Опр. 1. *Топологическим пространством называется множество X, в котором выделено семейство подмножеств, называемых открытыми, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. *само пространство X и пустое подмножество $\varnothing$ являются открытыми множествами;*
2. *объединение любого семейства открытых множеств открыто;*
3. *пересечение двух открытых множеств открыто.*

Пример 1. Пусть X — произвольное множество.

1. (**тривиальная топология**) Открытыми множествами являются только само пространство X и пустое подмножество $\varnothing$.
2. (**дискретная топология**) Пусть X — произвольное множество. Открытыми множествами являются все его подмножества.

Пример 2. (**стандартная топология на** $\mathbb{R}$) Назовем подмножество $U \subset \mathbb{R}$ открытым, если для каждой точки $x \in U$ существует такое действительное число $\varepsilon > 0$, что все y, удовлетворяющие условию $|y - x| < \varepsilon$, также лежат в U.

Опр. 2. *Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$ — подмножество. Введем на Y топологию, объявив его открытыми подмножествами все множества вида $U \cap Y$, где U — открытое подмножество пространства X. Получающаяся топология называется топологией на Y, индуцированной топологией на X.*

1. Докажите, что индуцированная топология действительно является топологией.

Опр. 3. *Базой $\mathcal{B}$ открытых множеств на множестве X называется семейство его подмножеств, обладающее следующим свойством: если $V_1 \subset X$ и $V_2 \subset X$ принадлежат базе, то для любого $x \in V_1 \cap V_2$ найдется такое множество $U \in \mathcal{B}$, что $x \in U \subset V_1 \cap V_2$. Другими словами, если пересечение множеств V_1 и V_2 из базы не пусто, то $V_1 \cap V_2$ являются объединением некоторого (может быть, бесконечного) семейства множеств из базы.*

2. Пусть $\mathcal{B}$ — база открытых множеств на множестве X. Докажите, что совокупность подмножеств $U \subset X$, представимых в виде объединения некоторого (возможно, бесконечного) семейства множеств из база, а также $\varnothing$ и все X являются топологией на X.
3. (**топология декартового произведения**) Пусть X и Y — топологические пространства. Докажите, что базу топологии в $X \times Y \overset{\text{def}}{=} \{(x, y)\colon x \in X, y \in Y\}$ можно задать, как совокупность всех декартовых произведений открытых подмножеств в X и Y.

Опр. 4. *Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$ — произвольное подмножество. Тогда замыкание множества M называется пересечение всех замкнутых множеств (см. определение в лекции 1), содержащих M. Замыкание множества M обычно обозначается как $\bar{M}$.*

4. Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$. Докажите, что $\bar{M}$ состоит из всех точек $x \in X$, обладающих следующим свойством: для всякого открытого подмножества $U \ni x$ имеем $U \cap M \neq \varnothing$.
5. Пусть X — метрическое пространство и $M \subset X$ — подмножество. Тогда его замыкание $\bar{M} \subset X$ состоит из всех пределов последовательностей, все элементы которых лежат в M.

Опр. 5. *Пусть X — топологическое пространство. Точка $x \in X$ называется изолированной, если множество $\{x\}$ открыто.*

Упражнения

1. Докажите, что стандартную топологию на $\mathbb{R}$ можно задать с помощью базы открытых множеств вида $(p; q)$, где p и q — рациональные числа.
2. Пусть $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — топологическое пространство с индуцированной топологией. Приведите пример собственного подмножества X, которое одновременно открыто и замкнуто.
3. Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Докажите, что $\bar{A} = A$ тогда и только тогда, когда A — замкнутое множество.
4. Докажите, что открытый шар $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}^2$ открыт в топологии произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (на каждом экземпляре $\mathbb{R}$ задана стандартная топология).
5. Рассмотрим произвольное множество X. Докажите, что семейство подмножеств U, таких, что либо $U = \varnothing$, либо $X \setminus U$ счётно, образуют топологию на X.
6. Докажите, что семейство подмножеств U вещественной прямой $\mathbb{R}$, таких, что либо $\mathbb{R} \setminus U = \varnothing$, либо $\mathbb{R} \setminus U$ бесконечно, не образуют топологию на $\mathbb{R}$.
7. Отождествим $M_n(\mathbb{C})$ (множество квадратных матриц порядка n с комплексными коэффициентами) с пространством $\mathbb{C}^{n^2}$, на котором задана стандартная топология. Докажите, что множество обратимых матриц $GL_n(\mathbb{C})$ открыто в $M_n(\mathbb{C})$.
8. Докажите, что семейство арифметических последовательностей натуральных чисел образуют базу открытых множеств на множестве $\mathbb{N}$. (Топология на $\mathbb{N}$, определяемая указанной базой, называется топологией арифметических прогрессий).
9. Рассмотрим $\mathbb{N}$ с топологией арифметических прогрессий. Докажите, что
   (a) для простого числа p множество $\{np\colon n \in \mathbb{N}\}$ замкнуто;
   (b) множество простых чисел бесконечно.
10. Пусть X — топологическое пространство и $A \subset Y \subset X$. Докажите, что
    (a) подмножество A замкнуто в индуцированной топологии на Y тогда и только тогда, когда для некоторого замкнутого множества $B \subset X$ справедливо равенство $A = B \cap Y$;
    (b) замыкание A в индуцированной топологии на Y совпадает с $\bar{A} \cap Y$;
    (c) если A замкнуто в Y, а Y замкнуто в X, то A замкнуто в X.
11. Пусть X и Y — топологические пространства, $A \subset X$ и $B \subset Y$. Докажите, что
    (a) если A замкнуто в X, а B замкнуто в Y, то $A \times B$ замкнуто в $X \times Y$;
    (b) $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.
12. Докажите, что каждое открытое множество на прямой представимо как объединение не более чем счётного набора непересекающихся интервалов (допускаются интервалы с одним или обоими бесконечными концами).
13. Докажите, что каждое бесконечное замкнутое множество на прямой является замыканием некоторого своего счётного подмножества.
14. Каждую точку x непустого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ покроем замкнутым шаром $\bar{B}_\varepsilon(x)$. Докажите, что объединение этих шаров:
    (a) открыто, если A открыто;
    (b) замкнуто, если A замкнуто.
15. Выпуклой оболочкой множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A. Докажите, что для каждого открытого множества его выпуклая оболочка открыта.
16. Докажите, что непустое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто в том и только том случае, когда для каждой точки $x \in \mathbb{R}^n$ найдётся такая точка $y \in A$, что $\rho(x, y) = \rho(x, A) \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{z \in A} \rho(x, z)$.