Опр. 1. *Топологическое пространство называется вполне несвязным, если оно не имеет связных подмножеств, за исключением состоящих из одной точки.*

Опр. 2. *Целым p-адическим числом называется бесконечная последовательность $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$, в которой все a_i — p-ичные цифры (т.е. a_i – целое число, такое что $0 \le a_i \le p-1$). Последовательность $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$, о которой идет речь в этом определении, будем записывать в следующем виде: $\ldots a_2a_1a_0$.*

Опр. 3. *Суммой (соотв. разностью, произведением) целых p-адических чисел $\ldots a_2a_1a_0$ и $\ldots b_2b_1b_0$ называется целое p-адическое число, получаемое из них по правилам сложения (соотв. вычитания, умножения) «в столбик» в p-ичной системе счисления, если записать два числа одно под другим (b_0 под a_0, b_1 под a_1 и т.д.).*

1. Докажите, что сложение, вычитание и умножение целых p-адических чисел обладает теми же свойствами (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, ...), что и у обычных целых чисел.

Опр. 4. *Если $a \in \mathbb{Z}_p$ отлично от нуля, то его p-адической нормой называется число $|a|_p = p^{-n}$, где n — наибольшее натуральное n, для которого a делится на p^n. Если $a = 0$, полагают $|a|_p = 0$.*

Опр. 5. *p-адическим расстоянием между $a, b \in \mathbb{Z}_p$ называется число $|a-b|_p$.*

2. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}_p$ выполнено (ультраметрическое) неравенство: $|a+b|_p \le \max(|a|_p, |b|_p)$.
3. Докажите, что пространство $\mathbb{Z}_p$ компактно.
4. Докажите, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{Z}_p$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0$.
5. Докажите, что замыкание подмножества $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ совпадает со всем $\mathbb{Z}_p$.

Опр. 6. *Разобъём отрезок $[0;1] \subset \mathbb{R}$ на три равные части и удалим среднюю из них как открытый интервал $(1/3; 2/3)$; останется объединение двух отрезков $[0;1/3] \cup [2/3;1]$. Каждый из оставшихся отрезков длины $1/3$ также разобьем на три равные части и удалим из каждого из них средний открытый интервал; с каждым из оставшихся отрезков длины $1/3^2$ проделаем ту же операцию, и так до бесконечности. Обозначим через $\mathcal{K} \subset [0;1]$ множество, оставшееся от отрезка после удаления всех этих открытых интервалов; это множество называется канторовым множеством.*

6. Докажите, что множество $\mathcal{K}$ состоит из тех и только тех чисел, которые можно записать в виде бесконечной троичной дроби вида $\overline{0,a_1a_2a_3\ldots}$, в которой все a_i равны 0 или 2. (В частности, $\mathcal{K}$ имеет мощность континуум.)
7. Множество $\mathcal{K}$ компактно, вполне несвязно, нигде не плотно и совершенно (т.е. замкнутое множество, не имеющее изолированных точек).
8. Пусть S — конечное множество ($|S| > 1$), на котором задана дискретная топология, а X — произведение счётного числа экземпляров этого пространства, т.е. множество всевозможных бесконечных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots)$, где все $a_i \in S$, на котором задана тихоновская топология. Докажите, что множества вида $U_{a_1,\ldots,a_n} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \ldots)\colon x_i = a_i \text{ при } 1 \le i \le n\}$ (для всевозможных n и всевозможных $a_1, \ldots, a_n \in S$) образуют базу топологии на X.

Опр. 7. *Бесконечным деревом называется бесконечный граф, устроенный следующим образом. Одна из вершин, называемая корнем, в графе выделена, а все остальные разбиты в несвязное объединение конечных множеств $X_1, X_2, \ldots$; вершины, входящие в множество X_k, мы будем называть вершинами k-ого уровня. Корень соединён ребром с каждой из вершин первого уровня, и каждая вершина k-ого уровня соеди-*

нена ребром с какими-то вершинами $(k+1)$-го уровня. При этом при $k \geq 2$ каждая вершина k-го уровня соединена ровно с одной вершиной $(k-1)$-го уровня (своим родителем). Обозначим через Y множество, состоящее из всевозможных путей в дереве. Пусть $f_i\colon X_i \to X_{i-1}$ определённое при каждом $i > 1$ отображение, ставящее в соответствие вершине её родителя. Тогда, очевидно,

$$Y = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \colon f_i(x_i) = x_{i-1} \text{ для всех } i > 1 \right\}$$

Топологию на X определим как индуцированную с $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, где топология на каждом X_j дискретна.

9. Докажите, что базу топологии на Y образуют множества путей, в которых начальный участок зафиксирован, а далее можно идти как угодно.
10. Докажите, что если в бесконечном дереве из каждой вершины (включая корень) выходит не менее двух ребер, ведущих в вершины следующего уровня, то пространство путей в этом дереве гомеоморфно канторову множеству.
11. Пусть для каждого $i \in \mathbb{N}$ задано конечное множество A_i ($|A_i| > 1$) с дискретной топологией. Докажите, что пространство $Y = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ гомеоморфно канторову множеству. (В частности, канторову множеству гомеоморфно всякое кольцо целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$.)
12. Пусть X — компактное метрическое пространство. Докажите, что существует непрерывное сюръективное отображение $f\colon \mathcal{K} \to X$.
13. Докажите, что мощность компактного метрического пространства не превосходит мощности континуума.

Упражнения

1. Покажите, что в кольце целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ имеет место «арифметика пределов»: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
2. Пусть $u \in \mathbb{Z}_p$ не делится на p. Существует ли такое $v \in \mathbb{Z}_p$, что $uv = 1$?
3. Докажите, что $\dfrac{1}{4}$ принадлежит канторову множеству.
4. Докажите, что множество $\{a + b\colon a + b \in \mathcal{K}\}$ всевозможных сумм элементов канторова множества совпадает с отрезком $[0; 2]$.
5. Докажите, что каждое непустое совершенное множество в $\mathbb{R}^n$ имеет мощность континуума.
6. Точка x называется точкой конденсации множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если каждая её ε-окрестность содержит несчётное подмножество точек множества X. Докажите, что множество точек конденсации каждого несчётного множества совершенно.
7. Множество X на прямой называется множеством меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной или счётной системой интервалов, сумма длин которых не превосходит ε. Приведите пример непрерывное монотонной функции $[0; 1] \to [0; 1]$, которая не является константой, но при этом имеет производную, равную нулю почти во всех точках (т.е. во всех точках за исключением множества меры нуль).
8. Пусть X — выпуклое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что существует непрерывное и сюръективное отображение $f\colon [0; 1] \to X$ («кривая Пеано»).