# Минимално многоугаоно раздвајање два скупа тачака

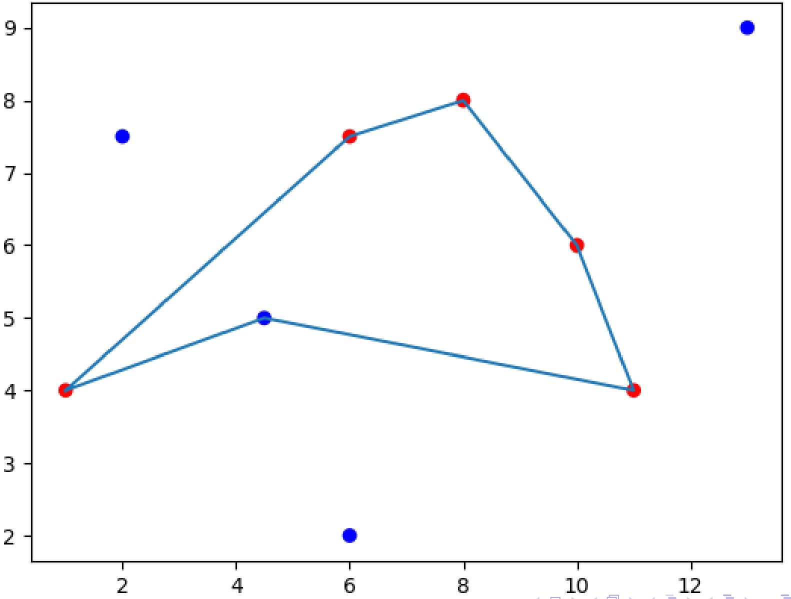
Лазар Васовић

Математички факултет, Универзитет у Београду

25. април 2020.

# Поставка проблема

- Два коначна скупа **црвених** и **плавих** тачака у равни
- Најмањи прост многоугао (тачно један) у смислу обима
- Избор темена фиксиран на задате скупове тачака
- Подела равни на два дела – унутрашњост и спољашњост – тако да су припадајуће тачке раздвојене по бојама
- Темена су на граници – боја им се занемарује


9
8
7
6
5
4
3
2
2
4
6
8
10
12

# Решавање проблема

- Верзија са одлучивошћу доказано NP-тешка
- Егзактно и (мета)хеуристичко решавање
- Укупан број потенцијалних решења:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}(k-1)!$$

- Мали удео варирајуће блиских допустивих
- Исцрпна и случајна претрага
- Локална претрага и симулирано каљење
- Генетски алгоритам и јато птица

# Претходни резултати

- Рекурзивна подела простора уз динамичко програмирање
- Произвољна темена раздвајајућег полигона:

| Научни рад | Сложеност | Фактор |
|---|---|---|
| [*Mata*, 1995] | $O(n^5)$ | $O(\log k)$ |
| [*Mata*, 1995] | $O(n^2)$ | $O(\log^3 n)$ |
| [*Gudmundsson*, 2001] | $O(n \log n)$ | $O(\log k)$ |
| [*Mitchell*, 2002] | $O(n^8)$ | $O(\log k)$ |
| [*Mitchell*, 2002] | $O(n^2)$ | $O(\log^2 n)$ |

- Фиксирана темена, али са ограничењима:

| Научни рад | Сложеност | Фактор |
|---|---|---|
| [*Edelsbrunner*, 1988] | $O(n \log n)$ | $O(1)$ |
| [*Edelsbrunner*, 1988] | $O(nk)$ | $O(1)$ |
| [*Eades*, 1993] | $O(n \log n)$ | $O(1)$ |

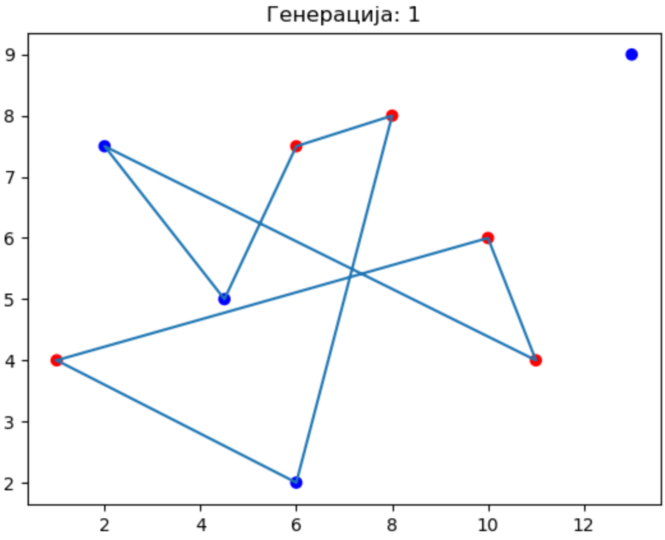
- Ознаке – $n$ величина улаза, $k$ величина решења

# Нови резултати

- Метахеуристике за проблем у својој пуној општости
- Нема гаранције, па се пореде са исцрпном претрагом:

| Тест пример | Случ. | Лок. | Каљ. | Ген. | Јато |
|---|---|---|---|---|---|
| *ulaz9.txt* | 3 | 4 | 1 | 0 | 1 |
| *random1.txt* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *random2.txt* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *random3.txt* | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *random4.txt* | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *random5.txt* | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| *random6.txt* | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 |

- Мера заснована на Левенштајновом растојању
- Фер поређење – једнак број израчунавања погодности


Генерација: 1
9
8
7
6
5
4
3
2
2
4
6
8
10
12

# Основне особине

- Репрезентација – кодирање пермутације низом тачака
- Прилагођеност – обим многоугла, уз евентуалну казну
- Селекција – случајна, турнирска, рулетска, ранговска
- Укрштање – првог реда, позиционо, размештање ивица
- Мутација – уметање, замена, обртање (инверзија), мешање, додавање, одузимање, промена тачке
- Елитизам (20%), случајна почетна популација, генерацијски приступ, хибридизација са сим. каљењем

# Оператори јата

- Оригинално прилагођавање пермутационом проблему, надахнуто радом Мориса Клерка (фр. *Maurice Clerc*)
- Брзине – низови измена, сабирање конкатенација, множење промена (углавном смањење) дужине
- Одузимање честица – низ измена који другу преводи у прву, заправо брзина односно растојање између њих
- Додавање брзине честици – примена низа трансформација на њу, уз неизбежно прескакање немогућих измена
- Хибридизација са симулираним каљењем

# Имплементација

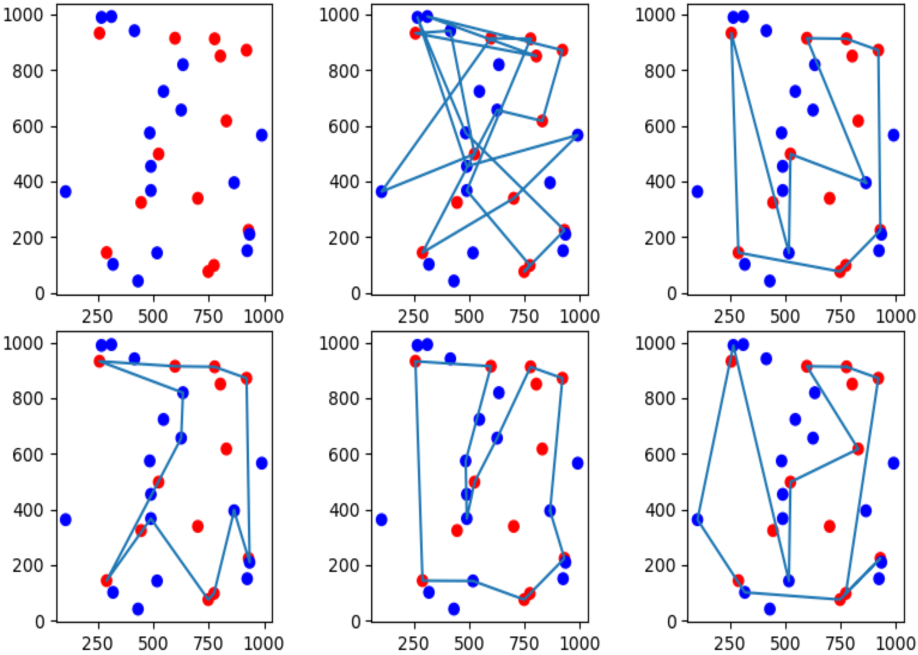
- Python 3.7.6, [MSC v.1916 64 bit (AMD64)] on win32
- Свака оптимизациона метода ручно, од нуле
- Shapely за комфоран рад са многоугловима
- Оригинална мера различитости између јединки
  - Најмањи број измена које је потребно начинити да би се један многоугао свео на други, нпр. на оптимални
  - Замена – нпр. $0 \leftrightarrow 1$ од ниске 02513 прави 12503
  - Дозвољено је и додавање или избацивање тачке
  - Изразита блискост – оправдање хибридизације
- AMD Ryzen 5 3550H 2.10 GHz, 12 GB RAM

# Велики пример

- Досад једноцифрена кардиналност тест примера
- Сад тридесет униформно расподељених тачака
- Огроман простор од чак $\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{30}\binom{30}{k}(k-1)! \approx 10^{31}$ различитих многоуглова, али не много допустивих
- Резултати упоредног извршавања алгоритама:

| Случ. | Лок. | Каљ. | Ген. | Јато |
|---|---|---|---|---|
| $\infty$ | 4589 | 3733 | 3832 | 4908 |

- Фер поређење – сто хиљада евалуација погодности
- Пронађени различити добри делови простора


1000
800
600
400
200
0
250
500
750
1000

# Закључак

- Досад махом површно истражен задатак
- Метахеуристике за проблем у својој пуној општости
- Неколико нових идеја по питању поређења резултата
- Најбољи генетски са симулираним каљењем
- Класификација, рачунарски вид, избегавање судара
- Други алгоритми, евол. стратегије, паралелизација

ХВАЛА НА ПАЖЊИ!
Додатна питања?

# Литература


Maurice Clerc, *Discrete particle swarm optimization, illustrated by the traveling salesman problem*, http://clerc.maurice.free.fr/pso/pso_tsp/Discrete_PSO_TSP.htm.

Peter Eades and David Rappaport, *The complexity of computing minimum separating polygons*, Pattern Recognit. Lett. **14** (1993), 715–718, https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/016786559390140 9.

Viggo Kann, *MINIMUM RED-BLUE SEPARATION*, 03 2000, Skolan för elektroteknik och datavetenskap, https://www.csc.kth.se/~viggo/wwwcompendium/node272.html.