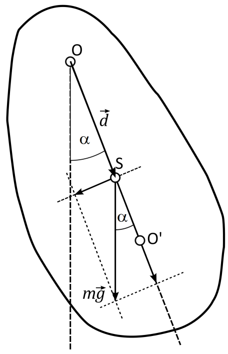
PRACOWNIA FIZYCZNA 1
Instytut Fizyki
Centrum Naukowo Dydaktyczne

P1-M2. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego metodą wahadła matematycznego

1 Wprowadzenie



Wahadło matematyczne jest to idealny układ mechaniczny, składający się z masy punktowej m, zawieszonej na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości L. Jest ono szczególnym przypadkiem wahadła fizycznego, czyli bryły zawieszonej swobodnie na osi obrotu O, która jest prostopadła do płaszczyzny rysunku i nie przechodzi przez środek masy S. W położeniu równowagi, prosta poprowadzona przez punkty O i S jest prostą pionową, wzdłuż której na bryłę działa siła ciężkości $m\vec{g}$. Gdy wahadło wychylone jest z położenia równowagi, powstaje moment siły ciężkości, zależny od odległości OS $= d$ i kąta wychylenia

$$\vec{M} = m\vec{d} \times \vec{g}, \tag{1}$$

$$M = mgd \sin \alpha. \tag{2}$$

Na podstawie drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}, \tag{3}$$

gdzie I jest momentem bezwładności wahadła, względem osi obrotu przechodzącej przez punkt O, a $\vec{\varepsilon}$ wektorem przyspieszenia kątowego bryły. W przypadku wahadła matematycznego

$$I = mL^2.$$

Jedynym momentem siły występującym w układzie (jeśli zaniedbać opory w osi obrotu) jest moment siły ciężkości powodujący obrót w kierunku położenia równowagi, przeciwnie do wychylenia

$$I\varepsilon = mL^2\varepsilon = -mgL \sin \alpha \tag{4}$$

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mg}{L} \sin \alpha \tag{5}$$

co po przekształceniu prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mg}{L} \sin \alpha = 0. \tag{6}$$

Rozwiązanie tego równania wymaga rozwinięcia w szereg potęgowy Newtona i prowadzi do wzoru na okres drgań w funkcji kąta wychylenia (amplitudy)

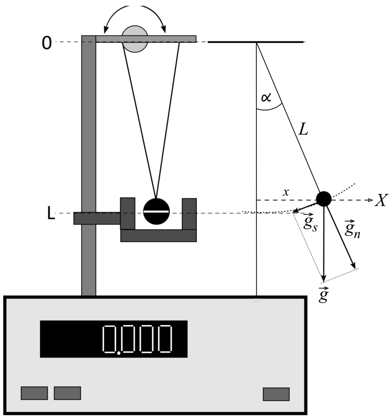
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \dots\right]. \tag{7}$$

Dla amplitudy wychylenia 7° popełnia się błąd względny w pomiarze okresu drgań rzędu 0.2%. Dla mniejszych wychyleń można przyjąć tzw. *izochronizm* wahadła, czyli niezależność okresu drgań od amplitudy i stosować wzór

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{8}$$

2 Układ pomiarowy

Układ pomiarowy jest przedstawiony na rysunku W podstawie urządzenia osadzona jest kolumna z poprzeczką, na której zawieszono wahadło matematyczne. Długość wahadła można zmieniać za pomocą pokrętła. Odczytuje się ją ze skali milimetrowej naniesionej na kolumnę, względem białego paska narysowanego na obciążniku. Czasomierz wykorzystuje złącze optoelektroniczne - fotokomórkę, umieszczoną na wsporniku o regulowanym położeniu. Pomiarowi podlega czas N wahnięć wahadła w funkcji długości wahadła. Ilość wahnięć oraz zakres zmian długości wahadła ustala prowadzący.



3 Pomiary

1. Ustalić początkową długość wahadła.
2. Odchylić kulkę o kąt mniejszy niż 7° od położenia równowagi w płaszczyźnie prostopadłej do wiązki światła fotokomórki. Zmierzyć czas N wahnięć wahadła. Powtórzyć pięciokrotnie.

Lp.	L, cm	t, s				
		1	2	3	4	5
1.						

3. Czynności 1 ÷ 4 wykonać dla innych długości wahadła (ilość pomiarów ustala prowadzący).

4 Opracowanie wyników pomiarów

1. Dla każdej długości wahadła, obliczyć wartości $\sqrt{L}$ oraz średnie wartości mierzonego czasu N wahnięć i okres jego drgań $T = t_{sr}/N$.
2. Obliczyć statystyczną niepewność typu $u_a(t_{sr})$, jako odchylenie standardowe wartości średniej, pomnożone przez odpowiedni współczynnik Studenta Fishera.
3. Korzystając z prawa propagacji niepewności obliczyć niepewności wyznaczonych okresów drgań.
4. Wyniki wpisać do tabeli:

Lp.	L, m	$\sqrt{L}$, $\sqrt{m}$	t_{sr}, s	T, s	$u_a(t_{sr})$, s	$u(T)$, s
1.						

5. Sporządzić wykres zależności $T(L)$. Nanieść słupki niepewności.
6. Sporządzić wykres zależności $T(\sqrt{L})$.
7. Metodą regresji liniowej wyznaczyć współczynniki prostej $T(\sqrt{L})$ i ich niepewności standardowe. Zaznaczyć prostą na wykresie. Czy prosta wychodzi poza słupki niepewności?
8. Na podstawie współczynnika nachylenia prostej, i w oparciu o równanie ruchu, wyznaczyć przyśpieszenie ziemskie g.
9. W oparciu o prawo przenoszenia niepewności, obliczyć niepewność wyznaczonej wartości g.

10. Obliczyć niepewność rozszerzoną. Przeprowadzić test zgodności otrzymanej wartości z wartością przyspieszenia ziemskiego obliczoną dla szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza dla Gliwic.