Опр. 1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Отображение f называется непрерывным в точке $x \in X$, если для всякой окрестности $V \ni f(x)$ существует такая окрестность $U \ni x$, что $f(U) \subset V$. Отображение f называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.*

1. Пусть X, Y и Z — топологические пространства, $f\colon X \to Y$, $h\colon Y \to Z$ и $g\colon X \to \to Z$ — отображения. Докажите, что
   (a) если отображение $f(\cdot)$ непрерывно в точке $a \in X$, а отображение $h(\cdot)$ — в точке $b = f(a) \in Y$, то композиция $h \circ f$ непрерывна в точке a;
   (b) если отображения $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ непрерывны в точке $a \in X$, то декартово произведение отображения $f \times g\colon X \to Y \times Z$ (определяемое формулой $(f \times \times g)(x) = \big(f(x), g(x)\big)$) непрерывно в точке a.
2. Пусть X и Y — топологические пространства, $f\colon X \to Y$. Докажите, что отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда для всякого открытого подмножества $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(V) \subset X$ также открыт.

Опр. 2. *Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется гомеоморфизмом, если оно непрерывно, взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1}(\cdot)$ также непрерывно. Топологические пространства, между которыми существует гомеоморфизм, называются гомеоморфными.*

Опр. 3. *Пусть X и Y — топологические пространства, $a \in X$, и f — отображение из X в Y или из $X \setminus \{a\}$ в Y. Говорят, что точка $b \in Y$ является пределом f при x, стремящемся к a, если функция $\tilde{f}\colon X \to Y$, определенная по правилу*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(z), & z \neq a; \\ b, & z = a \end{cases}$$

является непрерывной в точке a. Обозначение: $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пример 1. Рассмотрим пространство $\bar{\mathbb{N}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, базу открытых множеств в котором составляют все одноточечные множества $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, и множества $[n, \infty] \overset{\text{def}}{=} \{m \in \mathbb{N}\colon n \leq m\} \sqcup \{\infty\}$. Последовательность точек $a_n \in X$, где X — топологическое пространство — не что иное, как функция $f\colon \mathbb{N} \to X$, для которой $f(n) = a_n$. Поэтому, будем говорить, что последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к a, если функция $f(\cdot)$ имеет предел, равный a, при n, стремящемся к ∞.

Первая аксиома отделимости. *Для любых двух различных точек x и y топологического пространства X существует окрестность U_x точки x, не содержащая точку y, и окрестность U_y точки y, не содержащая точки x.*

Вторая аксиома отделимости (аксиома Хаусдорфа). *Для любых двух различных точек x и y топологического пространства X существуют непересекающиеся окрестности $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$.*

Опр. 4. *Топологические пространства, удовлетворяющие второй аксиоме отделимости, называют хаусдорфовыми пространствами.*

Пример 2. Пусть $X = [0, 1]$, а открытыми множествами считаются пустое множество и все множества, получающиеся из отрезка выбрасыванием не более чем счетного числа точек. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме отделимости, но не является хаусдорфовым.

3. Докажите, что всякое метрическое пространство хаусдорфово.
4. Пусть X и Y — топологическое пространства. Предположим, что пространство Y

хаусдорфово и что $a \in X$ — неизолированная точка. Докажите, что для всякого отображения $f\colon X \setminus \{a\} \to Y$ предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ единствен (если он существует).

Опр. 5. *Отображение топологических пространств называется открытым, если оно переводит каждое открытое множество снова в открытое. Отображение, переводящее каждое замкнутое множество в замкнутое, называется замкнутым.*

Упражнения

1. Пусть X — пространство с дискретной топологией, а Y — произвольное топологическое пространство. Докажите, что произвольная функция $f\colon X \to Y$ является непрерывной.
2. Пусть X и Y — произвольные множества и f — отображение X в Y. Докажите, что если в Y задана некоторая топология τ, то прообраз топологии τ, т. е. совокупность всех множеств $f^{-1}(G)$, где $G \in \tau$, является топологией в X.
3. Топологическое пространство называется нормальным, если в нем всякие два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности. Докажите, что всякое метрическое пространство является нормальным.
4. Пусть X и Y — топологические пространства, при этом Y — хаусдорфово. Докажите, что для произвольных непрерывной функции $f\colon X \to Y$ и элемента $y \in Y$ множество $C_y = \{x \in X\colon f(x) = y\}$ замкнуто.
5. Пусть X — топологическое пространство, а f, $g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Докажите, что множество $U \overset{\text{def}}{=} \{x \in X\colon f(x) > g(x)\}$ открыто.
6. Пусть $X = A \cup B$, где A и B — замкнутые подмножества X. Пусть функции $f\colon A \to Y$ и $g\colon B \to Y$ непрерывны и совпадают на $A \cap B$. Докажите, что функция $h\colon X \to Y$, определяемая равенством
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in A; \\ g(x), & \text{иначе}, \end{cases}$$
является непрерывной функцией.
7. Пусть топологическое пространство $X = \cup_\alpha X_\alpha$ представимо в виде объединения открытых множеств X_α. Докажите, что функция $f\colon X \to A$, для которой сужения $f|_{X_\alpha}$ непрерывны, является непрерывной.
8. Докажите, что X является хаусдорфовым топологическим пространством тогда и только тогда, когда диагональ $\{(x, x) \in X \times X\}$ замкнута в $X \times X$.
9. Докажите, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, заданная равенством
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \text{НОД}(m, n) = 1, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$
непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных точках.
10. Пусть X — топологическое пространство, а f, $g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Докажите, что функция, действующая по правилу $x \mapsto \max(f(x), g(x))$, непрерывна.