

Opracowanie danych pomiarowych

na podstawie podręcznika

A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*
Wydawnictwo Naukowe PWN, 2013

dr inż. Alina Domanowska

Instytut Fizyki
Centrum Naukowo - Dydaktyczne
Politechnika Śląska

6 marca 2023

Spis treści

Dokumenty konwencji GUM, dokumenty pochodne i polskie akty prawne

Błąd pomiaru

Niepewność standardowa

Niepewność statystyczna $u_a(x)$

Średnia arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność pomiarowa $u_b(x)$

przyrządy proste

analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary bezpośrednie i pośrednie

Prawo propagacji niepewności

Zapis wyników końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Analiza danych

A. Domanowska

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność
standardowa

Niepewność
statystyczna $u_a(x)$

Średnia
arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność
pomiarowa $u_b(x)$

przyrządy proste
analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary
bezpośrednie i
pośrednie

Prawo propagacji
niepewności

Zapis wyników
końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Dokumenty konwencji GUM, dokumenty pochodne i polskie akty prawne

Międzynarodowa konwencja oceny niepewności pomiaru GUM

(jest to angielski akronim Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement) jest rezultatem porozumień podobnych do uzgodnień ustanawiających Międzynarodowy Układ Jednostek Miar SI i powstała z inicjatywy organów Konwencji Metrycznej.

Nazewnictwo, symbolika i metody obliczania niepewności są zgodne z dokumentem

*Joint Committee for Guides in Metrology JCGM
Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 2008*

Postanowienia konwencji GUM stają się częścią obowiązującego prawa państwowego na mocy decyzji administracyjnej. Wiąże się to zwykle z dokonaniem oficjalnego tłumaczenia na język narodowy. Tłumaczenie Przewodnika na język polski opublikowane przez Główny Urząd Miar zapoczątkowało wdrażanie postanowień konwencji GUM w Polsce

*Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Główny Urząd
Miar, Warszawa
z obszernym dodatkiem tłumacza, J. M. Jaworskiego, pt.
Niedokładność, błąd, niepewność*

Analiza danych

A. Domanowska

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność
standardowa

Niepewność
statystyczna $u_a(x)$

Średnia
arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność
pomiarowa $u_b(x)$

przyrządy proste

analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary
bezpośrednie i
pośrednie

Prawo propagacji
niepewności

Zapis wyników
końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Błąd pomiaru

Przyjęte w Polsce pojęcia *błąd* i *niepewność*, używane są w nauce w znaczeniu innym niż w języku potocznym. W konsekwencji wywodzące się z nich przymiotniki *błędny*/*niepewny* mają niewłaściwe znaczenie i muszą być zastąpione przymiotnikiem *dokładny*/*niedokładny*.

Błąd pomiaru w znaczeniu ilościowym, to różnica między wartością zmierzoną w danym eksperymencie a wielkością rzeczywistą

$$\Delta x = x - x_0.$$

Zakłada się przy tym, że **rzeczywista wartość istnieje**.

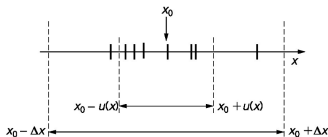
Klasyfikacja rodzajów błędów pomiaru:

błędy przypadkowe - zdarzenia przypadkowe

błędy grube - pomyłki eksperymentatora

błędy systematyczne - cechy metody pomiarowej

Dla uzyskanego wyniku pomiaru można jednak określić przedział liczbowy $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ w którym znajduje się wartość rzeczywista. Parametr Δx nazywa się **niepewnością graniczną**. Parametr $u(x)$ to **niepewność standardowa**.



Analiza danych

A. Domanowska

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność standardowa

Niepewność statystyczna $u_a(x)$

Średnia arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność pomiarowa $u_b(x)$

przrządy proste

analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary bezpośrednie i pośrednie

Prawo propagacji niepewności

Zapis wyników końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Niepewność standardowa $u(x)$ pomiaru wielkości x składa się z szeregu składników, które, według zaleceń konwencji GUM, można zgrupować w dwie kategorie, zgodnie ze sposobem obliczania ich wartości liczbowych

niepewność statystyczna $u_a(x)$ - obliczona metodami statystycznymi

niepewność pomiarowa $u_b(x)$ - obliczona innymi metodami.

Niepewność całkowita to suma geometryczna wszystkich składowych niepewności

$$u(x) = \sqrt{u_a^2(x) + u_b^2(x)} \quad (1)$$

Średnia arytmetyczna

Jeśli wszystkie otrzymane wyniki wykonywane są N - krotnie tym samym przyrządem pomiarowym, wówczas wynikiem serii pomiarów jest **średnia arytmetyczna**. Niepewnością statystyczną $u_a(x)$ jest wówczas odchylenie standardowe wartości średniej, pomnożone przez współczynnik Studenta Fishera $t_{\alpha,N}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2)$$

$$u_a(x) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \cdot t_{\alpha,N}. \quad (3)$$

Współczynnik Studenta Fishera $t_{\alpha,N}$ to liczba większa od 1, zależna od

α - poziomu ufności, czyli procentowego prawdopodobieństwa, że wynik pomiaru zawiera się w przedziale domkniętym, ograniczonym niepewnością $u_a(x)$. Poziom ufności $\alpha = 0.6828$ stosuje się dla zwykłych pomiarów, natomiast poziomy ufności $\alpha = 0.95$ stosuje się na świadectwach wzorcowania urządzeń;

N - ilości pomiarów w serii.

Analiza danych

A. Domanowska

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność standardowa

Niepewność statystyczna $u_a(x)$

Średnia arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność pomiarowa $u_b(x)$

przyrządy proste analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary bezpośrednie i pośrednie

Prawo propagacji niepewności

Zapis wyników końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Tabela współczynników Studenta Fishera

Analiza danych

A. Domanowska

Współczynniki Studenta Fishera odczytuje się z tabeli

$t_{\alpha, N}$	0.6826*	0.9	0.95	0.99
2	1.837	6.314	12.706	63.657
3	1.321	2.92	4.303	9.925
4	1.197	2.353	3.182	5.841
5	1.141	2.312	2.776	4.604
6	1.110	2.015	2.580	4.032
7	1.090	1.943	2.447	3.707
8	1.077	1.895	2.365	3.500
9	1.066	1.86	2.306	3.355
10	1.059	1.833	2.252	3.250
11	1.052	1.813	2.228	3.169
12	1.047	1.796	2.021	3.106
13	1.043	1.782	2.179	3.055
14	1.04	1.771	2.160	3.012
15	1.037	1.761	2.145	2.977
16	1.034	1.753	2.131	2.921
17	1.032	1.746	2.120	2.892
18	1.030	1.740	2.110	2.878
19	1.028	1.734	2.100	2.861
20	1.027	1.729	2.093	2.845

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność standardowa

Niepewność statystyczna $u_a(x)$

Średnia arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność pomiarowa $u_b(x)$

przrządy proste analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary bezpośrednie i pośrednie

Prawo propagacji niepewności

Zapis wyników końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Gdy pomiary wielkości x w N - liczebnej serii pomiarowej zostały wykonane przy pomocy różnych przyrządów, albo z zastosowaniem różnych metod lub osobnych eksperymentów, i wyniki te mają **różne niepewności**, wówczas wynik końcowy należy obliczyć metodą **średniej ważonej**. Najczęściej stosuje się uproszczony wzór

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i w_i}{\sum_{i=1}^N w_i}, \text{ gdzie } w_i = \frac{1}{u^2(x_i)}, \quad u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i}} \quad (4)$$

W przypadku, gdy niepewności różnią się rzędami wielkości, niepewność średniej ważonej oblicza się z bardziej ogólnego wzoru

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N w_i}{N} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N w_i (x_i - \bar{x})^2}{\left(\sum_{i=1}^N w_i\right)^2 - \sum_{i=1}^N w_i^2}} \quad (5)$$

[Dokumenty](#)[Błąd pomiaru](#)[Niepewność standardowa](#)[Niepewność statystyczna \$u_a\(x\)\$](#) [Średnia arytmetyczna](#)[Średnia ważona](#)[Niepewność pomiarowa \$u_b\(x\)\$](#) [przyrządy proste](#)[analogowe](#)[cyfrowe](#)[zliczające](#)[Pomiary bezpośrednie i pośrednie](#)[Prawo propagacji niepewności](#)[Zapis wyników końcowych](#)[Ocena zgodności](#)[Wykresy](#)[Regresja liniowa](#)

Niepewność $u_b(x)$ zwykłych przyrządów pomiarowych

Przewodnik GUM dopuszcza oraz stara się dowartościować **subiektywną ocenę niepewności** opartą o naukowy osąd badacza, która

- ▶ *wymaga intuicji opartej na posiadanym doświadczeniu i ogólnej wiedzy*
- ▶ *oraz jest umiejętnością zawodową, którą można nabyć wraz z praktyką*

Trzeba zgodzić się, że jej wynik, podany przez różne osoby, może być różny.

Analiza danych

A. Domanowska

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność
standardowa

Niepewność
statystyczna $u_a(x)$

Średnia
arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność
pomiarowa $u_b(x)$

przyrządy proste
analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary
bezpośrednie i
pośrednie

Prawo propagacji
niepewności

Zapis wyników
końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Niepewność $u_b(x)$ zwykłych przyrządów pomiarowych

Proste przyrządy mechaniczne: przymiar milimetrowy, suwmiarka, śruba mikrometryczna czy termometr rtęciowy. Producenci takich przyrządów na ogół nie określają ich dokładności, bo realna niepewność zależy od rodzaju pomiaru. Potocznie przyjmuje się, że niesprecyzowana bliżej *dokładność* Δx jest równa wartości **najmniejszej działki skali**. Jej wartość wynosi dla linijki 1 mm, suwmiarki 0,05 lub 0.1 mm, śruby mikrometrycznej 0.01 mm, termometru lekarskiego 0.1°C.

Ocena ta może być **skorygowana w górę lub w dół** zgodnie z posiadaną wiedzą i doświadczeniem, na przykład

- ▶ jeżeli mierzy się linijką średnicę monety jednogroszowej i odczytuje *na oko* również dziesiąte części milimetra, można twierdzić, że wynikiem pomiaru jest $d = 15.4$ mm; $u_b(d) = 0.2$ mm;
- ▶ przy pomiarze rozmiarów pokoju taśmą mierniczą, należy zapewne przyjąć niepewność większą niż 1 mm, chociaż na taśmie widnieje skala z podziałką milimetrową.

Niepewność standardowa

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

Analiza danych

A. Domanowska

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność standardowa

Niepewność statystyczna $u_a(x)$

Średnia arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność pomiarowa $u_b(x)$

przyrządy proste analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary bezpośrednie i pośrednie

Prawo propagacji niepewności

Zapis wyników końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Niepewność $u_b(x)$ przyrządów analogowych

Niepewność graniczna (maksymalna) dla mierników analogowych określona jest przez **klasę** dokładności oraz **zakres** pomiarowy (obie wielkości należy odczytać z miernika)

$$\Delta x = \frac{\text{klasa} \cdot \text{zakres}}{100} \quad (7)$$

Niepewność standardowa typu b - przewodnik GUM zaleca zamieniać niepewność graniczną na niepewność standardową przy użyciu wzoru

$$u_b(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

co wynika z założenia, że jeśli nie ma dodatkowych informacji o działaniu przyrządu, przyjmuje się, że wynik pomiaru wystąpi z jednakowym prawdopodobieństwem w przedziale $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ co oznacza założenie, że mamy do czynienia z jednostajnym rozkładem prawdopodobieństwa, którego odchylenie standardowe jest równe połowie szerokości rozkładu, podzielonej przez $\sqrt{3}$.



klasa: 2.5, zakres: 20 A

$$u_b(x) = \frac{2.5 \cdot 20 \text{ A}}{100\sqrt{3}}$$

Analiza danych

A. Domanowska

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność standardowa

Niepewność statystyczna $u_a(x)$

Średnia arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność pomiarowa $u_b(x)$

przyrządy proste analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary bezpośrednie i pośrednie

Prawo propagacji niepewności

Zapis wyników końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Niepewność $u_b(x)$ przyrządów cyfrowych

Analiza danych

A. Domanowska

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność standardowa

Niepewność statystyczna $u_a(x)$

Średnia arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność pomiarowa $u_b(x)$

przyrządy proste analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary bezpośrednie i pośrednie

Prawo propagacji niepewności

Zapis wyników końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Określenie **miernik n -cyfrowy** oznacza, że największa wyświetlana liczba wynosi $10^n - 1$, np. dla miernika 4-cyfrowego 9999.

Niepewność graniczna (maksymalna)

$$\Delta x = a\% \cdot \text{wynik} + b \cdot \text{rozdzielczość} \quad (9)$$

gdzie $\%a$ - podawana w % **klasa przyrządu**, b - liczba naturalna, rozdzielczość - zmiana wartości mierzonej, odpowiadająca przeskokowi ostatniej cyfry. Wielkości $\%a$ i b podawane są przez producenta urządzenia, zatem aby obliczyć niepewność graniczną, należy zapoznać się z instrukcją obsługi.



miernik 5-cyfrowy
rozdzielczość: 0.01 jednostki

Niepewność standardowa typu b

$$u_b(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \quad (10)$$

Urządzenia zliczające

- ▶ liczniki impulsów, np. licznik Geigera Müllera

Niepewnością pomiarową dla urządzenia zliczającego jest pierwiastek kwadratowy z ilości zliczeń N

$$u_b(N) = \sqrt{N} \quad (11)$$



Pomiar bezpośredni - doświadczenie, w którym przy pomocy odpowiednich przyrządów dokonuje się wyznaczenia wartości wielkości fizycznej. Bezpośredni pojedynczy pomiar jest obarczony niepewnością pomiarową u_b . Seria pomiarów bezpośrednich jest obarczona niepewnością u_a .

Pomiar pośredni - doświadczenie, w którym wyznacza się wartość wielkości fizycznej przez pomiar innych wielkości fizycznych związanych z daną wielkością znanym związkiem funkcyjnym

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k),$$

gdzie y jest wielkością wyznaczaną w pomiarze pośrednim, a x_i jest pomiarem bezpośrednim, potrzebnym do wyznaczenia y .

Wielu wielkości fizycznych nie da się zmierzyć pojedynczym przyrządem, lecz wyznacza się metodą pomiaru pośredniego. Jeżeli szukana wielkość jest wyznaczana ze wzoru funkcyjnego

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k),$$

gdzie kolejne zmienne x_i są obarczone niepewnościami $u(x_i)$, wówczas niepewności te przenoszą się na wielkość obliczaną, powodując, że jest ona obciążona skończoną niepewnością

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2}. \quad (12)$$

Jest to **prawo propagacji niepewności**.

Zapis wyników końcowych

Niepewność (standardową) podaje się z zasady **z dokładnością dwu cyfr znaczących**. Wówczas graniczna niepewność spowodowana zaokrągleniem wynosi od 5% do 0.5% dla cyfr, odpowiednio, od 10 do 99. Podanie dwu cyfr jest w pełni wystarczające, gdyż sama wartość niepewności jest znana z dokładnością nie lepszą niż 10-20%.

Wyniki końcowe należy zapisać w jednym z poniższych formatów
format słowny:

okres wahadła wynosi 1.2867 s z niepewnością 0.0035 s,

przy użyciu symboli:

$$T = 1.2867 \text{ s}; u(T) = 0.0035 \text{ s},$$

skrótowy:

$$T = 1.2867(35) \text{ s}.$$

W przypadku zapisu skróconego, w nawiasie nie dodaje się przecinka. Np. wynik jest równy 123.5, niepewność 1.2, poprawny zapis skrócony: 123.5(12).

Analiza danych

A. Domanowska

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność
standardowa

Niepewność
statystyczna $u_a(x)$

Średnia
arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność
pomiarowa $u_b(x)$

przrzędy proste
analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary
bezpośrednie i
pośrednie

Prawo propagacji
niepewności

Zapis wyników
końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Porównanie z wartością dokładną (tabelaryczną lub nominalną).

Wnioskowanie o zgodność (bądź niezgodności) wartości zmierzonej y i dokładnej y_0 polega na obliczeniu różnicy $y - y_0$ i porównaniu z wartością niepewności rozszerzonej. Wartość zmierzona uznaje się za zgodną z wartością dokładną, jeżeli:

$$|y - y_0| < U(y)$$

gdzie U to **niepewność rozszerzona** (ang. expanded uncertainty) - powiększona niepewność standardowa, wybrana tak, by w przedziale $(y - U(y), y + U(y))$ znalazła się przeważająca część wyników pomiaru potrzebna do określonych zastosowań.

Wartość U oblicza się, mnożąc niepewność złożoną przez bezwymiarowy współczynnik rozszerzenia k

$$U(y) = k \cdot u(y)$$

W zgodzie z międzynarodową praktyką do obliczenia U przyjmuje się umowną wartość $k = 2$.

Zapis końcowy dla niepewności rozszerzonej

$$T = 1.2867 \pm 0.0070 \text{ s.}$$

Ocena zgodności wyników dwóch eksperymentów

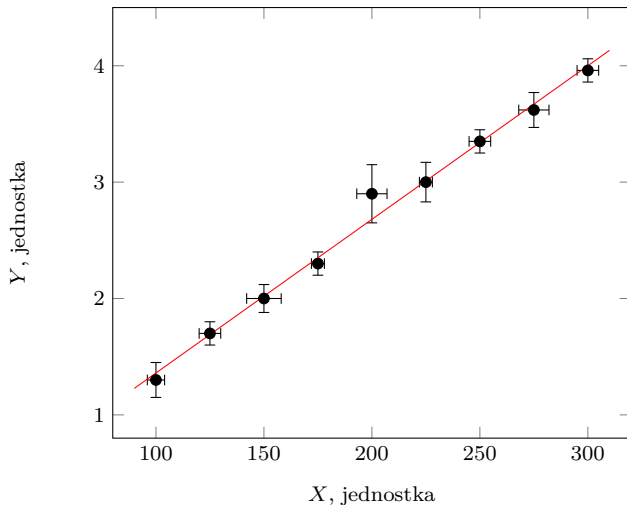
Wyniki dwóch niezależnych pomiarów tej samej wielkości mają z zasady różne wartości. Do dyspozycji są dwie wartości zmierzone x_1 i x_2 , oraz ich niepewności standardowe, $u(x_1)$ i $u(x_2)$.

Niepewność rozszerzona

$$U(x_1 - x_2) = k \sqrt{[u(x_1)]^2 + [u(x_2)]^2}$$

Wyniki pomiaru uważa się za zgodne ze sobą, jeżeli

$$|x_1 - x_2| < U(x_1 - x_2)$$



Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność
standardowaNiepewność
statystyczna $u_a(x)$ Średnia
arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność
pomiarowa $u_b(x)$ przrządy proste
analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary
bezpośrednie i
pośredniePrawo propagacji
niepewnościZapis wyników
końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

Przy wykonywaniu wykresu obowiązuje zasada przedstawiania na osi X wielkości, które zależą od eksperymentatora. Na osi Y przedstawia się wielkości będące skutkiem zmian X.

1 Osie wykresu

- ▶ muszą mieć ustaloną skalę liczbową
- ▶ powinny być opisane: jaka wielkość przedstawiona jest na osi, z jaką jednostką
- ▶ nie muszą zaczynać się od zera

1. Na wykresie należy przedstawić punkty pomiarowe.
2. Dla wielkości mierzonych bezpośrednio należy zaznaczyć słupki niepewności. Jeśli punktów jest dużo, lub słupki bardzo wysokie, dla przejrzystości można wykreślić słupki tylko dla niektórych punktów pomiarowych.
3. Punktów pomiarowych nie należy łączyć odcinkami prostymi ani krzywymi.
4. Należy przedstawić linię trendu dla wykresu o odpowiednim przebiegu. Jeśli teoria mówi, że dana zależność jest liniowa, należy obliczyć **regresję liniową** i narysować na wykresie prostą regresji.
6. Jeżeli z wykresu odczytuje się jakąś wielkość, należy ją na wykresie zaznaczyć.

Dokumenty

Błąd pomiaru

Niepewność standardowa

Niepewność statystyczna $u_a(x)$

Średnia arytmetyczna

Średnia ważona

Niepewność pomiarowa $u_b(x)$

przrządy proste analogowe

cyfrowe

zliczające

Pomiary bezpośrednie i pośrednie

Prawo propagacji niepewności

Zapis wyników końcowych

Ocena zgodności

Wykresy

Regresja liniowa

x_1	y_1
\vdots	\vdots
x_n	y_n

Do obliczenia współczynników a i b należy obliczyć następujące sumy

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

Współczynniki prostej i ich niepewności oblicza się z zależności

Nachylenie prostej	$a = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2}$	$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2} \cdot \frac{S_{\varepsilon\varepsilon}}{nS_{xx} - S_x^2}}$
Przecięcie prostej	$b = \frac{S_{xx} \cdot S_y - S_x S_{xy}}{nS_{xx} - S_x^2}$	$u(b) = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{S_{xx} S_{\varepsilon\varepsilon}}{nS_{xx} - S_x^2}}$

gdzie $S_{\varepsilon\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ oraz $\varepsilon_i = y_i - ax_i - b$.