Опр. 1. *Семейство F подмножеств множества X называется фильтром, если*

$$\begin{array}{llll} 1) & X \in F; & 3) & \text{если } V \in F \text{ и } V \subset W, \text{ то } W \in F; \\ 2) & \varnothing \notin F; & 4) & \text{если } U, V \in F, \text{ то } U \cap V \in F; \end{array}$$

Пример 1. Подмножество V топологического пространства X называется окрестностью точки $x \in X$, если найдется открытое множество U, такое что $x \in U \subset V$. Семейство N_x всех окрестностей точки x является фильтром.

Пример 2. Пусть X — бесконечное множество, семейство $F = \{U \subset X : |X \setminus U| < \infty\}$ называется кофинитным фильтром.

1. Пусть G — такое семейство подмножеств X, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $U_1, \ldots, U_n \in G$ пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ не пусто. Докажите, что семейство $F = \{U \subset X : \exists U_1, \ldots, U_n \in G, \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subset U\}$ — фильтр, содержащий G. (Семейство G называется предбазой для F. Если G замкнуто относительно конечных пересечений, то оно называется базой для F, которое в этом случае имеет следующий вид $F = \{U \subset X : \exists V \in G, V \subset U\}$.)

Опр. 2. *Фильтр F называется ультрафильтром, если для любого подмножества $A \subset X$ либо $A \in F$, либо $X \setminus A \in F$.*

Пример 3. Пусть $x \in X$ и $F = \{U \subset X : x \in U\}$, тогда F — ультрафильтр.

2. Пусть F — фильтр на X. Докажите, что существует ультрафильтр H, такой что $F \subset H$.
3. Докажите, что каждый ультрафильтр является максимальным по включению фильтром.

Опр. 3. *Говорят, что фильтр F сходится к $x \in X$ (или x предел F), если $N_x \subset F$, и обозначают $F \to x$.*

4. Докажите, что топологическое пространство X является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда каждый фильтр имеет не более одного предела.

Опр. 4. *Пусть $g \colon X \to Y$ и F — фильтр на X. Так как $g(U \cap V) \subset g(U) \cap g(V)$, то множество $\{g(U) \colon U \in F\}$ является предбазой фильтра в Y, который обозначается $g(F)$. Нетрудно видеть, что $V \in g(F)$ тогда и только тогда, когда $\exists U \in F$, такое что $g(U) \subset V$.*

5. Пусть X, Y — топологические пространства и $x \in X$. Докажите, что отображение $g \colon X \to Y$ непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда для любого фильтра F, такого что $F \to x$, имеем $g(F) \to g(x)$.
6. Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — семейство топологических пространств. Для каждого конечного подмножества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset I$ и каждого набора подмножеств $U_1, \ldots, U_n$, где $U_j \in X_{\alpha_j}$ — открытое подмножество, рассмотрим подмножество

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_n) \subset \prod_{i \in I} X_i. \qquad (*)$$

Неформально множества вида $(*)$ можно описать так: конечное число компонент в «векторе» $(x_i)_{i \in I}$ могут произвольно варьироваться в открытых подмножествах, а на все остальные компоненты никаких условий не накладывается. Докажите, что всевозможные множества вида $(*)$ образуют базу топологии в $\prod\limits_{i \in I} X_i$; эта топология называется топологией произведения.

7. Докажите, что если все пространства X_i хаусдорфовы, то и произведение $\prod\limits_{i\in I} X_i$ хаусдорфово.
8. Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство топологических пространств, а $\{F_i\}_{i\in I}$ — семейство фильтров на них (F_i — фильтр на X_i, $i \in I$). Рассмотрим множество произведений $\prod\limits_{i\in I} U_i$, где $U_i = X_i$, кроме конечного набора индексов $J \subset I$, и $U_i \in F_i$, $i \in J$. Докажите, что множество произведений образуют базу фильтра на произведении, который обозначают $\prod\limits_{i\in I} F_i$.
9. Докажите, что справедливо равенство $\pi_j\left(\prod\limits_{i\in I} F_i\right) = F_j$.
10. Докажите, что $\prod\limits_{i\in I} F_i \to x$ в топологии произведения тогда и только тогда, когда $F_i \to x_i$, $i \in I$.

Опр. 5. *Говорят, что фильтр G расширяет фильтр F, если $F \subset G$.*

11. Докажите, что если $F \to x$ и G расширяет F, то $G \to x$.
12. Пусть F — произвольный фильтр на X и $F_i = \pi_i(F)$. Докажите, что $F \to x$ тогда и только тогда, когда $F_i \to x_i$, $i \in I$.
13. Докажите, что топологическое пространство X является компактным тогда и только тогда, когда каждый фильтр может быть расширен до сходящегося.
14. Докажите, что топологическое пространство X является компактным тогда и только тогда, когда каждый ультрафильтр сходится.
15. Пусть F — ультрафильтр на $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$. Докажите, что $\pi_i(F)$ — ультрафильтр на X_i, $i \in I$.
16. (**теорема Тихонова**) Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство компактных топологических пространств. Докажите, что $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ — компактно в топологии произведения.

Упражнения

1. Пусть F — ультрафильтр и $A \cup B \in F$, тогда справедливо хотя бы одно из включений: $A \in F$, $B \in F$.
2. Пусть F — ультрафильтр на X, тогда либо $\bigcap\limits_{U_i\in F} U_i = \varnothing$, либо $\{x_0\} \in F$ для некоторого элемента $x_0 \in X$ и $\bigcap\limits_{U_i\in F} U_i = \{x_0\}$.