Операции и инварианты - I

В большинстве задач листка спрашивается о возможности перехода объекта от одного состояния в другое при многократном действии какого-либо преобразования. Для того чтобы доказать, что данный переход не возможен, находят такую инвариантную (неизменяемую) величину (характеристику объекта), значения которой для начального состояния и конечного различаются. Вся сложность таких задач состоит как раз в том, чтобы определить такой инвариант. Очень часто инвариантом служит чётность некоторого числа.

1. (07.2.5) На клетчатой доске 8×8 более половины клеток заняты мухами. Начиная с какого-то момента, через каждую секунду каждая муха переползает в какую-то соседнюю по стороне клетку.
   (a) Может ли при каком-то начальном расположении мух через какое-то время получиться так, что все они окажутся в одной клетке?
   (b) Та же задача, если доска имеет размеры 7×7.
2. (98.2.6) На доске записаны числа 12 и 56. Разрешается дописывать на доску новые числа, равные сумме, разности или произведению любых двух (по вашему выбору) уже имеющихся на доске чисел. Можно ли таким способом получить число 1998?
3. (17.2.6) Три стула расположены в ряд. На крайнем слева стуле сидит Андрей, на крайнем справа — Виктор, и по-середине — Борис. По команде какие-то двое из ребят меняются местами. Может ли оказаться так, что после восьмидесяти перемен мест на крайнем левом стуле окажется Виктор, а на крайнем правом — Андрей?
4. (09.2.8) Имеется пять кошельков с монетами, в четырёх из которых лежит по одной монете, а в одном — пять монет. За один ход разрешается, выбрав какие-то три различных кошелька, в два из них добавить по монете, а из третьего — убрать одну монету (разумеется, в том кошельке, из которого собираются убрать монету, хотя бы одна монета должна быть). За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы во всех пяти кошельках монет стало поровну?
5. (14.2.8) По кругу расположено 15 натуральных чисел. За один ход с числами проделывается следующая операция: между каждой парой соседних чисел одновременно записывается произведение этих двух чисел, и после этого исходные числа стираются. В начале в каком-то порядке были записаны числа $1, 2, \ldots, 15$. Может ли случиться, что после некоторого числа ходов по кругу будут записаны только равные числа?
6. (94.2.8) Дана прямоугольная доска размера 3×7 клеток. Может ли шахматный конь, начав с какого-либо углового поля этой доски и перепрыгивая с одного её поля на другое по шахматным правилам, побывать на каждом поле доски ровно один раз и последним ходом стать на какое-либо угловое поле (быть может, исходное)?
7. (95.2.8) У восьмиклассника Пети имеется калькулятор с четырьмя кнопками — двумя красными и двумя синими. Нажатие одной из красных кнопок приводит к тому, что число на табло калькулятора умножается на 2, а другой — на 5. Нажатие же одной из синих кнопок приводит к тому, что к числу на табло калькулятора прибавляется 2, а другой — число 5. Вначале на табло калькулятора было записано число 2. Учитель математики поставил перед Петей задачу:

поочерёдно нажимая кнопки разных цветов, получить на табло калькулятора число 1995. Если Петя решит задачу, учитель поставит ему в журнал пятёрку, а если нет — двойку. Не долго думая, Петя нажал синюю кнопку.
   (a) Какую оценку получит Петя?
   (b) Смог бы Петя получить пятёрку, если бы начал с красной кнопки?
8. (92.2.9) На доске записаны числа 1, 2, ..., 1998. За один ход разрешается стереть любые два записанных числа a и b, а вместо них записать на доску одно число: $a-b$ или $b-a$ (по своему усмотрению). Через 1997 таких ходов на доске останется одно число.
   (a) Может ли это число равняться нулю?
   (b) Какое наибольшее значение оно может иметь?

Домашнее задание

1. (01.2.5) В двадцати белых клетках обычной шахматной доски 8×8 лежит по зёрнышку. Жук ползает по доске, переползая всякий раз из клетки в соседнюю по стороне клетку. При этом, находясь в клетке с зёрнышком, он съедает его. Жук насытится, если съест не менее 10 зёрнышек. Может ли в результате жук остаться голодным, если он обползёт наугад 44 клетки доски, не побывав ни в одной клетке более раза?
2. (97.2.6) На доске записаны числа 12, 45, 78 и 1998. За один ход с числами разрешается проделывать следующую операцию: выбрать два записанных на доске числа a и b (свои на каждом ходу) и дописать на доску любое (по своему усмотрению и своё на каждом ходу) из чисел $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ или $\overline{ab}$ (число $\overline{ab}$ получается приписыванием к числу a справа числа b). При этом сами числа a и b также остаются на доске.
   (a) Можно ли за несколько таких ходов получить на доске число 1997?
   (b) Можно ли получить число 1997, если, кроме указанных операций, дополнительно разрешается пользоваться делением (т.е., выбрав на доске числа a и b, где $b \neq 0$, можно дописать на доску число, равное $a : b$)?
3. (03.2.8) На доске записаны четыре числа 6, 7, 8, 9. За один ход разрешается, выбрав произвольно какие-то два имеющихся числа x и y, заменить пару чисел (x, y) на одну из пар $(x+2, y+2)$, $(x-2, y-2)$ или на пару $\left(\frac{x}{3}, 3y\right)$ (при условии, что x делится на 3). Можно ли за конечное число ходов получить из исходного набора чисел числа
   (a) 2, 0, 0, 3; (b) 2, 1, 0, 1?
4. (09.2.9) У Пети на столе лежат 7 кучек монет. В первой из них лежит одна монета, во второй — две, в третьей — три, ..., в седьмой — семь (т.е. в каждой куче лежит столько монет, каков номер этой кучи). В кошельке у Пети есть очень много монет. За один ход Петя может выбрать какие-то пять куч и добавить в каждую из них по монете из кошелька. За какое наименьшее число ходов Петя может уравнять число монет во всех семи кучках?
5. (14.2.9) По кругу расположено 16 натуральных чисел, среди которых по меньшей мере три различных. За один ход с числами проделывается следующая операция: между каждой парой соседних чисел одновременно записывается произведение этих двух чисел, и после этого исходные сила стираются. Может ли случиться, что после некоторого числа ходов по кругу будут записаны только равные числа?