Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego metodą spadku swobodnego

Informatyka – profil praktyczny, semestr II
Wydział Matematyki Stosowanej
Politechnika Śląska

xxx

1 Wstęp teoretyczny.

Na każde ciało w polu grawitacyjnym działa siła grawitacji, która powoduje ruch ciała w kierunku środka Ziemi. Przyspieszenie, które jest rezultatem występowania tej siły, nazywamy **przyspieszeniem grawitacyjnym**.

Spadek swobodny jest to rodzaj ruchu, który polega na poruszaniu się ciała wyłącznie wskutek siły grawitacji, bez prędkości początkowej i oporów ośrodka. Przyspieszenie grawitacyjne nie zależy od masy i rozmiaru ciała. Jest ono stałe dla wszystkich obiektów z niewielkim odchyleniem dla różnych wysokości nad poziomem morza i szerokości geograficznych.

2 Pomiary

Podczas wykonywania doświadczenia w pracowni pomiary zapisywaliśmy ręcznie na kartce. Następnie przepisaliśmy wyniki naszych pomiarow do pliku

CSV, by umożliwić ich wykorzystanie w programie.

Użyliśmy języka Python w środowisku Jupyter Notebook. Wykorzystaliśmy biblioteki *numpy* oraz *matplotlib*.

3 Obliczenia i wykresy

Obliczenie niepewności typu a (statystycznych) średnich czasów spadania $u_a(t_{sr})$.

Aby policzyć niepewności typu a skorzystamy ze wzoru:

$$u_a(t_{sr}) = \sqrt{\tfrac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{sr})^2} \cdot t_{\alpha,N}.$$

Gdzie:

$t_{\alpha,N}$ - Współczynnik Studenta Fishera, gdzie za α przyjmujemy 0.6828, a za N liczbę pomiarów w serii, czyli w naszym przypadku 5.

$$t_{\alpha=0.6828,N=5} = 1.141.$$

Po uwzględnieniu wszystkich danych wychodzi nam:

Lp.	t_{sr}, s	$u_a(t_{sr})$, s
1.	0.34900	0.00074
2.	0.37600	0.00036
3.	0.40200	0.00023
4.	0.42800	0.00069
5.	0.45100	0.00023
6.	0.47300	0.00086
7.	0.49500	0.00000
8.	0.51600	0.00062
9.	0.53700	0.00058
10.	0.55600	0.00039

Obliczenie niepewności typu b pomiaru czasu $u_b(t)$.

Aby policzyć niepewność typu b pomiaru czaus $u_b(t)$ skorzystamy ze wzoru:

$$u_b(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}.$$

Gdzie $\Delta x = 0.003$ s dla użytego przyrządu.

$$u_b(t) = \frac{0.003}{\sqrt{3}} = 0.0017 \text{ s.}$$

Obliczenie niepewności całkowitych średnich czasów spadania $u(t_{sr})$ i umieszczenie wyników w tabeli.

Do policzenia niepewności całkowitych średnich czasów spadania skorzystamy ze wzoru:

$$u(t_{sr}) = \sqrt{u_a^2(t_{sr}) + u_b^2(t)}$$

Tabelka z danymi:

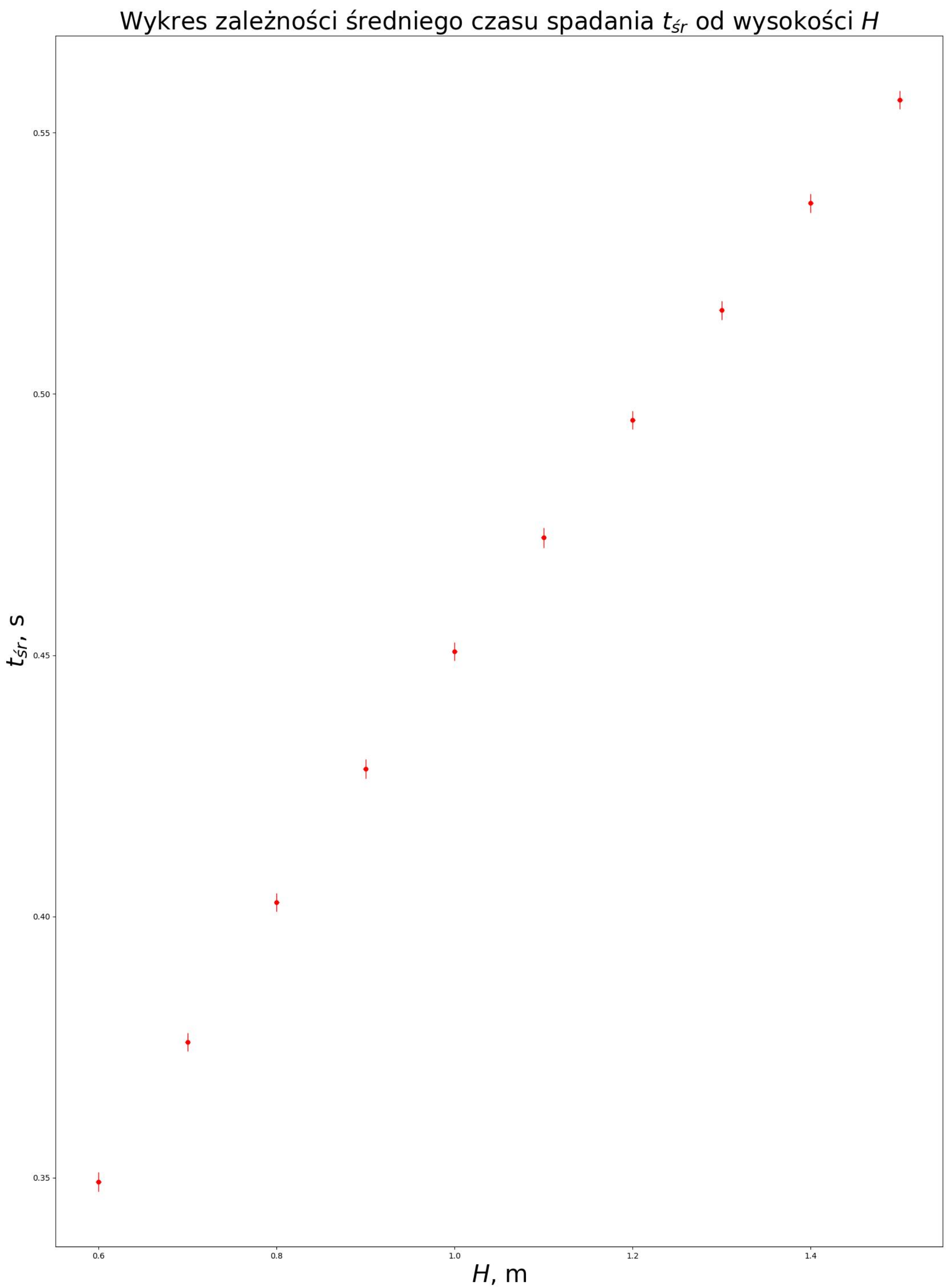
Lp.	H, m	$\sqrt{H}$, $\sqrt{m}$	t_{sr}, s	$u(t_{sr})$, s
1.	0.600	0.775	0.3490	0.0019
2.	0.700	0.837	0.3760	0.0018
3.	0.800	0.894	0.4020	0.0017
4.	0.900	0.949	0.4280	0.0019
5.	1.000	1.000	0.4510	0.0017
6.	1.100	1.049	0.4730	0.0019
7.	1.200	1.095	0.4950	0.0017
8.	1.300	1.140	0.5160	0.0018
9.	1.400	1.180	0.5370	0.0018
10.	1.500	1.220	0.5560	0.0018

Wykres zależności t_{sr} od H.

Dla wykresu przyjmujemy następujące niepewności:

$u(H) = 0.003$ m

$u(t_{sr})$ - Niepewności całkowite średnich czasów spadania.



Wykres zależności średniego czasu spadania $t_{śr}$ od wysokości H
$t_{śr}$, s
0.35
0.40
0.45
0.50
0.55
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
H, m

Wykres zależności t_{sr} od $\sqrt{H}$.

Dla wykresu przyjmujemy następujące niepewności:
$u(t_{sr})$ - Niepewności całkowite średnich czasów spadania.
Aby policzyć niepewność $u(\sqrt{H})$ musimy użyć prawa przenoszenia niepewności:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} [\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i)]^2}.$$

Dla $y = \sqrt{H}$ równanie ma postać:

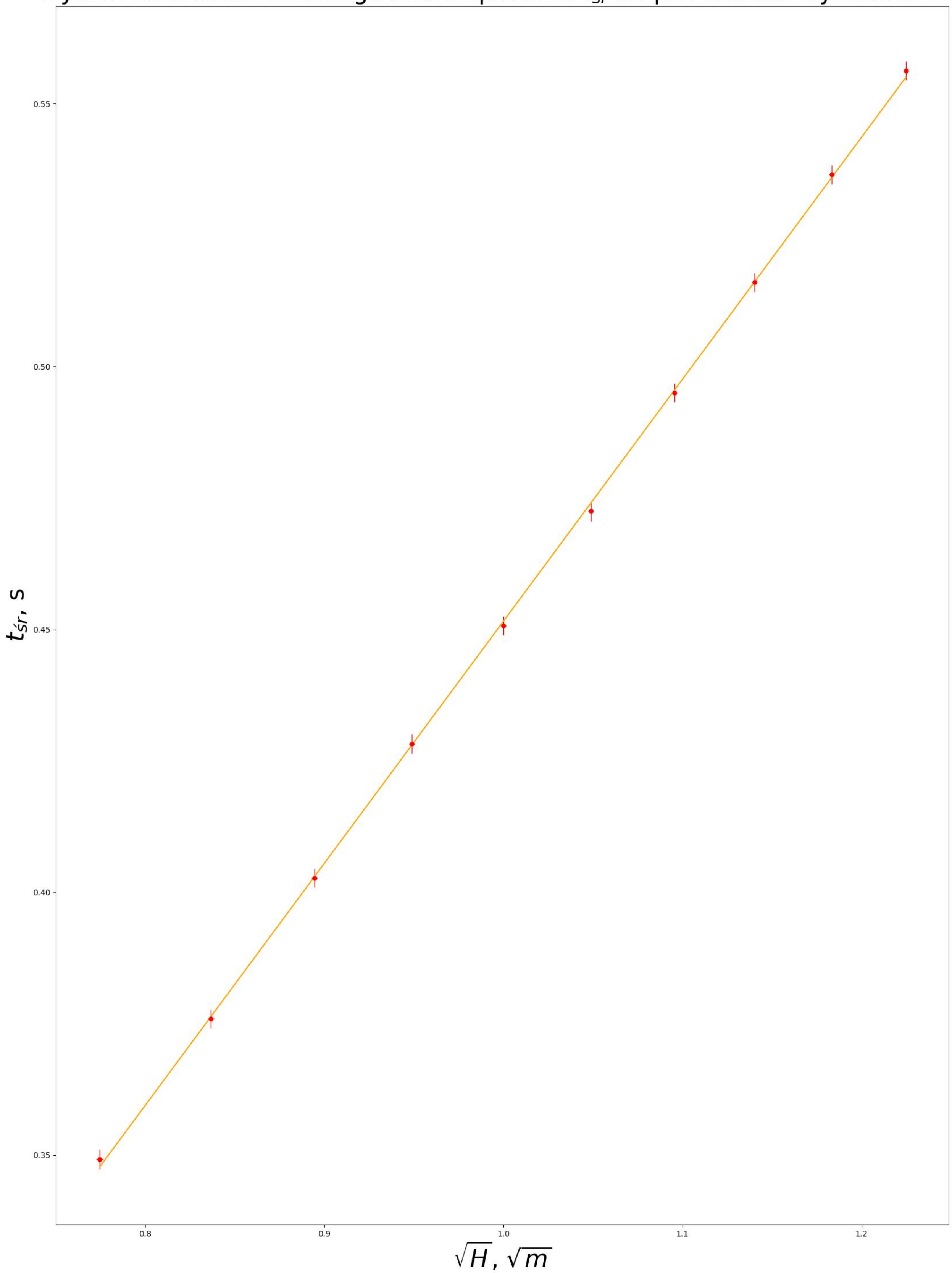
$$u(\sqrt{H}) = \sqrt{[\frac{u(H)}{2\sqrt{H}}]^2} = \frac{u(H)}{2\sqrt{H}}.$$

Tabelka z danymi:

Lp.	$\sqrt{H}, \sqrt{m}$	$u(\sqrt{H}), \sqrt{m}$
1.	0.7750	0.0065
2.	0.8370	0.0060
3.	0.8940	0.0056
4.	0.9490	0.0053
5.	1.0000	0.0050
6.	1.0490	0.0048
7.	1.0950	0.0046
8.	1.1400	0.0044
9.	1.1800	0.0042
10.	1.2200	0.0041

Wykres na następnej stronie:

Wykres zależności średniego czasu spadania $t_{śr}$ od pierwiastka wysokości $\sqrt{H}$



Wyznaczenie metodą regresji liniowej współczynników prostej $t_{sr}(\sqrt{H})$ wraz z niepewnościami.

Aby policzyć współczynniki kierunkowe prostych i wyrazy wolne skorzystamy ze wzorów:

$$a = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2},\ b = \frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{nS_{xx} - S_x^2}$$

Gdzie:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i,\ S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i,\ S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Do obliczenia niepewności skorzystamy ze wzorów:

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2} \cdot \frac{S_{\epsilon\epsilon}}{nS_{xx} - S_x^2}},\ u(b) = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{S_{xx} S_{\epsilon\epsilon}}{nS_{xx} - S_x^2}}$$

Gdzie:

$$S_{\epsilon\epsilon} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2, \text{ dla } \epsilon_i = y_i - ax_i - b$$

Po obliczeniach wartości współczynników są równe:

$$a = 0.4500 \frac{s}{\sqrt{m}},$$
$$b = -0.00872 \text{ s}.$$

Wartości niepewności współczynników prostej:

$$u(a) = 0.0021 \frac{s}{\sqrt{m}},$$
$$u(b) = 0.00220 \text{ s}.$$

Postać końcowa:

$$a = 0.4500(21) \frac{s}{\sqrt{m}},\ b = -0.00872(220) \text{ s}$$

Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego g.

Aby wyprowadzić wzór na przyspieszenie ziemskie skorzystamy z równania na droge w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Przyjmując $S_0 = 0$ i $v_0 = 0$ oraz zamieniając droge S na wysokośc H i przyspieszenie a na przyspieszenie ziemskie g otrzymujemy:

$$H = \frac{1}{2} g t^2$$

Przekształcając wzór, w celu wyznaczenia g:

$$g = \frac{2H}{t^2}$$

Współczynnik kierunkowy funkcji $t_{sr}(\sqrt{H})$ jest równy $a = \frac{t_{sr}}{\sqrt{H}}$. Możemy to a podstawić do wzoru na g i otrzymujemy:

$$g = \frac{2}{a^2}$$

Po wstawieniu odpowiednich danych otrzymujemy:

$$g = \frac{2}{0.45^2} = 9.880 \frac{m}{s^2}$$

Obliczenie niepewności przyspieszenie ziemskiego g korzystając z prawa przenoszenia niepewności.

Aby wyliczyć niepewność przyspieszenia ziemskiego g, skorzystamy z prawa przenoszenia niepewności. Przyjmujemy, że niepewność $u(a) = 0.00214 \frac{s}{\sqrt{m}}$. Prawo przenoszenia niepewności wyraża się wzorem:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} [\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i)]^2}$$

Zatem prawo przenoszenia niepewności dla g ma postać:

$$u(g) = \sqrt{(\frac{-4}{a^3} \cdot u(a))^2}$$

Po wstawieniu liczb:

$$u(g) = 0.094 \frac{m}{s^2}$$

Obliczenie niepewności rozszerzonej.

Aby policzyć niepewność rozszerzoną skorzystamy ze wzoru:

$$U(y) = k \cdot u(y).$$

Gdzie:

k - bezwymiarowy współczynnik rozszerzenia. Przyjmujemy $k = 2$.

$u(y)$ - niepewność badanej wartości.

Dla g:

$$U(g) = 2 \cdot u(g) = 0.19 \tfrac{m}{s^2}.$$
$$g = 9.88 \pm 0.19 \tfrac{m}{s^2}.$$

Obliczenie przyspieszenia ziemskiego dla Gliwic i porównanie wyniku z otrzymaną wartością.

Aby policzyć przyspieszenie ziemskie dla danej szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza, skorzystamy ze wzoru:

$$g_\varphi \approx 9.780318(1 + 0.0053024 \sin^2 \varphi - 0.0000058 \sin^2 2\varphi) - 3.086 \cdot 10^{-6} h$$

Gdzie:

φ - szerokość geograficzna [°],

h - wysokość nad poziomem morza [m].

Przyjmując szerokość geograficzną $\varphi = 50.3°$ i wysokość nad poziomem morza $h = 219$ m otrzymujemy:

$$g_0 = 9.80 \tfrac{m}{s^2}.$$

Przeprowadzimy test zgodności otrzymanego g w wyniku doświadczenia z przyspieszeniem ziemskim g_0 dla Gliwic:

Test zgodności ma postać:

$$|y - y_0| < U(y)$$

Wstawiając g i g_0:

$$|g - g_0| < U(g)$$
$$0.07\frac{m}{s^2} < 0.19\frac{m}{s^2}$$

Co pokazuje, że test zgodności zachodzi dla g zmierzonego przez nas.

4 Wnioski

Otrzymana przez nas wartość przyspieszenia ziemskiego spełnia test zgodności przeprowadzony dla przyspieszenia ziemskiego dla Gliwic. Można powiedzieć, że nasz wynik jest zadowalający.

Końcowe niepewności pomiarów wynikają z niepewności miarki użytej do pomiaru odległości ciała od fotokomórki, oporów powietrza, niepewnośći przyrządu, którym mierzyliśmy czas, jak również z niewielkiego opóźnienia ciała w wyniku działania magnesu.