# 前回から今回の流れ

- 複素数の一次変換から一次分数変換を考える
- 一次分数変換PSLと行列の積が似てる
- 「リーマン球面（学習済）」と「群論」を使えば繋げられる模様
- まずは群論の基礎
- そして一次分数変換群を再確認
- 最後に2つの材料を使ってPSLとSLをつなげる

# 前回の復習１

一次変換から最強の形へ

- 双曲幾何では複素数を基本に話を進めていく
- 点を点に写す一次変換というのが全部で３種類ある
  - 和：平行移動
  - 積：回転・拡大
  - 逆数：反転
- ３種類の一次変換を1つの式で表せないか？
  - 一次分数変換：俺が考えた全てを含んだ最強の一次変換の式
  - $\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

# 前回の復習２
## 一次分数変換の性質

- 一次分数変換の合成はどうなる？
  - 合成しても一次分数変換
  - 行列の積に似ている（けどちょっと違う）

$$\begin{cases} \Phi_1(\Phi_2(z)) = \dfrac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

  - どうにかしての合成変換と行列の積を同一視できないか？
  - 2つの要素を使えばできる！
    - 拡張複素数とリーマン球面
    - 群論
    - とりあえず順番に勉強していこう

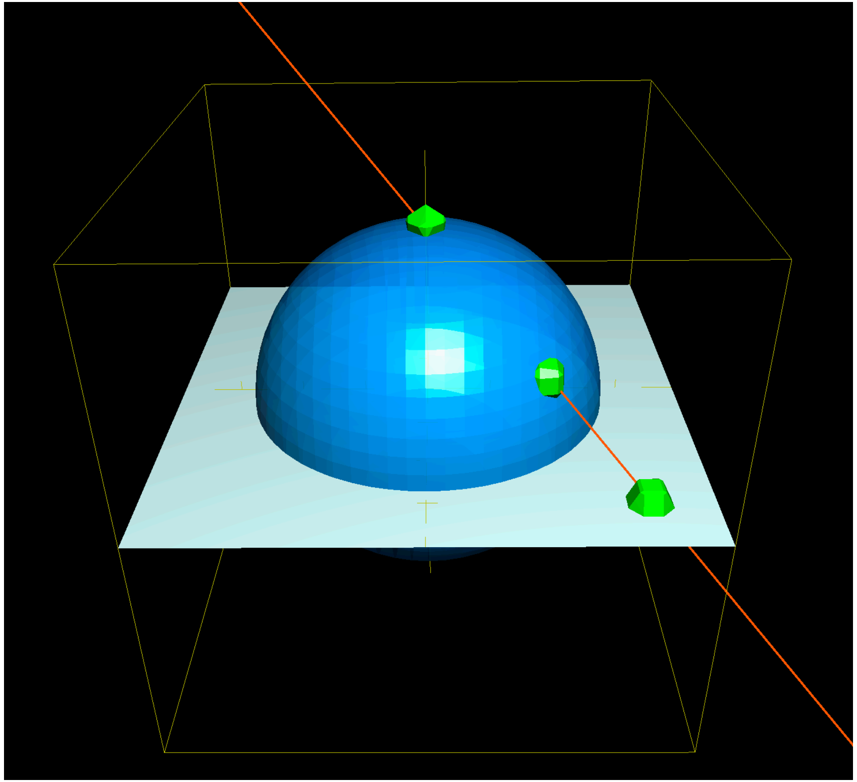
# 前回の復習３
拡張複素数のお出まし

- 拡張複素数とはなんぞや
  - 複素数Cに「∞」を加えたやつ
- 一次分数変換を拡張複素数で再定義する
  - $ad-bc=0$と$\frac{0}{0}$が同値になるので都合が悪いので定義はしない
  - 分母に∞があったり０があったりしても定義できる

# 前回の復習４

立体投影：写像Π

- 原点で球面をガウス平面に重ねる
- 写像Πv0
  - 北極点を除く任意の球面とガウス平面の点とを対応させる
- 写像Πv0に拡張複素数を対応させる
  - 北極点と∞を対応させる
  - こうすると球面で拡張複素数（つまり∞）を扱うことができる
- 写像Πと一次分数変換を使って球面から球面への写像を定義できる！



# 群論に関して

- 群論は別の「群論の気持ち」スライドを参照

# 1. PSL(2;C)とSL(2;C)の関係性

1. 一次分数変換群PSL
   1. 定理
   2. 群を成すことを示す
2. Lem1.35 写像・のリーマン球面への作用
3. 系1.36 PSLは全単射
4. Def 1.38 準同型写像
5. Def 1.41 同型写像

   これらの定義・定理・補題・系を用いてSL→PSLの写像を考える
6. Lem 1.43 写像φは準同型写像
7. Lem 1.44 写像φは全射．またφ(A)=φ(B) => A=B or A=-B

   つまり，PSLはSLで±を同一視したものである.

   ちなみSL上の同値関係における同値類に群を与えたもの.

# 一次分数変換群~合成~

登場人物「PSL(2;C)：一時分数変換全体の集合」

定義1.33

$$\Phi_1, \Phi_2 \in PSL(2;\mathbb{C}), \Phi_1 \cdot \Phi_2 := \Phi_1(\Phi_2(z))$$

PSLの合成はPSLであるということ.

# 一次分数変換群~群~

定理1.34

$$(PSL(2;\mathbb{C}),\cdot)$$ は群をなす

示す

- 結合則
  PSLの性質から成立
- 単位元
  恒等写像（対応とかの話とか挟めそう）
- 逆元
  PSLには逆行列が存在する

# リーマン球面への作用

$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C}), z \in \mathbb{C}_\infty, \Phi \cdot z \coloneqq \Phi(z)$とする

$\cdot : PSL(2;\mathbb{C}) \times \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$は $PSL(2;\mathbb{C})$ のリーマン球面 $\mathbb{C}_\infty$への作用を定める.

# 一次分数変換は全単射

系 1.36 一次分数変換は全単射である

- ・: $PSL(2;\mathbb{C}) \times \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ は $PSL(2;\mathbb{C})$ のリーマン球面 $\mathbb{C}_\infty$ への作用を定める.
- 群Gが集合Xに作用していると仮定する. $\forall \mathrm{g} \in G, \mathrm{x} \in X, g \cdot x: X \to X$ の写像は全単射

の２点より示される

# 立体投影：写像Πも同型写像

全単射は前で示した.

準同型写像（演算してから写すのと写してから演算するのが一致すること）を示せばよい

$S^2$と$PSL(2;\mathbb{C})$が同じ構造をしているということ.

# 写像φの性質

Lem 1.44 $\varphi\colon \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$は全射

【示す方針】

1. 全射の定義を再確認する（写された元の全てに出発地点がある写像）
2. 任意の一次分数変換を考える
3. 一次分数変換を変数変換する
4. 係数を2次行列にした際に行列式を計算し，$SL(2;\mathbb{C})$となることを確認

# 写像φが全射であることを示す

$\Phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}\,(ad-bc\neq 0)$　という一次分数変換を考える.

$s:=\sqrt{ad-bc}, a':=\frac{a}{s}, b':=\frac{b}{s}, c':=\frac{c}{s}, d':=\frac{d}{s}$とすると

- $\Phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\frac{a}{s}z+\frac{b}{s}}{\frac{c}{s}z+\frac{d}{s}}=\frac{a\prime z+b\prime}{c\prime z+d\prime}$
- $det\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}=\frac{ad-bc}{s^2}=1$より$\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}\in SL(2;\mathbb{C})$

上の２式より，　$\Phi=\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}$なので全射性が示された

# φ(A)=φ(B) のときA=B or A=-B

$A, B \in SL(2;\mathbb{C}), \varphi(A) = \varphi(B)$を仮定．JUN同型写像の性質を用いて

$$\varphi(A^{-1}B) = \varphi(A^{-1})\varphi(B) = \varphi(A)^{-1}\varphi(B) = id(ほぼ = E)$$

$A^{-1}B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$としたとき，

$$A^{-1}B = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A, B \in SL(2;\mathbb{C}) \Rightarrow A^{-1}B \in SL(2;\mathbb{C})$$

より$a = d = \pm 1$なので$A^{-1}B = \pm I$．よって$A = B\ or\ A = -B$