Опр. 1. *Пусть A и B — два подмножества в топологическом пространстве X. Множество A называется плотным в B, если $\bar{A} \supset B$. В частности, множество A называется всюду плотным (в пространстве X), если его замыкание $\bar{A}$ совпадает со всем пространством X. Подмножество A называется нигде не плотным в X, если A не является плотным ни в одной окрестности пространства X.*

Опр. 2. *Топологическое пространство называется сепарабельным, если оно содержит счетное всюду плотное множество.*

Опр. 3. *Пусть X — метрическое пространство. Последовательность его точек $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $m, n > N$ выполнено неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Опр. 4. *Если в метрическом пространстве X любая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется полным.*

1. Пусть X — полное метрическое пространство. Докажите, что подмножество $Y \subset \subset X$ полно (в индуцированной метрике) в том и только том случае, когда оно замкнуто.
2. (**Теорема о вложенных шарах**) Докажите, что метрическое пространство X полно тогда и только тогда, когда в нём всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.

Опр. 5. *Подмножество топологического пространства X, которое можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных в X множеств, называется множеством первой категории Бэра в пространстве X. Множество, которое нельзя представить в таком виде, называется множеством второй категории Бэра в пространстве X.*

3. Докажите, что если множество второй категории Бэра покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то хотя бы одно из них имеет внутреннюю точку.
4. Докажите, что всякое полное метрическое пространство X является множеством второй категории Бэра.
5. Докажите, что счётное пересечение открытых плотных множеств в $\mathbb{R}$ является плотным множеством.

Опр. 6. *Пусть X — метрическое пространство. Его пополнением называется пара (X', i), в котором X' — полное метрическое пространство, $i\colon X \to X'$ — изометрия, и образ $i(X)$ всюду плотен в X'.*

6. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Скажем, что фундаментальные последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ эквиваленты, если $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. Докажите, что введённое отношение действительно является отношением эквивалентности.

Через X^* обозначим множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей пространства X.

7. Пусть x^*, $y^* \in X^*$ — два класса эквивалентности, а $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in x^*$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in y^*$ — произвольные их представители. Определим расстояние между классами x^* и y^* как $\rho(x^*, y^*) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \rho(x_n, y_n)$. Докажите, что введённое расстояние корректно определено, пространство X изометрично вкладывается в X^* и является плотным в нём.
8. Докажите, что у всякого метрического пространства X существует пополнение; если (X'_1, i'_1) и (X'_2, i'_2) — два пополнения пространства X, то существует

и единственно такое взаимно однозначное сохраняющее расстояния отображение $\varphi\colon X_1' \to X_2'$, что $\varphi \circ i_1 = i_2$.

Опр. 7. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Отображение $f\colon X \to X$ называется сжимающим отображением, или короче, сжатием, если существует такое число $\alpha \in [0, 1)$, что для любых двух точек $x, y \in X$ выполняется неравенство $\rho\big(f(x), f(y)\big) \le \alpha\rho(x, y)$.*

9. (**Принцип сжимающих отображений**) Всякое сжимающее отображение f, определённое в полном метрическом пространстве X, имеет одну и только одну неподвижную точку $x \in X$, т. е. $f(x) = x$.

Упражнения

1. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.
2. Пусть $X = \mathbb{N}$, а расстояние между натуральными числами m, n определяется как $\rho(m, n) = 1 + \min(1/m, 1/n)$ при $m \ne n$ и 0 при $m = n$. Докажите, что X — полное метрическое пространство. Докажите также, что замкнутые шары $\bar{B}(1, 1 + 1/2) \supset \bar{B}(2, 1 + 1/3) \supset \bar{B}(3, 1 + 1/4) \supset \ldots$ вложены, но имеют пустое пересечение.
3. Пусть $f(x) = x + \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $x \in [0; +\infty)$. Докажите, что $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, но $f(x)$ не имеет неподвижной точки.
4. Подмножество Y топологического пространства X называется G_δ-множеством, если оно представимо в виде счётного пересечения открытых множеств. Подмножество, являющиеся дополнением до G_δ-множества, называется F_σ-множеством. Докажите, что
   (a) произвольное F_σ-множество представимо в виде объединения счётного числа замкнутых множеств;
   (b) множество иррациональных чисел вещественной прямой является G_δ-множеством, но не F_σ-множеством.
5. Для функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ через U_f обозначим подмножество точек, в которых f непрерывна. Докажите, что U_f является G_δ-множеством.
6. Докажите, что существует и единственно решение $x \in \mathbb{R}$ уравнения $2x + \sin x = 1$.
7. Пусть $F\colon W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — отображение, определённое в окрестности W точки (x_0, y_0), непрерывное в (x_0, y_0) вместе с частной производной $F_y'(x, y)$, которая предполагается существующей в W. Если $F(x_0, y_0) = 0$ и при этом существует $\big(F_y'(x_0, y_0)\big)^{-1}$, то найдутся окрестность $U = U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ точки x_0 в X, окрестность $V = V(y_0) \subset \mathbb{R}^n$ точки y_0 в Y и такая функция $f\colon U \to V$, непрерывная в x_0, что $U \times V \subset W$ и
$$\big(F(x, y) = 0 \ \text{ в } \ U \times V\big) \Leftrightarrow \big(y = f(x), x \in U\big).$$
8. Введите на интервале $(-1; 1)$ метрику таким образом, чтобы он стал полным метрическим пространством.
9. Пусть $f(t, x)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывная функция, для которой справедливо неравенство $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le M\|x_1 - x_2\|$, $t \in \mathbb{R}$ и $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет единственное решение.