Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego metodą spadku swobodnego

Informatyka – profil praktyczny, semestr II
Wydział Matematyki Stosowanej
Politechnika Śląska

Sekcja 5
Erwin Matys, Bartłomiej Maliniecki

Kwiecień 2022

1 Obliczenia i wykresy

Obliczenie niepewności typu a (statystycznych) średnich czasów spadania $u_a(t_{sr})$.

Aby policzyć niepewności typu a skorzystamy ze wzoru:

$$u_a(t_{sr}) = \sqrt{\tfrac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(t_i - t_{sr})^2} \cdot t_{\alpha,N}.$$

Gdzie:

$t_{\alpha,N}$ - Współczynnik Studenta Fishera, gdzie za α przyjmujemy 0.6828, a za N liczbę pomiarów w serii, czyli w naszym przypadku 5.

$$t_{\alpha=0.6828,N=5} = 1.141$$

Po uwzględnieniu wszystkich danych wychodzi nam:

Lp.	t_{sr}, s	$u_a(t_{sr})$, s
1.	0.31900	0.00000
2.	0.34850	0.00029
3.	0.37600	0.00026
4.	0.40325	0.00023
5.	0.42825	0.00029
6.	0.45225	0.00023
7.	0.47300	0.00036
8.	0.49450	0.00046
9.	0.51575	0.00023
10.	0.53400	0.00026

Obliczenie niepewności typu b pomiaru czasu $u_b(t)$

Aby policzyć niepewność typu b pomiaru czaus $u_b(t)$ skorzystamy ze wzoru:

$$u_b(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}.$$

Gdzie $\Delta x = 0.003$ s dla użytego przyrządu.

$$u_b(t) = \frac{0.003}{\sqrt{3}} = 0.0017 \text{ s}.$$

Obliczenie niepewności całkowitych średnich czasów spadania $u(t_{sr})$ i umieszczenie wyników w tabeli

Do policzenia niepewności całkowitych średnich czasów spadania skorzystamy ze wzoru:

$$u(t_{sr}) = \sqrt{u_a^2(t_{sr}) + u_b^2(t)}$$

Tabelka z danymi:

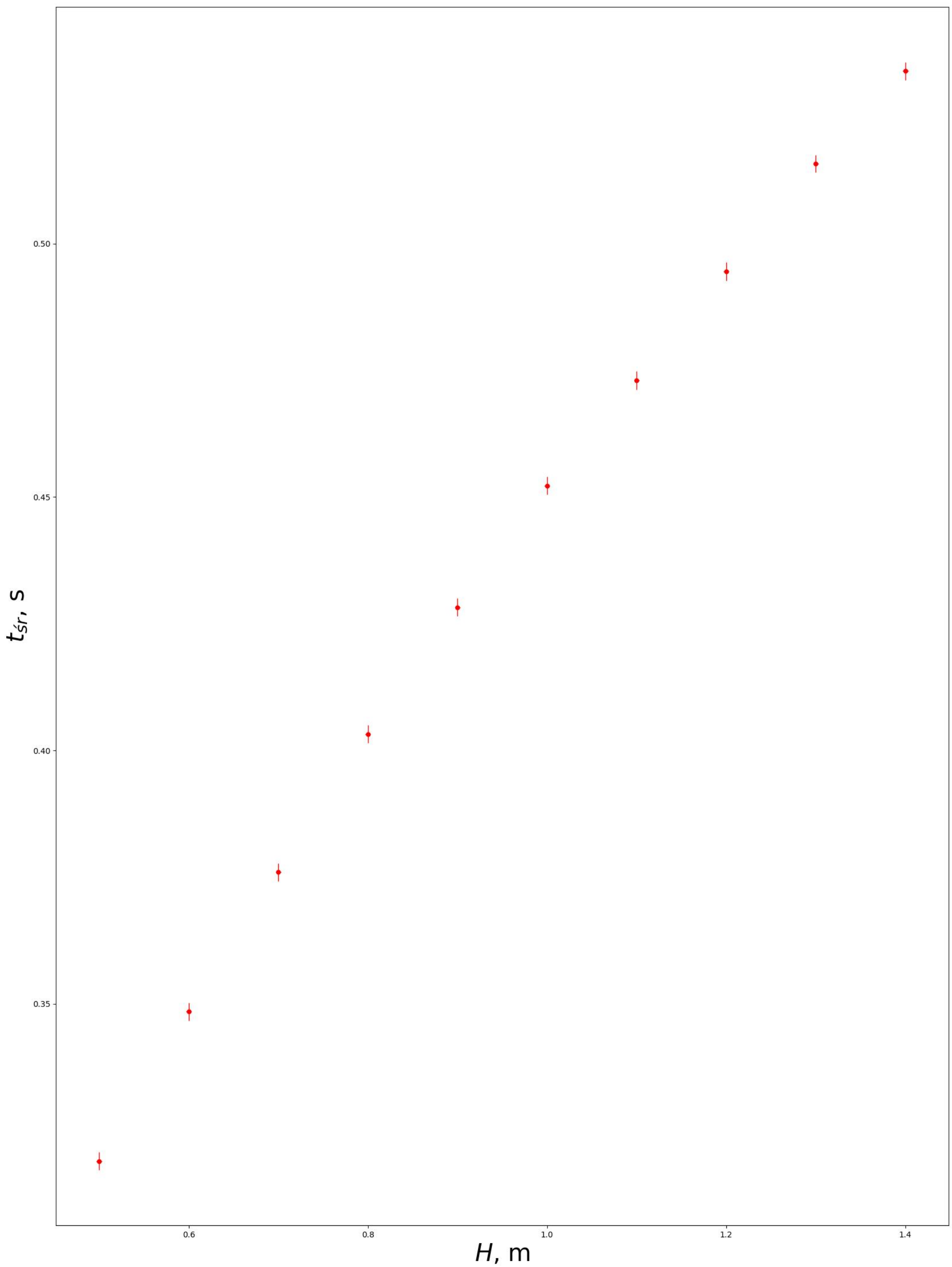
Lp.	H, m	$\sqrt{H}$, $\sqrt{m}$	t_{sr}, s	$u(t_{sr})$, s
1.	0.500	0.707	0.3190	0.0017
2.	0.600	0.775	0.3485	0.0018
3.	0.700	0.837	0.3760	0.0018
4.	0.800	0.894	0.4033	0.0017
5.	0.900	0.949	0.4283	0.0018
6.	1.000	1.0	0.4523	0.0017
7.	1.100	1.049	0.4730	0.0018
8.	1.200	1.095	0.4945	0.0018
9.	1.300	1.14	0.5158	0.0017
10.	1.400	1.183	0.5340	0.0018

Wykres zależności t_{sr} od H

Dla wykresu przyjmujemy następujące niepewności:

$u(H) = 0.003$ m

$u(t_{sr})$ - Niepewności całkowite średnich czasów spadania.



$t_{śr}$, s
0.35
0.40
0.45
0.50
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
H, m

Wykres zależności t_{sr} od $\sqrt{H}$

Dla wykresu przyjmujemy następujące niepewności:
$u(t_{sr})$ - Niepewności całkowite średnich czasów spadania.
Aby policzyć niepewność $u(\sqrt{H})$ musimy użyć prawa przenoszenia niepewności:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}[\frac{\partial y}{\partial x_i}u(x_i)]^2}.$$

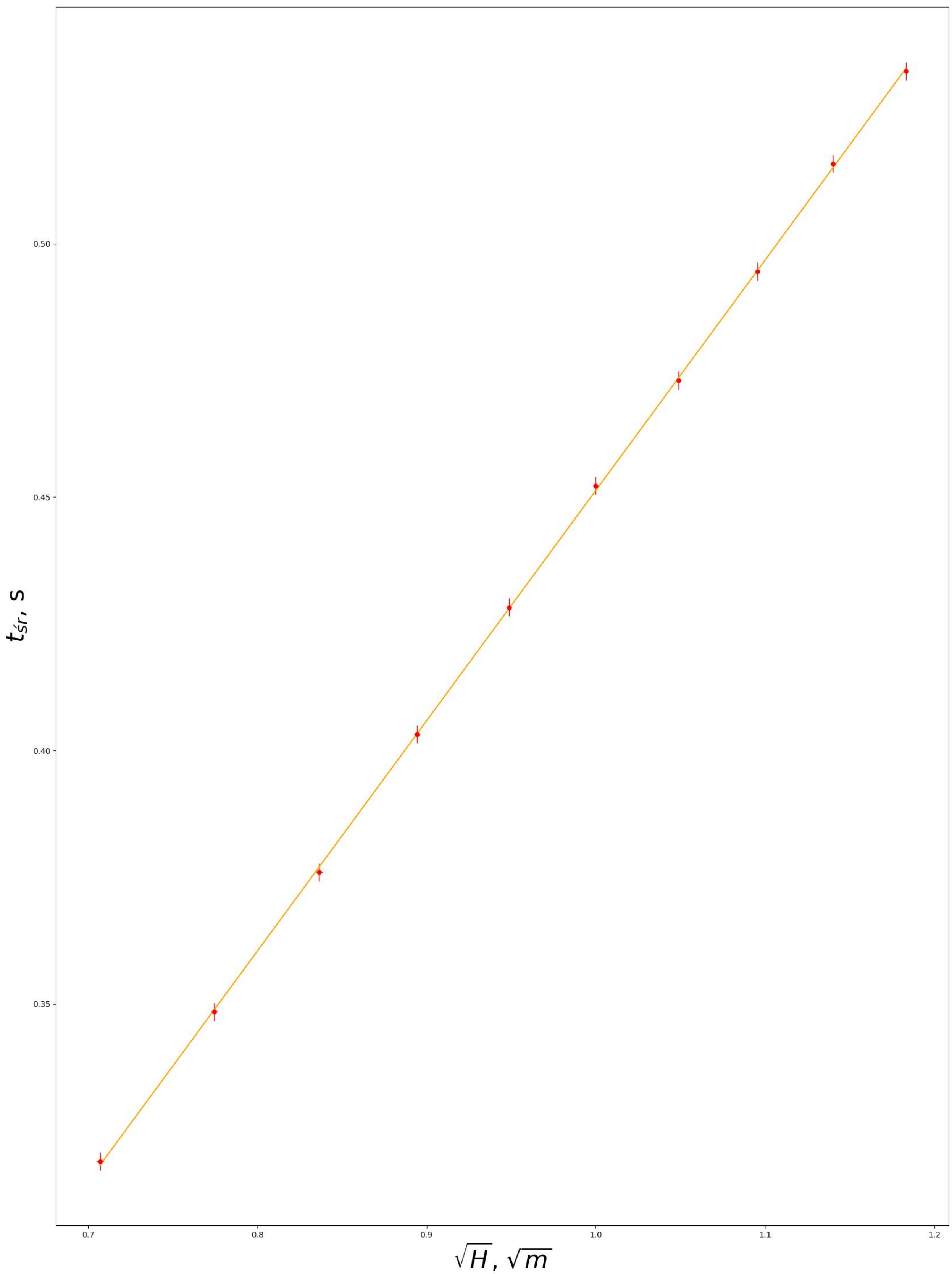
Dla $y = \sqrt{H}$ równanie ma postać:

$$u(\sqrt{H}) = \sqrt{[\frac{u(H)}{2\sqrt{H}}]^2} = \frac{u(H)}{2\sqrt{H}}.$$

Tabelka z danymi:

Lp.	$\sqrt{H}, \sqrt{m}$	$u(\sqrt{H}), \sqrt{m}$
1.	0.7070	0.0021
2.	0.7750	0.0019
3.	0.8370	0.0018
4.	0.8940	0.0017
5.	0.9490	0.0016
6.	1.0000	0.0015
7.	1.0490	0.0014
8.	1.0950	0.0014
9.	1.1400	0.0013
10.	1.1830	0.0013

Wykres na następnej stronie:


0.50
0.45
0.40
0.35
$t_{śr}$, s
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
$\sqrt{H}, \sqrt{m}$

Wyznaczenie metodą regresji liniowej współczynników prostej $t_{sr}(\sqrt{H})$ wraz z niepewnościami

Aby policzyć współczynniki kierunkowe prostych i wyrazy wolne skorzystamy ze wzorów:

$$a = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2},\ b = \frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{nS_{xx} - S_x^2}$$

Gdzie:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i,\ S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i,\ S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Do obliczenia niepewności skorzystamy ze wzorów:

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2} \cdot \frac{S_{\epsilon\epsilon}}{nS_{xx} - S_x^2}},\ u(b) = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{S_{xx} S_{\epsilon\epsilon}}{nS_{xx} - S_x^2}}$$

Gdzie:

$$S_{\epsilon\epsilon} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2,\ \text{dla } \epsilon_i = y_i - ax_i - b$$

Po obliczeniach wartości współczynników są równe:

$$a = 0.4500 \frac{s}{\sqrt{m}},$$
$$b = -0.00305 \text{ s.}$$

Wartości niepewności współczynników prostej:

$$u(a) = 0.0015 \frac{s}{\sqrt{m}},$$
$$u(b) = 0.00145 \text{ s.}$$

Postać końcowa:

$$a = 0.4500(15) \frac{s}{\sqrt{m}},\ b = -0.00305(145) \text{ s}$$

Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego g

Aby wyprowadzić wzór na przyspieszenie ziemskie skorzystamy z równania na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Przyjmując $S_0 = 0$ i $v_0 = 0$ oraz zamieniając drogę S na wysokość H i przyspieszenie a na przyspieszenie ziemskie g otrzymujemy:

$$H = \frac{1}{2}gt^2$$

Przekształcając wzór, w celu wyznaczenia g:

$$g = \frac{2H}{t^2}$$

Współczynnik kierunkowy funkcji $t_{sr}(\sqrt{H})$ jest równy $a = \frac{t_{sr}}{\sqrt{H}}$. Możemy to a podstawić do wzoru na g i otrzymujemy:

$$g = \frac{2}{a^2}$$

Po wstawieniu odpowiednich danych otrzymujemy:

$$g = \frac{2}{0.45^2} = 9.88\frac{m}{s^2}$$

Obliczenie niepewności przyspieszenie ziemskiego g korzystając z prawa przenoszenia niepewności

Aby wyliczyć niepewność przyspieszenia ziemskiego g, skorzystamy z prawa przenoszenia niepewności. Przyjmujemy, że niepewność $u(a) = 0.0015\frac{s}{\sqrt{m}}$. Prawo przenoszenia niepewności wyraża się wzorem:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}[\frac{\partial y}{\partial x_i}u(x_i)]^2}$$

Zatem prawo przenoszenia niepewności dla g ma postać:

$$u(g) = \sqrt{(\frac{-4}{a^3} \cdot u(a))^2}$$

Po wstawieniu liczb:

$$u(g) = 0.066\frac{m}{s^2}$$

Obliczenie niepewności rozszerzonej

Aby policzyć niepewność rozszerzoną skorzystamy ze wzoru:

$$U(y) = k \cdot u(y).$$

Gdzie:

k - bezwymiarowy współczynnik rozszerzenia. Przyjmujemy $k = 2$.

$u(y)$ - niepewność badanej wartości.

Dla g:

$$U(g) = 2 \cdot u(g) = 0.13\tfrac{m}{s^2}.$$
$$g = 9.88 \pm 0.13\tfrac{m}{s^2}.$$

Obliczenie przyspieszenia ziemskiego dla Gliwic i porównanie wyniku z otrzymaną wartością

Aby policzyć przyspieszenie ziemskie dla danej szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza, skorzystamy ze wzoru:

$$g_\varphi \approx 9.780318(1 + 0.0053024 \sin^2 \varphi - 0.0000058 \sin^2 2\varphi) - 3.086 \cdot 10^{-6} h$$

Gdzie:

φ - szerokość geograficzna [°],

h - wysokość nad poziomem morza [m].

Przyjmując szerokość geograficzną $\varphi = 50.3°$ i wysokość nad poziomem morza $h = 219$ m otrzymujemy:

$$g_0 = 9.80\tfrac{m}{s^2}.$$

Przeprowadzimy test zgodności otrzymanego g w wyniku doświadczenia z przyspieszeniem ziemskim g_0 dla Gliwic:

Test zgodności ma postać:

$$|y - y_0| < U(y)$$

Wstawiając g i g_0:

$$|g - g_0| < U(g)$$
$$0.08 < 0.132$$

Co pokazuje, że test zgodności zachodzi dla g zmierzonego przez nas.

2 Wnioski

Otrzymane wyniki potwierdziły poprawność wzoru na czas spadku swobodnego.

Co prawda doświadczenia nie wykonaliśmy w próżni, ale masa naszej kulki była na tyle duża, a jej rozmiar i odległość z jakiej ją zrzucaliśmy na tyle małe, a że mogliśmy zaniedbać opory powietrza.