



**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,  
INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ**

KATEDRA INFORMATYKI STOSOWANEJ

*Sprawozdanie z modelowania systemu ofiara-drapieżnik*

Autor:

*Mateusz Wydmański, Michał Kałduś, Rafał Kwaśnik*

Kierunek studiów:

*Informatyka*

Opiekun pracy:

*dr inż. Jakub Porzycki*

Kraków, 2016



## Spis treści

<b>1. Wprowadzenie .....</b>	<b>3</b>
<b>2. Analiza modelu z zachowaniem stadnym .....</b>	<b>7</b>
2.1. Model matematyczny .....	7
2.2. Stabilność .....	7
2.3. Bifurkacje .....	8
2.4. Symulacje .....	9
<b>3. Automaty komórkowe.....</b>	<b>11</b>
3.1. Zagadnienie automatów.....	11
3.2. Implementacja automatu .....	12
<b>4. Równania Lotki-Volterry dla konkurencji .....</b>	<b>13</b>
4.1. Model matematyczny .....	13
4.2. Właściwości modelu.....	14
4.3. Symulacje dla dodatnich współczynników .....	15

# 1. Wprowadzenie

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

gdzie

$x$  – liczebność populacji ofiary

$y$  – liczebność populacji drapieżnika

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$  – przyrost populacji w jednostce czasu

$t$  – czas

$\alpha, \beta, \delta, \gamma$  – parametry opisujące interakcje między populacjami i właściwości populacji

Modele ofiar drapieżników są jednymi z najważniejszych elementów składających się na bio- i ekosystemy. Gatunki konkurują, ewoluują, rozprzestrzeniają się dla bołaczki poszukiwania pożywienia i możliwości przedłużenia linii garunku. Konkurencja może przyjmować różne formy: drapieżnik-ofiara, wirus-system immunologiczny, pasożyt-nosiciel, surowiec-konsument, itd.

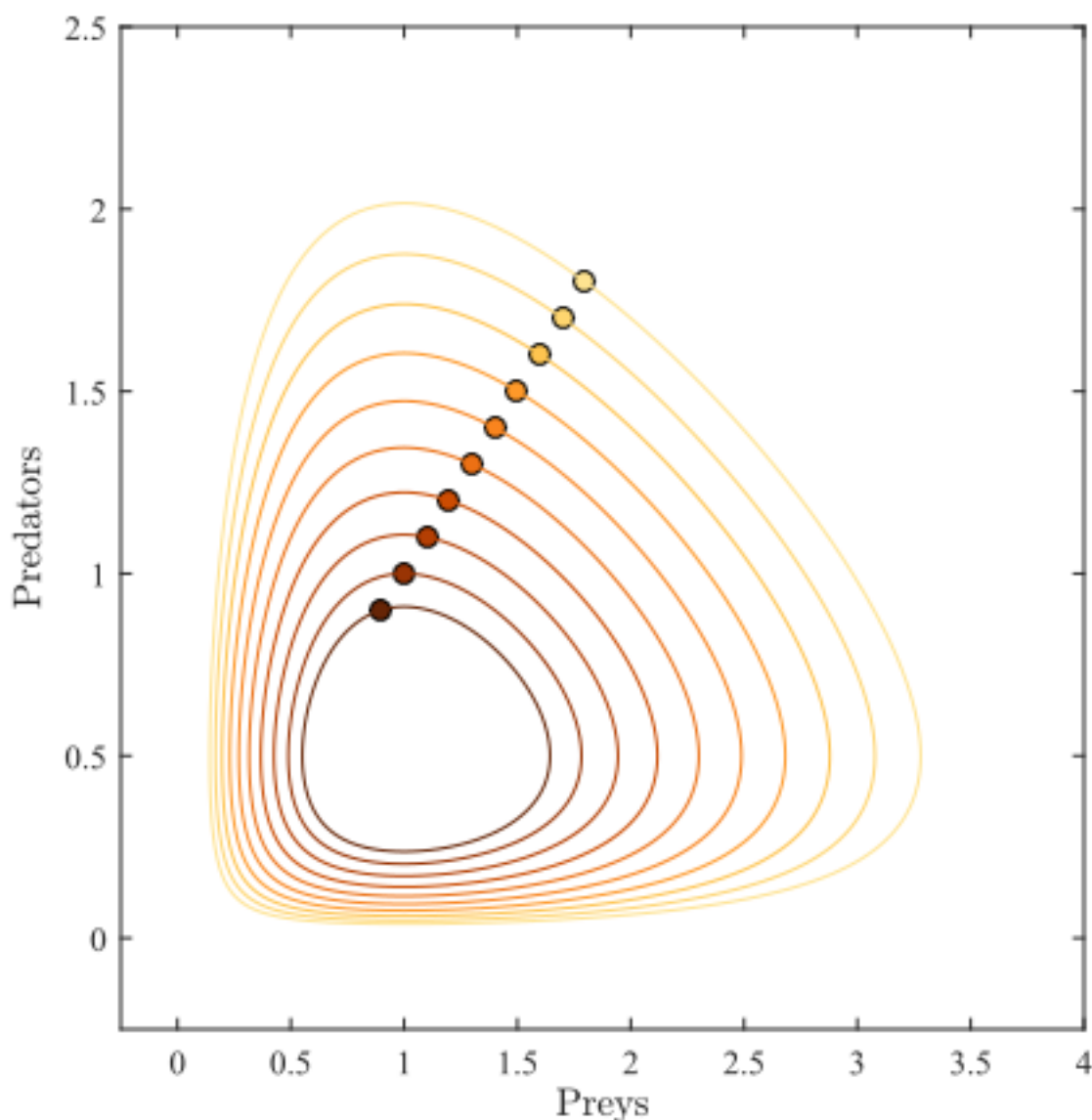
W 1926 słynny Włoski matematyk Vito Volterra zaproponował prosty model opisujący interakcje między ofiarą i drapieżnikiem. Bazuje na kilku założeniach dotyczących środowiska, w którym koegzystują populacje ofiar i drapieżników, to jest:

- Ofiara ma zawsze wystarczająco dużo pożywienia.
- Zaopatrzenie w pożywienie drapieżników zależy wyłącznie od wielkości populacji ofiar.
- Tempo wzrostu populacji jest proporcjonalne do jej wielkości.
- Środowisko nie podlega zmianom na korzyść którejkolwiek z populacji, a ewolucja genetyczna jest niekolekwentna.
- Drapieżniki mają ograniczony apetyt.

Równania Lotki-Volterra, to para równań różniczkowych I rzędu, nieliniowych.

Analiza równań mówi nam, że zmiana ilościowa populacji ofiar jest równa jej tempu wzrostu minus tempo z jaką populacja drapieżników eliminuje ofiary ze środowiska. Z drugiego zaś biegunu, tempo wzrostu populacji drapieżników jest równoważne tempu wzrostu zasilanym przez dostępność pożywienia minus tempo ubytku populacji na skutek śmierci naturalnej.

Portret fazowy modelu Lotki-Volterra daje interesujące rezultaty.



Powyższy diagram pokazuje fluktuacje w ilości populacji ofiar i drapieżników. Koła zaznaczone na brzegach zamkniętych powierzchni pokazują warunki początkowe (dla stałych parametrów), gdzie ilości na osiach są rzędu  $10^3$ . W tym przypadku punktem stałym (populacje obu gatunków są ustalone i nie podlegają zmianom w czasie) jest punkt  $(1; 0.5)$ .

W modelu wyraźnie widać, że okres dobrego rozwoju drapieżników przypada gdy populacja ofiar jest duża. Jednakże, poprzez nadmierny rozrost i stopniowe malenie pokładów pożywienia, populacja drapieżników maleje. Wówczas, ofiary nie są na przysłowiowym „celowniku” i mają warunki do rozwoju. Koło się zatoczyło i cykl powtarza się.

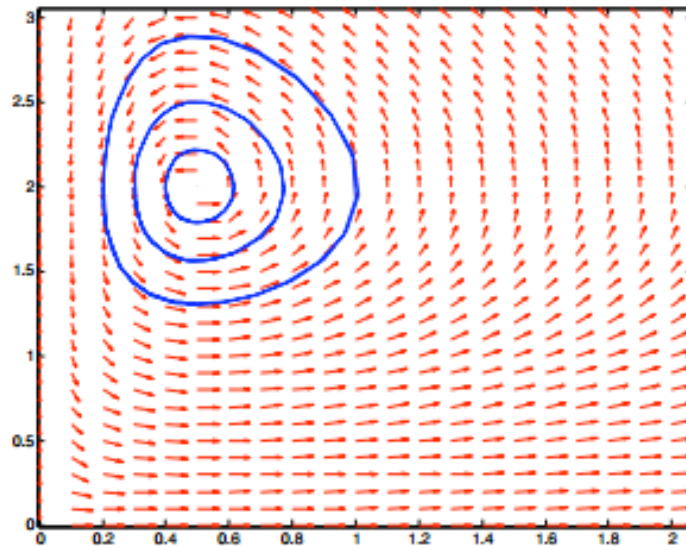
Dla podanego systemu istnieją dwa ekwilibria. Jedno, punkt  $(0; 0)$ , jest równoznaczne wymarciu obu populacji. Taki stan rzeczy będzie się miał niezależnie od upływającego czasu. Podobnie, drugie ekwilibrium, z obiema populacjami o dodatnich wartościach, jest zależne od początkowych parametrów określających właściwości populacji ofiar i drapieżnika.

Interesujące z biologicznego punktu widzenia jest stabilność układu dla drugiego ekwilibrium.

$$\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\gamma} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\gamma} \quad (1.1)$$

Linearyzacja modelu wokół interesującego punktu: wartości własne jakobianu dla modelu przy drugim ekwilibrium są czysto urojone. Ten krytyczny punkt jest bifurkacją Hopfa – przy niewielkiej zmianie stabilność systemu zmienia się i pojawiają się rozwiązania okresowe. Warto podkreślić, że I metoda Lapunowa nie rozstrzyga o stabilności punktu równowagi, jeżeli system zlinearyzowany jest jedynie stabilny. Mitkowski, 2006

Punkt ustalony jest eliptyczny i na podstawie teorii Kolmogorowa-Arnolda-Mosera (KAM), która daje odpowiedź na zachowanie w pobliżu punktów eliptycznych, populacje odchylone od punktu ustalonego będą podlegały oscylacjom z częstością  $\omega = \sqrt{\alpha\gamma}$ .



**Rys. 1.1.** Portret fazowy przedstawionego modelu. Widać oscylujące wokół ekwilibrium rozwiązania i nieograniczony wzrost jednej populacji przy wymarciu drugiej



## 2. Analiza modelu z zachowaniem stadnym

### 2.1. Model matematyczny

Model matematyczny opisujący zachowania ofiara-drapieżnik:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t} &= rX\left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{\alpha\sqrt{XY}}{1 + t_h\alpha\sqrt{X}} + d_x \nabla^2 X \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= sY^2 + \frac{c\alpha\sqrt{XY}}{1 + t_h\alpha\sqrt{X}} + d_y \nabla^2 Y\end{aligned}$$

gdzie

$X$  – liczebność populacji ofiary

$Y$  – liczebność populacji drapieżnika

$r$  – współczynnik przyrostu populacji ofiary

$K$  – zdolność pojemnościowa układu

$\alpha$  – efektywność poszukiwawcza populacji ofiar przez drapieżniki

$c$  – współczynnik żarłoczności drapieżników

$t_h$  – średni czas działania

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$  – współczynnik dyfuzji odpowiednich populacji

W powyższym modelu populacje poruszają się losowo - opisane poprzez model ruchów Browna. Zachowanie zostało uwzględnione w równaniach. Czas działania autor opracowania przyrównał do zera dla uproszczenia rozważań.  $\nabla$  jest operatorem Laplace'a w przestrzeni dwuwymiarowej  $R = (R_1, R_2)$  używanym dla wyrażenia ruchów populacji.

### 2.2. Stabilność

Interesuje nas stabilność tego systemu. Z biologicznego punktu widzenia jesteśmy zainteresowani w studiach zachowania koegzystujących populacji ofiar i drapieżnika. Niech punkt równowagi będzie postaci  $(x^*, y^*)$ , gdzie obie populacje mają dodatnie wartości i żadna nie wymarła. Okazuje się, że takie ekwilibrium istnieje.



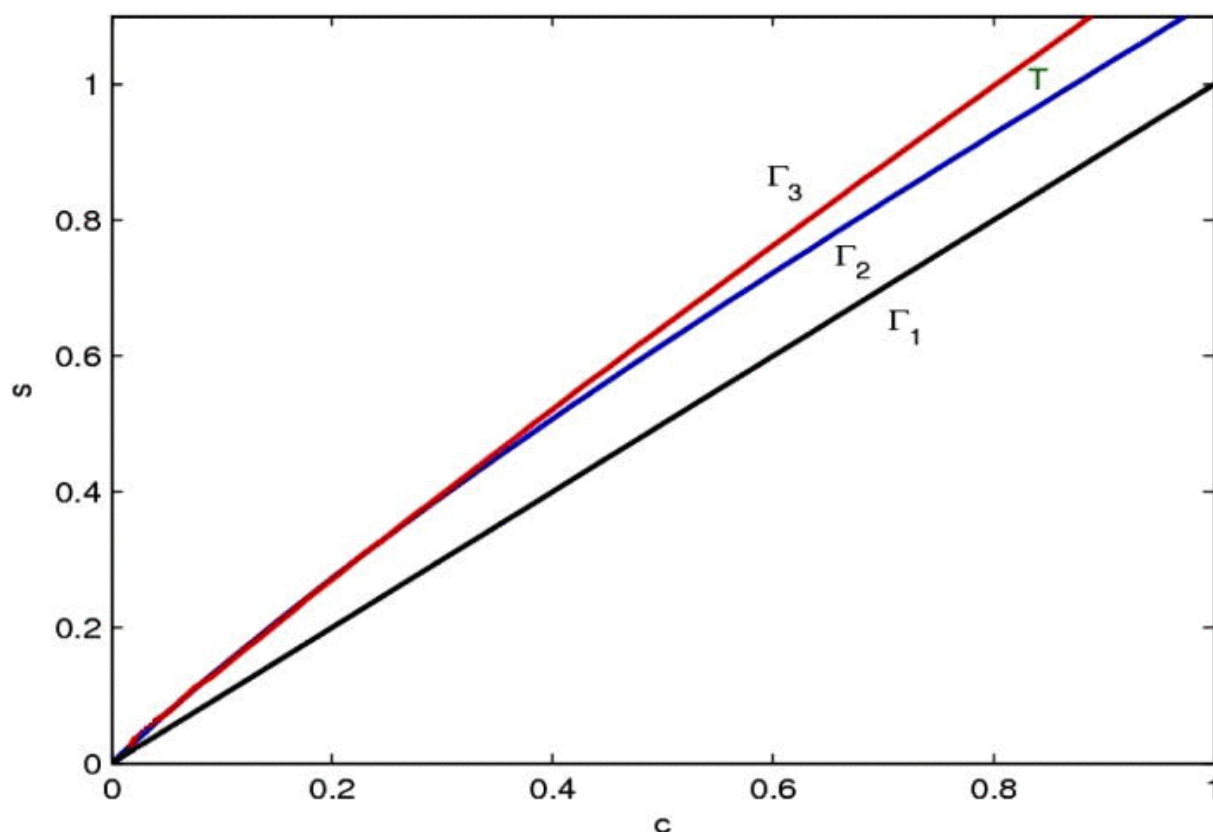
$$x^* = 1 - \frac{c}{s}, \quad y^* = \frac{c}{s} \sqrt{x^*}$$

## 2.3. Bifurkacje

Wraz ze zmianą niektórym parametrów ( $c, s$ ) struktura jakościowa modelu może się dramatycznie zmienić. Bifurkacją nazywamy skokową zmianę właściwości modelu matematycznego przy niewielkiej zmianie parametrów. Przykładem może być liczba Reynoldsa, ważna w mechanice płynów bezwymiarowa liczba, która oszacowuje występujący podczas ruchu płynu stosunek sił bezwładności do sił lepkości. Przez zmianę tego parametru ruch płynu może zmienić się z laminarnego w falowy albo turbulentny.

W systemach reakcji-dyfuzji wyróżniamy dwa typy bifurkacji - Hopfa i Turinga. Interesującą bifurkacją jest ta druga, prowadzi bowiem do stanu, gdzie na całej modelowanej przestrzeni pojawiają wzory. W dwóch wymiarach są nimi zwykle heksagony lub figury o pasiastej aparycji.

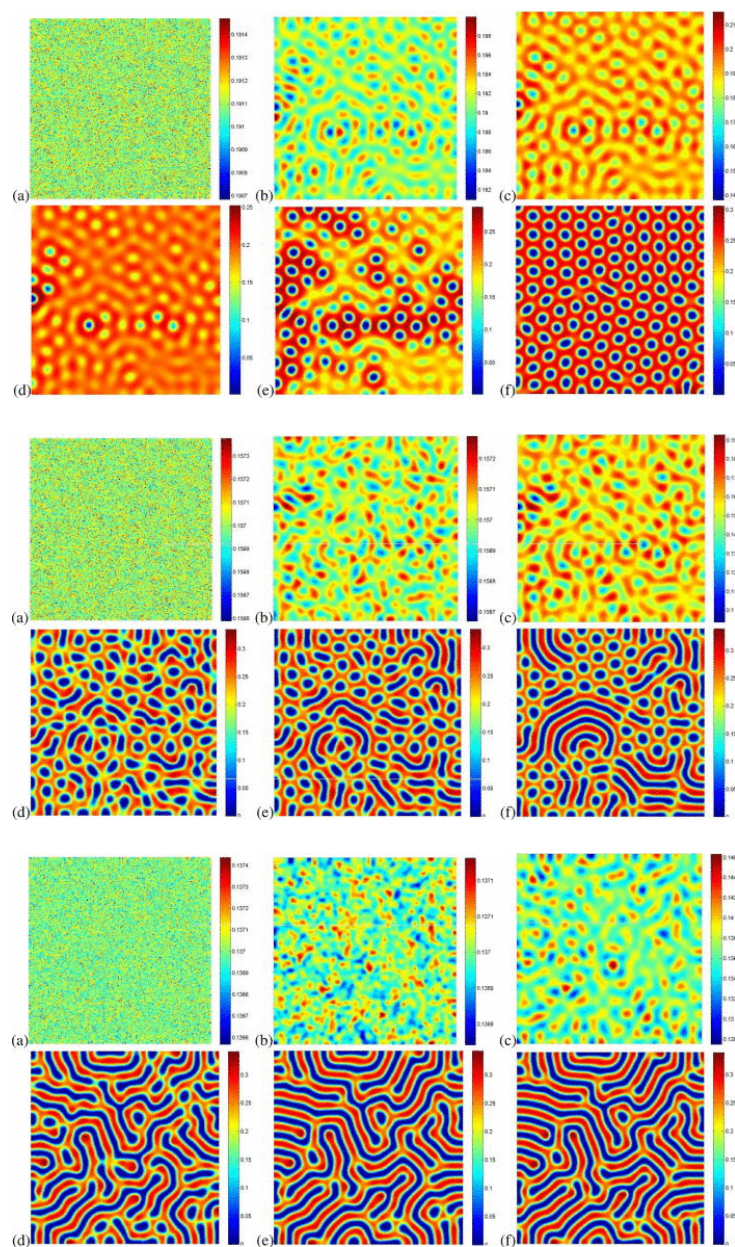
W modelu możliwe jest wyznaczenie relacji między parametrem  $s$  i  $c$ , dla którego wartość parametru  $s$  będzie wartością krytyczną dla bifurkacji Hopfa i Turinga.



**Rys. 2.1.** Przestrzeń Turinga oznaczona jako T dla  $\delta = 10$ .  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  są kolejno są liniami bifurkacji Turinga, Hopfa, i ekwilibrium egzystencji.

## 2.4. Symulacje

Istotnie, interesujące zachowania ujawniają się dla wyznaczonych parametrów. Widoczne są różne kategorie wzorów na skutek bifurkacji Turinga dla różnych wartości parametrów w przestrzeni Turinga.



**Rys. 2.2.** Ewolucja zagęszczenia populacji ofiar w funkcji czasu

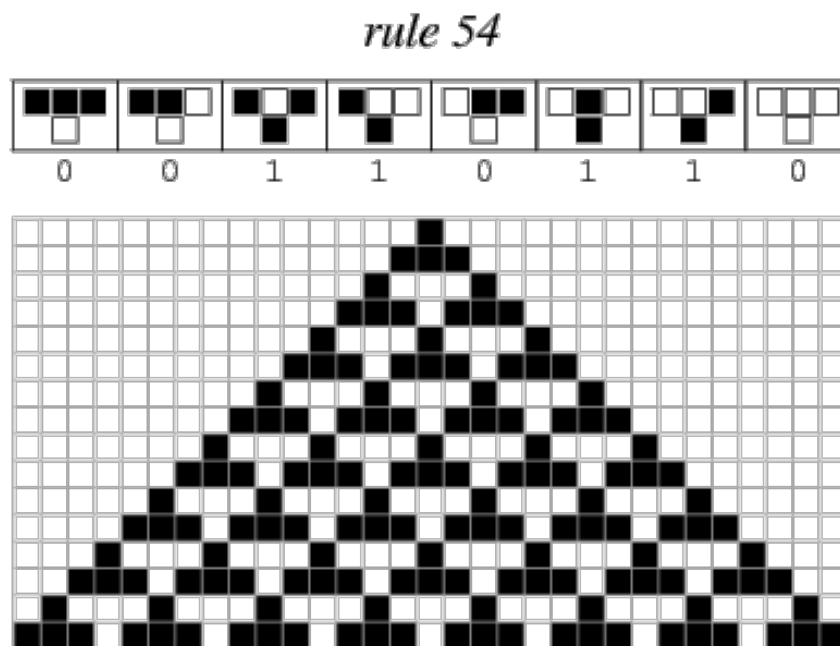


## 3. Automaty komórkowe

### 3.1. Zagadnienie automatów

Ciekawym zagadnieniem dotyczącym dzisiejszej informatyki jest symulacja różnego rodzaju zjawisk, wydarzeń i populacji. Interesującą właściwością symulowanych modeli jest złożoność zachowań przy nakreśleniu prostych reguł działania. Na myśl nasuwa się pytanie: jakie zachowania będą przejawiały systemy zamodelowane bardziej wyrafinowanymi zasadami. Ograniczenia systemu w połączeniu z modelami matematycznymi oraz mocą obliczeniową komputerów mogą dać ciekawe rezultaty, których moglibyśmy nie przewidzieć. Utworzenie odpowiedniego modelu i wybranie odpowiednich warunków początkowych, pozwala nam też sprawdzić jak zachowa się dany system. W celu zrealizowania podanego systemu jako program komputerowy na pomoc przychodzą nam automaty komórkowe. Dzięki prostocie zasad ich działania w bardzo krótkim czasie jesteśmy w stanie stworzyć prosty mechanizm, który będzie symulował rozwój populacji zwierząt. Stopniowo wprowadzając zasady działania populacji, od najprostszych jakimi jest poruszanie się i zdobywanie pokarmów, po te bardziej skomplikowane jakimi jest rozmnażanie, uciekanie przed drapieżnikami czy polowanie na inne zwierzęta. Naszą uwagę przykuł fakt jak prosty jednowymiarowy automat komórkowy o prostych zasadach funkcjonowania może, przy niewiele różniących się od siebie regułach, dać zupełnie inny obraz wynikowy. Należy też zauważyć, że najwięcej funkcjonalności automatów komórkowych możemy znaleźć analizując właśnie jednowymiarowe automaty. Tutaj definiujemy komórkę oraz jej sąsiednie komórki, które znajdują się w pewnej odległości od niej. Dzięki temu jesteśmy za pomocą funkcji przejścia wyznaczyć następny stan danej komórki. Zaczniemy od tablicy jednowymiarowej i oznaczymy sobie dwa stany: 1 jako komórkę żywą, 0 jako komórkę martwą, a jako sąsiadów przyjmiemy tylko te komórki, które znajdują się bezpośrednio przy niej. Ustalimy też, że następny stan będzie zależał bezpośrednio od stanu samej komórki oraz stanu sąsiadów. Wybierzemy też przejścia takie jak na tablicy.

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	1	0	0	1	1	0



Rys. 3.1. rezultat wykonania operacji wedle tablicy powyżej

### 3.2. Implementacja automatu

Modelowanie populacji drapieżnik-ofiara za pomocą automatów komórkowych jest złożoną operacją. Każda komórka to zbiór stanów poszczególnych osobników. Każdy następny stan bazuje na poprzednim oraz na stanach sąsiadów.

Autorzy książki *A predator-prey model based on fully parallel cellular automata* przeprowadzi symulację na podstawie populacji wilków i owiec. Udało im się znaleźć trzy możliwe stany, do których będzie dochodził system. Są nimi:

- współistnienie obu gatunków,
- rozwijanie się populacji ofiar,
- wyginięcie obu gatunków

Te stany zależały od ilości pożywiania dla ofiar, czasu po jakim zwierzęta były w stanie się rozmnażać oraz sposobem opiekowania się na młodymi. Największym problemem z jakim spotkali się twórcy było to, że drapieżnik podczas polowania mógł zabić kilka ofiar. Sposobem na poradzenia sobie z tego typu zjawiskiem było wprowadzenie specjalnego sposobu doboru sąsiedztwa, które nie występowała w innych automatach, a pozwala blokować możliwość zabicia wszystkich ofiar. Dodatkowo dyskutowali też jaki wpływ na rozwoju populacji będą mieć takie czynniki jak zagęszczenie oraz mutacje poszczególnych gatunków. Zastanawiali się też jakie wtedy stany może osiągnąć taki automat.

## 4. Równania Lotki-Volterry dla konkurencji

### 4.1. Model matematyczny

Rozważając temat modelowania populacji za pomocą równań logistycznych warto poruszyć temat modeli uwzględniających również konkurencję o pożywienie i ogólnie system z wielogatunkowymi poziomami troficznymi.

W odpowiedzi przychodzi układ równań w formie podobnej do klasycznych, modelujących relacje ofiara-drapieżnik. Oparte są na bazie równań logistycznych postaci  $\frac{d}{dx}f(x) = f(x)(1 - f(x))$ . W przypadku standardowego układu Lotki-Volterry przypadkiem bazowym był wzrost wykładniczy.

Przypadek zająca i owcy mógłby zostać opisany następującym układem równań:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1 r_1 \left( 1 - \frac{(N_1 + \alpha_{12} N_2)}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2 r_2 \left( 1 - \frac{(N_2 + \alpha_{21} N_1)}{K_2} \right)\end{aligned}$$

$r_1, r_2$  – wzrost per capita członków poszczególnych populacji

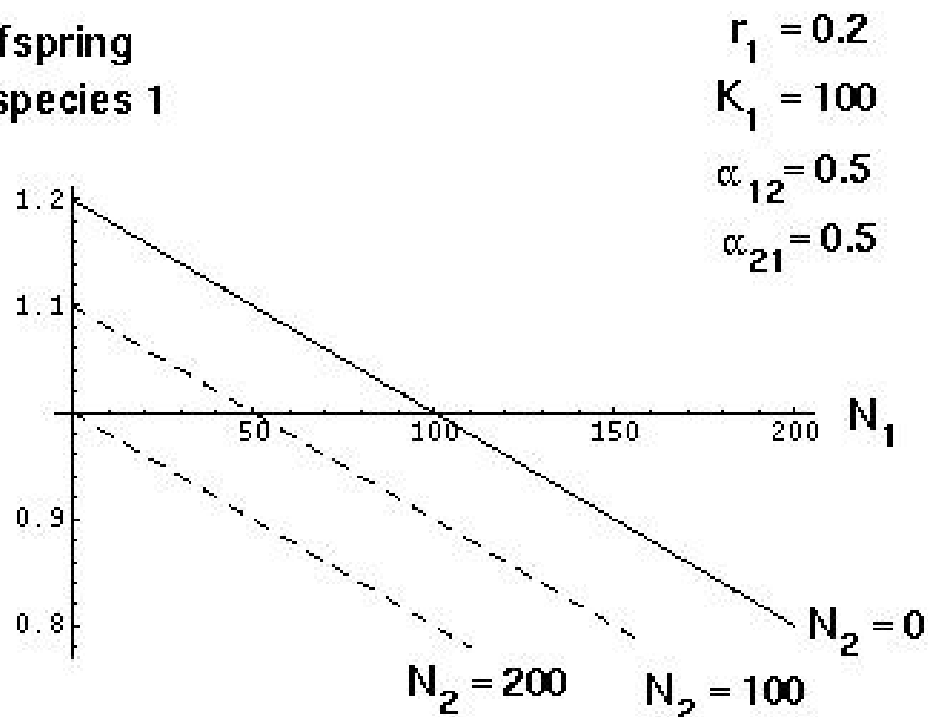
$\alpha_{nm}$  – współczynnik konkurencji jednostki z populacji  $m$  na jednostkę z populacji  $n$

$K_1, K_2$  – zdolność pojemnościowa układu dla poszczególnych populacji

Założeniem logistycznego modelu jest to, że liczba potomstwa per rodzic maleje liniowo ze wzrostem populacji tej populacji.

Włączając w to konkurencję innego gatunku, liczba potomstwa na rodzica zależy nie tylko od populacji pierwszej, ale również od populacji drugiej.

Number of offspring  
per parent in species 1

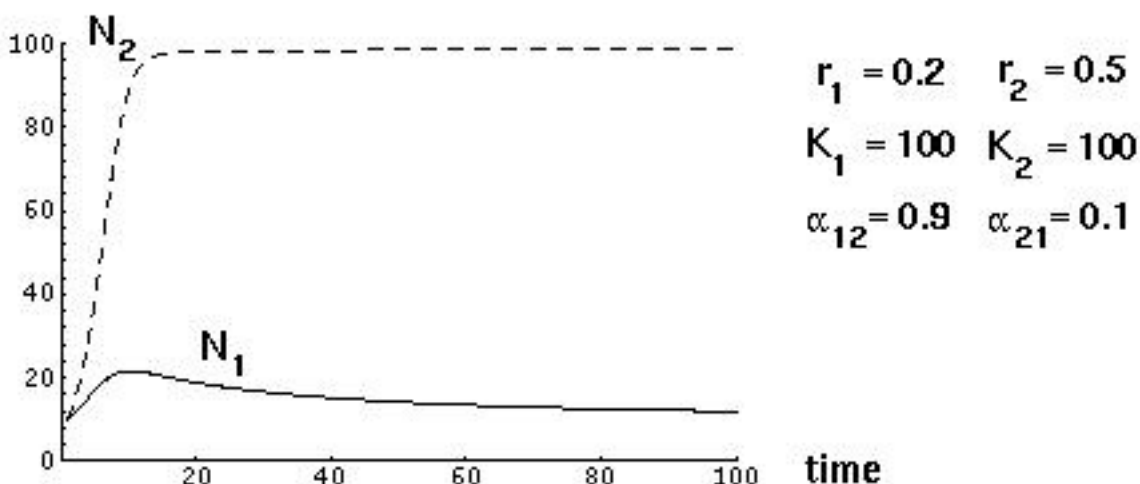
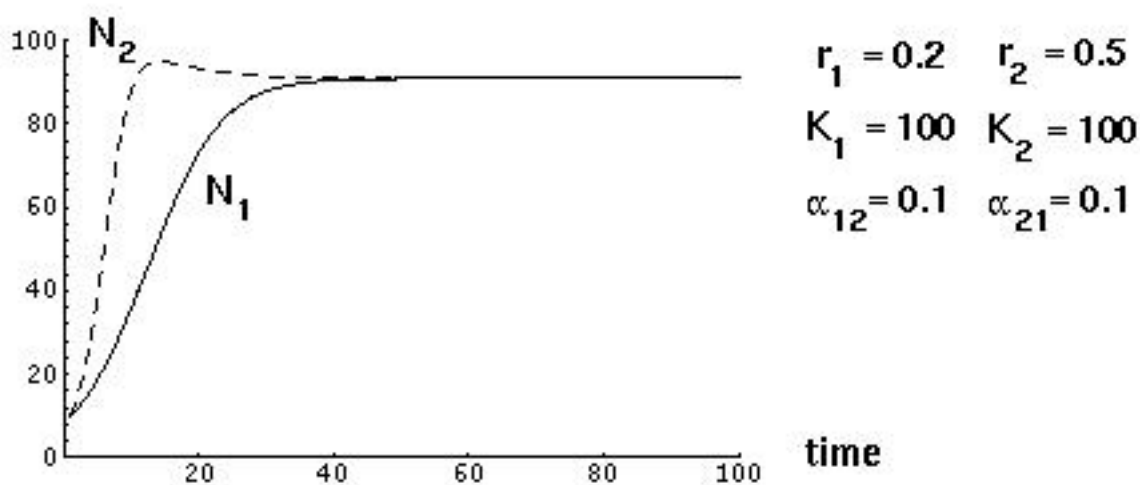


Rys. 4.1. Liczba potomków na dorosłego osobnika w funkcji parametrów

## 4.2. Właściwości modelu

- jeśli  $\alpha_{12}$  wynosi zero, wtedy dynamika gatunku pierwszego będzie przedstawiona równaniem logistycznym (sigmoidalny wykres)
- analogicznie dla  $\alpha_{21} = 0$
- jeśli  $\alpha_{12} < 0$  to populacja druga zwiększa liczbę surowców dostępnych dla populacji pierwszej
- jeśli oba współczynniki  $\alpha_{12}, \alpha_{21} = 0$  to relację między populacjami nazywamy mutualizmem
- jeśli  $\alpha_{12}$  albo  $\alpha_{21}$  jest równe zero (albo bardzo blisko zera), to mówimy że populacje są w relacji komensalizmu
- jeśli tylko jeden ze współczynników jest ujemny, a drugi dodatni, to mówimy, że populacje są w relacji pasożytnictwa
- jeśli oba współczynniki są dodatnie to populacje ze sobą konkurują

### 4.3. Symulacje dla dodatnich współczynników



Jeśli  $\alpha_{12}$  i  $\alpha_{21}$  są małe, to obie populacje osiągają ekwilibrium w pobliżu odpowiedniej pojemności systemu. Jeśli  $\alpha_{12}$  jest znacznie większe od  $\alpha_{21}$  (gatunek drugi ma większy impakt na liczebność gatunku pierwszego niż odwrotnie), wtedy liczebność gatunku pierwszego jest utrzymywana na niskim poziomie spowodowanym wyższością konkurencyjności drugiego gatunku.

Do stworzenia stabilnego ekosystemu wszystkie wartości własne macierzy  $a_{ij}$  muszą być dodatnie. Duże systemy Lotki-Volterry mogą osiągnąć stabilność jeśli współczynniki konkurencji  $\alpha_{ij}$  mogą ewoluować zgodnie z naturalną selekcją (Kondoh, 2003 i G. J. Ackland, 2004)





## Bibliografia

- Brauer, F. i C. Castillo-Chavez (2000). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Heidelberg.
- Freedman, H. I. (1980). *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*. New York: Marcel Dekker.
- G. J. Ackland, I. D. Gallagher (2004). „Stabilization of Large Generalized Lotka-Volterra Foodwebs By Evolutionary Feedback”. W: *American Physical Society*.
- Hoppensteadt, Frank (2006). „Predator-prey model”. W: *Scholarpedia*.
- Kondoh, M. (2003). „Foraging adaptation and the relationship between food-web complexity and stability”. W: *Science*.
- M. He H. Ruan, C. Yu (2003). „A predator-prey model based on fully parallel cellular automata”. W: *International Journal of Modern Physics*.
- Mitkowski, W. (2006). *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Kraków: Wydawnictwa AGH.
- S. Otto, T. Day (2007). *Non-Linear Equations*. URL: <http://www.zoology.ubc.ca/~bio301/Bio301/Lectures/Lecture19/Overheads.html>.
- S. Yuan1 C. Xu1, T.Zhang (2013). „Spatial dynamics in a predator-prey model with herd behavior”. W: *AIP Scitation*.
- Schiff, J.L. *Introduction to Cellular Automata*.