Weak Edge k-Metric Dimension

Lovro Verk in Matevž Kusterle

December 2023

1 Problem

Za več vrst različnih grafov sva morala ugotoviti šibko k-metrično dimenzijo na povezavah in κ'. Iz dobljenih rezultatov sva poskusila razbrati formule za dimenzije posameznih vrst grafov. Poiskala sva grafe, za katere se šibka k-metrična dimenzija na povezavah razlikuje od navadne šibke k-metrične dimenzije. Predenj pogledamo rezultate, moramo natančneje definirati, kaj iščemo.

2 Definicije

Definicija 1 *Naj bo $S \subseteq V(G)$ in $a, b \in V(G) \cup E(G)$. Definiramo $\Delta_S(a, b)$ kot vsoto razlik razdalj od a in b do vsakega vozljišča S. Torej je*

$$\Delta_S(a, b) = \sum_{s \in S} |d(s, a) - d(s, b)|$$

.

Definicija 2 ***Šibka k-metrična dimenzija na povezavah*** *grafa G $wedim_k(G)$, je velikost/moč/kardinalno število najmanjše podmnožice S grafa G, tako da za vsak par povezav $e, f \in E(G)$ velja $\Delta_S(e, f) \geq k$.*

Definicija 3 *Naj bo S takšna podmnožica $V(G)$, da zanjo velja: $\forall x, y \in V(G)$ obstaja vsaj k različnih vozlišč $v_1, v_2, \ldots, v_k \in S$, tako da $d_G(x, v_i) \neq d_G(y, v_i)\ \forall i = 1, \ldots, k$. Potem je S* ***k-razrešitvena množica*** *za graf G.*

Definicija 4 *$\kappa'(G)$ je največje naravno število k, za katerega graf G vsebuje k-razrešitveno množico S.*

Definicija 5 ***Šibka k-metrična dimenzija*** *grafa G $wdim_k(G)$, je velikost/moč/kardinalno število najmanjše podmnožice S grafa G, tako da za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ velja $\Delta_S(u, v) \geq k$.*

3 Potek dela

Analizirati sva morala sledeče skupine grafov; poti, cikle, polne grafe, dvodelne polne grafe in hiperkocke. V ta nabor sva dodala tudi nekaj drugih zanimivih vrst grafov: zvezdne grafe, gem graf, dart graf ter par dreves. Med le temi sva testiranje osredotočila na Fibonaccijeva drevesa. Delo je poteklo primarno preko spletne strani CoCalc, kjer sva uporabljala SageMath, saj omogoča enostavnješe delo z grafi. Pokazala pa sva tudi, kako bi grafe definirala sama, če ti ne bi bili podani.

4 Kratek opis algoritmov

- Iskanje κ' je potekalo preko kode, ki je za vsak par vozlišč pogledala do koliko vozlišč v grafu se razdalji od vozlišč v paru razlikujeta. Nato sva izmed vseh parov izbrala tistega, ki se je razlikoval za najmanj in tako določila κ'. Ker nas κ' ne sprašuje po najmanjši množici S, ki zadošča definiciji, smo za S zbrali kar vsa vozlišča danega grafa ($S = V(G)$).

- Šibko k-metrično dimenzijo na povezavah in navadno šibko k-metrično dimenzijo sva zračunala s pomočjo dveh celoštevilskih linearnih programov, kjer smo pri iskanju šibke k-metrične dimenzije na povezavah imeli omejitve vezane na razdalje do povezav, pri drugem pa do vozlišč.

- definirala sva tudi 2 pomožni funkciji za dimenziji povezav in vozlišč s katerimi sva zmanjšala količino dela.

Kot je navedeno v rezultatih, pri nekaterih grafih nisva prišla do rezultata, saj je problem celoštevilskega linearnega programiranja splošno znan kot NP-težek in njegov čas reševanja se lahko z velikostjo vhoda eksponentno poveča. To pomeni, da so zaradi kompleksnosti ILP primerni za majhne in srednje velike probleme. Za specifične primere problema šibke k-metrične dimenzije na vozliščih je čas reševanja odvisen. Priporočljivo je testiranje algoritma na grafih različnih velikosti in struktur, da se pridobi občutek za njegovo učinkovitost in razširljivost. Poleg tega izbira učinkovitega reševalnika ILP in razmislek o optimizacijah, ki so specifične za problem, lahko vplivata na čas reševanja. Če se ukvarjamo z velikimi grafi ali če ugotovimo, da je čas reševanja predolg, lahko raziščemo hevristične ali približane algoritme, ki zagotavljajo hitrejše rešitve, čeprav ti ne zagotavljajo optimalnosti.

5 Rezultati

5.1 κ'

Rezultati pri posameznih skupinah so bili sledeči:

- Poti: za poti dolžine 3, 5 in 10 je κ' znašal 2, 4 ter 9. Rezultati nakazujejo, da je formula pri poteh $\kappa'(P_n) = n - 1$
- Cikli: κ' za cikle dolžine 5, 6, 11 in 12 je 4, 4, 10, 10. $\kappa'(C_n) = 2 * \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$
- Polni grafi: za polna grafa velikosti 5 in 10 je bil v obeh primerih rezultat 2. To je pričakovan rezultat za vse polne grafe, ki imajo vsaj 2 vozlišča, saj imata poljubni vozlišči v polnem grafu enako razdaljo do vseh vozlišč danega grafa, razen do samih sebe.
- Polni dvodelni grafi: podoben razmislek sledi tudi pri dvodelnih polnih grafov. Če izberemo 2 nepovezani vozlišči tega grafa, imata obe vozlišči iste sosede (posledično imata do teh isto razdaljo) in do vseh ostalih vozlišč (razen vsako do sebe) imata razdaljo 2. Tako pričakujemo rezultat $\kappa'(B) = 2$, kjer je B poljuben dvodelni graf. Testiranje je bilo izvedeno na dvodelnih grafih velikosti (3,3), (5,5) in (7,11), pri čemer sva dobila pričakovane rezultate.
- Hiperkocke: κ' znaša za hiperkocke dimenzij 1, 2, 3, 4, 5 in 6: 2, 2, 4, 8, 16 in 32. Če iz zbranih podatkov poskusimo uganiti formulo, dobimo $\kappa'(H_n) = 2^{(n-1)} \; \forall n > 1$
- Zvezdni grafi: Prav tako je $\kappa'(S_n) = 2$, kakor pri polnih dvodelnih grafih, saj so tudi ti grafi dvodelni polni
- Gem graf: rezultat pri tem primeru je bil 3
- Dart graf: pri tem grafu, je bil rezultat 2
- Fibonaccijeva drevesa: za vsa testirana Fibonaccijeva drevesa je bil $\kappa'(F_n) = 3$

Koda je potrebovala občutno dlje le za zadnje testirano Fibonaccijevo drevo (F_{10}).

5.2 Šibki k-metrični dimenziji

- Poti: za poti dolžine 3, 5 in 10 se šibka k-metrična dimenzija na povezavah ne razlikuje od navadne k-metrične dimenzije za $k = 1, 2$. Iz testiranja sklepamo da je formula za k-metrično dimenzijo na povezavah enaka: $wedim_k(P_n) = k$, navadna pa $wdim_k(P_n) = 2$, $\forall k > 1$.

- Cikli: ugotovila sva, da se za lihe cikle dimenziji ne ujemata za noben k, za cikle sode stopnje pa pride do ujemanja pri $k = 1, 2$. Ponovno velja formula $wdim_k(C_n) = 2$, $\forall k > 1$ in $wedim_k(C_n) = k$ za cikle sode stopnje, ter $wedim_k(C_n) = k + 1$ za cikle lihe stopnje.

- Polni grafi: pri polnih grafih nisma našla nobenega ujemanja. Odstopanje je bilo precej veliko.

- Polni dvodelni grafi: pri polnih dvodelnih grafih, je bilo ujemanje med dimezijama popolno.

- Hiperkocke: pri hiperkockah zgleda, kakor da so formule enake kot pri ciklih sode stopnje: $wdim_k(H_n) = 2$, $\forall k > 1$ in $wedim_k(H_n) = k$

- Zvezdni grafi: pri vseh testiranih zvezdnih grafih sta se dimenziji ujemali (in sta enaki k)

- Gem graf in dart graf: pri obeh grafih sta se dimenziji razlikovali za vsak k

- Fibonaccijeva drevesa: pri večjih Fibonaccijevih drevesih je linearni program za iskanje šibke k-metrične dimenzije na povezavah deloval prepočasi da bi prišla do rezultata. Lahko pa sklepamo na rezultat iz testiranja na manjših Fibonaccijevih drevesih, kjer smo ponovno opazili, da se dimenziji ujemata za $k = 1, 2$ in razlikujeta za $k = 3$

6 Literatura

I. Peterin, J. Sedlar, R. Škrekovski, I. G. Yero, Resolving vertices of graphs with differences, (2023) arXiv preprint arXiv:2309.00922.