narave in nimajo ničel (razen nekatere pri $x = 0$), kakor imajo navadne Besselove funkcije oscilirajočo naravo.

Primer. Rešujemo enačbo $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ za valj z radijem a, višino H. Zahtevamo robni pogojem $u = 0$. V smeri φ dobimo

$$\phi(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

V smeri z izberemo sinusne funkcije, saj imamo robni ogoj $u = 0$. Med opisanimi funkcijami ima le sin preiodične ničle. V smeri r vemo, da bo šlo za Besselove funkcije, saj mora imeti rešitev periodične ničle (to zahteva robni pogoj). Rešitev je torej

$$R(r) = J_m(kr),$$

kjer mora zaradi robnega pogoja veljati

$$k = \frac{\xi_{m,p}}{a},$$

kjer $\xi_{m,p}$ pomeni p-to ničlo m-te Besselove funkcije (te os tabelirane). Rešitev originalnega problema je linearna kombinacija lastnih funkcij

$$e^{im\varphi} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) J_m\left(\frac{\xi_{m,p} r}{a}\right)$$

z lastnimi vrednostmi

$$\lambda_{n,m,p} = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{\xi_{m,p}}{a}\right)^2$$

2.3 Lastnosti Besselovih funkcij

Generatrisa. Besselove funkcije uporabimo kot koeficiente razvoja

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$$

Primer:

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(x)$$

$$e^{ix\cos\theta} = J_0(x) + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x)\cos(n\theta)$$

Integralska reprezentacija.

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n\theta - x\sin\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

Rekurzivne zveze.

$$2J_n' = J_{n-1} - J_{n+1}, \quad J_0' = -J_1$$

$$\frac{2n}{x} J_n = J_{n-1} + J_{n+1}$$

$$(x^n J_n)' = x^n J_(n-1)$$

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$$

$$J_0^2(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1$$

Adicijski izreki.

$$J_n(x+y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_r(x) J_{n-r}(y)$$

$$J_0(|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\overrightarrow{r_1}) J_n(r_2) e^{in(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Podobno zvezo imamo tudi za Hanklove funkcije:

$$H_0(|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\overrightarrow{r_1}) H_n(r_2) e^{in(\varphi_2 - \varphi_1)}, \text{ za } r_1 > r_2$$

Normalizacija. Včasih nam pride prav Besselove funkcije normirati. Za $J_\nu(\xi_{\nu,\mu}) = 0$ zapišemo normo

$$\int_0^R r \left[J_\nu \left(\xi_{\nu,m} \frac{r}{R} \right) \right]^2 \mathrm{d}r = \frac{R^2}{2} \left[J_\nu'(\xi_{\nu,m}) \right]^2 = \frac{R^2}{2} \left[J_{\nu+1}(\xi_{\nu,m}) \right]^2$$

Za $J_\nu'(\xi_{\nu,m}') = 0$:

$$\int_0^R r \left[J_\nu \left(\xi_{\nu,m} \frac{r}{R} \right) \right]^2 \mathrm{d}r = \frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi'^2_{\nu,m}} \right) \left[J_\nu(\xi_{\nu,m}') \right]^2$$