

Točkasti nabojo nad ozemljeno prevodno ploščo. Okoli naboja se ustvari električno polje, ki vpliva tudi na razporeditev naboja na plošči. Imamo robni pogoj $\vec{E} = 0$ pod ploščo. Poznamo nabojo e in odmik od plošče d .

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(z-d)^2 + \rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{(z+d)^2 + \rho^2}} \right) \\ \sigma_{\text{ind}} &= \varepsilon_0 E_\perp \Big|_0 = \varepsilon_0 E_z \Big|_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial z} U \Big|_{z=0} = \dots = -\frac{ed}{2\pi\varepsilon_0} (\rho^2 + d^2)^{3/2} \end{aligned}$$

Oglejmo si limiti $\rho \gg d$ in $\rho \ll d$:

$$\rho \gg d: \sigma_{\text{ind}} \sim \rho^{-3}$$

$$\rho \ll d: \text{Uporabimo Taylorjev razvoj } (1 + \varepsilon)^p \approx 1 + p\varepsilon.$$

$$(\rho^2 + d^2)^{3/2} = \left[d^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{d^2} \right) \right]^{-3/2} \approx d^{-3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{d^2} \right) = \frac{1}{d^3} - \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{d^5}$$

Limiti sta si bili ogledani.

$$\begin{aligned} de_{\text{ind}} &= \sigma_{\text{ind}} dS \\ e_{\text{ind}} &= -ed \int_0^\infty \rho (\rho^2 + d^2)^{-3/2} d\rho = -\frac{ed}{2} \int_{d^2}^\infty u^{-3/2} du = \dots = -e \end{aligned}$$

Električna sila na točkasti nabojo nad prevodno ploščo. Silo lahko računamo z napetostnim tenzorjem:

$$\vec{F}_e = \varepsilon_0 \oint_D \left[(\vec{E} \otimes \vec{E}) - \frac{1}{2} E^2 \underline{I} \right] \vec{n} dS$$

Integrirati moramo po zaključani ploskvi, zato si mislimo, da je obravnavana plošča prvi del te ploskve, drugi del pa je polkroga, katere radij posljemo proti neskončno. Hitro lahko pokažemo, da gre drugi prispevek proti 0.

Integral vzdolž plošče pa računamo takole: Vemo, da je normala vzporedna z električnim poljem ob plošči.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{n}) &= E^2 \vec{n} \\ \vec{F}_e &= \varepsilon_0 \int_S \frac{1}{2} E^2 \vec{n} dS = \frac{\varepsilon_0 \vec{n}}{2} \int_S E^2 dS \end{aligned}$$

Od prej imamo

$$\begin{aligned} E &= -\frac{ed}{2\pi\varepsilon_0} (\rho^2 + d^2)^{-3/2} \\ dS &= 2\pi\rho d\rho \end{aligned}$$

Ko to vstavimo v enačbo, dobimo:

$$\vec{F}_e = \frac{e^2 \varepsilon_0 2\pi}{8\pi^2 \varepsilon_0^2} \vec{n} \int_0^\infty \frac{\rho}{d} \left(1 + \frac{\rho^2}{d^2} \right)^{-3} \frac{d\rho}{d} =$$

Uporabimo substitucijo $u = (1 + \rho^2/d^2)$ in dobimo

$$\vec{F}_e = \frac{e^2 \vec{n}}{16\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (2d)^2} (-\hat{e}_z)$$

Sila je torej enaka, kot bi bila sila med pozitivnim in negativnim nabojem na razdalji $2d$.

Točkasti nabojo med dvema pravokotnima ploščama. Fiksen nabojo leži na simetrali med ploščama, od vsake plošče je oddaljen za neko razdaljo a , odmik od presečišča ploskev pa označimo z \vec{r} . Zanima nas $U(\vec{r})$.

Obravnavali bomo primer $r \gg a$. Naredimo multiploni razvoj:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{e}{r} + \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r}^T Q \vec{r}}{r^5} + \dots \right]$$