Целые числа. Делимость и остатки - I

Разделить целое число a на натуральное число b с остатком означает найти такие целые числа q и r, что выполнено равенство $a = qb + r$, при этом $0 \leq r < b$. Рассмотрение остатков при делении на некоторые специально подобранные числа помогает решить большое количество задач. При этом используются следующие две идеи:

Идея 1: Сумма (разность и произведение) двух натуральных чисел и сумма (разность и произведение) их остатков дают одинаковые остатки при делении на произвольное натуральное число.

Идея 2: Так как остатков при делении на натуральное число n существует ровно n, то при некоторых повторяющихся действиях (например, возведение в степень), остатки повторяются по определённому правилу, т. е. полезно пытаться искать закономерности.

Для краткости, утверждения об остатках удобно записывать на языке сравнений по модулю. Вместо фразы: „числа a и b дают одинаковые остатки при делении на число n", будем записывать кратко: $a \equiv b \pmod{n}$ (читается как „a сравнимо с b по модулю n"). Кроме краткости, такая запись (часто) позволяет работать с остатками, как с обычными равенствами.

Согласно основной теореме арифметики, любое натуральное число n однозначно записывается в виде произведения степеней различных простых чисел: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$.

1. (96.2.8) Найдите все натуральные числа m и n, при которых справедливо равенство $10^m - 3^n = 7$.
2. (97.2.8) Пусть a — любое нечётное число, большее 3. Докажите, что предпоследняя цифра числа a^2 является чётной.
3. (04.2.8) Существует ли такое натуральное число n, что разность кубов чисел $n + 2$ и n равна 2004?
4. (05.2.8) Про натуральные числа $x \neq y$ известно, что число $2005x^2 + 10xy + y^2$ делится на 6. Какое наименьшее значение может принимать выражение $|x^2 - y^2|$.
5. (06.2.8) В десятичной записи натурального числа N содержится ровно 2006 единиц, 2006 двоек, 2006 троек и 2006 четвёрок; никаких других цифр число N не содержит. Может ли число $N + 1$ быть простым?
6. (12.2.8) На доске записано несколько чисел. Ровно два из них делится на 2 и ровно тридцать три из них делятся на 33. Пусть M — наибольшее из записанных чисел. Какое наименьшее значение может принимать число M?
7. (14.2.8) На доске записаны четыре числа n, $3n+1$, $5n+2$, $7n+3$, где n — некоторое натуральное число. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди чисел, записанных на доске?
8. (91.2.9) Докажите, что ни при каком целом x число $x^2 + x + 1$ не делится на 9.
9. (94.2.9) Докажите, что число $19^{95} + 95^{19}$ делится нацело на число $19 + 95$.
10. (95.2.9) Наибольший общий делитель натуральных чисел a, b, c равен d, а наибольший общий делитель их попарных сумм $a + b$, $a + c$, $b + c$ равен kd. Какое наибольшее значение может принимать число k?
11. (98.2.9) Докажите, что ни при каких целых a, b и c числа
$$\frac{a-b}{a-c} - \frac{b}{c}, \quad \frac{b-c}{b-a} - \frac{c}{a}, \quad \frac{c-a}{c-b} - \frac{a}{b}$$
не могут быть целыми одновременно.
12. (00.2.9) Натуральное число назовём простейшим, если любые несколько (в том числе одна или все) подряд идущие его цифры образуют простое число. Например, числа 23 и 37 простейшие, а числа 237 и 357 — нет. Найдите (с обоснованием) наибольшее простейшее число.

13. (09.2.9) Найдите все двузначные натуральные числа $\overline{ab}$, десятичная запись квадратов которых имеет вид $\overline{xyab}$, где x, y — некоторые цифры, $x \neq 0$.
14. (10.2.9) Найдите все такие натуральные простые числа p, что $10p^2 - 37$ — натуральное простое число.
15. (15.2.9) Сумма остатков при делении натурального числа N на 1000 и 1100 равна 2016. Найдите минимальное значение, которое может принимать число N.

Домашнее задание

1. (00.2.8) У восьмиклассника Васи в кармане лежит 100 одинаковых по форме карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 100 (каждое число — ровно на одной карточке). Вася вынимает наугад часть карточек и смотрит, какие числа на них написаны. Какое наименьшее количество карточек должен вынуть Вася, чтобы среди записанных на них чисел заведомо нашлось три, сумма которых делится на 3?
2. (08.2.8) Здравый скептик Санчо Панса ни за что не верит, что неопытный восьмиклассник может подобрать такое натуральное число n, чтобы число $n^6 + 206$ делилось без остатка на $n^2 + 2$. В то же время безнадёжный оптимист дон Кихот уверен, что такие числа существуют. Неужели это действительно так? Сколько таких чисел существует?
3. (09.2.8) Найдите все четырёхзначные числа, которые являются квадратом натурального числа, причём в их десятичной записи в разряде тысяч стоит цифра 5, а в разряде десятков стоит цифра 2.
4. (10.2.8) Натуральные числа a, b и c таковы, что $2a^2 = 3b^3 = 5c^5$. Какое наименьшее значение может принимать c?
5. (97.2.9) Докажите, что предпоследняя цифра квадрата натурального числа тогда и только тогда нечётная, когда он заканчивается на 6.
6. (98.2.9) Докажите, что в любом году найдётся пятница, приходящаяся на 13-е число. (Количества дней в месяцах года, начиная с января, равны соответственно 31, 28 (или 29), 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31.)
7. (04.2.9) Существует ли такая пара натуральных чисел, что разность их кубов равна 2004?
8. (05.2.9) Существует ли такое натуральное число, которое
   (a) делится на 7, а сумма его цифр равна 11?
   (b) делится на 11, а сумма его цифр равна 7?
9. (11.2.9) Найдите наименьшее натуральное число a, для которого существуют такие различные простые числа p и q, что число ap — квадрат некоторого натурального числа, а число apq — куб некоторого натурального числа.
10. (12.2.9) На классной доске записано семь различных натуральных чисел. Известно, что ровно пять из них делятся на 3, ровно пять — на 5 и ровно пять — на 7. Пусть M — наибольшее из записанных чисел. Какое наименьшее значение может принимать число M?
11. (14.2.9) На доске записаны четыре числа n, $2n+1$, $5n+2$, $7n+4$, где n — некоторое натуральное число. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди чисел, записанных на доске?
12. (16.2.9) Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 - bx + c$ с натуральными коэффициентами a, b и c имеет два различных целых корня. Известно, что $f(1) = p$, где p — некоторое простое число. Найдите все возможные значения суммы $f(p)+f(p+2)$.