Опр. 1. *Топологическое пространство X называется несвязным, если выполнено одно из трех эквивалентных условий:*

1. *X представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств;*
2. *X представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых подмножеств;*
3. *существует непустое и отличное от всего X подмножество $M \subset X$, являющееся одновременно открытым и замкнутым.*

Опр. 2. *Топологическое пространство называется связным, если оно не является несвязным. Подмножество Y в топологическом пространстве X называется связным, если оно связно относительно индуцированной топологии.*

1. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — связное подмножество. Докажите, что оно обязано быть «выпуклым»: если $a, b \in M$ и $a < b$, то $[a; b] \subset M$.
2. Докажите, что всякий отрезок $[a; b] \subset \mathbb{R}$ связен.
3. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причём X связно. Докажите, что $f(X) \subset Y$ также связно.
4. Пусть топологическое пространство X обладает таким свойством: для любых двух точек $x, y \in X$ существует связное подмножество $I \subset X$, содержащее x и y. Докажите, что X связно.
5. Докажите, что подмножество $M \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда оно является отрезком $[a; b]$, полуоткрытым интервалом $(a; b]$ или $[a; b)$ или открытым интервалом $(a; b)$, где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. (При символах $-\infty$ и $+\infty$ квадратные скобки не ставятся; случай $a = b$ не исключен.)

Опр. 3. *Топологическое пространство X называется линейно связным, если для всяких двух точек $x, y \in X$ существует такие отрезок $[a; b] \subset \mathbb{R}$ и непрерывное отображение $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$, что $f(a) = x$ и $f(b) = y$.*

6. Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ с действительными значениями. Докажите, что множество её значений $f([a; b])$ также является отрезком в $\mathbb{R}$. В частности, f принимает все значения, промежуточные между $f(a)$ и $f(b)$.
7. Докажите, что произведение нескольких связных (линейно связных) множеств связно (линейно связно).
8. Докажите, что объединение любой системы попарно пересекающихся связных (линейно связных) подмножеств связно (линейно связно).

Опр. 4. *Наибольшее связное (линейно связное) подмножество C_x множества X, содержащее точку $x \in X$, называется компонентой связности (линейной связности) точки x.*

9. Докажите, что компоненты связности (линейной связности) двух точек множества X либо совпадают, либо не пересекаются.

Упражнения

1. Докажите, что окружность $S^1 \overset{\text{def}}{=} \{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$ не гомеоморфна отрезку $[0; 1]$.
2. Докажите, что открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.
3. Пусть S — произвольное не более чем счетное множество на плоскости $\mathbb{R}^2$. Докажите, что множество $\mathbb{R}^2 \setminus S$ линейно связно.

4. Докажите, что замыкание связного подмножества связно, а замыкание линейно связного подмножества не обязательно линейно связно.
5. Докажите, что если две точки a и b, принадлежащие открытому множеству $U \subset \subset \mathbb{R}^n$, можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в U, то эти точки можно соединить ломаной, целиком лежащей в U.
6. Докажите, что если множество A связно и $A \subset B \subset \bar{A}$, то множество B тоже связно.
7. Докажите, что компоненты связности замкнуты.
8. Найдите компоненты связности и компоненты линейной связности следующих подпространств пространства вещественных $n \times n$-матриц:
   (a) $GL_n(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in M_n(\mathbb{R})\colon \det A \neq 0\}$;
   (b) $S_n(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in M_n(\mathbb{R})\colon A^T = A\}$.
9. (a) Через $Z(p) \subset \mathbb{C}^n$ обозначим множество нулей многочлена p от комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Докажите, что $\mathbb{C}^n \setminus Z(p)$ линейно связно.
   (b) Докажите, что множество $GL_n(\mathbb{C})$ обратимых матриц пространства $M_n(\mathbb{C})$ линейно связно.
10. (a) Пусть $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение. Докажите, что существует точка $x \in S^1$, такая что $f(x) = f(-x)$.
    (b) Пусть $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — непрерывная функция. Докажите, что существует точка $x \in [0,1]$, такая что $f(x) = x$.
11. Докажите, что любую выпуклую ограниченную плоскую фигуру можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.
12. Докажите, что множество $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x > 0, y = \sin\dfrac{1}{x}\right\} \cup \{(0,0)\}$ связно, но не линейно связно.
13. Докажите, что для любых двух выпуклых многоугольников на плоскости существует прямая, делящая каждый из них на две равновеликие части.
14. В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 метров сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между кончиками их клювов было равно 110 метров.
15. Существует ли выпуклый 2011-угольник, все стороны которого равны, а все вершины лежат на параболе $y = x^2$?
16. Есть несколько кусков сыра разной массы. Докажите, что можно разрезать не более одного куска на два меньших так, что после этого можно будет разложить все куски на две порции одинаковой массы.
17. Верно ли, что любой выпуклый многоугольник можно разбить прямой так, чтобы площади и периметры двух получившихся многоугольников были равны?
18. Докажите, что на координатной плоскости можно провести окружность, внутри которой лежит ровно n точек с целочисленными координатами.
19. Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что два экипажа, выехавшие по двум разным дорогам из A в B и связанные верёвкой некоторой длины, меньшей чем $2R$, смогли доехать от A до B, не порвав верёвки. Смогут ли разминуться, не задев друг друга, два круглых воза радиуса R, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?