

Naučno izračunavanje, Septembar2 rok, 12. septembar 2020.

Na Desktop-u u arhivi sa imenom *NI_septembar2_2020_materijali.zip* nalaze se Jupyter sveske i materijali potrebni za rad. Raspakovati arhivu pa dobijeni direktorijum preimenovati tako da odgovara vašim podacima u formi *NI_septembar2_2020_ImePrezime_BrojIndeksa*. Zatim mu pristupiti iz terminala pokretanjem komande *jupyter notebook*.

Na Desktop-u se nalazi i direktorijum sa imenom *docs* u kojem se nalazi dokumentacija.

1. (6 poena)

Za matricu $A \in R^{n \times n}$ kažemo da je pozitivno definitna ako važi $x^T A x > 0$ za sve vektore $x \in R^n$ različite od nule. Za simetrične matrice posebno važi da je matrica pozitivno definitna ako su sve njene sopstvene vrednosti veće od nule.

- a) Napisati funkciju koja proverava da li je zadata matrica A simetrična i pozitivno definitna, a zatim proveriti

da li uslovi važe za matricu $A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$.

- b) Geometrijska interpretacija uslova definitnosti se dovodi u vezu sa uglom rotacije γ između vektora x i Ax . Ovaj ugao je zbog uslova uvek manji od $\frac{\pi}{2}$, a maksimalna vrednost ugla rotacije γ određena je sa $k(A) = \frac{1+\sin(\gamma)}{1-\sin(\gamma)}$ gde $k(A)$ predstavlja uslovljenost matrice A . Odrediti najveći ugao rotacije (u stepenima) za zadatu matricu A .
- c) Računski potvrditi da se uslovljenost pozitivno definitne matrice A može dobiti i kao odnos njene najveće i najmanje sopstvene vrednosti.

2. (7 poena)

- a) Koristeći PIL biblioteku učitati slike *math.jpg* i *fourie.jpg*, prebaciti ih u crno-beli mod, a potom i prikazati njihove sadržaje.
- b) Napisati funkciju *blend(image1, image2, alpha)* koja kreira linearnu kombinaciju frekvencijskih spektara slika *image1* i *image2* sa koeficijentima *alpha* i *1-alpha*, a potom inverznom Furijeovom transformacijom generiše rezultujuću sliku. Preciznije, ako je *spectar1* frekvencijski spektar prve slike, a *spectar2* frekvencijski spektar druge slike, funkcija formira $\alpha * \text{spectar1} + (1-\alpha) * \text{spectar2}$ frekvencijski spektar, a potom inverznom Furijeovom transformacijom generiše rezultujuću sliku.
- c) Primeniti funkciju *blend* nad slikama *math.jpg* i *fourie.jpg* sa parametrom *alpha=0.2* i prikazati rezultujuću sliku.
- d) Primeniti funkciju *blend* nad slikama *math.jpg* i *fourie.jpg* sa parametrom *alpha=0.7* i prikazati rezultujuću sliku.

3. (6 poena)

Za rešavanje matrice sistema oblika $(A+uv^T)x = b$ u kojima vrednosti vektora u i v variraju može se koristiti zapis oblika $\begin{bmatrix} A & u \\ v^T & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$ i svođenje matrice sistema na LU formu $\begin{bmatrix} A & u \\ v^T & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ v^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & u \\ 0 & -1 - v^T A^{-1} u \end{bmatrix}$.

- a) Napisati funkciju *solve(A, b, u, v)* koja za zadatu matricu sistema A , vektor slobodnih članova b i vektore u i v pronalazi rešenje koristeći navedenu LU dekompoziciju.
- b) Koristeći funkciju *solve* za zadatu matricu $A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ i vektore $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ i $v = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ rešiti sistem.
- c) Uporediti rešenje sistema sa rešenjem koje se dobija bez korišćenja dekompozicije matrice, primenom neke bibliotečke funkcije. Kolika je razlika u tačnosti?

4. (6 poena)

Korisnik treba da kupi proizvode A i B. Budžet kojim raspolaže je 240 dolara. Jedan proizvođač nudi ove proizvode redom po cenama 1 dolar i 4 dolara, a drugi za po 2 dolara po proizvodu.

- a) Ukoliko je funkcija korisnosti određena proizvodom broja kupljenih proizvoda, izračunati njenu vrednost za svakog od proizvođača. Prilikom rešavanja koristiti biblioteku funkciju i SLSQP rešavač sa tačkom (5, 5) kao početnim rešenjem.
- b) Koliko proizvoda će kupac ukupno kupiti kod poželjnijeg proizvođača?