

Теория графов - I

Графом называется произвольное множество элементов V (вершины графа) и произвольный набор пар E (рёбра графа), составленных из элементов множества V (обозначение $G = (V, E)$). Графы принято изображать на плоскости следующим образом: 1) вершины графа изображаются точками; 2) если две вершины образуют ребро, то соответствующие точки соединяются отрезком или дугой. Граф $G = (V, E)$, у которого каждая пара вершин соединена ребром, называется *полным*. *Путём* в графе $G = (V, E)$ называется любая последовательность вершин v_1, v_2, \dots, v_{n+1} , такая что пара (v_i, v_{i+1}) из E (число n в данных обозначениях называется *длиной пути*). Граф G называется *связным*, если для любых различных вершин $u, v \in V$ существует путь из u в v . *Степенью* вершины v (обозначение $\deg v$) называется количество рёбер, которыми она принадлежит. При решении задач полезны следующие утверждения:

- (**Лемма о рукопожатиях**) в любом графе $G = (V, E)$ справедливо равенство $\deg v_1 + \dots + \deg v_{|V|} = 2|E|$, а значит, количество вершин нечётной степени чётно;
- в полном графе количество рёбер равно $|V|(|V| - 1)/2$;
- если для любых двух различных вершин u и v графа G справедливо неравенство $\deg u + \deg v \geq |V| - 1$, то граф G является связным.

1. (97.2.5) В пятом классе некоторой школы каждый мальчик и каждая девочка дружат ровно с 5-ю девочками и ровно с 6-ю мальчиками из класса. Сколько школьников учится в пятом классе, если известно, что их не больше 32?
2. (04.2.6) При каких $n > 3$ на плоскости можно расположить n точек и соединить их отрезками так, чтобы из каждой точки выходило по 3 отрезка и никакие из этих отрезков не пересекались (не имели общих внутренних точек)?
3. (99.2.9) На некотором пространстве под землёй живёт 21 землеройка, каждая — в своей пещере-жилище. Чтобы общаться друг с другом, не вылезая на поверхность, землеройки прорыли между своими жилищами 103 тоннеля. Каждый тоннель соединяет только два жилища, тоннели не пересекаются, и никакие два жилища не соединены более чем одним тоннелем. Докажите, что есть землеройка, которая может по вырытым тоннелям переползать в жилища не менее чем 12 других землероек (посещая, возможно, по пути другие жилища).
4. (94.2.9) Можно ли некоторые стороны и диагонали n -угольника закрасить в один из двух цветов (красный или синий) так, чтобы для каждого двух его вершин A и B выполнялись оба условия:
 - (а) из вершины A можно попасть в вершину B по отрезкам одного и того же цвета, причём если из вершины A в вершину B можно добраться по красным отрезкам, то нельзя по синим, а если из A можно добраться в B по синим, то нельзя по красным;
 - (б) в раскраске имеются и красные, и синие отрезки.
5. (97.2.9) В некоторой компании n мальчиков и $n + 1$ девочка. При каких n может быть так, что все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики знакомы с одинаковым числом девочек?
6. (12.2.9) В некотором классе у некоторых школьников нет мобильных телефонов. Перед Новым годом любые два одноклассника, имеющих мобильные телефоны, послали друг другу поздравительные SMS-сообщения. А любые два других одноклассника (таких, что у обоих нет мобильного телефона или у одного — есть, а у другого — нет) послали по почте друг другу поздравительные открытки. Чис-

ло всех посланных открыток оказалось равно 656. Определите, сколько было отправлено SMS-сообщений.

7. (05.2.11) В классе 21 ученик. На Новый год каждый из них послал открытки ровно n одноклассникам. При каком наименьшем n можно утверждать, что обязательно найдутся двое одноклассников, пославших открытки друг другу?

Домашнее задание

- (02.2.7) Можно ли на плоскости начертить семь отрезков так, чтобы три из них пересекались ровно с тремя отрезками каждый, а четыре — ровно с четырьмя отрезками каждый?
- (97.2.7) Однажды ковбои одного городка на Диком Западе решили поразвлечься и устроили перестрелку, после которой, к сожалению, в живых остался только один ковбой, а все остальные были убиты. При этом некоторые ковбои были застрелены, так и не успев произвести ни одного выстрела, а каждый из остальных застрелил троих до того, как был застрелен сам. Единственный уцелевший ковбой также застрелил троих. (Никакой ковбой не был застрелен двумя ковбоями.) Докажите, что число застреленных ковбоев, не успевших произвести в перестрелке ни выстрела, нечётное.
- (09.2.8) На плоскости проведено 9 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Может ли число точек пересечения этих прямых равняться (a) 22; (b) 32?
- (99.2.9) Сколько различных путей ведут из точки A в точку B на рисунке, если



ни через какую точку нельзя проходить дважды? (Всего n полуокружностей.)

- (11.2.9) Художник Мазилкин нарисовал на плоскости 9 окружностей и окрасил в красный цвет все их общие точки, т.е. точки пересечения и точки касания окружностей. При этом оказалось, что через каждую окрашенную точку проходит ровно по две из построенных окружностей. Затем для каждой из окружностей Мазилкин подсчитал, сколько окрашенных точек на ней находится. Могло ли получиться так, что
 - 5 из окружностей имеют по 4 окрашенные точки, а остальные 4 окружности — по 5 окрашенных точек;
 - 5 из окружностей имеют по 5 окрашенных точек, а остальные 4 окружности — по 4 окрашенные точки?
- (99.2.10) На некотором пространстве под землёй живут 20 кротов, каждый — в своей пещере-жилище. Чтобы общаться друг с другом, не вылезая на поверхность, кроты прорыли между своими жилищами 100 тоннелей-ходов, причём каждый крот прорыл от своего жилища не менее трёх тоннелей. Каждый тоннель соединяет только два жилища, тоннели не пересекаются, и никакие два тоннеля не соединяют одну и ту же пару жилищ; каждый тоннель прорыт целиком одним из кротов. Докажите, что все кроты, переходя по тоннелям, могут встретиться в жилище у какого-нибудь одного крота.