Difuzijska enačba. Imamo enačbo oblike

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Naredimo sledečo transformacijo:

$$x \mapsto qx$$
$$t \mapsto q^2 t$$

Iskana funkcija T postane

$$T(x,t) = T\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = f(s)$$

Označili smo $s = x/\sqrt{t}$. Velja $\mathrm{d}s/\mathrm{d}x = 1/\sqrt{t}$ in $difs/\mathrm{d}t = x/(2t\sqrt{t})$. Naša enačba postane

$$f' \cdot \left(-\frac{s}{2t}\right) = f'' \cdot \frac{D}{t}$$

Pokrajšamo t in naredimo separacijo:

$$\frac{f''}{f'} = -\frac{s}{2D} \qquad /\textstyle\int \mathrm{d}s$$

$$\ln(f') = -\frac{s^2}{4D} + C$$

$$f(s) = C\int_0^s e^{-\zeta^2/4D}\,\mathrm{d}\zeta + C'$$

Izbira začetnih pogojev nam omogoči izračun koeficientov C in C'.

Npr. za $T_1(x, t = 0) = sgn(x)$ (signum funkcija):

$$T_1(x,t) = \frac{1}{\pi D}\int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-s^2/4D}\,\mathrm{d}s = \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

Za $T_2(x, t = 0) = \delta(x)$ (Diracova delta funkcija):

$$T_2(x,t) = \frac{1}{4\pi Dt}\, e^{-x^2/4Dt}$$

Gre ravno za odvod erf funkcije:

$$T_2(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} T_1(x,t)$$

Tudi superpozicija T_2 je rešitev:

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0) T_2(x - x_0, t)\,\mathrm{d}x_0$$

Gre pravzaprav za konvolucijo. To pomeni tudi, da je Greenova funkcija problema (fundamentalna rešitev):

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-x_0)^2/4Dt}\Theta(t)$$

$\Theta(t)$ je Heavisideova funkcija. Če to vstavimo v originalno enačbo, dobimo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(x, x_0, t) = \delta(x - x_0)\,\delta(t)$$

Robni pogoji. Mislimo si, da se nahajamo na poltraku. Recimo, da imamo začetni pogoj

$$T(x, t = 0) = h(x)$$

in robni pogoj

$$T(x = 0, t) = 0$$

Uporabimo t. i. Duhamelov princip: Zamislimo si, da je naš robni pogoj preprost: $h(x) = 1$. Zapišemo $T(x, t) = [1 - T_1(x, t)]\Theta(t) = \omega(x, t)$. (Gre za erf, ki smo jo "premaknili" na pravo mesto.)
Za splošni robnega pogoja dobimo enačbo

$$h(t) = h(0) + \int h(\tau)\Theta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Gre za konvolucijo med h in ω:

$$T(x, t) = \int_0^t h(\tau)\,\frac{\partial}{\partial t}\omega(x, t - \tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Separacija. Rešujemo difuzijsko diferencialno enačbo v dveh dimenzijah:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T$$

Z začetnim pogojem $T(\overrightarrow{r}, 0) = f(\overrightarrow{r})$. In robnim pogojem $T = 0$ na kvadratu s stranico L.
Če je enačba homogena, uporabimo separacijo:

$$T(x, y, t) = \varphi(x, y)u(t) = X(x)Y(y)u(t)$$

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{\nabla^2\varphi}{\varphi} = \frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

Oglejmo si, kako izbira λ vpliva na rešitev.

- $\lambda = 0$: $u(t) = \text{konst.}$ in $\varphi(x, y) = 0$. Primerna rešitev za $f(\overrightarrow{r}) = 0$.
- $\lambda < 0$: $u(t) = Ae^{|\lambda|t}$ in $A = \alpha\cosh(x) + \beta\sinh(x)$. Ta funkcija ima največ eno ničlo, torej ne more zadostiti robnemu pogoju.
- $\lambda > 0$: $u(t) = Ae^{-\lambda t}$ in

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$Y_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{(n + 1/2)\pi y}{L}\right)$$

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left[n^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$\varphi_{n,m} = X_n Y_m$$

Splošna rešitev je superpozicija rešitev pri $\lambda > 0$:

$$T(x, t) = \sum_{n,m} c_{nm}\varphi_{nm}e^{-\lambda_{nm}t}$$

Koeficiente c_{nm} dobimo s skalarnim produktom iz začetnih pogojev.