

Algoritmi konstrukcije sufiksnog niza

Lazar Vasović, 2006/2021

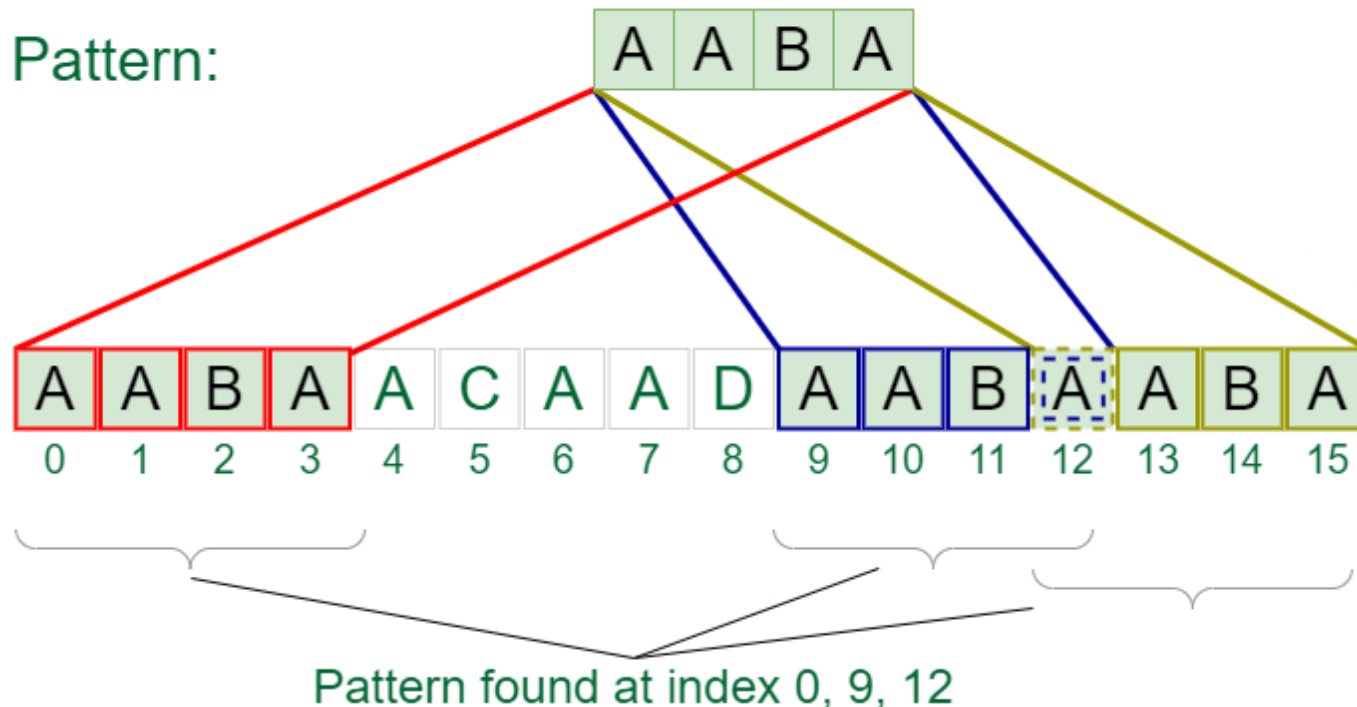
prof. dr Miodrag Živković

Algoritmi teksta – napredni koncepti

Seminar Katedre, 15. septembar 2022.

Pretraživanje niske

Text: A A B A A C A A D A A B A A B A

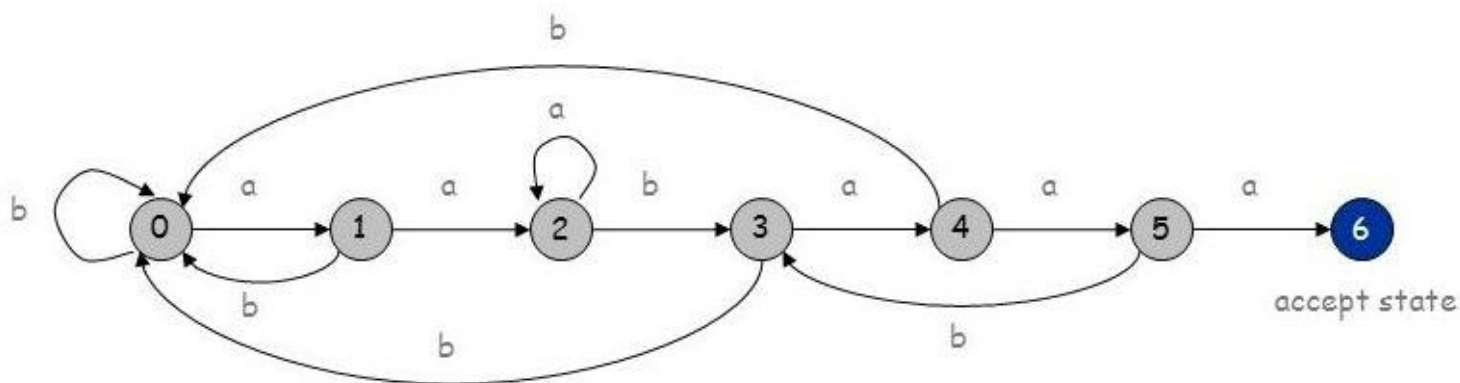


- Traženje jedne niske (šablona) u drugoj (bazi) – osnovni problem koji rešavaju algoritmi teksta



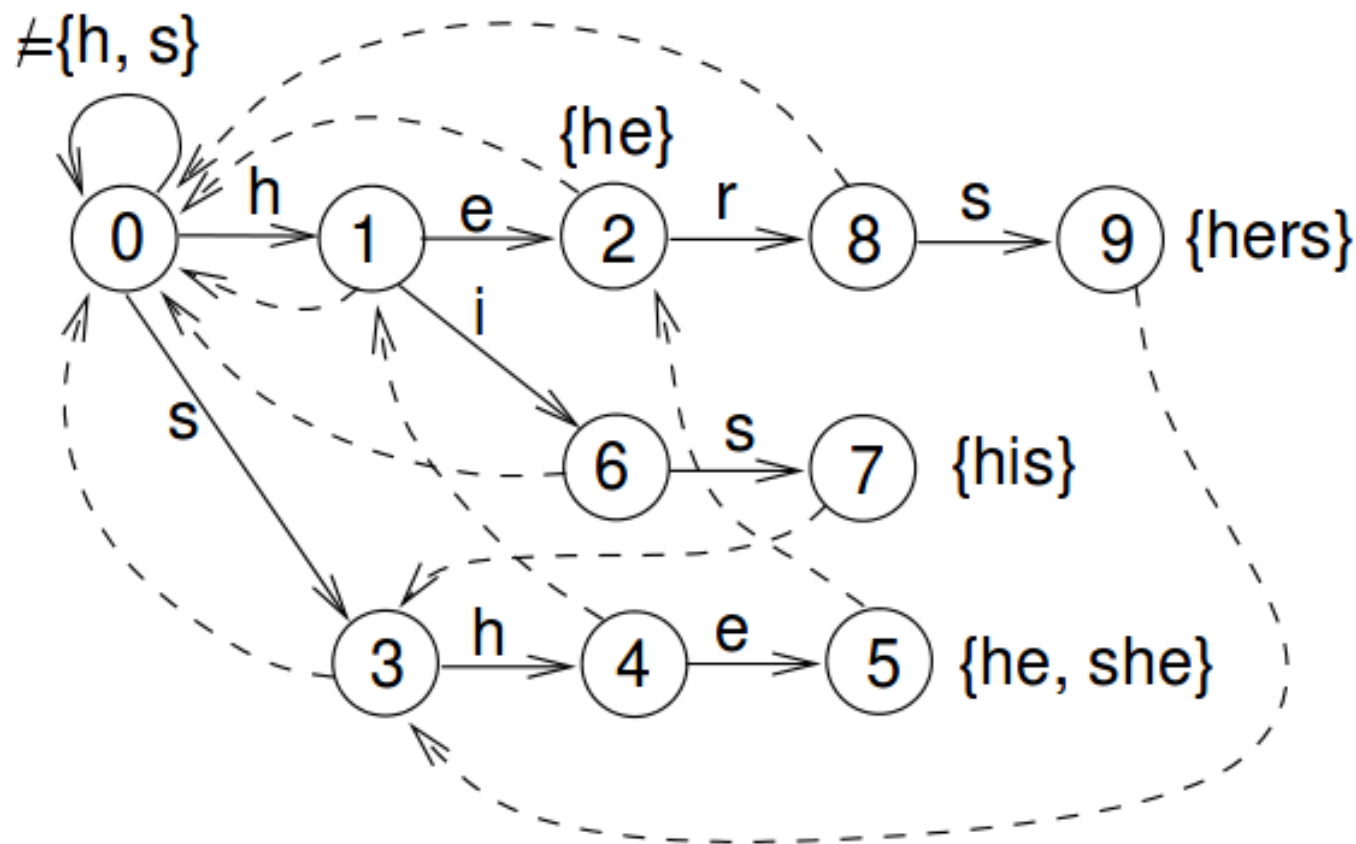
Priprema jednog šablona

Search Text										
a	a	a	b	a	a	b	a	a	a	b
a	a	b	a	a	a					
	a	a	b	a	a	a				
				a	a	b	a	a	a	



- Tradicionalni pristup pripremi jednog šablona – Knut-Morris-Prat i odgovarajući konačni automat

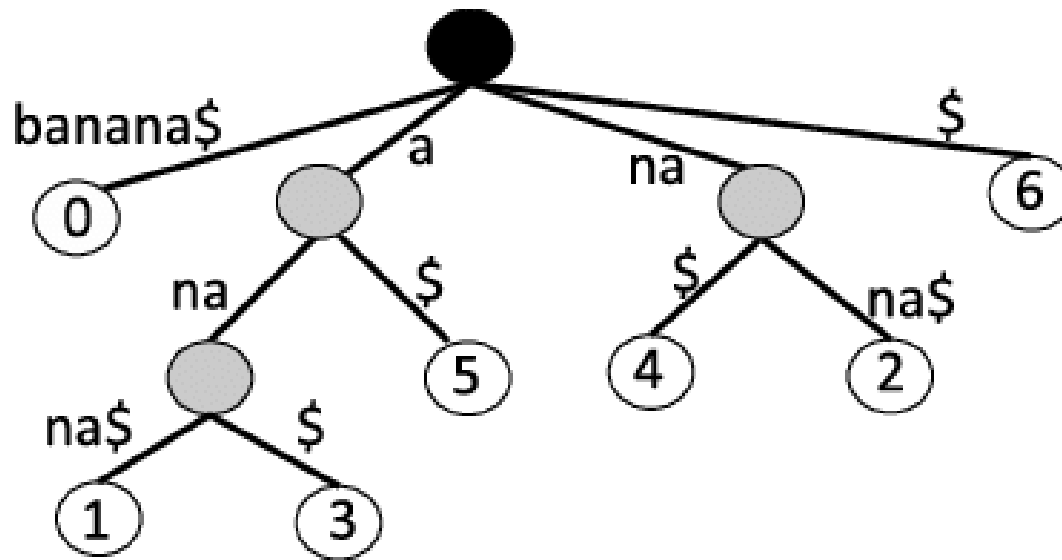
Priprema više šablona



- Tradicionalni pristup pripremi više šablona – Ejho-Korasik i odgovarajuće prefiksno stablo

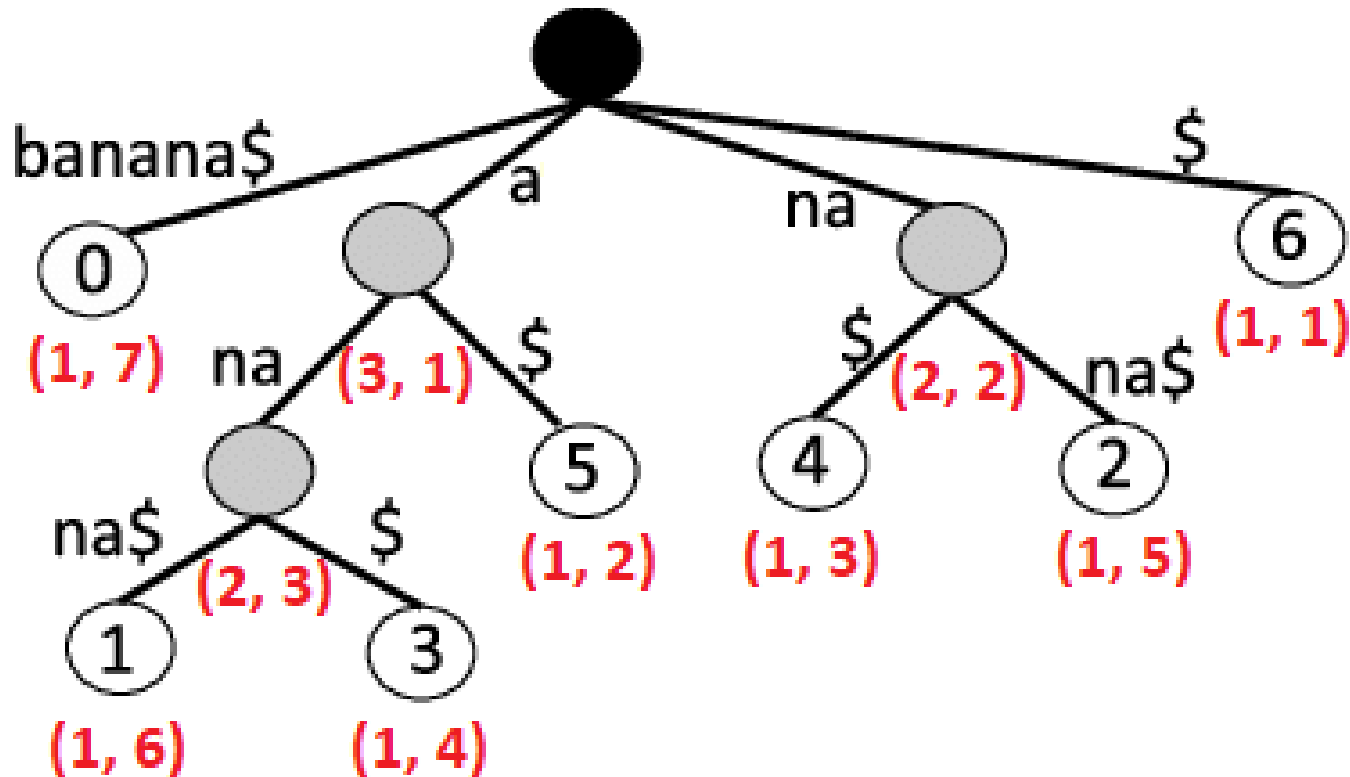
Priprema baze

0	1	2	3	4	5	6
b	a	n	a	n	a	\$



- Šabloni su promenljivi – uglavnom je isplativija predobrada baze
- Priprema bazne niske – sufiksno stablo (prefiksno stablo sufiksa)

Sufiksno stablo



- Sufiksno stablo – dobro opisuje internu strukturu niske
- Predobrada baze – efikasno rešavanje mnogih zadataka

Sufiksni niz

Idx	Suffixes	SA-Idx	Idx	Sorted Suffix
0	BANANA	0	5	A
1	ANANA	1	3	ANA
2	NANA	2	1	ANANA
3	ANA	3	0	BANANA
4	NA	4	4	NA
5	A	5	2	NANA



Suffix Array [5, 3, 1, 0, 4, 2]

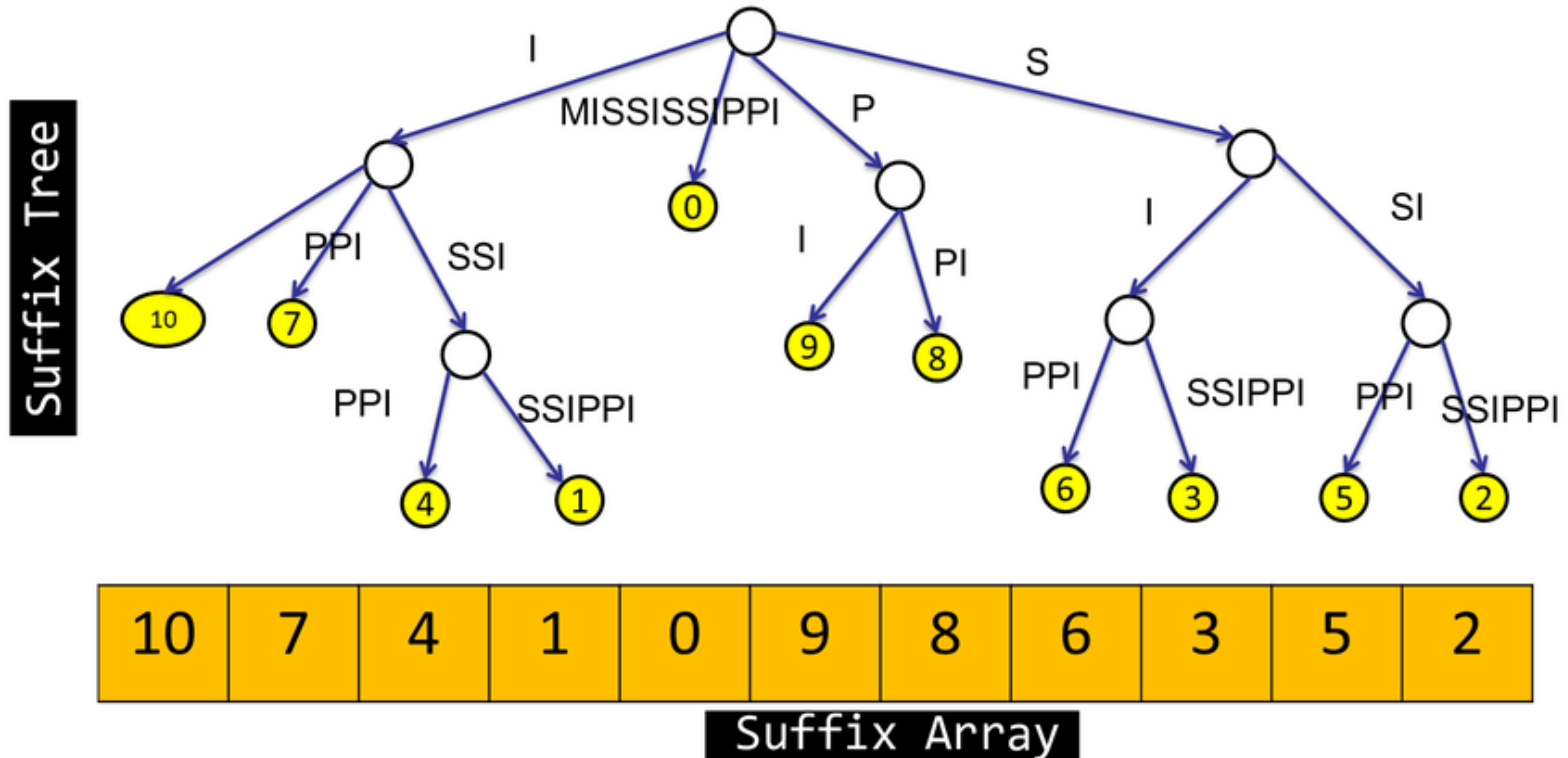
- Sufiksno stablo – korisno, ali prostorno zahtevno i složeno
- Sufiksni niz – leksikografski sortirani niz indeksa sufiksa

Najduži zajednički prefiksi

Suffix	Index	LCP
A	5	0
ANA	3	1
ANANA	1	3
BANANA	0	0
NA	4	0
NANA	2	2

- Najduži zajednički prefiksi – pomoćni niz
- Svi problemi – efikasna linearna rešenja ✓

Niz iz stabla



- Prost obilazak stabla u dubinu leksikografskim poretkom
- Vremenski efikasno, ali suštinski ne popravljja prostor

Naivni algoritam

- Prosto sortiranje indeksa prema sufiksima

S	m	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SA	10	7	4	1	0	9	8	6	3	5	2
R	5	4	11	9	3	10	8	2	7	6	1

- Efikasno sortiranje – $O(n \log n)$ poređenja
- Poređenje sufiksa – $O(n)$ zbog više karaktera
- Sveukupna vremenska složenost – $O(n^2 \log n)$
- Prostorna složenost – u mestu (jedini)

Dupliranje prefiksa

- Sufiksi nisu nezavisni – potiču iz iste niske
- Mogu se iterativno sortirati, prema prefiksima
- Zapravo se rangiraju – $R_{2^k}[i] = \text{rang}(R_k[i], R_k[i+k])$
- U j -toj iteraciji poredak prema 2^j karaktera

S_1	m	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i
S_2	m-i	i-s	s-s	s-i	i-s	s-s	s-i	i-p	p-p	p-i	i
S_4	mi-ss	is-si	ss-is	si-ss	is-si	ss-ip	si-pp	ip-pi	pp-i	pi	i
S_8	miss- issi	issi- ssip	ssis- sipp	siss- ippi	issi- ppi	ssip- pi	sipp-i	ippi	ppi	pi	i
S_{16}	missis si-ppi	ississ ip-pi	ssissi pp-i	sissippi	issippi	ssippi	sippi	ippi	ppi	pi	i

Primer dupliranja i analiza

S_1	m	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i
R_1	2	1	4	4	1	4	4	1	3	3	1
S_2	(2, 1)	(1, 4)	(4, 4)	(4, 1)	(1, 4)	(4, 4)	(4, 1)	(1, 3)	(3, 3)	(3, 1)	(1, 0)
R_2	4	3	8	7	3	8	7	2	6	5	1
S_4	(4, 8)	(3, 7)	(8, 3)	(7, 8)	(3, 7)	(8, 2)	(7, 6)	(2, 5)	(6, 1)	(5, 0)	(1, 0)
R_4	4	3	10	8	3	9	7	2	6	5	1
S_8	(4, 3)	(3, 9)	(a, 7)	(8, 2)	(3, 6)	(9, 5)	(7, 1)	(2, 0)	(6, 0)	(5, 0)	(1, 0)
R_8	5	4	11	9	3	10	8	2	7	6	1
SA	10	7	4	1	0	9	8	6	3	5	2

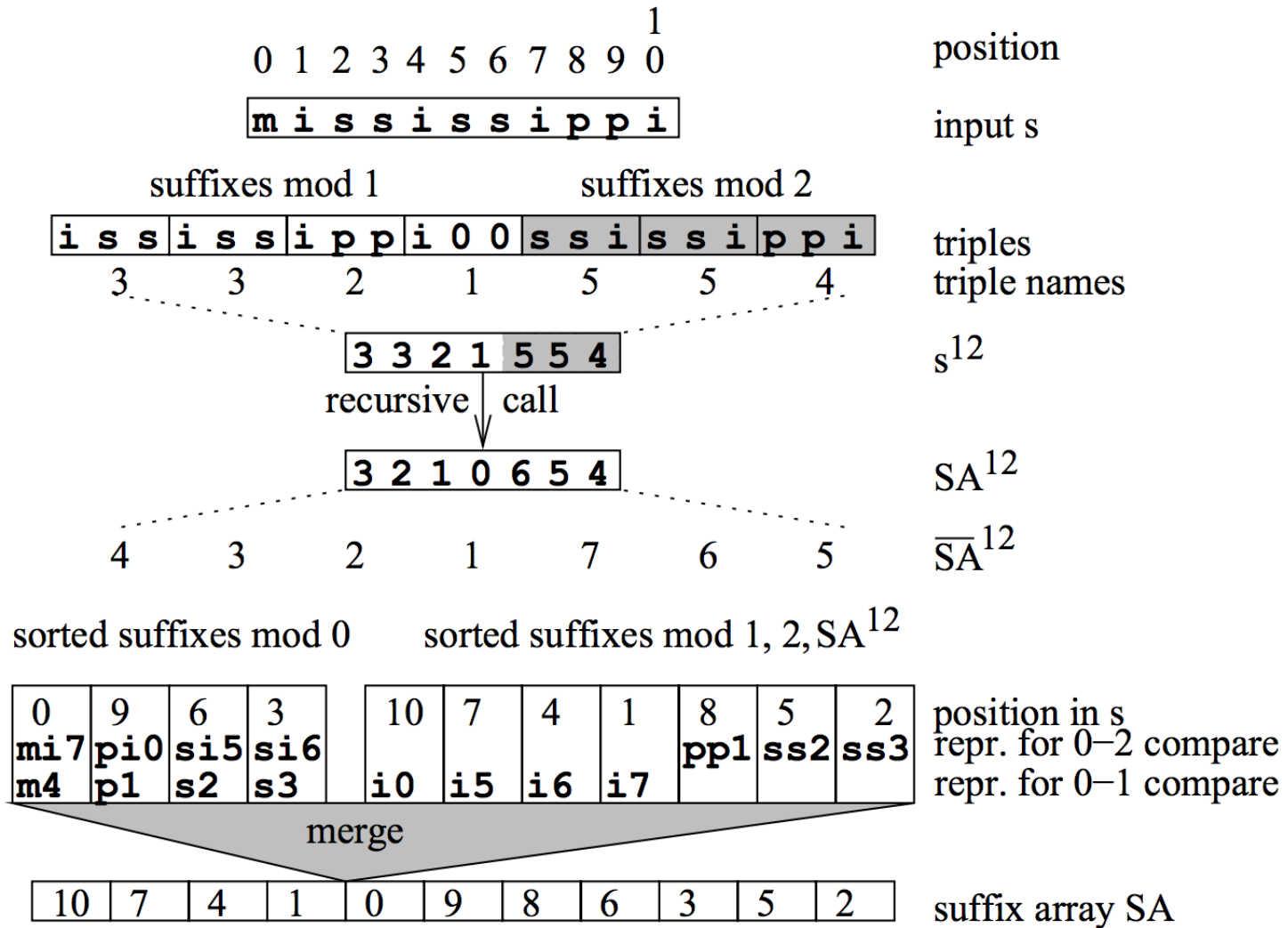
- Broj sortiranja – $O(\log n)$, zbog dupliranja
- Efikasno sortiranje – $O(n \log n)$ poređenja
- Sveukupna vremenska složenost – $O(n \log^2 n)$

Sortiranje razvrstavanjem

Sort Digit 0	Sort Digit 1	Sort Digit 2	Final Result
9 5 4	4 1 1	0 0 9	0 0 9
3 5 4	9 5 4	4 1 1	3 5 4
0 0 9	3 5 4	9 5 4	4 1 1
4 1 1	0 0 9	3 5 4	9 5 4

- Torke fiksnog opsega – sortiranje bez poređenja
- Razvrstavanje – $O(kn)$ tj. $O(n)$ jer je fiksno $k = 2$
- Sveukupna vremenska složenost – $O(n \log n)$

Algoritam *DC3*



Analiza algoritma *DC3*

- Razvrstavanje, rangiranje, spajanje – $O(n)$
- Rekurzivni poziv – rangovi dve trećine veličine
- Sveukupno – $T(n) = T(\frac{2}{3}n) + O(n) = O(n)$
- Jedan od prvih algoritama linearne vremenske složenosti – uveden 2003, dopunjen 2006.
- Autori – Kerkeinen (*Kärkkäinen*) i Sanders
- Naziv – pokrivač/nje razlike po modulu 3 (*difference cover modulo 3*), može i *DC*

Algoritam *SA-IS*

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	m	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i

- Priprema za redukciju – određivanje *LMS* sufiksa

LS	L	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L
LMS		*			*			*			

- Redukcija – indukovano sortiranje *LMS* podniski

R		2			2			1			
SA _R		2			1			0			

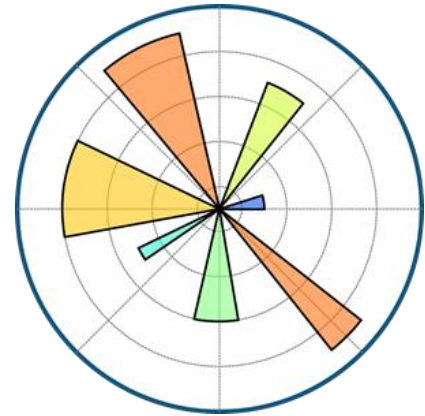
- Indukcija – određivanje niza redom po *LMS*, *L*, *S*

SA	{10,	7,	4,	1}	{0}	{9,	8}	{6,	3,	5,	2}
----	------	----	----	----	-----	-----	----	-----	----	----	----

Analiza algoritma *SA-IS*

- Priprema, redukcija, indukcija – $O(n)$
- Rekurzivni poziv – najviše polovina veličine
- Sveukupno – $T(n) = T(\frac{1}{2}n) + O(n) = O(n)$
- Autori – Nung (*Nong*), Džang (*Zhang*), Čan (*Chan*), uveden 2009, dopunjen 2011.
- Naziv – sufiksni niz indukovanim sortiranjem (*suffix array-induced sorting*), može i *SA-DS*

Implementacija algoritama



- Korišćeno – programski jezik C++, grafikon vremena rada Qt, histogrami matplotlib
- Optimizacije – npr. LS niz je bitovski (unsigned char dužine $n / 8 + 1$ umesto char dužine n)

Grafikon vremena rada

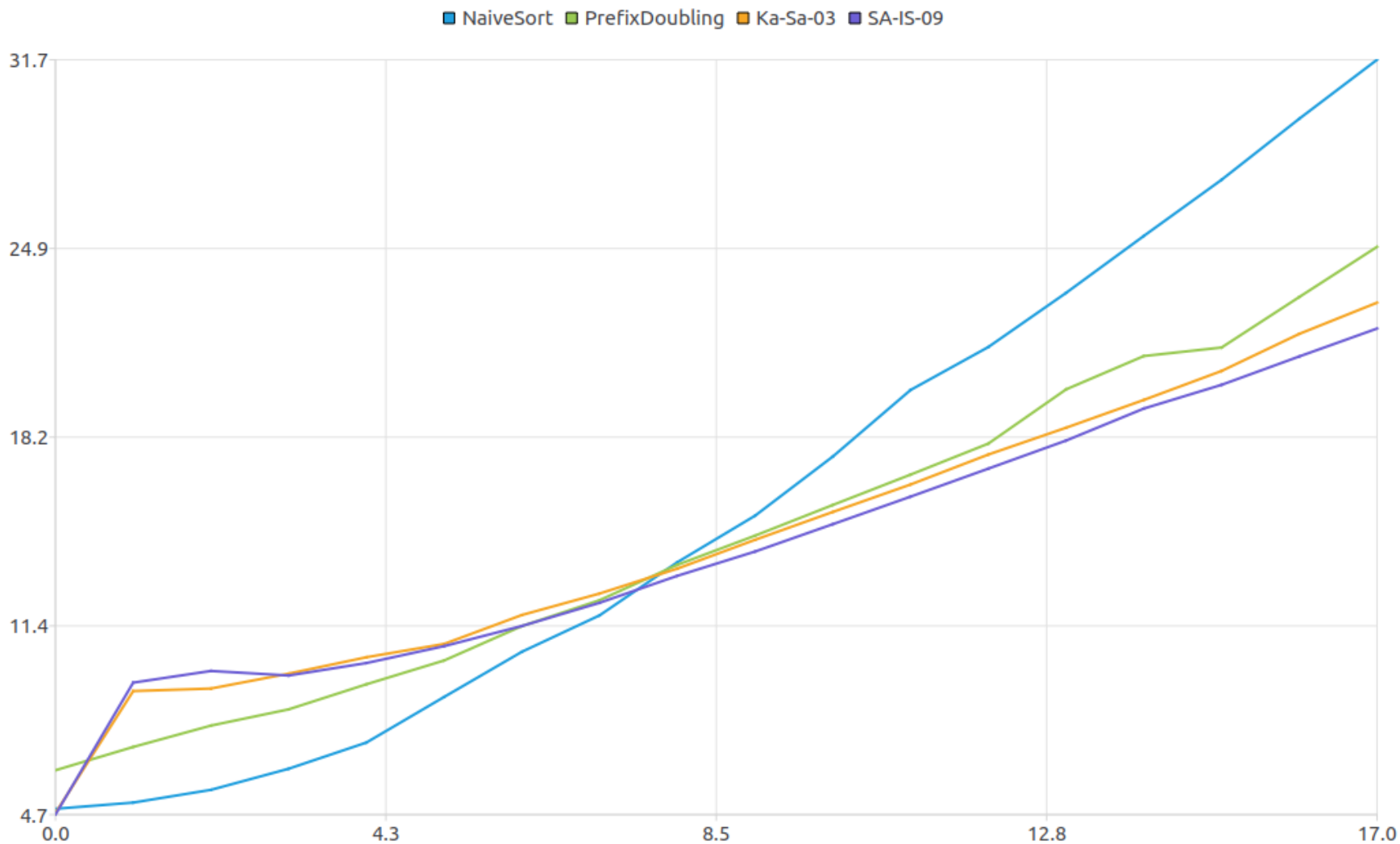
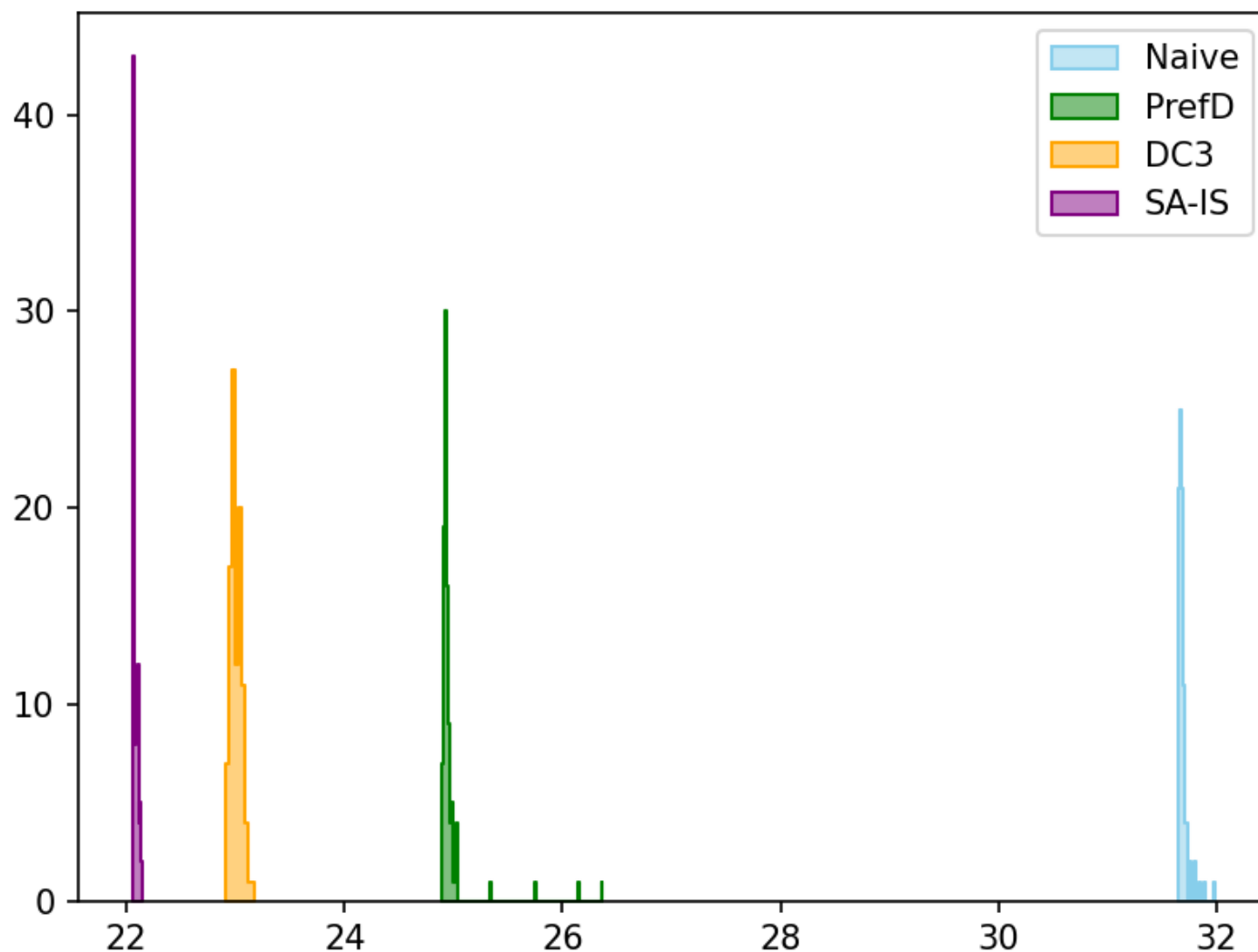


Tabela vremena rada

n	Naivno		Dupliranje		DC3 / skew		SA-IS	
	mean	std	mean	std	mean	std	mean	std
10	17,50	0,06	15,77	0,15	15,52	0,12	15,08	0,09
11	19,88	0,15	16,86	0,10	16,50	0,12	16,07	0,07
12	21,42	0,11	17,96	0,06	17,57	0,40	17,07	0,09
13	23,35	0,15	19,90	1,76	18,53	0,06	18,07	0,04
14	25,39	0,28	21,10	0,63	19,53	0,06	19,22	0,66
15	27,40	0,05	21,40	0,48	20,56	0,10	20,07	0,04
16	29,58	0,04	23,21	0,15	21,89	0,11	21,08	0,10
17	31,69	0,05	25,00	0,28	23,00	0,05	22,08	0,02

- Svugde logaritam – npr. $\log_2 n$ umesto n
- Svaki eksperiment ponovljen sto puta

Histogram najvećeg ulaza



Korektnost algoritama 🤔

- Algoritmi su efikasni, ali da li stvarno rade ⚠️
- Sami algoritmi – autori su pokazali ispravnost
- Implementacije – napisana svita testova
- Poznata rešenja – *banana, mississippi*
- Specijalno – prazna niska, niska dužine jedan
- Slučajne niske – poređenje sa naivnim
- Svi testovi prolaze – visoka sigurnost ✓

Zaključak

- Urađeno – opisana, realizovana i upoređena četiri algoritma konstrukcije sufiksnog niza
- Rezultati – očekivano ponašanje implementacija na osnovu teorijske analize, najbolji *SA-IS*

HVALA NA PAŽNJI!

Literatura

- Mohamed Ibrahim Abouelhoda, Stefan Kurtz, Enno Ohlebusch. Replacing suffix trees with enhanced suffix arrays. *Journal of Discrete Algorithms*. 2(1):53–86, 2004.
- Juha Kärkkäinen, Peter Sanders, Stefan Burkhardt. Linear work suffix array construction. *Journal of the ACM*. 53(6):918–936, 2006.
- Ge Nong, Sen Zhang, Wai Hong Chan. Two Efficient Algorithms for Linear Time Suffix Array Construction. *IEEE Transactions on Computers*. 60(10):1471–1484, 2011.