Опр. 1. *Метрическим пространством называется множество X, на парах точек которого задана функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ (называемая метрикой), удовлетворяющая следующим условиям:*

- *(неотрицательность) $\rho(x, y) \geq 0$ для любых x и y;*
- *(невырожденность) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;*
- *(симметричность) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;*
- *(неравенство треугольника) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.*

1. Докажите, что аксиома «неотрицательности» в определении выше избыточна.

Опр. 2. *Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$. Открытым (замкнутым) шаром $B_\varepsilon(x)$ ($\bar{B}_\varepsilon(x)$) с центром $x \in X$ и радиусом $\varepsilon > 0$ называется множество*

$$B_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \colon \rho(x, y) < \varepsilon\} \quad \Big(\bar{B}_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \colon \rho(x, y) \leq \varepsilon\}\Big).$$

Опр. 3. *Подмножество U метрического пространства X, такое что для всякой точки $x \in U$ существует открытый шар с центром в x, содержащийся в U (т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$), называется открытым.*

2. Докажите, что для произвольного метрического пространства X
   (a) само X и пустое подмножество $\varnothing$ являются открытыми множествами;
   (b) объединение любого семейства открытых множеств открыто;
   (c) пересечение двух открытых множеств открыто.

Опр. 4. *Пусть X — метрическое пространство. Подмножество $F \subset X$ называется замкнутым, если его дополнение $X \setminus F$ открыто.*

3. Докажите, что для произвольного метрического пространства X
   (a) само X и пустое подмножество $\varnothing$ являются замкнутыми множествами;
   (b) пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто;
   (c) объединение двух замкнутых множеств замкнуто.

Опр. 5. *Говорят, что последовательность точек $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ метрического пространства (X, ρ) сходится к точке x, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всякого целого числа $n > N_\varepsilon$ справедливо неравенство $\rho(x, x_n) < \varepsilon$.*

Опр. 6. *Пусть (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) — метрические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется непрерывным в точке x_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого $x \in X$, такого, что $\rho_1(x_0, x) < \delta$, выполняется неравенство: $\rho_2\big(f(x_0), f(x)\big) < \varepsilon$.*

Опр. 7. *Пусть X — метрическое пространство и $x \in X$. Окрестностями точки x называются открытые множества, содержащие x.*

4. Дано отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y. Докажите, что f непрерывна в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для всякой окрестности $V \ni f(x_0)$ существует такая окрестность $U \ni x_0$, что $f(U) \subset V$.

Опр. 8. *Пусть $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность точек в метрическом пространстве X и $x \in X$. Точка x называется предельной точкой последовательности (x_n), если существует подпоследовательность последовательности (x_n), сходящаяся к x.*

Опр. 9. *Метрическое пространство X называется компактным, если всякая последовательность его точек имеет предельную точку.*

Опр. 10. *Семейство открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$ метрического пространства X называется (открытым) покрытием, если $X = \cup_\alpha U_\alpha$.*

5. (**Лемма о лебеговом числе**) Докажите, что для всякого открытого покрытия компактного метрического пространства X существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всякой точки $x \in X$ шар $B_\varepsilon(x)$ содержится в одном из множеств покрытия.
6. Докажите, что метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда во всяком открытом покрытии $\{U_\alpha\}$ существует конечное подпокрытие $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$, т.е. $X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$.

Упражнения

1. Является ли $(\mathbb{R}, \rho)$ метрическим пространством, если

$$a) \quad \rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}; \quad b) \quad \rho(x,y) = (x-y)^2; \quad c) \quad \rho(x,y) = \sin^2(x-y).$$

2. Является ли отображение $\tau\colon (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ метрикой на $X \times Y$ для любых метрических пространств (X, ρ), (Y, σ), если
   (a) $\tau\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \rho(x_1,x_2) + \sigma(y_1,y_2)$;
   (b) $\tau\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \min\big(\rho(x_1,x_2), \sigma(y_1,y_2)\big)$;
   (c) $\tau\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \max\big(\rho(x_1,x_2), \sigma(y_1,y_2)\big)$.
3. Докажите, что пара $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$, где $\rho_p(x,y) \overset{\text{def}}{=} (|x_1-y_1|^p + \ldots + |x_n-y_n|^p)^{1/p}$, является метрическим пространством при $p \geqslant 1$ (приведенная метрика называется L^p-метрикой).
4. Докажите, что пара $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$, где $\rho_\infty(x,y) \overset{\text{def}}{=} \max(|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n|)$, является метрическим пространством (приведенная метрика называется L^∞-метрикой).
5. Докажите, что все L^p-метрики $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ определяют на $\mathbb{R}^n$ одно и тоже семейство открытых множеств.
6. Докажите, что функции

$$a) \quad \rho_\infty(f,g) \overset{\text{def}}{=} \max_{x\in[0,1]} \big(|f(x)-g(x)|\big); \quad b) \quad \rho_1(f,g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

   являются метриками на множестве $C[0,1]$ непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,1]$.
7. Рассмотрим метрическое пространство $(B[0,1], \rho_\infty)$, где $B[0,1]$ — множество всех ограниченных функций $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Докажите, что множество $C[0,1]$ является замкнутым, но не открытым подмножеством в $B[0,1]$.
8. Докажите, что единичный открытый шар из пространства $(C[0,1], \rho_\infty)$ не является открытым множеством в пространстве $(C[0,1], \rho_1)$.
9. Докажите, что единичный открытый шар из пространства $(C[0,1], \rho_1)$ является открытым множеством в пространстве $(C[0,1], \rho_\infty)$.
10. Пусть (K, ρ) — метрическое пространство. Отображение $f\colon K \to K$ называется изометрией, если для всех $x, y \in K$ справедливо равенство $\rho(x,y) = \rho\big(f(x), f(y)\big)$. Докажите, что если K — компактное пространство и
    (a) отображение g не уменьшает расстояние, т. е. $\rho\big(g(x), g(y)\big) \geq \rho(x,y)$ для всех $x, y \in K$, то оно является изометрией;
    (b) отображение g сюръективно и не увеличивает расстояние, то оно является изометрией;
    (c) отображение g изометрично, то оно является биекцией.