

Геометрия - II

Прямоугольный треугольник

1. (94.3.8) В прямоугольном треугольнике ABC отмечена точка K — середина гипотенузы AB . На катете BC выбрана точка M , так что $BM = 2 \cdot MC$. Докажите, что $\angle MAB = \angle MKC$.
2. (16.3.8) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) высота, опущенная на гипотенузу, равна $\sqrt{3}$, а разность острых углов равна 30° . Найдите длины сторон треугольника ABC .
3. (17.3.8) Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B . Пусть M и N — середины его сторон AC и BC соответственно. На продолжении отрезка MB за точку B отмечена такая точка X , что угол ANX равен 90° . Найдите углы треугольника ANX .
4. (17.3.9) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) точки K и L — точки касания вписанной в него окружности со сторонами AC и AB соответственно. На прямую KL из точек C и B опущены перпендикуляры CM и BN . Найдите отношения сторон треугольника ABC , если $MK + LN = KL$.
5. (18.3.9) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ (точки E и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB). Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Найдите величину угла EID .

Трапеция

6. (95.3.8) Основание BC трапеции $ABCD$ равно боковой стороне AB и в два раза меньше основания AD . Найдите величину угла $\angle ACD$.
7. (96.3.9) На боковой стороне AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AB \perp AD$) построена полуокружность, которая касается боковой стороны CD в точке K . Диагонали трапеции пересекаются в точке L . Докажите, что отрезок KL параллелен основаниям трапеции, и найдите его длину, если $AD = a$ и $BC = b$.
8. (99.3.8) Боковые стороны трапеции относятся как $1 : 2$, а сумма углов при большем основании равна 120° . Найдите углы данной трапеции.

Квадрат

9. (04.3.7) Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка K , не лежащая на диагонали BD , а на стороне CD — точка M , так что $MK = KD$ и $BK \perp KM$. Найдите величину угла KBM .
10. (01.3.8) На сторонах AB , BC , CD и DA квадрата $ABCD$ отмечены точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 соответственно. Докажите, что если отрезки A_1C_1 и B_1D_1 перпендикулярны, то $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.
11. (04.3.8) В равносторонний треугольник ABC со стороной 1 вписаны два квадрата $MNKL$ и $RKPT$, так что точки M , L и R находятся на стороне AC (порядок следования точек: A , M , L , R , C), точки P и T — на стороне BC (порядок следования точек: B , P , T , C), а точка N находится на стороне AB . Найдите длины сторон этих квадратов.
12. (97.3.9) Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка K , из которой опущены перпендикуляры KN и KL на стороны AB и AD соответственно. Докажите, что в четырёхугольник $BCKN$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда можно вписать окружность в четырёхугольник $DCKL$.

13. (01.3.9) На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ как на основаниях построены равнобедренные треугольники ABP и BCQ с углом 80° при вершине, причём точка P лежит внутри квадрата, а точка Q — вне квадрата. Найдите угол между прямыми PQ и BC .

Вписанный четырёхугольник

14. (95.3.9) В четырёхугольнике $ABCD$ стороны $AB = BC = 1$, а углы $\angle ABC = 102^\circ$, $\angle ADC = 129^\circ$. Найдите длину диагонали BD .
15. (16.3.9) В остроугольном треугольнике ABC центр описанной окружности, ортоцентр (точка пересечения высот), а также вершины A и B лежат на одной окружности. Найдите все возможные значения угла ACB .
16. (16.3.9) Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность. Известно, что $AM : MC = 3 : 1$, $AC : BD = 2 : \sqrt{3}$, $\angle BAC = \angle DAC$. Найдите все возможные значения угла BAD .
17. (18.3.9) В неравнобедренном треугольнике ABC отмечен ортоцентр H . Прямая AH пересекает описанную окружность треугольника в точках A и D . Касательная к описанной окружности в точке D пересекает прямую BC в точке K . Точка H_1 симметрична точке H относительно середины отрезка BC . Докажите, что $AH_1 \perp KH$.

Задачи на построение

18. (00.3.8) На школьной доске был нарисован треугольник ABC , на сторонах AB , BC и AC которого отмечены такие точки M , N и K соответственно, что

$$AM : MB = BN : NC = CK : KA = 2 : 1.$$

Затем весь рисунок с доски стёрли, оставив лишь точки M , N и K . Докажите, что с помощью циркуля и линейки по точкам M , N и K можно восстановить треугольник ABC .

19. (00.3.9) В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) на стороне AB взята точка D . На отрезке CD отмечены точки M и N . Постройте на отрезках CA и CB точки X и Y соответственно, так чтобы прямые XY и AB были параллельны и чтобы сумма $MX + NY$ была наименьшей.
20. (01.3.8) Дан угол и точка O внутри его. При помощи циркуля и линейки постройте отрезок с концами на сторонах угла, так чтобы этот отрезок проходил через точку O и делился ею в отношении $2000 : 2001$. (Опишите все нужные построения, не проводя их фактически).

Домашнее задание

1. (13.3.9) В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , а в треугольнике ALC — биссектриса LM . Известно, что $AM = ML$ и $BC = AC\sqrt{3}$. Найдите углы треугольника ABC .
2. (96.3.9) Два квадрата $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину A (перечисление вершин обоих квадратов — против часовой стрелки). Пусть B_2 , C_2 , D_2 — середины отрезков BB_1 , CC_1 , DD_1 соответственно. Докажите, что четырёхугольник $AB_2C_2D_2$ также является квадратом.
3. (04.3.9) Точки M и N являются соответственно серединами сторон BC и CD ромба $ABCD$. Докажите, что если отрезки AM и BN перпендикулярны, то $ABCD$ — квадрат.