1 Elektrostatika

1.1 Coulombova sila med naboji

Elektrostatika opisuje sile med mirujočimi električnimi naboji. Ker naboji mirujejo, magnetnih sil ni. Naboje imamo tu za točkasta nabita telesa, silo med njimi pa izračunamo po Coulombovem zakonu:

$$\overrightarrow{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

Recimo, da je to sila delca z nabojem e_1 na delec z nabojem e_2. Zaradi tretjega Newtonovega zakona deluje tudi delec 2 na delec 1 z nasprotno enako silo. Mimogrede: $varepsilon_0$ je influenčna konstanta (znana tudi po drugih imenih, npr. permitivnost vakuuma). Njena vrednost je

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/Vm}$$

Opomba: Kako izpeljemo Coulombov zakon? Ga ne. Dobili smo ga iz meritev. Lahko ga matematično konstruiramo s pomočjo Gaussovega zakona, ampak tudi Gaussov zakon moramo nekako utemeljiti z meritvijo, ker smo fiziki in to pač po+v cnemo.

Velikost in enota električnega naboja. Naboj merimo v Coulombih $C = As$. Osnovni naboj (naboj elektrona) je enak

$$e_0 = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$$

Nekaj vrednosti:

Naboj kvarka:	$1/3\ e_0$
Naboj elektrona:	e_0
Naboj na kondenzatorju:	$\sim 10^{-7}$ C
Naboj pri udarcu strele:	~ 10 C
Naboj avtomobilske baterije:	$\sim 50\,000$ C
Naboj Zemlje brez atmosfere:	$\sim 500\,000$ C
Naboj zemlje z atmosfero:	~ 1 C
Naboj, ki ga v enem letu proizvede elektrarna:	$\sim 10^{11}$ C

1.2 Električno polje

Električno polje je posrednik električne sile. Zaenkrat je uporabno zato, ker nam za sistem delcev ni treba rešiti sistema 10^{12} enačb, bo pa dobilo tudi globlji pomen, ko se bomo začeli ukvarjati z Maxwellovimi enačbami in relativnostjo. Vsak naboj okoli sebe ustvarj aelektrično polje, ki nato deluje na drugi naboj. Velja:

$$\overrightarrow{F} = e\overrightarrow{E}$$

Če se nam da ukvarjati z indeksi, je $\overrightarrow{F_{21}} = e_1\overrightarrow{E_2}$.

Smer $\overrightarrow{E}$ je določena s smerjo sile na pozitiven (točkast) naboj. Električno polje točkastega naboja je enako

$$\overrightarrow{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

Nekaj vrednosti: Čisto za vajo lahko ocenimo električno polje znotraj telefonskega zaslona. Napetosti

Kozmično sevanje:	$10\,\mu$V/m
Polje znotraj bakrene žice:	0.5 mV/m
Polje v Zemljini atmosferi:	~ 200 V/m
Prebojna jakost v atmosferi (strela):	~ 2 MV/m
Polje preko biološke membrane:	10 MV/m
Močan laserski pulz:	100 TV/m

znotraj telefona so reda velikosti 10 V, debelina zaslona pa reda velikosti $10\,\mu$m. Sledi, da imamo znotraj telefona električno polje reda velikosti 10^6 V/m.

Električne silnice. S pomočjo električnih silnic lahko brez težav skiciramo električno polje raznih postavitev nabojev. Opazimo lahko nekaj lastnosti silnic:

Slika 1: Silnice okoli pozitivnega (levo) in negativnega naboja (desno).

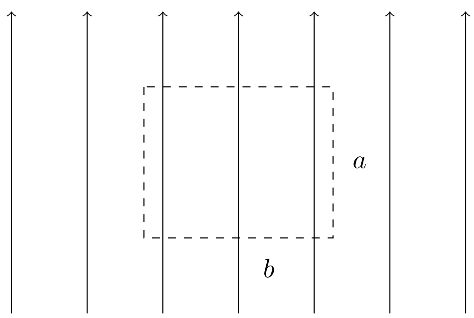
1. Silnice so vzporedne z električnim poljem.
2. Silnice se začnejo v pozitivnem naboju in končajo v negativnem naboju.
3. Silnice samih sebe ne sekajo.
4. Silnice so najgostejše v okolici nabojev. Iz tega sodimo, da ima tudi električno polje tam največjo vrednost.

1.3 Električna cirkulacija.

Cirkulacija po zaključeni zanki C se uvede kot

$$\Gamma_E = \oint_C \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$$

Kot primer vzemimo statično homogeno polje in pravokotno zaključeno zanko.
Izkaže se, da je $\Gamma_E = 0$ za vsako statično električno polje. Po Stokesovem izreku je



Slika 2: Vzdolštranice b je polje pravokotno na žico, torej je skalarni produkt $\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = 0$. Vzdolž stranice a pa imamo opravka s cirkulacijo $\pm E \cdot a$. Ker imamo dve stranici dolžine a, vzdolž katerih gre $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$ ravno v nasprotnih smereh, je končna vrednost cirkulacije enaka 0.

$$0 = \oint_{C=\partial S} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \iint_S \nabla \times \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Iz tega preberemo:

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = 0$$

Kar pa velja le za stacionarna električna polja - v kvazistatičnih in dinamičnih poljih bomo namesto 0 dobili nekaj drugega.

1.4 Električni pretok

Električni pretok je definiran kot integral

$$\phi_E = \iint_S \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Kakšna je ta površina S? Kakršna koli. Če je sklenjena, pa lahko zanjo zapišemo Gaussov zakon.

1.5 Električni potencial

Uvedemo ga kot količino, za katero velja:

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = -\nabla\varphi(\overrightarrow{r})$$

To je spet precej uporabno, ker imamo namesto z vektorskim poljem opravka s skalarnim.

Primer: električni potencial okoli točkastega naboja:

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r} = -\nabla\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \varphi_0\right)$$

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \varphi_0$$

Količini φ_0 pravimo umeritev - pomeni, da je količina določena le do konstante natančno. Vrednost φ_0 si lahko izberemo sami, vendar se moramo potem te vrednosti držati pri nadaljnjem računanju.
Čeprav potencial ni določen bolj kot do konstante natančno, nam je to zaenkrat v bistvu vseeno, saj nas tako ali tako vedno zanima odvod potenciala. Drugačna izbira umeritve torej nima vpliva na dinamiko sistema. Pri drugačnih poljih so lahko umeritve tudi funkcije in podobno, kjer postane stvar malo bolj zanimiva. Se pa s tem ne bomo ogromno ukvarjali.

1.6 Princip superpozicije

Imejmo sistem nabitih delcev, v katerega postavimo naboj e. Tedaj je skupna sila na naboj e enaka

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e_1(\overrightarrow{r-r_1})}{|\overrightarrow{r-r_1}|^3} + \frac{e_2(\overrightarrow{r-r_2})}{|\overrightarrow{r-r_1}|^3} + ... + \frac{e_i(\overrightarrow{r-r_i})}{|\overrightarrow{r-r_i}|^3}\right)$$

Skupna sila je torej vsota parskih (medsebojnih) prispevkov sil. To ni popolnoma samoumevno, vendar očitno velja. Temu načelu pravimo princip superpozicije in velja za električno silo, polje in potencial.

1.7 Gostota naboja

Električni naboj telesa je pogosto porazdeljen po površini ali volumnu. Breaking news: nekatera telesa niso točkasta. Tedaj je uporabno, da porazdelitev naboja opišemo s funkcijo $\rho(\overrightarrow{r})$.
Diskretna porzdelitev:

$$\rho(\overrightarrow{r}) = \sum_i e_i\delta^3(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i})$$

Zvezna porazdelitev:

$$\rho(\overrightarrow{r}) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}V}$$

Vidimo, da sta definiciji kompatibilni:

$$e = \int \rho(\overrightarrow{r})\,\mathrm{d}V = \int \sum_i e_i\delta^3(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i})\,\mathrm{d}V = \sum_i e_i$$

Če najdemo ustrezno funkcijo ρ, si nam ni treba več zapopmniti, kje je vsak naboj v sistemu. Z uporabo gostote lahko nato zapišemo tudi ostale relevantne količine ($\overrightarrow{F}\ \overrightarrow{E}, \varphi$):

$$\overrightarrow{F} = \int \rho(\overrightarrow{r})\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r})\,\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}$$

Opomba: Tu je $\overrightarrow{E}$ zunanje električno polje, ki deluje na opazovano telo, ρ pa opisuje porazdelitev naboja po tem telesu.

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \int \frac{\rho(\overrightarrow{R})}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{R})}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{R}|^3}\,\mathrm{d}^3\overrightarrow{R}$$

$$\varphi(\overrightarrow{r}) = \int \frac{\rho(\overrightarrow{R})}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{R}|}\,\mathrm{d}^3\overrightarrow{R}$$

Primeri gostote naboja. Najpreprostejši primeri so:

- Točkast naboj, kjer je položaj naboja $\vec{r_0}$: $\rho(\vec{r}) = e_0\delta^3(\vec{r} - \vec{r_0})$
- Točkast dipol, kjer je eden od nabojev v $\vec{r_1}$ in drugi v r_2:

$$\rho(\vec{r}) = e\delta^3(\vec{r} - \vec{r_1}) - e\delta^3(\vec{r} - \vec{r_2})$$

  V limiti, ko je razdalja med nabojema zelo majhna, dobimo:

$$\rho(\vec{r}) = -e\,\mathrm{d}\vec{r}\cdot\nabla\delta^3(\vec{r} - \vec{r_0}) - e\,\mathrm{d}\vec{r}\cdot\nabla\delta^3(\vec{r} - \vec{r_0}) = -2e\,\mathrm{d}\vec{r}\cdot\nabla\delta^3(\vec{r} - \vec{r_0})$$

  Količino $2e\,\mathrm{d}\vec{r}$ označimo s $\vec{p}$ in imenujemo dipolni moment. Mimogrede: Z $\mathrm{d}\vec{r}$ smo označili majhno (vendar ne nujno infinitezimalno) spremembo r. Pomembnejša opomba pa je, da moramo izračunati gradient delta funkcije. Mogoče bi se to dalo izraziti s kakšno limito, vendar imamo preprostejši način: Vemo, da je gradient produkta skalarnega in vektorskega polja enak:

$$\nabla(\vec{p}\delta^3(\vec{r} - \vec{r_0})) = (\nabla\vec{p})\delta^3(\vec{r} - \vec{r_0}) + \vec{p}\cdot\nabla\delta^3(\vec{r} - \vec{r_0})$$

  $(\nabla\cdot\vec{p}) = 0$, torej nam ostane

$$\rho(\vec{r}) = -\nabla\left[\vec{p}\delta^3(\vec{r} - \vec{r_0})\right] =: -\nabla\vec{P}$$

  Definirali smo polarizacijo $\vec{P}$, imenovano tudi gostota dipolnega momenta.

- Površinsko porazdeljen naboj. Namesto naboja na enoto volumna imamo raje naboj na enoto površine:

$$\rho(\vec{r}) = \sigma(\vec{u})\delta(z - z_0)$$

  Tu $\vec{u}$ predstavlja dvo-dimenzionalni vektor, ki opisuje položaj na površini, z_0 pa lego ploskve ($z - z_0 = 0$, če smo na ploskvi).

- Volumsko porazdeljeni naboj - imejmo kroglo z radijem a:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases}\rho_0 & |\vec{r}| \le a \\ 0 & \text{sicer}\end{cases}$$

- Volumsko porazdeljen dipol:

$$\vec{P} = \begin{cases}\vec{P_0} & |\vec{r}| \le a \\ 0 & \text{sicer}\end{cases}$$

$$\rho(\vec{r}) = -\nabla\cdot\vec{P} = -\nabla\cdot\left(\vec{P_0}H(a - r)\right)$$

  H je Heavyside-ova funkcija, ki je enaka 1 le na intervalu $(-a, a)$, sicer pa 0.

$$\rho(\vec{r}) = (-\nabla\cdot\vec{P_0})H(a - r) - \vec{P_0}\cdot\nabla H(a - r) = \left(\vec{P_0}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\delta(a - r)\right)$$

  Se pravi je ves naboj porazdeljen po robu telesa. To je smiselno, saj se naboji znotraj telesa med seboj izničijo.

1.8 Gaussovega izreka

1.9 Integralska oblika

Obravnavamo naboje (e_1, e_2, ... e_i ...). Obdali jih bomo z neko površino, ki naj bo za lažje računanje sferna, nujno pa je, da je sklenjena. Zanima nas električni pretok skozi to površino. Spomnimo se:

$$\phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Pri Matematiki III smo takšen integral izračunali kot

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint (\vec{E}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S = \oint E\cos\Omega\,\mathrm{d}S = \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{1}{|\vec{r}-r_i|^2}\cos\Omega_i(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}$$

Gauss je pokazal, da je vrednost integrala ravno 4π in potemtakem dobimo $\phi_E = e/\varepsilon_0$. mi tega ne bomo dokazovali, razen za simpatičen primer, ko je $\vec{r_i} = 0$:

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{1}{r^2} r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{e_1}{\varepsilon_0}$$

Zaključek:

$$\oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Opomba: Tu ne smemo obravnavati primera, ko je ves naboj na površini.

1.9.1 Diferencialna oblika

Uporabimo izrek Gauss-Ostrogradskega:

$$\oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla\cdot A\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Ko namesto $\vec{A}$ vstavimo $\vec{E}$, dobimo

$$\int_V \nabla\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Sledi:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

1.10 Poissonova in Laplaceova enačba

V diferencialni Gaussov izrek vstavimo $\vec{E} = -\nabla\varphi$ in dobimo:

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

To je Poissonova enačba. Laplaceova enačba je poseben primer Poissonove, in sicer:

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = 0$$

Enačba je videti trivialna ($\varphi = 0$ je takoj možna rešitev), vendar moramo zadostiti robnim pogojem, ki problem zakomplicirajo.

1.10.1 Greenova funkcija Poissonove enačbe

Iščemo splošno rešitev Poissonove enačbe. Pričakujemo, da je φ nekako odvisen od ρ:

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}-\vec{R})\rho(\vec{R})\,\mathrm{d}^3\vec{R}$$

Predpostavili bomo, da ta rešitev obstaja. Zdaj se posvetimo vprašanjema, kaj je Greenova funkcija in kakšna je. (Nikogar pa ne zanima, kako je Greenova funkcija)

Kaj je Greenova funkcija: Uporabimo nastavek

$$\nabla^2\varphi = \nabla^2\left[\int G(\vec{r}-\vec{R})\rho(\vec{R})\,\mathrm{d}^3\vec{R}\right]$$

$$= \int \nabla^2 G(\vec{r}-\vec{R})\rho(\vec{R})\,\mathrm{d}^3\vec{R} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

To nam da zahtevo:

$$\nabla^2 G(\vec{r}-\vec{R}) = \frac{\delta^3(\vec{r}-\vec{R})}{\varepsilon_0}$$

Torej je G rešitev Poissonove enačbe za točkast naboj v $\vec{R}$. Greenova funkcija je torej rešitev diferencialne enačbe za najbolj preprost vir polja.

Rešitev Poissonove enačbe za točkast naboj. Najbolj prikladen način, da rešimo diferencialno enačbo, je nekakšna transformacija. Uporabili bomo Fourierovo:

$$\varphi(\vec{r}-\vec{R}) = \int G(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{R})} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$$

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{R}) = \int 1\cdot e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{R})} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$$

$$\nabla^2\left[\int G(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{R})} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\right] = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{R})} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$$

∇ deluje na funkcije spremenljivke $\vec{r}$, na funkcije spremenljivke $\vec{k}$ pa ne. Ko jo torej nesemo v integral, bo delovala le na funkcijo $e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{R})}$, kar lahko izračunamo. Dobimo:

$$\int\left[-k^2 G(\vec{k}) + \frac{1}{\varepsilon_0}\right] e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{R})} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = 0$$

To bo zanesljivo veljalo, če bo

$$G(\vec{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0 k^2}$$

Opomba: Z uporabo Fourierove transformacije smo reševanje diferencialne enačbe poenostavili na reševanje algebraične enačbe.
Opomba 2: naša rešitev $G(\vec{k})$ je še vedno v $\vec{k}$-prostoru. Morali jo bomo transformirati nazaj.
(Opomba 3: Dobili smo **roke za ustni izpit. Prvi rok 2. in 4. februar, drugi rok 25. februar, tertji rok 11. september.**)
Pojdimo nazaj v direktni prostor:

$$G(\vec{r}-\vec{R}) = \iiint \frac{1}{\varepsilon_0 k^2} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{R})} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon_0 k^2} e^{ik|\vec{r}-\vec{R}|\cos\vartheta}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}(\cos\vartheta)\,k^2\,\mathrm{d}k$$

k^2 se nam ravno pokrajša. Ko integriramo, dobimo:

$$G(\vec{r}-\vec{R}) = ... = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{R}|}$$

Nekaj podobnega smo delali pri vajah (2_vaje.pdf). Vmes uporabimo znano vrednost $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi/2$.
Splošna rešitev Poissonove enačbe je torej

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{R})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{R}|}\,\mathrm{d}^3\vec{R}$$

Zdaj, ko poznamo potencial, brez težav izračunamo električno polje, in sicer odvajamo:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\nabla\left(\int \frac{\rho(\vec{R})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{R}|^3}\,\mathrm{d}^3\vec{R}\right)$$

Ker ∇ vpliva le na $\vec{r}$, jo brez slabe vesti nesemo v integral in odvajamo integrand. Dobimo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{R})}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}\,\mathrm{d}^3\vec{R}$$

1.11 Earnshawjev teorem

"Nabor točkastih nabojev ne more nikoli biti v stabilnem ravnovesju samo kot posledica elektrostatskih interakcij."

Labilno ravnovesje je načeloma mogoče. Rečemo lahko tudi, da elektrostatski potencial v praznem prostoru nima minimumov ali maksimumov, temveč kvečjemu sedla. Očitna posledica tega izreka je, da obstajajo še druge fundamentalne sile poleg elektrostatskih. Sicer snov nikoli ne bi mogla biti stabilna, kajti medatomske sile so osnovane na elektrostatiki. Stvar kar dobro razloži kvantna mehanika.

1.12 Elektrostatska energija

Obravnavamo delec v zunanjem magnetnem polju (kako smo dobili to polje, nas ne zanima, in vsakič, ko je njegov izvor omenjen, spremenimo temo pogovora). Nanj deluje sila:

$$\vec{F} = e\vec{E}$$

Diferencial dela je enak:

$$\mathrm{d}A = -\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -e\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = e\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}r$$

Če zadevo integriramo (naboj premaknemo od točke (1) do točke (2)), bomo dobili skupno delo, ki bo enako spremembi potencialne elektrostatske energije.

$$A = \int_{(1)}^{(2)} e\nabla\varphi \,\mathrm{d}\vec{r} = \text{ po prvem izreku analize } = e\varphi_2 - e\varphi_1$$

Torej prepoznamo elektrostatsko energijo kot

$$\Delta W_e = e\Delta\varphi$$

Za zvezno porazdeljen naboj lahko računamo:

$$W_e = \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

To je energija nabojev $\rho(\vec{r})$ v zunanjem električnem polju. Notranje električno polje tu ne pride v poštev. Če upoštevamo še to, dobimo:

$$\mathrm{d}W = \int \mathrm{d}\rho \cdot \alpha\varphi(\vec{r}) \,\mathrm{d}^3\vec{r} = \int_0^1 \alpha \,\mathrm{d}\alpha \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \,\mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Elektrostatsko energijo zapišemo z $\vec{E}$:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \,\mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0(\nabla \cdot \vec{E})(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Vemo: $\nabla(f\vec{g}) = \nabla f \cdot \vec{g} + f\nabla \cdot \vec{g}$. Sledi:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_V \nabla(\varphi\vec{E}) \,\mathrm{d}^3\vec{r} - \int_V \nabla\varphi \cdot \vec{E} \,\mathrm{d}^3\vec{r}\right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\partial V} (\varphi\vec{E}) \,\mathrm{d}\vec{S} - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \nabla\varphi \cdot \vec{E} \,\mathrm{d}^3\vec{r} \end{aligned}$$

Mislimo si, da volumen obdamo z neko površino. Ker je naš volumen v bistvu neskončen, gre prvi integral hitro proti 0. Ostane nam torej le še:

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \nabla\varphi \cdot \vec{E} \,\mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2 \,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Opomba: Stvar očitno ne deluje, če polje ustvarja npr. neskončna plošča. Tedaj je energija tako ali tako neskončna, tako da tako ali tako ne bi mogli kaj dosti pametovati.

1.13 Sila kot funkcional električnega polja

Zanima nas sila na naboj (opisan z $\rho(\vec{r})$), ki se nahaja v zunanjem električnem polju $\vec{E}_z(\vec{r})$. Na naboj delujejo tudi druga električna polja, skupno polje označimo z $\vec{E}$.

$$\vec{F} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{E_z}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Radi pa bi izračunali tudi silo na naboj v odvisnosti od $\vec{E}$.

Prvi korak je, da se znebimo ρ. Maxwellova enačba pravi, da je

$$\nabla \cdot \vec{E_L} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Tu je $\vec{E_L}$ lastno (notranje) električno polje telesa. Ker integriramo le po volumnu telesa, v katerem se zunanje polje ne ustvarja, lahko poleg tega trdimo $\nabla \cdot \vec{E_z} = 0$ (in ne bo nobene škode, če ga prištejemo).

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \int_V (\nabla \cdot \vec{E_L})\vec{E_z}\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \varepsilon_0 \int_V (\nabla \cdot \vec{E_L} + \nabla \cdot \vec{E_z})\vec{E_z}\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

$\nabla \cdot \vec{E_L} + \nabla \cdot \vec{E_z}$ pa je seveda enako $\nabla \cdot \vec{E}$.
Drugi podoben trik, ki ga lahko naredimo, je da opazim, da notranje električno polje delca ne more ustvarjati zunanje sile ne delec, torej je

$$\int_V \rho(\vec{r})\vec{E_L}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r} = 0$$

Torej lahko izrazu za silo brez posledic prištejemo ta integral. Dobimo:

$$\vec{F} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E}\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Od tod si pomagamo z matematično enakostjo

$$\nabla \cdot (\vec{a} \otimes \vec{a}) = \vec{a}(\nabla \cdot \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{a}$$

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \int_V \left[\nabla\left(\vec{E} \otimes \vec{E}\right) - \left(\vec{E} \cdot \nabla\right)\vec{E}\right]\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Ker je električno polje znotraj delca težko meriti, bomo uporabili Gaussov izrek:

$$= \varepsilon_0 \int_{\partial V} \left(\vec{E} \otimes \vec{E}\right)\mathrm{d}\vec{S} - \varepsilon_0 \int_V \left(\vec{E} \cdot \nabla\right)\vec{E}\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Uporabimo matematično enakost:

$$\frac{1}{2}\nabla E^2 = \left(\vec{E} \cdot \nabla\right)\vec{E} + \vec{E} \times \left(\nabla \times \vec{E}\right)$$

Zaradi lastnosti električnega polja, da je $\nabla \times \vec{E} = 0$, lahko drugi člen izpustimo.

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \int_{\partial V} \left(\vec{E} \otimes \vec{E}\right)\mathrm{d}\vec{S} - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \nabla E^2\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

$$= \varepsilon_0 \int_{\partial V} \left[\left(\vec{E} \otimes \vec{E}\right)\vec{n} - \frac{1}{2}E^2\vec{n}\right]\mathrm{d}S$$

$$= \varepsilon_0 \int_{\partial V} \left[\left(\vec{E} \otimes \vec{E}\right) - \frac{1}{2}E^2\underline{\underline{I}}\right]\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Zdaj integriramo celotno električno polje po površini telesa.

1.14 Napetostni tenzor

Dobljeni zapis lahko zapišemo z uvedbo napetostnega tenzorja električnega polja:

$$F_i = \oint_{\partial V} T_{ik} n_k \, \mathrm{d}S$$

$$T_{ik} = \varepsilon_0 \left(E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} \right)$$

Zakaj je to uporabno? Ko pridemo do magnetnega polja, bomo uvedli napetostni tenzor tudi za tega. To pomeni, da bomo lahko, ko bosta ne telo delovali obe polji naenkrat, tenzorja preprosto sešteli.

Volumska gostota sile. Uvedemo ga kot

$$f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$

(Uporabljamo Einsteinovo notacijo). Gre v bistvu za divergenco. Tudi ta zapis lahko uporabljamo za druga polja. Velja tudi:

$$F_i = \oint_{\partial V} T_{ik} \, \mathrm{d}S_k = \int_V f_i \, \mathrm{d}^3 \vec{r}$$

1.15 Multipolni razvoj električnega potenciala

Zanima nas električno polje daleč stran od telesa, ki nosi opisano gostoto naboja, po vodilnih prispevkih (multipolih).
Opomba: Izraz daleč stran tu pomeni v primerjavi z velikostjo telesa. Se pravi vsaj nekaj premerov telesa stran. Če govorimo o neskončnih palicah ali čem podobnem, multipolnega razvoja ne moremo uporabljati.

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{R})}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{R}| \, \mathrm{d}^3 \vec{R}}$$

Zanima nas režim, ko je $|\vec{r}| \gg |\vec{R}|$, torej lahko stvar razvijemo:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \frac{1}{r} - \vec{R} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} + ... \approx \frac{1}{r} + \vec{R} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Torej:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{R})}{r} \, \mathrm{d}^3 \vec{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{R}) \vec{R} \cdot \vec{r}}{r^3} \, \mathrm{d}^3 \vec{R} + ... =$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \vec{r}} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + ...$$

Uvedli smo:

$$\int \rho(\vec{R}) \, \mathrm{d}^3 \vec{R} = e \;\rightarrow\; \text{el. monopol}$$

$$\int \vec{R} \rho(\vec{R}) \, \mathrm{d}^3 \vec{R} = \vec{p} \;\rightarrow\; \text{el. dipol}$$

Lahko uvedemo tudi višje monopole, ki so potem matrike, tenzorji 3. reda, 4. reda in tako naprej.

Sferični harmoniki. Za sferične koordinate lahko zapišemo:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Tu so Y_{lm} sferični harmoniki, q_{lm} pa multipolni koeficienti:

$$q_{lm} = \int \rho(s) s^l Y_{lm}(\theta, \varphi)\, \mathrm{d}^3\vec{s}$$

To nas lahko spominja na iskanje orbital vodikovega atoma pri kvantni fiziki. V bistvu gre pri kvantni fiziki ravno za to, da naredimo multipolni razvoj danega potenciala.

1.16 Polje in potencial točkastega dipola

Velja:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{p})\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

1.17 Multipolni razvoj elektrostatske energije

Elektrostatsko energijo smo definirali kot:

$$W_e = \int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Interval teče po volumnu telesa. Predpostavili bomo, da je naboj zbran okoli točke $\vec{r_0}$, ki leži znotraj volumna V (to je smiselna predpostavka, saj za multipolni razvoj tako ali tako zahtevamo, da je volumen končen). Potem je:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r_0}) + (\vec{r} - \vec{r_0})\nabla\varphi(\vec{r_0}) + ...$$

Zaenkrat bomo rekli, da so nadaljnji členi majhni in jih ne bomo pisali. Če to ne velja, moramo pač uporabiti več monopolov.

$$W = \int_V \rho(\vec{r}) \left[\varphi(\vec{r_0}) + (\vec{r} - \vec{r_0})\nabla\varphi(\vec{r_0})\right] \mathrm{d}^3\vec{r} = e\varphi(\vec{r_0}) + \nabla\varphi(\vec{r_0}) \int_V \rho(\vec{r} - \vec{r_0})\, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

V integralu prepoznamo dipol $\vec{p}$, iz divergence potenciala pa seveda izrazimo električno polje:

$$W = e\varphi - \vec{p} \cdot \vec{E}$$

Ali, če pišemo več členov:

$$W = e\varphi - \vec{p} \cdot \vec{E} + \vec{E}^T \underline{\underline{Q}} \vec{E} + ...$$

1.18 Multipolni razvoj sile in navora

Diferencial energije zapišemo kot $\mathrm{d}W = \mathrm{d}\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= \mathrm{d}(e\varphi - \vec{p} \cdot \vec{E}) + e\nabla\varphi(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} - \mathrm{d}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \\ &= e\nabla\varphi(\vec{r}) - \left[\vec{p} \times (\nabla \times \vec{E}) + (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}\right] \end{aligned}$$

Vemo, da je $\nabla \times \vec{E} = 0$ tako da dobimo končni rezultat

$$\vec{F} = e\vec{E} + (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}$$

Prvi člen predstavlja silo na monopol, drugi člen silo na dipol. Tretji člen bi (če bi ga zapisali, česar pa se nam seveda ne počne) opisoval silo na kvadrupol in tako naprej.
Opomba:

$$(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = \left(p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{E}$$

Za izračun navora zapišemo energijo kot $\mathrm{d}W = -\vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{\phi}$

$$\mathrm{d}W = -\,\mathrm{d}p\cdot\vec{E} = -\left(\mathrm{d}\vec{\phi}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{E}$$

$$= \mathrm{d}\vec{\phi}\cdot(\vec{p}\times\vec{E})$$

Sledi: $\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$

2 Magnetostatika

2.1 Amperova sila med električnimi vodniki

Ravni žici. Amperova sila je magnetni analog Coulombovi sili. Če imamo dve žici, po katerih teče tok (denimo, da po eni teče tok I_1, po drugi pa I_2), je sila med njima enaka

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2 L}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|}\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|}$$

Če po obeh vodnikiȟ teče tok v isto smer, je sila med njima privlačna. Sicer je odbojna.

Poljubni žici. Žico bomo opisali kot neko parametrično krivuljo $\vec{r}(l)$. Žici bomo razdelili na majhne koščke $\mathrm{d}\vec{r}(l_1)$. Privzamemo, da so ti koščki razmeroma ravni in zapišemo silo med njimi:

$$\mathrm{d}^2\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2\,\mathrm{d}\vec{r_1}(l_1)\,\mathrm{d}\vec{r_2}(l_2)}{|\vec{r_2}(\vec{l_2})-\vec{r_1}(l_1)|^2}\frac{(\vec{r_2}(\vec{l_2})-\vec{r_1}(l_1))}{|\vec{r_2}(\vec{l_2})-\vec{r_1}(l_1)|}$$

Smeri $\mathrm{d}\vec{r_1}$ in $\mathrm{d}\vec{r_2}$ sta določeni s smerjo električnega toka.

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}I_1 I_2\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{\mathrm{d}\vec{r_1}(l_1)\,\mathrm{d}\vec{r_2}(l_2)}{|\vec{r_2}(\vec{l_2})-\vec{r_1}(l_1)|^2}\frac{(\vec{r_2}(\vec{l_2})-\vec{r_1}(l_1))}{|\vec{r_2}(\vec{l_2})-\vec{r_1}(l_1)|}$$

To lahko prepišemo kot:

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi}I_1 I_2\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{\mathrm{d}\vec{r_1}(l_1)\times(\,\mathrm{d}\vec{r_2}(l_2)\times[\vec{r_2}(l_2)-\vec{r_1}(l_1)])}{|\vec{r_2}(l_2)-\vec{r_1}(l_1)|^3}$$

2.2 Električni tok

Gre za gibanje naboja vzdolž nekega električnega vodnika. V magnetostatiki običajno predpostavimo, da je konstanten, v splošnem pa je definiran kot

$$I = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

Nekaj vrednosti:

Skozi celično membrano	$1 - 10\,\mathrm{pA}$
Živčni impulz	$1\,\mu\mathrm{A}$
Gospodinjski aparati	$1\,\mathrm{A}$
Tok skozi magnete v LHC	$12\,000\,\mathrm{A}$
Tok pri blisku	$1 - 20 \cdot 10^4\,\mathrm{A}$
Tok v Zeleljskem jedru	$10^9\,\mathrm{A}$

2.3 Gostota magnetnega polja

Kot pri elektrostatiki lahko delovanje sil med električnimi vodniki opišemo z uvedbo magnetnega polja. To nam pri magnetostatiki še bolj koristi, saj se delci ne premikajo nujno po ustaljenih žicah, zato bi bilo silo praktično nemogoče izračunati na običajni način.

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \iint \frac{\mathrm{d}\vec{l_1} \times \mathrm{d}\vec{l_2} \times (\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1))}{|\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)|^3} =$$

$$= \int_{C_1} I_1\,\mathrm{d}\vec{l_1} \times \int_{C_2} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\vec{l_2} \times (\vec{r}(l_1) - \vec{r}(l_2))}{|\vec{r}(l_1) - \vec{r}(l_2)|^3}$$

za gostoto magnetnega polja bomo razglasili integral po $\mathrm{d}\vec{l_2}$:

$$\vec{F} = \int_{C_1} I_1\,\mathrm{d}\,\vec{l} \times \vec{B}$$

Izpeljano definicijo magnetnega polja pa prepoznamo kot Biot-Savartov zakon:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_2} \frac{\mathrm{d}\vec{l_2} \times (\vec{R} - \vec{r}(l_2))}{|\vec{R} - \vec{r}(l_2)|}$$

Nekaj vrednosti:

Možganska aktivnost	$1\,\mathrm{fT}$
Medgalaktična magnetna polja	$1 - 10\,\mathrm{pT}$
Srčna aktivnost	$100\,\mathrm{pT}$
Zemeljsko magnetno polje	$20 - 70\,\mu\mathrm{T}$
Železni magneti	$100\,\mathrm{mT}$
Sončne pege	$1\,\mathrm{T}$
Pospeševalniki	$10\,\mathrm{T}$
Nevtronska zvezda	$10^6 - 10^7\,\mathrm{T}$
Atomsko jedro	$10^9\,\mathrm{T}$

2.4 Magnetna cirkulacija

2.5 Magnetne silnice.

Če si skiciramo magnetne silnice okoli žice, opazimo, da so zaključene. Ne moremo ravno dokazati, da je vedno tako, nismo pa še nikoli našli primera, ko bi bilo drugače.
Magnetno cirkulacijo definiramo kot

$$\Gamma_M = \oint_C \vec{B} \times \mathrm{d}\vec{r} \neq 0$$

Iz neenakosti sledi $\nabla \times \vec{B} \neq 0$, torej je magnetno polje vrtinčno.

2.6 Magnetni pretok

Magnetni pretok je definiran kot

$$\phi_M = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Ker so vse magnetne silnice sklenjene, velja:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

V diferencialni obliki ima enačba obliko

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

To je hkrati ena od Maxwellovih enačb.

2.7 Gostota električnega toka

Električni tok, o katerem je bilo do zdaj smiselno govoriti samo v kontekstu žic (oziroma takšnih ali drugačnih vodnikov), se posploši z uvedbo gostote električnega toka.

$$I = \int \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Električni pretok $\vec{j}$ ima lahko poljubno smer v prostoru, in ne nujno po žici.

$$\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}I = \mathrm{d}\left(\frac{\rho\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \rho\vec{v}\,\mathrm{d}S$$

Sledi:

$$\vec{j} = \rho\,\mathrm{d}\vec{v}$$

2.8 Amperov izrek

Imamo tokovno zanko (označimo C'), po kateri teče tok I. Majhen del zanke bomo označili kot $\mathrm{d}\vec{l}\,'$. Če okoli zanke na nekem položaju $\vec{r}(l)$ potegnemo navidezno zanko (C), ki obkroža vodnik, lahko poskusimo izračunati magnetno cirkulacijo po tej navidezni zanki.

$$\Gamma_M = \oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_C \left[-\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \mathrm{d}\vec{l}\,' \times \frac{\vec{r}(l) - \vec{r}(l')}{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|^3}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

V izrazu opazimo mešani produkt:

$$= \oint_C \oint_{C'} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\mathrm{d}\vec{l}\,' \times \frac{\vec{r}(l) - \vec{r}(l')}{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|^3}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_C \oint_{C'} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\mathrm{d}\vec{l} \times \mathrm{d}\vec{l}\,' \cdot \frac{\vec{r}(l) - \vec{r}(l')}{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|^3}\right)$$

Vemo, da vektorski produkt predstavlja nekakšno površino. Integral torej prevedemo na integral po zaključeni ploskvi. Kakšna ploskev to je, ni jasno niti predavatelju (verjetno gre za nekakšno cev okoli zanke C'), ampak predvidevamo, da takšna ploskev obstaja, da je zaključena in da jo bomo lahko opisali v sferičnih koordinatah.

$$\Gamma_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{r}(l) - \vec{r}(l')}{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|^3} r^2\,\mathrm{d}r \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_S \mathrm{d}\Omega = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 4\pi = \mu_0 I$$

V integralu po ploskvi smo prepoznali integral prostorskega kota, ki pa je enak 4π.

2.9 Magnetni potencial

Pri električnem polju smo uvedli skalarni potencial φ, da je veljalo $\vec{E} = \nabla\varphi$. To smo lahko storili, ker je bilo električno polje brezvrtinčno, kajti rotor gradienta je vedno enak 0.
Za magnetno polje ne bomo mogli uporabiti skalarnega potenciala, saj je polje vrtinčno. Vemo pa, da

je brezizvorno, in vemo tudi, da je divergenca rotorja enaka 0. Če je divergenca magnetnega polja torej enaka 0, ga je smiselno opisati z rotorjem nekega vektorskega potenciala.
Bodi torej $\vec{A}$ takšen vektor, da je

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Zdaj lahko namesto enega magnetnega polja uporabljamo drugo vektorsko polje. Videli bomo, da se nam bo uporaba potencialnega polja včasih bolj izplačala.

Magnetni pretok z magnetnim potencialom:

$$\phi_M = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S (\nabla \times \vec{A})\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Vektorski potencial znotraj tuljave: Imejmo tuljavo, znotraj katere je magnetno polje enako $\vec{B_0} = (0, 0, B_0)$ - zunaj je seveda enako 0. Ker nimamo lepe inverzne operacije rotorju, ne moremo konstruirati $\vec{A}$, lahko pa ga uganemo:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B_0} \times \vec{r}$$

Zunaj tuljave: Gostota magnetnega polja je enaka 0. Zamislimo si zanko, ki obkroža tuljavo (tik ob zunanjem robu tuljave). Zanima nas magnetni pretok skoznjo, kajti magnetni pretok v odvisnosti od $\vec{A}$ smo malo prej izračunali.

$$\phi_M = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = B_0 \pi a^2$$

Z a smo označili radij tuljave. S je površina zanke, ki obkroža tuljavo (njen radij je $r > a$).

$$\int_{\partial S} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \propto 2\pi r A$$

Sledi, da A izven tuljave ni enak 0. Uganiti moramo obliko $\vec{A}$:

$$\vec{A} = c\,\vec{B_0} \times \frac{\vec{r}}{r^2}$$

Konstanto c določimo tako, da je $\vec{A}$ na robu tuljave zvezen. To lahko naredimo kar z magnetnim pretokom:

$$\oint_{\partial S} c\left(\vec{B_0} \times \frac{\vec{r}}{r^2}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi c B_0$$

To enačimo z rezultatom, ki smo ga dobili z notranje strani tuljave:

$$2\pi c B_0 = B_0 \pi a^2 \Rightarrow c = \frac{a^2}{2}$$

To nam da končni rezultat:

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{2}\vec{B_0} \times \vec{r} & |\vec{r}| \leq a \\ \frac{a^2}{2r^2}\vec{B_0} \times \vec{r} & |\vec{r}| > a \end{cases}$$

To je močno prostorsko odvisna funkcija (tudi, ko je $\vec{B} = 0$), je pa vsaj zvezna.

Umeritev. Na magnetnem potencialu $\vec{A}$ naredimo transformacijo:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\zeta(\vec{r})$$

Polji $\vec{A}$ in $\vec{A}'$, saj je $\nabla \times (\nabla\zeta) = 0$ za katero koli funkcijo ζ.
V primeru tuljave se nam splača vzeti

$$\zeta(x, y, z) = -\frac{B_0\,a^2}{2} \arctan\frac{x}{y}$$

Tako zunaj tuljave dobimo:

$$\vec{A}' = \frac{a^2}{2}\vec{B_0} \times \frac{\vec{r}}{r^2} - \nabla\left(-\frac{B_0 a^2}{2} \arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{B_0 a^2}{2}\frac{2\pi}{a}\delta(\phi - \pi)\widehat{e}_\phi$$

Dobili smo $\vec{A}$, ki je enak nič povsod razen znotraj tuljave. Vidimo, da si lahko z uvedbo umeritve precej olajšamo računanje s potencialom $\vec{A}$, ne da bi pri tem vplivali na magnetno polje $\vec{B}$.

2.10 Magnetna sila

$$\vec{F} = \int I \, \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

Tok I izrazimo z električnim pretokom in dobimo

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

(Velja za točkast naboj.)

2.11 Kiechoffova enačba

Zanima nas osnovna enačba za vektorski magnetni potencial. Uporabimo Amperov zakon:

$$\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Uporabimo Helmholtzov izrek: Vsako vektorsko polje lahko zapišemo kot vsoto brezizvornega in brezvrtinčnega polja.

$$\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2}, \quad \nabla \cdot \vec{A_1} = 0, \; \nabla \times \vec{A_2} = 0$$

Ker je $\vec{B} = \nabla \times \vec{A_1} + \nabla \times \vec{A_2} = \nabla \times \vec{A_1}$, si brez kakršnih koli posledic privoščimo, da je $A_2 = 0$. Tako je $\vec{A} = \vec{A_1}$ in velja $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Sledi:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Dobljenemu pravimo Kirchoffova enačba. To je osnovna enačba za izračunn magnetnega vektorskega potenciala.

Ker je enačba skoraj identična Poissonovi, lahko uganemo rešitev (po potrebi tudi izračunamo, v resnici je samo sistem treh neodvisnih Poissonovih enačb):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Integriramo po volumnu, kjer je $\vec{j}$ neničeln. Od tod z rotorjem dobimo ravno Biot-Savartov zakon:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

2.12 Magnetna energija

2.12.1 Magnetna energija v zunanjem polju

Zanko s površino S, po kateri teče tok I, premaknemo za $\mathrm{d}\vec{r}$. Zanko parametriziramo z vektorjem $\vec{t}$. Zanima nas, koliko se je spremenila energija.

$$\vec{F} = \int_C I \, \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I \int_C (\vec{t} \times \vec{B}) \, \mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}A = -\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -I \int_C (\mathrm{d}\vec{r} \times \vec{t}) \cdot \vec{B} \, \mathrm{d}l$$

$$A = -I \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -I\Phi_M$$

Ali lahko to zapišemo z vektorskim magnetnim potencialom?

$$\vec{A} = -I \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -I \int_{C_2} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + I \int_{C_2} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Posplošimo I na $\vec{j}$:

$$A = -\int_{(2)} \vec{j} \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}^3\vec{r} + \int_{(1)} \vec{j} \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Torej je magnetna energija v zunanjem magnetnem polju

$$W = -\int_V \vec{j} \cdot \vec{A}\, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Opomba: $\vec{A}$ ni odvisen od $\vec{j}$, saj govorimo o zunanjem magnetnem polju.

2.12.2 Magnetna energija kot funkcional toka

Magnetni potencial je moral ustvariti nekakšen električni tok. Iz Kirchoffove enačbe vemo:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, \mathrm{d}^3\vec{r}'$$

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, \mathrm{d}^3\vec{r}\, \mathrm{d}^3\vec{r}'$$

Opisali smo, kako tok $\vec{j}$ in $\vec{j}'$ delujeta eden na drugega.

2.12.3 Celotna magnetna energija

Zanima nas celotna energija polja potenciala $\vec{A}$, ki ga ustvarja gostota toka $\vec{j}$. Uvedemo parameter $\alpha : 0 \to 1$. Vrednost parametra α določa velikost $\vec{A}$. Tako gre $\vec{A} : 0 \to \vec{A}$.
Vemo, da tok $\vec{j}$ ustvarja potencial $\vec{A}$. Pri nekem α imamo $\widehat{A}$ in velja $\widehat{j} = \alpha\,\vec{j}$, $\mathrm{d}\widehat{j} = \vec{j}\,\mathrm{d}\alpha$.

$$\mathrm{d}W = \int -\mathrm{d}\widehat{j} \cdot \widehat{A}\, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

$$= -\int \vec{j} \cdot \vec{A}\alpha\, \mathrm{d}\alpha = -\frac{1}{2}\int_V \vec{j} \cdot \vec{A}\, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Opomba: tu je $\vec{A}$ polje, ki ga ustvarja tok $\vec{j}$. Se pravi ina enačba bistveno drug pomen kot enačba za zunanje polje (čeprav se razlikujeta le za predfaktor). Polje $\vec{A}$ izračunamo s Kirchoffovo enačbo.
Opomba 2: Pri izračunu nismo upoštevali, da vzpostavitev toka $\vec{j}$ po zanki zahteva nek vložek energije.

$$P = UI = -I \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Uporabimo izrek, ki ga še nismo izpeljali, namreč:

$$\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Pozneje bomo to v diferencialni obliki poznali kot eno od Maxwellovih enačb: $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

$$P = I\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\partial W}{\partial t}$$

Preberemo W:

$$W = I\int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = I\int \nabla \times \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \vec{A} \cdot (I\, \mathrm{d}\vec{r}) = \int \vec{j} \cdot \vec{A}\, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

2.13 Gostota energije magnetnega polja

Energijo želimo prepisati v odvisnost od $\vec{B}$.

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{j} \cdot \vec{A}\, \mathrm{d}^3\vec{r} =$$

Uporabimo Amperov zakon:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int \left(\nabla \times \vec{B}\right) \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}^3 \vec{r}$$

Uporabimo identiteto

$$\nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A})$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \nabla(\vec{B} \times \vec{A}) \, \mathrm{d}^3 \vec{r} + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) \, \mathrm{d}^3 \vec{r}$$

Prvi integral nam izgleda znano. Drugi je ogrožen. Pokazali bomo, da je enak 0, in sicer tako, da ga spremenimo na integral po ploskvi.

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, \mathrm{d}^3 \vec{r} + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\partial V} \frac{\cdots}{R^3} \, \mathrm{d}\vec{S}$$

Integrirana funkcija bo torej $\propto 1/R$. Ker smemo površino razglasiti za neskončno veliko, gre to proti 0. Sledi:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, \mathrm{d}^3 \vec{r}$$

2.14 Sila kot funkcional magnetnega polja

Imamo krompir z volumnom V, po katerem teče tok $\vec{j}$. Je v magnetnem polju $\vec{B}$, ki je vsota zunanjega in lastnega polja.

$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B}_{\text{zun}} \, \mathrm{d}^3 \vec{r}$$

Uporabimo Amperov zakon:

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \int_V (\nabla \times \vec{B}_{\text{not}}) \times \vec{B}_{\text{zun}} \, \mathrm{d}^3 \vec{r}$$

3 Kvazistatična polja

3.1 Indukcija

3.1.1 Lenzovo pravilo

"Sprememba magnetnega pretoka skozi tokokrog požene tok, ki nasprotuje vzroku svojega nastanka."

3.1.2 Maxwellova formulacija indukcije

Osnovana je na Faradejevem zakonu indukcije:

$$\Gamma_e = \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi_m$$

Opomba. Te enačbe nimamo od kod izpeljati, pridobljena je empirično.

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Uporabimo Stokesov zakon:

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Preberemo kinematično Maxwellovo enačbo:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3.1.3 Maxwellov impulz magnetnega polja

V kinematično Maxwellovo enačbo vstavimo $\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$.

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \overrightarrow{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

Gostota električnega polja je torej odvisna od časovnega odvoda magnetnega in obratno.

$$\overrightarrow{F} = e\overrightarrow{E} = -\frac{\partial e\overrightarrow{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \overrightarrow{p}}{\partial t}$$

Torej je $e\overrightarrow{A}$ gibalna količina, ki jo z indukcijo dodajamo v sistem.

3.2 Kvazistatičen sistem Maxwellovih enačb

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$$

Sistem nam določa:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{j} = 0$$

Tokovne zanke so torej striktno zaključene.

3.2.1 EM potenciala za kvazistatična polja

Ker je $\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$, lahko še vedno velja $\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$. Za $\overrightarrow{E}$ to v nestatičnem sistemu ne velja več. Velja:

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\nabla \times \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = 0$$

To zagotovimo tako, da je izraz v oklepaju enak gradientu potenciala. Tako je v kvazistatičnem sistemu električni potencial enak:

$$\overrightarrow{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

Ti formulaciji potencialov veljata tudi v splošnem.

3.3 Prevodniki in Ohmov zakon

Izjava: snovi, v katerih obstajajo prosti nosilci naboja, imenujemo prevodniki. Nosilci naboja so lahko elektroni, vrzeli, ioni ipd. Za prevodnike velja Ohmov zakon:

$$\overrightarrow{j} = \sigma_e \overrightarrow{E}$$

Če ni električnega polja, je v ravnovesju tok enak $\overrightarrow{j} = 0$. Ko je $\overrightarrow{E} \neq 0$, se naboj znotraj prevodnika porazdeli tako, da nastane polje v nasprotno smer. Tok bo tekel, dokler je razlika teh nasprotujočih si polj različna od 0 - ustavil se bo, ko se nosilci naboja postavijo na površino prevodnika. Predpostavljamo seveda, da ima prevodnik dovolj parov nabitih delcev, da lahko zasenči zunanje polje.

3.3.1 Časovna konstanta prevodnika

Kako hitro se v prevodniku vzpostavi ravnovesje? Izhajamo iz kontinuitetne enačbe:

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \left(\sigma \vec{E}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Vstavimo $\div \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (operiramo pod predpostavko, da je σ konstantna):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\rho = \rho_0 \, e^{-t/\tau}, \quad \tau = \varepsilon_0/\sigma$$

Značilni čas za uravnovešanje je torej sorazmeren s prevodnostjo kovineza železo je na primer reda velikosti 10^{-18} s.

3.4 Mikroskopski model prevodnosti

Ohmov zakon dobimo iz Drudejevega modela:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -m\gamma\vec{v} + e\vec{E}$$

Prvi člen označuje disipacijo (sipanje na nečistočah v prevodniku). Ko ni polja ($\vec{E} = 0$), dobimo eksponentno funkcijo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0}e^{-\gamma t}$$

V prisotnosti električnega polja dobimo nehomogeno diferencialno enačbo, katere rešitev je (sicer analitično dosegljiva, vendar jo podamo brez izpeljave):

$$v(t) = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')}\vec{E}(t')\,\mathrm{d}t'$$

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = ne\vec{v} = \frac{ne^2}{m}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')}\vec{E}(t')\,\mathrm{d}t'$$

Za konstantno polje ($\vec{E} = \text{konst.}$) dobimo:

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{m\gamma}\vec{E} \qquad \sigma = \frac{ne^2}{m\gamma}$$

Za σ_e uvedemo enoto Siemens ($\mathrm{S} = 1/\Omega$). Nekaj vrednosti:

Aluminij:	$3.7 \cdot 10^7\,\mathrm{S/m}$
Železo:	$9.9 \cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$
$YBa_2Cu_3O_7$ nad $T = 92\,\mathrm{K}$:	$10^6\,\mathrm{S/m}$
$YBa_2Cu_3O_7$ pod $T = 92\,\mathrm{K}$:	$\sim \infty$
Steklo pri $T = 300\,\mathrm{K}$:	$10^{-15}\,\mathrm{S/m}$
Steklo pri $T = 1000\,\mathrm{K}$:	$10^{-7}\,\mathrm{S/m}$

3.5 Upornost

Električni tok omejimo na vodnik in ga integriramo po njegovi dolžini:

$$\int \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \frac{\vec{j} \cdot \vec{t}}{S}\,\mathrm{d}^3\vec{r} = I\int \frac{\mathrm{d}l}{S}$$

$$\int \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \sigma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sigma(\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)})$$

Če vpeljemo električno upornost kot

$$R = \int \frac{\mathrm{d}l}{S \cdot \sigma},$$

dobimo Ohmov zakon v bolj znani obliki:

$$U = \Delta\varphi = RI$$

3.6 Disipacija energije

Na porazdelitev naboja lahko delujeta električna in magnetna sila. Magnetna sila vedno deluje pravokotno na smer gibanja, zato ne troši energije. Velja:

$$\vec{F} = \int \rho \vec{E} \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Izračunamo moč, ki jo elektromagnetna sila lahko troši:

$$P = \int \vec{f} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}^3\vec{r} = \int \frac{\vec{j}}{\rho} \left(\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}\right) \mathrm{d}^3\vec{r}$$

$$P = \int \vec{j} \cdot \vec{E} \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

3.7 Kapacitivnost

Električno energijo shranjujemo v kondenzatorju. Zanj veljata enačbi: Vzamemo N prevodnikov: $i = 1, ..., N$. Prevodnike nabijemo, in ker gre za prevodnike, velja: $\varphi(\partial V_i) = \text{konst.}$ Kapacitivnost želimo uvesti kot mero med nabojem in potencialom, oziroma koliko električne energije lahko shranimo v dani sistem. Oglejmo si energijo velotnega električnega polja:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Ker je naboj le na površini prevodnikov, naš integral postane:

$$\rho \, \mathrm{d}^3\vec{r} \to \sum_i \sigma_i \, \mathrm{d}S_i$$

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \oint \sigma_i \, \mathrm{d}S_i = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i e_i$$

Isti račun izvedemo drugače:

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Upoštevamo:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, \mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

$$W_e = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int_V \int_V \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Upoštevamo, da imamo naboj samo na površini prevodnikov:

$$\rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3\vec{r} = \sum_i \sigma_i \, \mathrm{d}S_i$$

$$W_e = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i,k} \int_{\partial V_i} \int_{\partial V_k} \frac{\sigma_i \sigma_k}{|\vec{r_i} - \vec{r_k}|} \, \mathrm{d}S_i \, \mathrm{d}S_k$$

Izraz pomnožimo z $\frac{e_i\, e_k}{e_i\, e_k} = 1$, s čimer nismo naredili nič matematično spornega. Dobimo:

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,k} e_i e_k \int_{\partial V_i}\int_{\partial V_k} \frac{\sigma_i \sigma_k}{e_i e_k |\vec{r_i} - \vec{r_k}|}\,\mathrm{d}S_i\,\mathrm{d}S_k$$

Zdaj uvedemo kapacitivnost kot

$$\left[C^{-1}\right]_{ik} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_i}\int_{S_k}\frac{\sigma_i\sigma_k}{|\vec{r_i} - \vec{r_k}|}\,\mathrm{d}S_i\,\mathrm{d}S_k$$

Električno energijo sistema delcev zapišemo kot

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i e_i = \frac{1}{2}\sum_{i,k} C_{ik}^{-1} e^i e^k$$

3.8 Induktivnost

Induktivnost nam opisuje, koliko magnetne energije lahko shranimo v tokovno zanko. Imamo $i = 1, 2, ..., N$ tokovnih zank, po vsaki teče tok I_i. Računamo energijo magnetnega polja.

Prvi način:

$$W_i = \frac{1}{2}\iiint \vec{j_i}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}^3\vec{r_i} = \frac{1}{2}\int I_i \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l_i}$$

Ker imamo več zank, moramo sešteti vse njihove prispevke I:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l_i} = \frac{1}{2}\sum_i I_i \iint_{S_i}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S_i}$$

Sledi:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i I_i \phi_i$$

Drugi način:

$$U = L\dot{I} \Rightarrow \phi_m = LI$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint \vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int_V\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r})\,\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,\mathrm{d}^3\vec{r'}$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi}\sum_{i,k} I_i I_k \oint_i\oint_k \frac{\mathrm{d}\vec{l_k}\cdot\mathrm{d}\vec{l_i}}{|\vec{r}(l_i) - \vec{r}(l_k)|}$$

Ko strani enačimo, dobimo:

$$\frac{1}{2}\sum_i I_i\phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\mu_0}{4\pi} I_i I_k \left(\oint_i\oint_k \frac{\mathrm{d}\vec{l_k}\cdot\mathrm{d}\vec{l_i}}{|\vec{r}(l_i) - \vec{r}(l_k)|}\right)$$

Izraz v oklepaju razglasimo za induktivnost, velja:

$$L_{ik} = \oint_i\oint_k \frac{\mathrm{d}\vec{l_k}\cdot\mathrm{d}\vec{l_i}}{|\vec{r}(l_i) - \vec{r}(l_k)|}$$

Velja $\phi_i = \sum_k L_{ik} I_k$

Opomba. Opazimo, da je $L_{ik} = L_{ki}$, in da nimamo nobenega razloga, da ne moremo izračunati tudi L_{ii} - tej količini pravimo lastna induktivnost.

3.9 Kožni pojav

Obravnavamo primere, ko tok ni konstanten, temveč imamo opravka z izmeničnim tokom. Ko izmenični tok teče skozi žico, se razporedi tako, da je gostota toka največja blizu sten prevodnika.

3.9.1 Osnovne enačbe kožnega pojava

Uporabimo Maxwellove enačbe in Ohmov zakon za prevodnik;

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \quad \text{(Kajti v prevodniku: } \rho = 0) \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \mu_0 \vec{j} \\
\vec{j} &= \sigma \vec{E}
\end{aligned}$$

Aproksimacija, ki smo jo naredili pri četrti enačbi, običajno dobro velja za $\omega < 10^{18}\,\mathrm{s}^{-1}$.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \times (\mu_0 \sigma \vec{E}) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Matematično gledano sta to neodvisni enačbi, vendar bomo iz rešitve ene izrazili rešitev druge, zato gre v resnici le za eno enačbo. Uporabimo dejstvo:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$

V našem primeru je divergenca obeh polj enaka 0, torej:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

To sta neke vrste difuzijski enačbi. Za rešitev uporabimo nastavek:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon}(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\beta}(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

Zakaj $e^{i\omega t}$? Prvič, ker je to nastavek, ki pogosto deluje za take vrste enačb. Drugič, ker bomo lahko poljubno časovno odvisnost sestavili kot linearno kombinacijo rešitev z različnimi ω. Ko nastavka vstavimo v enačbi, dobimo:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \vec{\varepsilon} &= k^2 \vec{\varepsilon} \\
\nabla^2 \vec{\beta} &= k^2 \vec{\beta}
\end{aligned}$$

Označili smo $k^2 = -i\omega\mu_0\sigma$. Izračunamo lahko $k = \sqrt{\frac{1}{2}}(1-i)\sqrt{\omega\mu_0\sigma}$ V eni dimenziji bi bila rešitev oblike

$$\vec{E}(z,t), \vec{B}(z,t) \propto e^{-kz} = e^{-\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}z} e^{-i\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}z}$$

Uvedemo t.i. udorno globino, ki bodi enaka:

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$$

Nekaj vrednosti: Za baker pri 50 Hz dobimo $d = 2.3\,\mathrm{cm}$. To je najširša žica, ki jo je smiselno uporabljati za prenos električnega toka pri taki frekvenci.

3.9.2 Rešitev v cilindričnem vodniku

Ker je vodnik cilindričen, recimo, da tok teče le v smeri z in potemtakem velja:

$$E_z(r,t) = E_z(r)e^{-i\omega t}$$

$$B_\varphi(r,t) = B_\varphi(r)e^{-i\omega t}$$

Laplaceov operator v cilindričnih koordinatah in cilindrični bazi.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) - \frac{E_z}{r^2} = -i\omega\mu_0\sigma E_z$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right) - \frac{B_\varphi}{r^2} = -i\omega\mu_0\sigma B_\varphi$$

Zaradi vezi med $\overrightarrow{E}$ in $\overrightarrow{B}$ velja:

$$-i\omega B_\varphi = -\frac{\partial E_z}{\partial r}$$

Nato z računalnikom dobimo rešitvi enačb:

$$E_z(r) = AJ_0(kr) \qquad B_\varphi = -iA\frac{k}{\omega}J_1(kr)$$

Tu je $k = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\sigma}$, J_0 in J_1 pa sta modificirani Besselovi funkciji (navadni ne zadoščata, saj je k kompleksen).
Ustrezajoča gostota električnega toka je

$$\overrightarrow{j} = \sigma\overrightarrow{E} = \widehat{e}_z\,\sigma AJ_0(kr)$$

Seveda je A konstanta, ki jo določa robni pogoj.

4 Maxwellove enačbe

Maxwellova teorija EM polja povezuje osrednji dve polji - električno $\overrightarrow{E}$ in magnetno $\overrightarrow{B}$ - med seboj in z njunimi izvori. Označimo sledeča izvora:

$$\rho(\overrightarrow{r},t) \quad \text{(gostota naboja - izvor } \overrightarrow{E}\text{)}$$

$$\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r},t) \quad \text{(gostota el. toka - izvor } \overrightarrow{B}\text{)}$$

Helmholtzov teorem pravi, da je poljubno vektorsko polje popolnoma določeno, če poznamo njegovo divergenco in rotor. Ker želimo z Maxwellovimi enačbami opisati vektorski polji, jih torej zapišemo v obliki

$$\nabla\cdot\overrightarrow{E} = ... \qquad \nabla\cdot\overrightarrow{B} = ...$$
$$\nabla\times\overrightarrow{E} = ... \qquad \nabla\times\overrightarrow{B} = ...$$

4.1 Ohranjanje naboja - kontinuitetna enačba

V nekem volumnu V_0 imamo naboj, porazdeljen z gostoto $\rho(\overrightarrow{r},t)$.

$$\int_{V_0}\rho(\overrightarrow{r},t)\,\mathrm{d}^3\overrightarrow{r} = e(t)$$

V splošnem naboj ni konstanten, spreminja se namreč, če v volumen vstopa tok naboja:

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\oint_{\partial V_0}\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S = -\int_{V_0}\nabla\cdot\overrightarrow{j}\,\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}$$

Hkrati je to enako

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho(\vec{r},t)\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \int_{V_0} \frac{\partial\rho}{\partial \vec{t}}(\vec{r},t)\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Ko to enačimo, dobimo:

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Predpostavka za tako enačbo je, da naboj znotraj V_0 lahko "nastane" le tako, da priteče vanj skozi njegovo površino. Da naboj ne mora nastajati in izginjati tako rekoč iz ničesar, v klasični fiziki tudi drži.

4.2 Maxwellov premikalni tok

Osnove Maxwellovih enačb v kvazistatičnem približku so oblike

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

Vidimo, da te enačbe niso popolne, saj implicirajo

$$0 = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0\nabla\cdot\vec{j}$$

Kar očitno ne velja nujno. Težavo rešimo z uvedbo premikalnega toka (ki ga določimo empirično - ni nobene smiselne izpeljave):

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Če poskusimo na obe strani spet delovati z divergenco:

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = 0 = \mu_0\nabla\cdot\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\nabla\cdot\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{E})$$

Ko vstavimo $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, dobimo kontinuitetno enačbo.

4.3 Popoln set Maxwellovih enačb

1. Gaussov zakon:
$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

2. Kinematična enačba:
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \tag{2}$$

3. Kinematična enačba:
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

4. Amperov zakon:
$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Kontinuitetna enačba:

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

To so enačbe, ki določajo klasičen elektromagnetizem.

4.4 Ohranitveni zakoni

Maxwellove enačbe ohranjajo naboj, gibalno količino, vrtilno količino in energijo.

4.4.1 Ohranitev energije

Kontinuitetno enačbo izpeljemo iz 3. in 4. Maxwellove enačbe. Pri ohranitvi energije pričakujemo enačbo, ki je po obliki podobna kontinuitetna (le da bomo namesto gostote naboja in električnega toka uporabili gostoto energije in energijskega toka). Takšno enačbo izpeljemo tako, da 3. Maxwellovo enačbo na obeh straneh skalarno množimo z $\vec{B}$, 4. Maxwellovo enačbo pa na z $\vec{E}$.

$$\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dobljeni enačbi med seboj odštejemo:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2\right) = -\frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Izraz na levi predstavlja časovni odvod gostote električne in magnetne energije, na desni označimo $\vec{P} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$ - Poyntingov vektor. Tako dobimo enačbo ohranitve energije:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{P} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

4.4.2 Ohranitev gibalne količine

Obravnavamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}\right) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$= \varepsilon_0 \left[\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}(\nabla \times \vec{B})\vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j} \times \vec{B} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})\right]$$

Dvojni vektorski produkt lahko prevedemo v razliko skalarnih produktov:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \left[\varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2}E^2 \underline{\underline{I}} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2}B^2 \underline{\underline{I}}\right] - \left[\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}\right]$$

Dobimo Cauchyjevo kontinuitetno enačbo:

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0$$

Uvedli smo gibalno količino, ki pripada polju z napetostnim tenzorjem T_{ik}:

$$\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

f_i pa označuje gostoto sile: $f = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$.

Opomba. ravnokar smo polju, ki samo po sebi nima mase, pripisali gibalno količino. To je izrazita posplošitev, ki pa je uporabna v posebni in splošni teoriji relativnosti.

4.4.3 Ohranitev vrtilne količine

Začnemo s prej izpeljano Cauchyjevo kontinuitetno enačbo:

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - f_i$$

Na obeh straneh skalarno množimo z neko krajevno koordinato x_j:

$$\frac{\partial(x_j g_i)}{\partial t} = x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - x_j f_i$$

Upoštevamo:

$$x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial(x_j T_{ik})}{\partial x_k} - T_{ij}$$

$$\frac{\partial(x_j g_i)}{\partial t} = \frac{\partial(x_j T_{ik})}{\partial x_k} - T_{ij} - x_j f_i$$

Na obe strani delujemo s Levi-Civita tenzorjem ε_{lji}, ki predstavlja vektorski produkt. Ker je $T_{ij} = T_{ji}$, je $\varepsilon lji T_{ij} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{lji} x_j g_i) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\varepsilon_{lji} x_j T_{ik}) - \varepsilon_{lji} x_j f_i$$

Uvedemo vrtilno količino:

$$\gamma_l = \varepsilon_{lji} x_j g_i$$

in gostoto navora:

$$m_l = \varepsilon_{lji} x_j f_i$$

$$\frac{\partial \gamma_l}{\partial t} - \frac{\partial(\varepsilon_{lji} x_j T_{ik})}{\partial x_k} + m_l = 0$$

Spet spomnimo, da je ε_{lji} Levi-Civita tenzor.

5 Elektromagnetno polje v snovi

5.1 Električno polje v snovi

Zanima nas, kako se spremenijo Maxwellove enačbe, če polje ustvarimo oziroma deluje v snovi.

5.1.1 Vezan naboj

Celotna gostota naboja v snovi je sestavljena iz dveh prispevkov:

- Zunanji naboj, ki ga lahko v okviru eksperimenta tudi spreminjamo.
- Vezan naboj, ki se v odziv na zunanje polje prerazporedi po snovi. Definiran je kot

$$\rho_V(\vec{r_i}) = \overline{\sum_i e_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r_i})}$$

ρ_V smo povprečili - ne gre za neko statistično povprečje, temveč gre zamo za to, da zgladimo mikroskopske variacije in delta funkcije spremenimo v nekoliko bolj prebavljive Gaussovke. Temu pravimo povprečje preko hidrodinamskega volumna. Prva Maxwellova enačba (1) se prepiše v:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$$

5.1.2 Polarizacija

Vezan naboj v snovi opišemo z novo količino: polarizacijo $\vec{P}$. Uvedemo jo z zahtevo:

$$\rho_V = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Vrh tega uvedemo gostoto električnega polja kot $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ Velja:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Izvori $\vec{D}$ so striktno zunanji naboji, torej $\vec{D}$ ni odvisen od snovi.

5.1.3 Konstitutivna relacija za električno polje v snovi

Opišimo polarizacijo $\vec{P}$ v odvisnosti od zunanjega polja:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{D})$$

Ta odvisnost je v principu poljubna. za šibka polja in snov, ki je izotropna in homogena, razvijmo $\vec{P}$ do prvega reda:

$$\vec{P}(\vec{D}) = \chi_E \vec{D} + \mathcal{O}(D^2)$$

Gre v resnici za nekakšen Taylorjev razvoj - če je $\vec{D}$ majhen, to smemo. Količino χ_E imenujemo električna susceptibilnost, pogosto pa uvedemo tudi

$$\chi_E = 1 - \frac{1}{\varepsilon},$$

kjer ε pomeni dielektričnost. Če to vstavimo v definicijo $\vec{D}$, dobimo:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$$

Spet poudarimo, da to velja za šibka električna polja in izotropne, homogene snovi. Primer snovi, v kateri konstitutivna relacija ne velja, so feroelektriki, ki imajo v sebi lastne električne dipole.

5.1.4 Gostota električnega dipolnega momenta in polarizacija

Zanima nas, kaj točno je polarizacija.

$$-\nabla^2\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla\cdot\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

Izraz v drugem integralu poskusimo zapisati drugače:

$$\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right) = \frac{\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \vec{P}(\vec{r}\,')\,\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right)$$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) = &\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\\ &-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\\ &+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{P}(\vec{r}\,')\,\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\end{aligned}$$

Drugi integral prevedemo na integral po površini, in zaradi deljenja z $|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ sklepamo, da bo njegova vrednost enaka 0. Poleg tega obravnavajmo primer, ko ni zunanjega naboja, da bo tudi prvi člen enak 0. Ostane:

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{P}(\vec{r}\,')\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

Velja:

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right) = -\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right)$$

Ker ∇ ne vpliva na spremenljivko $\vec{r}$, jo lahko nesemo iz integrala in dobimo:

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\nabla\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\vec{r} - \vec{r}\,'}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

Rezultat primerjamo s potencialom električenga dipola:

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

Če bi v pravkar izračunano enačbo za φ vstavili $\vec{P} = \vec{p}\,\delta^3\overline{r - \vec{r}'}$, bi dobili ravno tak rezultat. Polarizacija $\vec{P}$ nam torej opisuje volumsko gostoto električnih dipolov.

5.1.5 Klasifikacija snovi glede na odziv električnega polja

Glede na velikost dielektričnosti ločimo snov na sledeče skupine:

- Dielektriki imajo končno vrednost ε, lahko kopičijo energijo. V neidealnih dielektrikih je εodvisen od frekvence spreminjanja ekeltričnega polja.
- Prevodniki imajo nesknčen ε, idealno senčijo električno polje v svoji notranjosti.
- Feroelektriki, superprevodniki ...

5.2 Magnetno polje v snovi

V snovi v magnetnem polju se ustvarijo vezani tokovi, ki so kvantno-mehanskega izvora. Posledica teh tokov je notranje magnetno polje. Posledica: če ni zunanjega magnetnega polja, je hidrodinamsko povprečje magnetnih polj vezanih tokov enako 0. Če zunanje magnetno polje imamo, pa se lahko vezani tokovi nanj odzovejo in zaznamo lahko spremembo hidrodinamskega povprečja.

5.2.1 Vezan tok

Kot prej delimo gostoto električnega toka:

- Gostota zunanjega toka: $\vec{j}$
- Gostota vezanega toka: $\vec{j_V}$. Definiramo:

$$\vec{j_V} = \overline{\sum_i \vec{j_i}\,\delta^3(\vec{r} - \vec{r_i})}$$

Prepišemo Maxwellovo enačbo (4):

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\vec{j_V} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

5.2.2 Magnetizacija

Uvedemo novo vektorsko polje, ki ga krstimo kot magnetizacijo. Velja naj:

$$\vec{j_V} = \nabla\times\vec{M} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

S tako definicijo je zadoščeno kontinuitetni enačbi:

$$\nabla\cdot\vec{j_V} + \frac{\partial\rho_V}{\partial t} = 0$$

Vpeljemo jakost magnetnega polja kot:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

In dobimo Maxwellovo enačbo v snovi:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Sledi: Polje v snovi je odvisno striktno od zunanjega magnetnega polja in zunanje gostote naboja.

5.3 Manjka: Napetostni tenzor v snovi

5.4 Robni pogoji

5.4.1 Manjka: Robni pogoj za $\vec{B}$

Zaključek je, da se pri prehodu magnetnega polja iz ene snovi v drugo ohranja komponenta, pravokotna na rob snovi.

5.4.2 Robni pogoj za $\vec{D}$

Na robu med dvema snovema iščemo robni pogoj med električnima poljema $\vec{D_1}$ in $\vec{D_2}$. Robni pogoj nam določa Maxwellova enačba 1, in sicer mora povsod veljati:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

V integralski obliki:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} \, \mathrm{d}^3\vec{r} = \int_V \rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Izberemo tak volumen V, da ga del seže v snov 1, del pa v snov 2. Najbolj nam ustreza nek majhen valj, katerega višino bomo poslali proti 0. Nato uporabimo Gaussov izrek.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} \, \mathrm{d}^3\vec{r} = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{(1)} \vec{D_1} \cdot \vec{n_1} \, \mathrm{d}S + \int_{(2)} \vec{D_2} \cdot \vec{n_2} \, \mathrm{d}S + \int_{\text{plašč}} \vec{D_{pl}} \cdot \vec{n_{pl}} \, \mathrm{d}S$$

V limiti, ko višino valja pošljemo proti 0, izgubimo tretji člen, in dobimo samo integral po površini. Izrazimo površinsko gostoto σ:

$$\sigma = \vec{D_1} \cdot \vec{n_1} + \vec{D_2} \cdot \vec{n_2}$$

To je naš robni pogoj - gre za ohranitev normalne komponente $\vec{D}$.

5.4.3 Robni pogoj za $\vec{E}$

Izhajamo iz Maxwellove enačbe 3:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Mislimo si, da med snovema napeljemo zanko - tedaj lahko integriramo po površini le-te.

$$\int_S \nabla \times \vec{E} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, \mathrm{d}\vec{S}$$

Uporabimo Stokesov izrek:

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Vzamemo limito, ko zanko krčimo, da gre izraz na desni v 0. Ostane nam:

$$\vec{E_1} \cdot \vec{t_1} + \vec{E_2} \cdot \vec{t_2} = 0$$

To je naš robni pogoj - gre za ohranitev tangencialne komponente $\vec{E}$

5.4.4 Robni pogoj za $\vec{H}$

Izhajamo iz Maxwellove enačbe v snovi:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Spet integriramo po zanki in uporabimo Stokesov izrek:

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{H} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \int_S \overrightarrow{j} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} + \int_S \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \, \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Člen $\frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$ lahko v limiti pošljemo proti 0, člen $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{t} \, \mathrm{d}l$ pa nam ostane. Označimo ga s K in imenujemo površinska gostota toka (za primere, ko je tok po snovi omejen na površino - obstajajo snovi, v katerih do tega pride).

$$\overrightarrow{H_1} \cdot \overrightarrow{t_1} + \overrightarrow{H_2} \cdot \overrightarrow{t_2} = K$$

5.5 Frekvenčna odvisnost dielektrične funkcije

V snovi imamo enačbo

$$\overrightarrow{P}(t) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\overrightarrow{E}(t)$$

Parameter ε je lahko odvisen od časa, še pomembnejša pa je odvisnost od frekvence spreminjanja električnega polja: $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. V optiki se pogosto pojavi tudi $\varepsilon = n^2(\omega)$. V tem primeru je $\varepsilon(\omega)$ kompleksna količina, kjer $\mathfrak{Re}(\omega)$ opisuje odboj in $\mathfrak{Im}$ opisuje absorpcijo.

5.6 Kramers-Kronigove relacije

Realen in imaginarni del dielektrične funkcije povezuje enačba:

$$\mathfrak{Re}\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{\omega' \mathfrak{Im}\varepsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}$$

In obratno:

$$\mathfrak{Im}\varepsilon(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{\mathfrak{Re}\varepsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} \, \mathrm{d}\omega'$$

Pri tem se težavam z resonančno lego izognemo tako, da definiramo

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{g(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \, \mathrm{d}\omega' = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega - \varepsilon} \frac{g(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \, \mathrm{d}\omega' + \int_{\omega + \varepsilon}^\infty \frac{g(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \, \mathrm{d}\omega' \right]$$

5.7 Modeli dielektrične funkcije

5.7.1 Gibalna enačba za vezan naboj

V dielektriku imamo vezan naboj, ki se ne more prosto gibati. Obravnavamo ga klasično, torej z Newtonovim zakonom:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r} + e\overrightarrow{E}(t) - m\gamma\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}$$

Prvi člen opisuje sinusno nihanje. Drugi člen opisuje vzbujanje tega nihanja. Tretji člen opisuje dušenje zaradi viskoznosti ali sipanja v kristalih. Da analiziramo odvisnost od frekvence, uporabimo Fourierovo transformacijo:

$$\overrightarrow{r}(t) = \int \overrightarrow{r}(\omega)e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}\omega$$

$$-m\omega^2\overrightarrow{r}(\omega) = im\gamma\omega\overrightarrow{r}\omega - m\omega_0^2\overrightarrow{r}(\omega) + e\overrightarrow{E}(\omega)$$

Vidimo, da smo se znabili odvodov in da lahko zapišemo:

$$\overrightarrow{r}(\omega) = \frac{e}{m}\frac{\overrightarrow{E}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

$$\overrightarrow{P}(\omega) = n\,e\,\overrightarrow{r}(\omega)$$

Tu n pomeni volumsko števílsko gostoto. Ker je $\overrightarrow{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\overrightarrow{E}(\omega)$, dobimo model za $\varepsilon(\omega)$ kot:

$$\varepsilon_0(\varepsilon(\omega) - 1) = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

To je splošen model, vendar v praksi pogosto ni popolnoma ustrezen: v realnih snoveh imamo lahko več virov vzbujanja ali disipacije.

5.7.2 Debyjeva relaksacija

Pri nizkih frekvencah vzbujanja zanemarimo člen ω^2:

$$\overrightarrow{P}(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\overrightarrow{E}(\omega)}{\omega_0^2 - i\gamma\omega}$$

Debyjevo relaksacijo vidimo pri relaksaciji dipolnega momenta v molekulah za $\omega \lesssim 10^7\,\mathrm{s}^{-1}$.

5.7.3 Lorentzova relaksacija

Obdržimo vse člene in izrazimo $\varepsilon(\omega)$:

$$\varepsilon(\omega) - 1 = \frac{(\varepsilon(\omega = 0) - 1)\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma m}$$

Pomembna je npr. pri obravnavi nihanja molekul, pri frekvencah $\omega \sim 10^{12} - 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$

5.7.4 Plazemska relaksacija

Pri visokih frekvencah prevlada člen ω^2:

$$\overrightarrow{P}(\omega) = -\frac{e^2 n}{m} \frac{\overrightarrow{E}(\omega)}{\omega^2}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Uporabili smo plazemsko frekvenco ω_p^2, ki je definirana kot

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n}{m\varepsilon_0}$$

To relaksacijo uporabljamo pri frekvencah $\omega \gtrsim 10^{16}$.

Primer: Dielektrična funkcija vode. Uporablja se za Debyjev model pri nizkih frekvencah in Lorentzov model pri visokih.

$$\varepsilon(i\omega) = 1 + \sum_{k=1}^{1} \frac{d_k}{1 + \omega\tau_k} + \sum_{k=1}^{11} \frac{f_k}{\omega_k^2 + g_k\omega + \omega^2}$$

kjer so $d_k, \tau_k, f_k, \omega_k, g_k$ fenomenološke konstante, ki jih moramo izmeriti. Opazimo, da gre za en Debyjev člem in enajst Lorentzovih. Ko izmerimo potrebne konstante, lahko molekule vode vzbujamo z eno od lastnih frekvenc ω_k, da jo segrejemo. To je osnovni princip delovanje mikrovalovne pečice.

6 Elektromagnetno valovanje

6.1 Valovna enačba v vakuumu

Predpostavimo, da v prostoru ni izvorov, torej je $\overrightarrow{j} = 0$ in $\rho = 0$. Za take pogoje imajo Maxwellove enačbe obliko

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Vzemimo rotor tretje enačbe:

$$\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \overrightarrow{B}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Podobno storimo tuid za $\vec{B}$ in dobimo valovni enačbi za $\vec{E}$ in $\vec{B}$:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Gre za valovni enačbi s $c = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$. Opomnimo, da valovne enačbe ne rešijo samo ravni valovi ali sinusna nihanja - valovno enačbo reši marsikaj, je pa rešitev močno odvisna od lastnosti problema. Če gledamo le rešitev pri eni frekvenci ω in v neskončnem praznem prostoru, je naša rešitev dejansko ravni val, torej:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} = \vec{E_0}\, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} = \vec{B_0}\, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

V praznem prostoru sta $\vec{E_0}$ in $\vec{B_0}$ konstanti. Velja tudi zveza med ω in $\vec{k}$:

$$\omega = kc$$

6.2 Geometrija EM valovanja

Splošna rešitev valovne enačbe v praznem prostoru je

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathfrak{Re}\left[\sum_k \vec{E_k}\, e^{-(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)}\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mathfrak{Re}\left[\sum_k \vec{B_k}\, e^{-(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)}\right]$$

Opomba. Zahteve, da gre le za realni del, pogosto ne pišemo. Da električno polje ne more biti imaginarno, je samoumevno.

Ker je prostor po predpostavki brez izvorov, lahko o obeh valovanjih na podlagi prvih treh Maxwellovih enačb rečemo sledeče:

$$0 = \nabla \cdot \vec{E} = \sum_k i\,\vec{k} \cdot \vec{E_k}\, e^{-(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)}$$

Veljati mora torej $\vec{k} \cdot \vec{E_k} = 0$ ali $\vec{k} \perp \vec{E_k}$.

$$0 = \nabla \cdot \vec{B} = \sum_k i\,\vec{k} \cdot \vec{B_k}\, e^{-(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)}$$

Veljati mora torej $\vec{k} \cdot \vec{B_k} = 0$ ali $\vec{k} \perp \vec{B_k}$. Vektorja $\vec{E}$ in $\vec{B}$ morata biti torej nujno pravokotna na isti vektor. Da sta pravokotna tudi med sabo, dobimo iz tretje Maxwellove enačbe. Ko izračunamo rotor, je rezultat

$$\vec{k} \times \vec{E_k} = \omega \vec{B_k}$$

7 Hamiltonske metode v teoriji polja

Teorija polja se pogosto obravnava v okviru Hamiltonovega oziroma Euler-Lagrangeva formalizma. Za to imamo dva razloga. Prvi razlog je, da s Hamiltonovim formalizmom dobimo sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda, ki so običajno bolj obvladljivi kot posamične enačbe 2. reda. Drugi razlog je, da nam to pogosto pride prav v kvantni mehaniki.

7.1 Osnove Hamiltonskih metod v klasični fiziki

7.1.1 Lagrangeve enačbe

Obravnavamo gibanje delca po tiru $\vec{r}(t)$ in s hitrostjo $\dot{\vec{r}}(t)$. Definiramo akcijo

$$S = \int L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\,\mathrm{d}t$$

in z variacijo akcije $\delta S = 0$ dobimo Euler-Lagrangeve enačbe:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

Za en delec definiramo

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

Če to vstavimo v Euler-Lagrangevo enačbo, dobimo ravno Newtonov zakon.

7.1.2 Hamiltonove enačbe

Uvedemo impulz

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}$$

in Hamiltonovo funkcijo

$$H(\vec{r}(t), \vec{p}(t), t) = \dot{\vec{r}}\vec{p} - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Za en delec to pomeni $H = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r})$, kar je ravno energija delca. Tako dobimo Hamiltonove enačbe:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}\ , \quad \dot{\vec{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$$

7.2 Lagrangeva funkcija nabitega delca v polju

Lagrangeva funkcija mora izgledati tako, da iz nje dobimo 2. Newtonov zakon. začnemo z Lorentzovo silo:

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$

Zanima nas, kakšna Lagrangeva funkcija da tak rezultat. Vemo:

$$e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} = -e\nabla\varphi - e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + e(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}))$$

Uporabimo pravilo za dvojni vektorski produkt:

$$= -e\nabla\varphi - e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + e\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - e(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

Prepoznamo totalni odvod:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

Sledi:

$$m\dot{\vec{v}} = -e\nabla\varphi - e\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

Ali drugače:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} + m\vec{v}) = -e\nabla(\varphi + \vec{v}\cdot\vec{A})$$

To nas že zelo spominja na Euler-Lagrangevo enačbo. Da se stvar izide, mora biti Lagrangeva funkcija enaka

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\varphi + e\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}$$

7.3 Hamiltonova funkcija nabitega delca v polju

Izpeljemo jo tako kot v klasični mehaniki:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \dot{\vec{r}} - L$$

7.4 Schwartzschildova invarianta

Zanima nas Lagrangeva funkcija za zvezno porazdelitev nabitih delcev, ki se nahajajo v zunanjem polju. Za en delec:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e\varphi + e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$$

Za zvezno porazdeljen naboj:

$$L_{DP} = -\int \rho(\vec{r})\varphi \, \mathrm{d}^3\vec{r} + \int \vec{j} \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}^3\vec{r} =: \int \mathcal{L}_{DP} \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Uvedemo gostoto Lagrangeve funkcije:

$$\mathcal{L}_{DP} = -\rho(\vec{r}, t)\varphi(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Tej količini pravimo tudi Schwartzschildova invarianta.

7.5 Lagrangeva funkcija EM polja

Zanima nas Lagrangeva funkcija nabitih premikajočih se delcev kot izvorov EM polja, ki pa se hkrati nahajajo v zunanjem EM polju.

$$L = \int \mathcal{L} \, \mathrm{d}^3\vec{r} = \int \mathcal{L}_P \, \mathrm{d}^3\vec{r} + \int \mathcal{L}_{DP} \, \mathrm{d}^3\vec{r}$$

Prvi integral predstavlja lastno polje, drugi pa sklopitev z zunanjim poljem. Da dobimo $\mathcal{L}_P(\vec{r}, t)$, malo ugibamo:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Celotna gostota Lagrangeve funkcije pa je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 - \rho(\vec{r}, t)\varphi(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

7.6 Euler-Lagrangeve in Riemann-Lorentzove enačbe

Akcijo elektromagnetnega polja smo zapisali kot

$$S = \int \mathcal{L}\left(\varphi(\overrightarrow{r, t}), \vec{A}(\vec{r}, t), t\right) \mathrm{d}^3\vec{r} \, \mathrm{d}t$$

Kar da Euler-Lagrangeve enačbe:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}\right) + \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial A_i}{\partial t})}\right) + \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla A_i)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = 0$$

Posledica so Riemann-Lorentzove enačbe:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

Ti enačbi sta ekvivalentni Maxwellovim enačbam na nivoju potencialov, vendar ne opisujeta sklopitve med električnim in magnetnim poljem.

8 Posebna teorija relativnosti

8.1 Elektromagnetna polja in Lorentzova transformacija

Recimo, da imamo dva sistema (S in S'), pri čemer se S' giblje s hitrostjo blizu svetlobe v smeri x'. Pri prehodu med koordinatnima sistemoma opravimo Lorentzovo transformacijo:

$$x' = \gamma(x + \beta ct)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(ct - \beta x)$$
$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Če Lorentzova transformacija velja, tem količinam pravimo manifestno Lorentzovo invariantne (za razliko od npr. pospeškov). Zanima nas, kako se transformirata $\overrightarrow{E}$ in $\overrightarrow{B}$. V kartezičnih koordinatah vzamemo 3. Maxwellovo enačbo (po komponentah):

$$\frac{\partial E'_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E'_{z'}}{\partial z'} = 0$$

$$\frac{\partial E'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'} = \frac{\partial B'_{x'}}{\partial t'}$$
$$\frac{\partial E'_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial E'_{z'}}{\partial x'} = \frac{\partial B'_{y'}}{\partial t'}$$
$$\frac{\partial E'_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial E'_{x'}}{\partial y'} = \frac{\partial B'_{z'}}{\partial t'}$$

Uporabimo transformacijo:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma(\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial ct})$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$
$$\frac{\partial}{\partial ct'} = \gamma(\frac{\partial}{\partial ct} - \beta\frac{\partial}{\partial x})$$

Dobimo:

$$E_x = E'_{x'}$$
$$E_y = \gamma\left(E'_{y'} + vB'_{z'}\right)$$
$$E_z = \gamma\left(E'_{z'} - vB'_{z'}\right)$$
$$B_x = B'_{x'}$$
$$B_y = \gamma\left(B'_{y'} - \frac{v}{c^2}E'_{z'}\right)$$
$$B_z = \gamma\left(B'_{z'} + \frac{v}{c^2}E'_{z'}\right)$$

Posledica: ko skalarno množimo $\overrightarrow{E}$ in $\overrightarrow{B}$, dobimo

$$\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B} = E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z =$$

$$= E'_xB'_x + \gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)E'_yB'_y + \gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)E'_zB'_z$$

Po definiciji γ vemo, da je

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

Kar pomeni, da se kot med $\overrightarrow{E}$ in $\overrightarrow{B}$ pri transformaciji ohranja.

Druga posledica je

$$E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2$$

kar pomeni, da ima v praznem prostoru rešitev Maxwellovih enačb enako obliko, torej obliko ravnega vala, velikosti posameznih polj pa sta odvisni od izbire sistema.

8.2 Prostor Minkovskega

Tteorijo relativnosti se formulira s četverci, ki pri posebni teoriji relativnosti sledijo metriki Minkovskega, pri splošni teoriji relativnosti pa metriki, odvisni od porazdelitve mase. Četverec dogodka označimo kot

$$x_\mu = (x, y, z, ct)$$

Običajno se dogovorimo, da pri indeksiranju četvercev uporabljamo grške indekse ($\mu = 1, 2, 3, 4$), pri indeksiranju tridimenzionalnih vektorjev pa latinske $i = 1, 2, 3$. Definiramo tudi kontravariantni vektor

$$x^\mu = (x, y, z, -ct)$$

Če je indeks spodaj, gre za kovariantni vektor (opisan prej), če je zgoraj, pa za kontravariantni vektor. Skalarni produkt izračunamo tako, da množimo kovariantni in kontravariantni vektor. Pri Lorentzovi transformaciji se tak skalarni produkt ohranja.

$$x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu$$

8.3 Četverec gostote toka

8.3.1 Gostota naboja in Lorentzova transformacija

Naboj mora biti invarianten na Lorentzovo transformacijo, sicer bi ga pridobivali in izgubljali s prehajanjem med sistemi.

$$e = \int_V \rho \, \mathrm{d}^3\overrightarrow{r} = \int_{V'} \rho' \, \mathrm{d}^3\overrightarrow{r}' = \int \rho' \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \, \mathrm{d}z'$$

Od prej imamo $\mathrm{d}y' = \mathrm{d}y$ in $\mathrm{d}z' = \mathrm{d}z$, transformira pa se $\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}x' = \gamma \, \mathrm{d}x$. Iz naše zahteve, da se naboj ohranja, sledi

$$\rho' = \frac{\rho}{\gamma}$$

Kar pomeni, da bomo ρ/γ lahko obravnavali kot invariantno količino.

8.3.2 Četverec gostote toka

Spomnimo se, da je v treh dimanzijah

$$\overrightarrow{j} = \rho \overrightarrow{v}$$

V štirih dimenzijah je enako, torej

$$j_\mu = \frac{\rho}{\gamma} u_\mu = \frac{\rho}{\gamma} (\gamma \overrightarrow{v}, \gamma c)$$

Izrazimo kovariantni in kontravariantni četverec:

$$j_\mu = (\overrightarrow{j}, \rho c), \quad j^\mu = (\overrightarrow{j}, -\rho c)$$

Ker je j_μ udeven kot "pravi" četverec, Lorentzova transformacija ohranja skalarni produkt $j^\mu j_\mu$.

$$j'^\mu j'_\mu = j^\mu j_\mu = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} - c^2 \rho^2$$

8.4 Četverec potenciala

Spomnimo se Riemann-Lorentzovih enačb za $\vec{A}$ in $\vec{\varphi}$:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}$$

mimogrede uvedemo D'Alembertov operator: $\Box^2 = \partial_\mu\partial^\mu$[1], kjer je

$$\partial_\mu = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial(ct)}\right)$$

Enačbi lahko tedaj zapišemo kot

$$\Box\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

Ker ρ in $\vec{j}$ tvorita četverec, tudi φ in $\vec{A}$ tvorita četverec.

$$A_\mu = \left(\vec{A}, \frac{\varphi}{c}\right), \quad A^\mu = \left(\vec{A}, -\frac{\varphi}{c}\right)$$

Tako prepišemo Riemann-Lorentzovi enačbi v manifestno Lorentzovo invariantni obliki kot

$$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 j_\mu$$

To je najbolj kompakten (ne pa najbolj poveden) zapis Maxwellovih enačb. Spet velja Lorentzova transformacija

$$A'_x = \gamma(A_x - \beta\frac{\varphi}{c})$$

$$A'_y = A_y$$

$$A'_z = A_z$$

$$\frac{\varphi'}{c} = \gamma\left(\frac{\varphi}{c} - \beta A_x\right)$$

$A^\mu A_\mu$ pa je invarianta.

$$A^\mu A_\mu = A^2 - \frac{\varphi^2}{c^2}$$

Spet je oblika rešitve Riemann-Lorentzovih enačb neodvisna od izbire sistema, velikost posameznih komponent pa se pri transformacijah lahko spremeni.

8.4.1 Schwartzschildova invarianta

V nerelativistični dinamiki smo definirali Swartzschildovo invarianto kot

$$\mathcal{L}_{DP} = -\rho(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t) + \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{A}(\vec{r},t)$$

kjer sta φ in $\vec{A}$ zunanja potenciala. Celotna Lagrangeova funkcija je bila

$$\int \left(-\rho\varphi + \vec{j}\cdot\vec{A}\right) \mathrm{d}^3\vec{r}\,\mathrm{d}t$$

In na podlagi tega smo zapisali akcijo:

$$S = \int \left(-\rho\varphi + \vec{j}\cdot\vec{A}\right) \mathrm{d}^3\vec{r}\,\mathrm{d}t$$

To pa je ravno enako

$$S = \int A_\mu j^\mu\,\mathrm{d}^4x_\mu = \int A^\mu j_\mu\,\mathrm{d}^4x_\mu$$

[1]Pogosto se piše tudi samo $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$

8.5 Kovariantni tenzor EM polja

Transformirali smo že vektorja $\overrightarrow{E}$ in $\overrightarrow{B}$, vendar smo dobili šest enačb, česar ne moremo spraviti v četverec. Lahko pa definiramo tenzor, ki bo manifestno invarianten na Lorentzovo transformacijo. Spomnimo se, da originalne transformacije niso bile Lorentzove. Začnemo z enačbama

$$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{E} = \nabla\varphi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

Tako potencial kot odvod smo izrazili s četvercem.

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial(-ct)}$$

Tako φ kot A_x sta komponenti četverca potenciala, odvoda po x in t pa sta komponenti ∂^μ. (Opomba: Dodati moramo še predfaktorje $1/c$, kar pa lahko naredimo). Tako dobimo alternativen zapis:

$$E_x = -c\frac{\partial A_4}{\partial x^1} + c\frac{\partial A_1}{\partial x^4}$$

Podobno lahko naredimo z B_x:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}$$

Zapis nas spominja na nekakšem štiridimenzionalen rotor. Ni dejanski rotor, saj je vektorski produkt definiran le v treh dimenzijah, vendar lahko poskusimo svtar zapisati na ta način. V treh dimenzijah:

$$(\nabla \times \overrightarrow{c})_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial c_j}{\partial x_k},$$

kjer je ε_{ijk} Levi-Civita tenzor. Na podlagi tega razmisleka uvedemo tenzor elektromagnetnega polja, ki opisuje to transformacijo.

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Če zamenjamo μ in ν, dobimo ravno obraten rezultat, torej je tenzor antisimetričen.

$$B_x = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = F_{23}$$

$$E_x = -c\left(\frac{\partial A_4}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^4}\right) = -cF_{14}$$

Zapišimo ga po komponentah.

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z/c \\ E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0 \end{bmatrix}$$

Opomba. Prvič smo električno in magnetno polje združili v eno količino. Elektromagnetno polje torej obravnavamo kot eno samo polje, ki pa je tenzor. Uvedemo lahko tudi kontravariantni tenzor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & E_z/c \\ -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c & 0 \end{bmatrix}$$

8.5.1 Invariante EM tenzorja

$$\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)$$

To je ravno energija polja, ki je skalarna invarianta. Druga invarianta je determinanta matrike, ki je enaka

$$\det F_{\mu\nu} = \det F^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{E})^2$$

8.6 Kovariantna akcija

Če uvedemo relativistično akcijo, bomo lahko iz nje dobili Lagrangeovo in Hamiltonovo funkcijo, ki ju bomo potrebovali v kvantni mehaniki. Zapisali smo že

$$S = \int \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2\mu_0}B^2 - \rho\varphi + \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{A}\right) \mathrm{d}^3\overrightarrow{r}\,\mathrm{d}t$$

Vse v integralu lahko zapišemo kot invarianti:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2\mu_0}B^2 = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{A} - \varphi\rho = j_\mu A^\mu$$

$$\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\,\mathrm{d}^4 x_\lambda$$

To vstavimo v integral.

$$S = \frac{1}{c}\int\left(-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu\right)\mathrm{d}^4 x_\lambda$$

To je kovariantni zapis akcije elektromagnetnega polja, ki je osnova za kvantizacijo v kvantni elektrodinamiki.