Ehrenfestov teorem pravi:

$$\frac{\mathrm{d}\langle A\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle[A,H]\rangle$$

kjer je A poljubna količina. Najpomembnejša primera sta $A = x$ in $A = p$.
V primeru $A = x$:

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\langle[x,H]\rangle = \frac{1}{i\hbar}i\hbar\frac{\langle p\rangle}{m}$$

Kajti $[x,H] = [x, p^2/2m + V(x,t)] = [x,p^2]/2m = ([x,p]p + p[x,p])/2m = i\hbar p/m$.
V primeru $A = p$:

$$\frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\langle[p,H]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[p, \frac{p^2}{2m} + V(x,t)\right]\rangle$$

Izračunamo $[p,V]$:

$$[p, V(x,t)]\psi = (pV - Vp)\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(V\psi) + i\hbar V\frac{\partial}{\partial x}\psi =$$

$$-i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}\psi - i\hbar V\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\hbar V\frac{\partial}{\partial x}\psi = \left(-i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}\right)\psi$$

Dobili smo torej

$$\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial t} = m\frac{\partial\langle x\rangle^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,t) = F(x,t)$$

kar je v bistvu samo 2. Newtonov zakon.

Nedoločenost. V verjetnosti imamo definiran pojem standardne deviacije:

$$\Delta x^2 = \sigma_x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \geq 0$$

V kvantni mehaniki pojem razširimo na vse operatorje. Zdaj pa recimo, da imamo operatorja A in B. Zanju velja:

$$|\Delta A\Delta B| \geq \frac{1}{2}\langle[A,B]\rangle$$

Dokaz lahko naredimo npr. preko Schwarzeve neenakosti:

$$\left|\int \varphi^*\psi\,\mathrm{d}x\right| \leq \int |\varphi^2|\,\mathrm{d}x \int \||\psi^2|\,\mathrm{d}x$$

Podrobnejši dokaz bomo naredili na vajah, za nas je najbolj relevanten primer $A = x$, $B = p$. Tedaj je

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$$

Formalizem kvantne mehanike. Uporabili bomo Diracov formalizem (h kateremu je precej prispeval tudi von Neumann - le-ta je matematično pokazal, da v kvantni mehaniki lahko predpostavimo določene stvari, kot na primer, da valovne funkcije tvorijo vektorski prostor. Upamo, da se ni zmotil, ker se je lem redkim dalo njegove dokaze dejansko preveriti):
1. Imamo vektorski prostor, ki je hilbertov oblike L^2. Obstaja baza, ki jo lahko definiramo na različne načine. Je tudi Banachov prostor, torej lahko element prostora namesto z vsoto baznih vektorjev opišemo kot integral nekih vektorjev.
2. V tem prostoru imamo skalarni produkt, definiran kot:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int \varphi^*\psi\,\mathrm{d}x$$

Mimogrede: to se razlikuje od skalarnega produkta, kakršnega običajno definirajo matematiki: prvič po oznaki, drugič po dejstvu, da bi matematiki konjugirali funkcijo ψ. To lahko vodi do nekaterih manjših težav z matematičnega stališča, vendar zaupamo, da je Neumannu to uspelo dobro utemeljiti.
Nekaj lastnosti tega skalarnega produkta:

- $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$

- $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$, in je enako 0 le v primeru $\psi = 0$
- $|\langle\varphi|\psi\rangle|^2 \leq \langle\varphi|\varphi\rangle\langle\psi|\psi\rangle$

Mimogrede: tej Diracovi notaciji rečemo "braket" notacija. "Ket" ali $|\psi\rangle$ označuje opazovano stanje ali vektor. 3. V tem prostoru imamo linearne operatorje: operatorje, za katere velja:

$$A\left(\lambda|\varphi\rangle + \eta|\psi\rangle\right) = \lambda A|\varphi\rangle = \eta A|\psi\rangle$$

Imamo tudi antilinearne operatorje, za katere velja:

$$A\lambda|\psi\rangle = \lambda^* A|\psi\rangle$$

Tak operator je na primer $t \mapsto -t$. 4. Velja RIeszov izrek: lahko definiramo linearni funkcional $f|\psi\rangle = z \in \mathbb{C}$, da je

$$\int f^*(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = f\psi = \langle f|\psi\rangle$$

Dirac je na podlagi tega izreka uvedel bra; funkcional $\langle\varphi| = f$, definiran s predpisom

$$\langle\varphi|... = \int \varphi^*(x)...\,\mathrm{d}x$$

V "braket" zapisu je torej "bra" funkcional, "ket" pa opis stanja.

Razvoj stanja po bazi. V preteklosti smo določili koeficiente c_n, da je

$$\psi(x) = \sum_n c_n\varphi_n(x)$$

Tu so φ_n bazni vektorji, za katere naj velja, da so ortonormirani.
Ugotovimo

$$\psi(x) = \sum_n \varphi_n \int \varphi_n^*(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

Dirac je uporabljal malo poseben zapis, in sicer je namesto $|\varphi_n\rangle$ pisal $|n\rangle$.

$$|\psi\rangle = \sum_n \langle n|\psi\rangle|n\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle$$

$$= \left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right)|\psi\rangle = I\psi$$

Dobili smo torej, da je operacija $\left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right)$ enaka identiteti.

Razvoj operatorja. Zdaj si oglejmo funkcijo $A\psi$, kjer je A poljubni operator.

$$A\psi = IAI|\psi\rangle$$

Dvakrat smo vmes vrinili identiteto, s čimer v principu ni nič narobe, nam bo pa po prejšnjem razmisleku omogočilo, da namesto ene identitete vstavimo $\left(\sum_m |m\rangle\langle m|\right)$, namesto druge pa $\left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right)$.

$$= \sum_m |m\rangle\langle m|A|n\rangle\langle n|\psi\rangle$$

$$= |m\rangle \int \varphi_m^* A\varphi_n\,\mathrm{d}x\langle n|\psi\rangle$$

Definiramo matriko $\{A_{mn}\}$, kjer je $A_{mn} = \langle m|A|n\rangle$ Dobili smo torej matriko, ki nam v dani bazi opiše operator A. Matrika je sicer neskončno dimenzionalna, toda govoto so kakšni primeri, ko to ne bo težava. Zapišemo lahko:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$$

$$A|\psi\rangle = \sum_m \left(\sum_n A_{mn}c_n\right)|m\rangle$$

Označimo $d_n = \sum_n A_{mn}c_n$ in dobili smo nov vektor: $A|\psi\rangle = |\psi_1\rangle = \sum_m d_m|m\rangle$

Hermitski simetrični operatorji. Iščemo operatorje, za katere velja

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \langle A\varphi|\psi\rangle, \quad \forall\varphi,\psi$$

Nekaj primerov:

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle A\psi|\psi\rangle = \langle\psi|A\psi\rangle^* = \langle\psi|A|\psi\rangle^* \in \mathbb{R}$$

$$A|a\rangle = a|a\rangle \Rightarrow \langle a|A|a\rangle = a\langle a|a\rangle \in R \Rightarrow a \in \mathbb{R}$$

$$A|a\rangle = a|a\rangle \text{ in } A|b\rangle = b|b\rangle \Rightarrow \langle b|A|a\rangle = a\langle b|a\rangle = b\langle b|a\rangle$$

Iz zadnjega sledi, da je $(b-a)\langle b|a\rangle = 0$, torej za neki lastni vrednosti in pridružena lastna vektorja operatorja A velja $b = a$ ali pa $\langle b|a\rangle = 0$