Práctico 2

HOJA 1

FECHA

1) $(\forall s: secu(\alpha))(Long(reverso(s)) \equiv Long(s))$

$P(s) = Long(reverso(s)) \equiv Long(s)$

~~$(\forall s: secu(\alpha))$~~

$P(\langle\rangle) \wedge (\forall s: secu(\alpha))(P(s) \Rightarrow (\forall a: \alpha) P(a \circ s))$

<u>Caso base</u>:

$Long(reverso(\langle\rangle)) \equiv Long(\langle\rangle)$

$Long(\langle\rangle) \equiv Long(\langle\rangle)$ (Por r_1)

Vale por sintácticamente iguales.

<u>Paso inductivo</u>:

Qvq:

$Long(reverso(a \circ s)) \equiv Long(a \circ s)$

$Long(reverso(s) \circ a) \equiv Long(a \circ s)$ (Por r_2)

$Long(a \circ reverso(s)) \equiv Long(a \circ s)$ (Por Lema)

$1 + Long(reverso(s)) \equiv 1 + Long(s)$ (Por L_2)

$Long(reverso(s)) \equiv Long(s)$

Vale por H.I.

<u>Lema</u>:

$(\forall s: secu(\alpha))(\forall a: \alpha)(Long(s) + 1 \equiv Long(s \circ a))$

$P(s) = (\forall a: \alpha)(Long(s) + 1 \equiv Long(s \circ a))$

$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall b: \alpha)(P(b \circ s))$

<u>Caso base</u>:

$Long(\langle\rangle) + 1 \equiv Long(\langle\rangle \circ a)$

~~$0+1 \equiv Long(\langle\rangle \circ a)$ (Por L_1)~~

$1 \equiv Long(b \circ \langle\rangle)$ (Por $\circ_1$)

NOTA

$1 \equiv 1 + Long(\langle\rangle)$ (Por l_2)

Son iguales

Paso inductivo

$$Long(b \circ s) + 1 \equiv Long(b \circ s \circ a)$$

$$Long(b \circ s) + 1 \equiv Long(s \circ a) + 1$$

Lema: $(\forall s : secu(\alpha))\,(\forall a : \alpha)\ reverso(s \circ a) \equiv a \circ reverso(s)$

$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall b : \alpha)\ P(b \circ s)$

$reverso(\langle\rangle \circ a) \equiv a \circ reverso(\langle\rangle)$

$reverso(\langle\rangle \circ a) \equiv a \circ \langle\rangle$ (Por r_1)

$reverso(a \circ \langle\rangle) \equiv a \circ \langle\rangle$ (Por o_1)

$reverso(\langle\rangle) \circ a \equiv a \circ \langle\rangle$ (Por r_2)

$\langle\rangle \circ a \equiv a \circ \langle\rangle$ (Por r_1)

$a \circ \langle\rangle \equiv a \circ \langle\rangle$ (Por o_1)

✓

$reverso(b \circ (s \circ a)) \equiv a \circ reverso(b \circ s)$

$reverso(s \circ a) \circ b \equiv a \circ reverso(b \circ s)$ (Por r_2)

$reverso(s \circ a) \circ b \equiv a \circ (reverso(s) \circ b)$ (Por r_2)

$reverso(s \circ a) \circ b \equiv (a \circ reverso(s)) \circ b$ (Por o_2)

$(a \circ reverso(s)) \circ b \equiv (a \circ reverso(s)) \circ b$ (Por H.I)

✓

$Long(a \circ s) \equiv Long(s \circ b)$ ← $(\forall s : secu(\alpha))$ $(\forall a, b : \alpha)$

$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall c : \alpha)(P(c \circ s))$

$P(\langle\rangle)$:

$Long(a \circ \langle\rangle) \equiv Long(\langle\rangle \circ b)$

$1 + Long(\langle\rangle) \equiv Long(\langle\rangle \circ b)$ (Por L_2)

$1 \equiv Long(\langle\rangle \circ b)$ (Por L_1)

$1 \equiv Long(b \circ \langle\rangle)$ (Por o_1)

$1 \equiv 1 + Long(\langle\rangle)$ (Por L_2)

$1 \equiv 1$ (Por L_1)

NOTA

HOJA 2

FECHA

Paso inductivo:

Qvq

$\text{long}(c\cdot(a\cdot s)) \equiv \text{Long}(c\cdot(s\circ b))$

$1+\text{Long}(a\cdot s) \equiv 1+\text{Long}(s\cdot b)$ (L_2 de los dos lados)

Vale por H.I.

3

$(\forall s,t : secu(\alpha))(\text{long}(s \,\&\, t) \equiv \text{long}(s) + \text{long}(t))$

$P(s) : (\forall t : secu(\alpha))(\text{long}(s \,\&\, t) \equiv \text{Long}(s) + \text{long}(t))$

Esquema:

$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall a : \alpha)\ P(a\cdot s)$

Caso base:

$\text{Long}(\langle\rangle \,\&\, t) \equiv \text{long}(\langle\rangle) + \text{Long}(t)$

$\text{Long}(t) \equiv \text{Long}(\langle\rangle) + \text{Long}(t)$ (Por $\&_1$)

$\text{Long}(t) \equiv 0 + \text{Long}(t)$ (Por l_1)

$\text{Long}(t) \equiv \text{Long}(t)$ ✓

Paso inductivo:

$\text{Long}((a\cdot s) \,\&\, t) \equiv \text{long}(a\cdot s) + \text{Long}(t)$

$\text{Long}(a\cdot(s \,\&\, t)) \equiv \text{Long}(a\cdot s) + \text{Long}(t)$ (Por $\&_2$)

$1+\text{Long}(s \,\&\, t) \equiv 1+\text{Long}(s) + \text{Long}(t)$ (Por l_2 en ambos lados)

$\text{Long}(s \,\&\, t) \equiv \text{Long}(s) + \text{Long}(t)$

Vale por H.I.

NOTA

④ $(\forall s,t : secu(\alpha))(Reverso(s \,\&\, t) \equiv Reverso(t) \,\&\, Reverso(s))$

$P(s) : (\forall t : secu(\alpha))(Reverso(s \,\&\, t) \equiv Reverso(t) \,\&\, Reverso(s))$

<u>Esquema</u>:

$$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall a : \alpha)\ P(a \circ s)$$

<u>Caso base</u>

$Reverso(\langle\rangle \,\&\, t) \equiv Reverso(t) \,\&\, Reverso(\langle\rangle)$

$Reverso(t) \equiv Reverso(t) \,\&\, Reverso(\langle\rangle)$ (Por $\&_1$)

$Reverso(t) \equiv Reverso(t)$ ✓ (Por Lema$_1$)

<u>Lema$_1$</u>: $(\forall s : secu(\alpha))(s \,\&\, \langle\rangle \equiv s)$

$P(s) = (s \,\&\, \langle\rangle \equiv s)$

$[P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall a : \alpha)\ P(a \cdot s)]$

<u>$P(\langle\rangle)$</u>: $\langle\rangle \,\&\, \langle\rangle \equiv \langle\rangle$

$\langle\rangle \equiv \langle\rangle$ (Por $\&_1$)

$P(s) \Rightarrow \ldots$

$(a \circ s) \,\&\, \langle\rangle \equiv a \circ s$

$a \circ (s \,\&\, \langle\rangle) \equiv a \circ s$ (Por $\&_2$)

$a \circ s \equiv a \circ s$ (Por H.I)

✓

~~Lema$_2$: $(\forall s,t : secu(\alpha))(\forall a:\alpha)(t \,\&\, (s \circ a) \equiv (t \,\&\, s) \circ a)$~~

~~$P(s) \equiv (\forall t : secu(\alpha))(\forall a : \alpha)\ t \,\&\, (s \circ a) \equiv (t \,\&\, s) \circ a$~~

~~$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall b : \alpha)\ P(b \circ s)$~~

~~$P(\langle\rangle)$: $t \,\&\, (\langle\rangle \circ a) \equiv (t \,\&\, \langle\rangle) \circ a$~~

~~$t \,\&\, (a \cdot \langle\rangle) \equiv (t \,\&\, \langle\rangle) \circ a$~~

~~$t \,\&\, (a \cdot \langle\rangle) \equiv t \circ a$ (Por Lema$_1$)~~

~~$t \,\&\, (a \cdot \langle\rangle) \equiv t \circ (a \cdot \langle\rangle)$~~

<u>Paso inductivo</u>:

$Reverso((a \circ s) \,\&\, t) \equiv Reverso(t) \,\&\, Reverso(a \circ s)$

$Reverso(a \circ (s \,\&\, t)) \equiv Reverso(t) \,\&\, Reverso(a \circ s)$ (Por $\&_2$)

$Reverso(s \,\&\, t) \circ a \equiv Reverso(t) \,\&\, (Reverso(s) \circ a)$ (Por r_2 en ambos lados)

$Reverso(s \,\&\, t) \circ a \equiv (Reverso(t) \,\&\, Reverso(s)) \circ a$ (Por Lema$_2$)

$Reverso(s \,\&\, t) \circ a \equiv Reverso(s \,\&\, t) \circ a$ (Por H.I)

✓

NOTA

Lema 2:

$$(\forall s,t : secu(\alpha))(\forall a : \alpha)((s \& t) \circ a \equiv s \& (t \circ a))$$

$$P(s) = (\forall t : secu(\alpha))(\forall a : \alpha)((s \& t) \circ a \equiv s \& (t \circ a))$$

Esquema:

$$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall b : \alpha)\ P(b \cdot s)$$

$P(\langle\rangle)$:

$$(\langle\rangle \& t) \circ a \equiv \langle\rangle \& (t \circ a)$$

$$t \circ a \equiv t \circ a \qquad (\&_1 \text{ de ambos lados})$$

Paso inductivo:

$$((b \cdot s) \& t) \circ a \equiv (b \cdot s) \& (t \circ a)$$

$$(b \cdot (s \& t)) \circ a \equiv b \cdot (s \& (t \circ a)) \qquad (\text{Por } \&_2 \text{ de ambos lados})$$

$$b \cdot ((s \& t) \circ a) \equiv b \cdot (s \& (t \circ a)) \qquad (\text{Por } \circ_2)$$

$$b \cdot (s \& (t \circ a)) \equiv b \cdot (s \& (t \circ a)) \qquad (\text{Por HI})$$

✓

$$(\forall r, s, t : secu(\alpha))((s \leq t \equiv true) \Rightarrow (((r \& s) \leq (r \& t)) \equiv true))$$

$\bullet \leq \bullet : secu(\alpha) \times secu(\alpha) \rightarrow Nat$

$\leq_{s_1})\ \langle\rangle \leq t \equiv true$

$\leq_{s_2})\ a \cdot s \leq t \equiv \neg vacia(t) \wedge (a <_\alpha prim(t) \vee (a =_\alpha prim(t) \wedge s \leq fin(t)))$

$\langle\rangle \leq \langle\rangle$?

Por $\leq_1$ da true

Por s_2

(5) $(\forall r,s,t : secu(\alpha))((s \le t \equiv true) \Rightarrow (((r \& s) \le (r \& t) \equiv true))$

$P(s) : (\forall r,t : secu(\alpha))((s \le t \equiv true) \Rightarrow (((r \& s) \le (r \& t) \equiv true))$

$\boxed{P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall a : \alpha)\, P(a \cdot s)}$

$P(\langle\rangle)$:

$(\langle\rangle \le t \equiv true) \Rightarrow ((r \& \langle\rangle) \le (r \& t) \equiv true))$

El antecedente vale por $\le_{s1}$:

$((r \& \langle\rangle) \le (r \& t)) \equiv true$

$r \le (r \& t) \equiv true$ (Por Lema 1 de ej 4)

Vale por el Lema de abajo

Lema:

$(\forall s,t : secu(\alpha))(s \le s \& t)$

$P(s) : (\forall t : secu(\alpha))(s \le s \& t)$

$P(\langle\rangle) \wedge (P(s) \Rightarrow (\forall a : \alpha)\, P(a \cdot s))$

$P(\langle\rangle)$:

$\langle\rangle \le \langle\rangle \& t$ vale por $\le_{s1}$

$P(a \cdot s)$:

$a \cdot s \le (a \cdot s) \& t$

$a \cdot s \le a \cdot (s \& t)$ (Por $\&_2$)

$\neg vacia(a \cdot (s \& t)) \wedge_L (a <_\alpha prim(a \cdot (s \& t)) \vee (a =_\alpha prim(a \cdot (s \& t)) \wedge s \le fin(a \cdot (s \& t))))$

Como $a \cdot (s \& t)$ no es vacío miro la segunda parte

$(a <_\alpha a) \vee (a =_\alpha a \wedge s \le fin(a \cdot (s \& t)))$ (Por def de prim)

$\boxed{a =_\alpha a}$ entonces miro a lo derecho del $\vee$

$(a =_\alpha a) \wedge (s \le s \& t)^{②}$ (Por axiomas de fin)

~~Ambos~~ La igualdad es trivial y ② es la H.I

NOTA Vale el lema.

$P(a \cdot s)$:

$$(a \cdot s \leq t \equiv true) \Rightarrow ((r \,\&\, a \cdot s) \leq (r \,\&\, t) \equiv true)$$

si no vale el antecedente la implicación vale trivialmente.

Asumo $a \cdot s \leq t \equiv true$, falta ver:

$$(r \,\&\, a \cdot s) \leq (r \,\&\, t) \equiv true$$

$P(r): (\forall s,t : secu(\alpha))((s \leq t \equiv true) \Rightarrow ~~(\ldots)~~ (((r \,\&\, s) \leq (r \,\&\, t) \equiv true))$

$P(\langle\rangle) \wedge P(r) \Rightarrow (\forall a : \alpha) P(a \cdot r)$

$P(\langle\rangle)$:

$$(s \leq t \equiv true) \Rightarrow ((\langle\rangle \,\&\, s) \leq (\langle\rangle \,\&\, t) \equiv true)$$

$$(s \leq t \equiv true) \Rightarrow (s \leq t \equiv true) \quad (\text{Por } \&_1)$$

si no vale el antecedente la implicación vale, si vale el antecendente es idéntico al consecuente y la implicación vale.

$P(r) \Rightarrow P(a \cdot r)$:

$$(s \leq t \equiv true) \Rightarrow (((a \cdot r) \,\&\, s) \leq ((a \cdot r) \,\&\, t) \equiv true)$$

supongo que vale el antecedente (si no es trivial):

Qvq: $((a \cdot r) \,\&\, s) \leq ((a \cdot r) \,\&\, t) \equiv true$

$a \cdot (r \,\&\, s) \leq a \cdot (r \,\&\, t) \equiv true$ (por $\&_2$)

$(r \,\&\, s) \leq (r \,\&\, t) \equiv true \Rightarrow a \cdot (r \,\&\, s) \leq (r \,\&\, t)$ por la prop

✓

6

$(\forall s,t : secu(\alpha))(\forall i : nat)$

$$(1 \leq i \leq Long(s) + Long(t) \equiv true) \Rightarrow ((s \& t)[i] \equiv \text{if } (1 \leq i \leq Long(s)) \text{ then } s[i] \text{ else } t[i - Long(s)] \text{ fi})$$

$P(s)$: $(\forall t : secu(\alpha))(\forall i : nat)$

$$((1 \leq i \leq Long(s) + Long(t) \equiv true) \Rightarrow ((s \& t)[i] = \text{if } ((1 \leq i \leq Long(s)) \text{ then } s[i] \text{ else } t[i - Long(s)] \text{ fi}))$$

$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall a : \alpha) P(a \cdot s)$:

$$((1 \leq i \leq Long(\langle\rangle) + Long(t) \equiv true) \Rightarrow ((\langle\rangle \& t)[i] \equiv \text{if } ((1 \leq i \leq Long(\langle\rangle)) \text{ then } \langle\rangle[i] \text{ else } t[i - Long(\langle\rangle)] \text{ fi}$$

$$\Updownarrow$$

$$(1 \leq i \leq Long(t) \equiv true) \Rightarrow$$

$$\hookrightarrow (t[i] \equiv \text{if } (1 \leq i \leq 0)) \text{ then } \langle\rangle[i] \text{ else } t[i])$$ Vale

siempre entro por el else

$$(1 \leq i \leq \overbrace{Long(a \cdot s)}^{1 + Long(s)} + Long(t) \equiv true) \Rightarrow (a \cdot (s \& t))[i] \equiv \text{if } 1 \leq i \leq Long(a \cdot s)$$

$$\text{then } (a \cdot s)[i] \text{ else } t[i - Long(a \cdot s)]$$

Supongo que vale en ant. (si no trivial)

7

$(\forall s: secu(\alpha))(\forall i: nat)((1 \leq i \leq Long(s) \equiv true) \Rightarrow Reverso(s)[i] \equiv s[Long(s) - i + 1]))$

$P(s) = (\forall i: nat)((1 \leq i \leq Long(s) \equiv true) \Rightarrow Reverso(s)[i] \equiv s[Long(s) - i + 1]))$

Esquema inductivo:

$$\underbrace{P(<>)}_{CB} \wedge \underbrace{P(s)}_{H \cdot I} \Rightarrow \underbrace{(\forall a: \alpha) P(a \circ s)}_{T \cdot I}$$

Caso base:

$\overbrace{(1 \leq i \leq Long(<>))}^{A} \Rightarrow Reverso(<>)[i] \equiv <>[Long(<>) - i + 1])$

A $1 \leq i \leq ~~Long~~\ 0$ (Por L_1)

El antecedente de la implicación nunca es verdadero así que la implicación vale.

Paso inductivo:

$(1 \leq i \leq Long(a \circ s)) \Rightarrow (Reverso(a \circ s)[i] \equiv a \circ s[Long(a \circ s) - i + 1])$

$(1 \leq i \leq 1 + Long(s)) \Rightarrow (Reverso(a \circ s)[i] \equiv (a \circ s)[Long(a \circ s) - i + 1])$ (Por L_2)

$\cancel{(0 \leq i \leq Long(s))} \Rightarrow$

$(1 \leq i \leq 1 + Long(s)) \Rightarrow (Reverso(a \circ s)[i] \equiv s[Long(s) - i])$ (Por L_2)

~~Si $(1 \leq i \leq 1 + Long(s)) \Rightarrow (if\ i \equiv 1\ then\ a\ else\ Reverso$~~

$\Rightarrow (Reverso(s) \circ a)[i] \equiv (a \circ s)[Long(s) - i]$ (Por r_2)

$\boxed{Si\ i = 1 + Long(s)}$:

$(Reverso(s) \circ a)[Long(s) + 1] \equiv (a \circ s)[1]$ (Reemplazando)

$(Reverso(s) \circ a)[Long(s) + 1] \equiv if\ 1 \equiv 1\ then\ a\ else\ s[1 - 1]\ fi$ (Por $\circ[\circ]$)

$(Reverso(s) \circ a)[Long(s) + 1] \equiv a$ (Por $i = 1$)

$a \quad - \quad a \equiv a$ (Por Lema 1)

Lema 1:

$$(\forall s: secu(\alpha))(\forall a:\alpha)((s\circ a)[Long(s\circ a)] \equiv a)$$

$$P(s) \equiv (\forall a:\alpha)((s\circ a)[Long(s\circ a)] \equiv a)$$

E.I:

$$P(\langle\rangle) \land P(s) \Rightarrow (\forall b:\alpha)\, P(b\bullet s)$$

C.B:

$(\langle\rangle\circ a)[Long(\langle\rangle\circ a)] \equiv a$

$(a\bullet\langle\rangle)[Long(a\bullet\langle\rangle)] \equiv a$ (Por $\circ_1$)

$(a\bullet\langle\rangle)[1+Long(\langle\rangle)] \equiv a$ (Por L_2)

$(a\bullet\langle\rangle)[1+0] \equiv a$ (Por L_1)

if $1=1$ then a else $\langle\rangle[1-1] \equiv a$ (Por $\bullet[\bullet]$)

a $\qquad a \equiv a$ ✓ (Por $1=1$)

P.I:

$((b\bullet s)\circ a)[Long((b\bullet s)\circ a)] \equiv a$

$(b\bullet(s\circ a))[Long(b\bullet(s\circ a))] \equiv a$ (Por $\circ_2$ dos veces)

$(b\bullet(s\circ a))[1+Long(s\circ a)] \equiv a$ (Por L_2)

(if $1+Long(s\circ a)=1$ then b else $(s\circ a)[1+Long(s\circ a)-1]) \equiv a$ (Por def)

(if $Long(s\circ a)=0$ then b else $(s\circ a)[Long(s\circ a)]) \equiv a$

Pero $Long(s\circ a) \neq 0$ entonces miro la rama else:

$(s\circ a)[Long(s\circ a)] \equiv a$

Que vale por H.I ✓

NOTA

HOJA 6

FECHA

Si $1 \leq i \leq Long(s)$:

$(1 \leq i \leq Long(a \cdot s) \equiv true) \Rightarrow (Reverso(s) \circ a)[i] \equiv (a \cdot s)[Long(a \cdot s) - i]$

$\Rightarrow Reverso(s)[i] \equiv (a \cdot s)[Long(s) - i]$ (Por Lema 2)

(Por Def) $\Rightarrow Reverso(s)[i] \equiv$ if $Long(s) - i \equiv 1$ then a else $s[Long(s)-i-1]$

Lema 2:

$(\forall s : secu(\alpha))(\forall a : \alpha)(\forall i : nat)$

$((1 \leq i \leq Long(s)) \Rightarrow ((s \circ a)[i] \equiv s[i])))$

$P(s) \equiv ((\forall a : \alpha)(\forall i : nat)((1 \leq i \leq Long(s)) \Rightarrow ((s \circ a)[i] \equiv s[i]))$

E.I:

$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall b : \alpha)\, P(b \cdot s)$

CB:

Mirando el antecedente de la implicación:

$(1 \leq i \leq Long(\langle\rangle))$

$(1 \leq i \leq 0)$ (Por L_1)

false

La implicación vale trivialmente.

PI:

$(1 \leq i \leq Long(b \cdot s)) \Rightarrow ((b \cdot s) \circ a)[i] \equiv (b \cdot s)[i]$

$(1 \leq i \leq 1 + Long(s)) \Rightarrow ((b \cdot s) \circ a)[i] \equiv (b \cdot s)[i]$ (Por L_2)

$(1 \leq i \leq 1 + Long(s)) \Rightarrow (b \cdot (s \circ a))[i] \equiv (b \cdot s)[i]$

NOTA

$((1 \leq i \leq Long(s)+1) \Rightarrow$ if $i=1$ then b else $(s\circ a)[i-1] \equiv (b\bullet s)[i]$

$\boxed{\text{Caso } i=1:}$

El antecedente vale:

~~if~~ $b \equiv (b\bullet s)[1]$ ($i=1$ entro por la rama then)

$b \equiv$ if $i=1$ then b else $s[1-1]$ (Por def)

$b \equiv b$ ($i=1$ entro por la rama then)

$\boxed{\text{Caso } 2 \leq i \leq Long(s)+1:}$

$((1 \leq i \leq Long(s)+1) \Rightarrow$ if $i=1$ then b else $(s\circ a)[i-1] \equiv (b\bullet s)[i]$

$((2 \leq i \leq Long(s)+1) \Rightarrow$ if $i=1$ then b else $(s\circ a)[i-1] \equiv (b\bullet s)[i]$ (Por hip.)

~~Supongo que vale el antecedente:~~

$((1 \leq i-1 \leq Long(s)) \Rightarrow ($if $i=1$ then b else $(s\circ a)[i-1] \equiv (b\bullet s)[i])$

$(1 \leq i-1 \leq Long(s)) \Rightarrow (s\circ a)[i-1] \equiv (b\bullet s)[i]$ (Por hip $i \geq 2$ entonces entro por el else)

$\Rightarrow (s\circ a)[i-1] \equiv$ if $i=1$ then b else $s[i-1]$ (por def)

$(1 \leq i-1 \leq Long(s)) \Rightarrow (s\circ a)[i-1] \equiv s[i-1]$ (por hip $i \geq 2$ entonces rama else

$(1 \leq j \leq Long(s)) \Rightarrow (s\circ a)[j] \equiv s[j]$ (cambio de variable $j = i-1$)

<u>Vale por H.I</u> ✓

NOTA

HOJA 7

FECHA

$1) \to \; \equiv \;\to_1 \; \cup \to_2$

$2) \to_1$ CR y SN

$3) [\,] \to_3 \;\to_1$ f.n

$1) \to_3 \; \subseteq \to$

$2)\; a \to_2 b \Rightarrow a\downarrow_1 \to_3 b\downarrow_1$

$\Rightarrow) \to$ CR

$(\lambda x.t)\, s \to_\beta \{s/x\}\, t$

LSC:

$(\lambda x.t)\, s \to$

$\boxed{\text{Caso } 1 \leq i \leq Long(s):}$

$(1 \leq i \leq Long(s)) \Rightarrow (Reverso(a \bullet s)[i] \equiv (a \bullet s)[Long(a \bullet s) - i + 1]$

$\Rightarrow (Reverso(s) \circ a)[i] \equiv (a \bullet s)[Long(a \bullet s) - i + 1]$ (Por F_2)

$\Rightarrow (Reverso(s)[i] \equiv (a \bullet s)[Long(s) - i + 2]$ (Por lema 2 y L_2)

$\Rightarrow (Reverso(s)[i] \equiv$ if $Long(s) - i \overset{+2}{=} 1$ then a else $s[Long(s) - (i-1)]$

$\Rightarrow Reverso(s)[i] \equiv$ if $Long(s) - i \overset{+2}{=} 1$ then a else $s[Long(s) - i + 1]$

Si $Long(s) - i \overset{+2}{\equiv} 1 \Rightarrow i = Long(s) + 1$, que no puede ser por hipótesis.

$\Rightarrow$ Miro solo la rama else:

$(1 \leq i \leq Long(s)) \Rightarrow (Reverso(s)[i] \equiv s[Long(s) - i + 1])$

Que vale por H.I ✓

NOTA

⑧ $(\forall s: secu(\alpha))(\forall n: nat)(\cancel{Tomar}\ Tomar(s,n)\ \&\ Sacar(s,n) \equiv s)$

Inducción en s:

$P(s) = (\forall n: nat)(Tomar(s,n)\ \&\ Sacar(s,n) \equiv s)$

Esquema:

$$P(\langle\rangle) \land P(s) \Rightarrow (\forall a: \alpha)\, P(a \bullet s)$$

CB:

$Tomar(\langle\rangle, n)\ \&\ Sacar(\langle\rangle, n) \equiv \langle\rangle$

$\langle\rangle\ \&\ Sacar(\langle\rangle, n) \equiv \langle\rangle$ (Por t_1)

$\langle\rangle\ \&\ \langle\rangle \equiv \langle\rangle$ (Por s_1)

$\langle\rangle \equiv \langle\rangle$ (Por $\&_1$)

✓

P.I:

$Tomar(a \bullet s, n)\ \&\ Sacar(a \bullet s, n) \equiv a \bullet s$

~~if n=0 then a else Tomar (s,n-1) & Sacar(a•s,n) ≡ a•s (Por t_2)~~

~~if n=0 then a else Tomar(s,n-1) &~~

~~if n=0 then s else Sacar(s,n-1) ≡ a•s (Por s_2)~~

~~Caso n≠0:~~

~~a & s ≡ a•s~~

if n=0 then ⟨⟩ else a•Tomar(s,n-1) & Sacar(a•s,n) ≡ a•s (Por t_2)

if n=0 then ⟨⟩ else a•Tomar(s,n-1) fi &
if n=0 then a•s else Sacar(s,n-1) fi ≡ a•s (Por s_2)

Caso n=0:

$\langle\rangle\ \&\ a \bullet s \equiv a \bullet s$ (n=0 en ambos casos se ejecuta la rama else)

$a \bullet s \equiv a \bullet s$ (Por $\&_1$)

✓

NOTA

HOJA 8

FECHA

Caso $n>0$:

$(a \cdot \text{Tomar}(s, n-1)) \& \text{Sacar}(s, n-1) \equiv a \cdot s$ (n>0 entonces se ejecuta lo mismo else en ambos casos)

$a \cdot [\underbrace{\text{Tomar}(s, n-1) \& \text{Sacar}(s, n-1)}_{HI}] \equiv a \cdot s$ (Por &2)

$a \cdot s \equiv a \cdot s$ (Por HI)

✓

Inducción en n:

$P(n): (\forall s: \text{secu}(\alpha))(\text{Tomar}(s, n) \& \text{Sacar}(s, n) \equiv s)$

Esquema:

$P(0) \wedge P(n) \Rightarrow P(\overbrace{\text{suc}(n)}^{n+1})$

CB:

$\text{Tomar}(s, 0) \& \text{Sacar}(s, 0) \equiv s$

Caso $s \equiv \langle\rangle$:

$\text{Tomar}(\langle\rangle, 0) \& \text{Sacar}(\langle\rangle, 0) \equiv \langle\rangle$

$\langle\rangle \& \langle\rangle \equiv \langle\rangle$ (Por t_1, s_1)

$\langle\rangle \equiv \langle\rangle$ (Por &1) ✓

$s = a \cdot t$, con $t: \text{secu}(\alpha), a: \alpha$

Caso ~~¬vacía?(s)~~:

$\text{Tomar}(\overset{a \cdot t}{s}, 0) \& \text{Sacar}(\overset{a \cdot t}{s}, 0) \equiv a \cdot t$

$\langle\rangle \& a \cdot t \equiv a \cdot t$ (Por t_2 y s_2)

$a \cdot t \equiv a \cdot t$ (Por &2) ✓

NOTA

P.I:

$$\text{Tomar}(s, n+1)\ \&\ \text{Sacar}(s, n+1) \equiv s$$

Caso $s = \langle\rangle$:

Análogo al caso base.

Caso $s = a \bullet t$ para algun $(a:\alpha), t : \text{secu}(\alpha))$

$$\text{Tomar}(a \bullet t, n+1)\ \&\ \text{Sacar}(a \bullet t, n+1) \equiv a \bullet t$$

$$(a \bullet \text{Tomar}(t, n))\ \&\ \text{Sacar}(t, n) \equiv a \bullet t$$ ($n+1 > 0$ entonces romo el $\neq$ de ambas funciones)

$$a \bullet (\underbrace{\text{Tomar}(t, n)\ \&\ \text{Sacar}(t, n)}_{HI}) \equiv a \bullet t$$ (Por $\&_2$)

$$a \bullet t \equiv a \bullet t$$ (Por H.I)

✓

(9) $(\forall s : \text{secu}(\alpha))(\forall e : \alpha)$
$$((\text{EstaOrdenada?}(s) \equiv \text{true}) \Rightarrow (\text{EstaOrdenada?}(\text{InsertarOrdenado}(e,s)) \equiv \text{true}))$$

$$P(s) = (\forall c : \alpha)((\text{EstaOrdenada?}(s) \equiv \text{true}) \Rightarrow (\text{EstaOrdenada?}(\text{InsertarOrdenado}(c,s)) \equiv \text{true}))$$

Esquema:

$$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall a : \alpha)\ P(a \bullet s)$$

Lema 1:

$$(\forall s : \text{secu}(\alpha))(\forall a, b : \alpha)((a \leq_\alpha b \wedge b \leq s) \equiv \text{true} \Rightarrow (a \leq s) \equiv \text{true})$$

$$P(s) \equiv (\forall a, b : \alpha)((a \leq_\alpha b \wedge b \leq s) \equiv \text{true} \Rightarrow (a \leq s) \equiv \text{true})$$

Esquema:

$$P(\langle\rangle) \wedge P(s) \Rightarrow (\forall c : \alpha)\ P(c \bullet s)$$

CB:

$$((a \leq_\alpha b \wedge b \leq \langle\rangle) \equiv \text{true}) \Rightarrow (a \leq \langle\rangle) \equiv \text{true}$$

Si no vale el antecedente vale la implicación trivialmente.

Asumo que vale y veo que pasa con el consecuente:

NOTA