Опр. 1. *Топологическое пространство X называется компактным, если оно обладает следующим свойством: во всяком семействе открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$, обладающем тем свойством, что $X = \cup_\alpha U_\alpha$, существует такое конечное подсемейство $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$, что $X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$ (кратко эту мысль выражают так: из всякого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие).*

Подмножество Y в топологическом пространстве X называется компактным, если оно компактно в топологии, индуцированной с X.

1. Докажите, что всякое компактное подмножество $M \subset \mathbb{R}$ обязано быть ограниченным.
2. Является ли интервал $(0;1)$ компактным множеством?
3. (**Лемма Гейне – Бореля**) Докажите, что всякий отрезок $[a;b] \subset \mathbb{R}$ компактен.
4. Пусть X — компактное топологическое пространство и $Y \subset X$ — его замкнутое подмножество. Докажите, что Y компактно.
5. Пусть X — хаусдорфово пространство и $K \subset X$ — его компактное подмножество. Докажите, что K замкнуто.
6. Докажите, что подмножество $X \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.
7. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причём X компактно. Докажите, что подмножество $f(X) \subset Y$ компактно.
8. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причём X компактно, а Y хаусдорфово. Докажите, что f переводит замкнутые подмножества X в замкнутые подмножества Y.
9. Докажите, что взаимно однозначное и непрерывное отображение φ компакта X на хаусдорфово пространство Y есть гомеоморфизм.
10. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на компактном пространстве X. Докажите, что f достигает на X наибольшего и наименьшего значения.
11. Пусть X и Y — компактные топологические пространства. Докажите, что произведение $X \times Y$ также компактно.

Опр. 2. *Параллелепипедом называется множество вида*

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon a_1 \le x_1 \le b_1, \ldots, a_n \le x_n \le b_n\}.$$

12. Докажите, что всякий параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ компактен.
13. Докажите, что подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Опр. 3. *Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность точек в топологическом пространстве X и $a \in X$. Точка a называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности $U \ni a$ существует бесконечно много $n \in \mathbb{N}$, для которых $x_n \in U$. Легко видеть, что если пространство X метрическое, то это равносильно тому, что существует подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к a.*

Опр. 4. *Пространство называется секвенциально (счётно) компактным, если всякая последовательность его точек имеет предельную точку.*

Опр. 5. *Множество S называется ε-сетью в метрическом пространстве X, если $X = \cup_{x\in S} \bar{B}_\varepsilon(x)$.*

Опр. 6. *Метрическое пространство X называется вполне ограниченным, если в нём для любого $\varepsilon > 0$ найдётся некоторая конечная ε-сеть.*

14. Докажите, что всякое компактное метрическое пространство вполне ограничено.

Упражнения

1. Пусть A — подмножество отрезка $[0,1]$, состоящее из всех тех чисел, в десятичной записи которых участвуют только цифры 0, 4 и 7. Компактно ли множество A?
2. Пусть $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что функция $z \mapsto |f(z)|$ принимает на $\mathbb{C}$ наименьшее значение.
3. Пусть f — многочлен от двух переменных с действительными коэффициентами. Верно ли, что функция $(x,y) \mapsto |f(x,y)|$ принимает на $\mathbb{R}^2$ наименьшее значение?
4. Пусть X — компактное пространство, а $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность непустых вложенных замкнутых множеств: $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$. Докажите, что пересечение $\cap_n C_n$ не пусто.
5. Пусть A и B — непересекающиеся компактные подмножества хаусдорфова пространства X. Докажите, что существуют такие непересекающиеся открытые подмножества U, $V \subset X$, что $A \subset U$ и $B \subset V$.
6. Пусть X — топологическое пространство, а A и B — его компактные подмножества. Докажите, что $A \cup B$ — компактное множество, а если X хаусдорфово, то и $A \cap B$ компактно.
7. Пусть E — множество всех рациональных чисел $q \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющих неравенствам $2 < q^2 < 3$. Докажите, что E замкнуто и ограничено во множестве рациональных чисел с естественной топологией, но не является компактным.
8. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется локально ограниченной, если для любой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность, в которой функция f ограничена. Докажите, что если X — компактно, а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ — локально ограничена, то она ограничена.
9. Пусть ℓ^∞ — множество всех ограниченных последовательностей. Докажите, что функция $\rho(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ является метрикой на ℓ^∞. Компактны ли замкнутые шары пространства ℓ^∞?
10. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение метрических пространств, причём X компактно. Докажите, что f — равномерно непрерывное отображение.
11. Придумайте такое непрерывное взаимно однозначное отображение топологических пространств $f\colon M \to N$, что M компактно, но f — не гомеоморфизм.
12. Нормой в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) называется всякий функционал $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим аксиомам:
    (a) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$;
    (b) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, для всех x, $y \in V$;
    (c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, для всех $x \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

    Докажите, что в любом конечномерном нормированном пространстве V все нормы эквивалентны, а именно, что для любых двух норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ найдутся такие действительные числа α_1, $\alpha_2 > 0$, что $\alpha_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \alpha_2\|x\|_1$, $x \in V$.
13. (**Диагональная процедура**) Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность отображений метрических пространств $f_n\colon X \to Y$, а Y — компакт. Докажите, что для произвольного счётного подмножества $S \subset X$ найдётся подпоследовательность $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ функций, сходящихся в каждой точке множества S.
14. (**Теорема Арцела – Асколи**) Пусть последовательность функций $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f\colon K_1 \to K_2$, где (K_1,ρ_1) и (K_2,ρ_2) — метрические компакты, является равностепенно непрерывной: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, y \in K_1$, $n \in \mathbb{N}$ из $\rho_1(x,y) \le \delta$ следует неравенство $\rho_2\big(f_n(x), f_n(y)\big) \le \varepsilon$. Докажите, что из последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность.