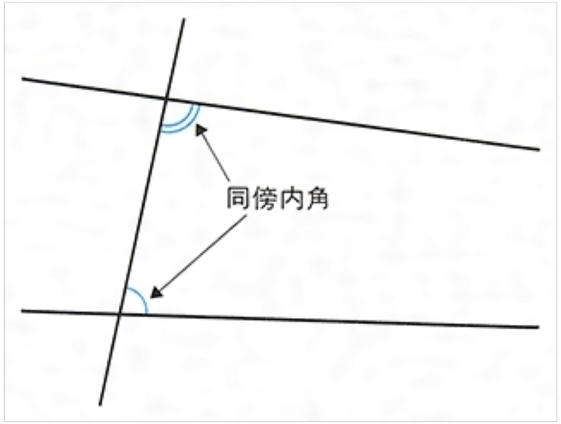
双曲幾何の発祥~ユークリッド幾何学が自明かどうか~

ユークリッド幾何学は以下の５つの公準が正しいことを前提としている.

1. 任意の１点から他の１点に対して直線を引くこと
2. 有限の直線を連続的にまっすぐ延長すること
3. 任意の中心と半径で円を描くこと
4. すべての直角(=90°)は互いに等しいこと
5. 直線が２直線と交わるとき、同じ側の内角の和が2直角より小さい場合、その２直線が限りなく延長されたとき、内角の和（同傍内角）が２直角（180°）より小さい側で交わる。



１～４は簡潔かつ自明だが,

５は条件が多くて自明ではないのでは？？

今日の流れ

- 複素数の復習
  - 複素数に関する各用語の確認
  - 一次変換から一次分数変換という上位互換へ
  - 一次分数変換が２次行列の積と似ている
  - 拡張複素数という新しい概念の登場
- リーマン球面への理解
  - 球面自体の用語確認
  - 立体投影の定義とその写像Πの性質
  - 写像Πと一次分数変換の組み合わせ

1. 複素数の基礎

1. 複素数・実部・虚部
2. 複素共役・絶対値
3. ガウス平面
4. 複素数の方程式
   1. 円
   2. 直線
5. 一次変換
   1. 和：平行移動
   2. 積：拡大・回転
   3. 逆数：反転
   4. 式・合成
6. 一次分数変換
7. 拡張複素数

複素数の基礎

複素共役・絶対値

$x, y \in \mathbb{R}\,, z = x + iy(\in \mathbb{C})$とする

- *def* 複素共役 *complex conjugate*
  - $\bar{z} = x\ - iy$
- *def* 絶対値 *absolute value*
  - $|z| = \sqrt{x^2 +\ y^2} = z\bar{z}$

複素数の基礎

複素数・実部・虚部

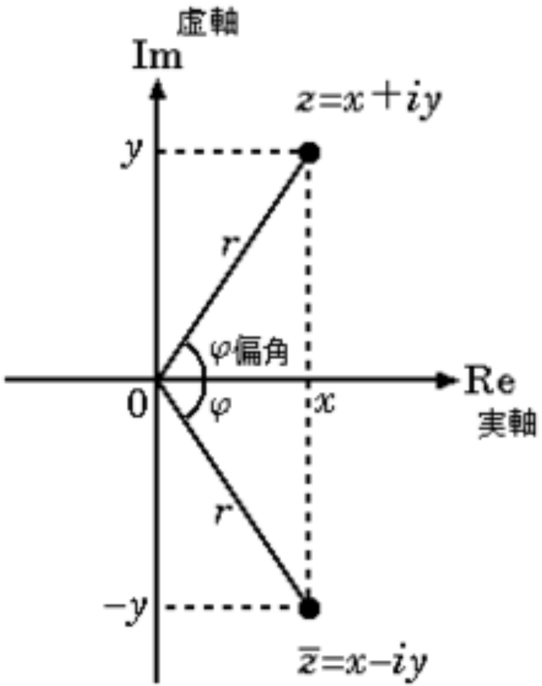
- *def* 複素数 *complex number*
  - $x, y \in \mathbb{R}\,,\ i^2 = -1,\ \ z = x + iy$
- *def* 実部 *real part*
  - $\operatorname{Re} z = x$
- *def* 虚部 *imaginary part*
  - $\operatorname{Im} z = y$

複素数の基礎

ガウス平面 *Gaussian plane*

横軸（x軸）：実軸

縦軸（y軸）：虚軸



複素数の方程式 *Complex number equation*

def 複素数の方程式

$$\mathrm{a}, c \in \mathbb{R}, b, z \in \mathbb{C}\text{に対して}az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$$

i. $\mathrm{a} = 0$ならば$\mathrm{b\bar{z}} + \mathrm{\bar{b}z} + \mathrm{c} = 0$：直線
ii. a≠0ならば：円

複素数の方程式 *Complex number equation*

先に提示した直線の方程式を示す

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$を通る直線$l$の方程式を考える.

$z \in \mathbb{C}$が直線l上にある

$$\Leftrightarrow \alpha, z, \beta \text{が直線} l \text{上にある}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha - z}{\beta - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\alpha - z}{\beta - z} = \frac{\bar{\alpha} - \bar{z}}{\bar{\beta} - \bar{z}} \Leftrightarrow (\alpha - z)(\bar{\beta} - \bar{z}) = (\beta - z)(\bar{\alpha} - \bar{z})$$

$$\Leftrightarrow \left(\bar{\alpha} - \bar{\beta}\right)z - (\alpha - \beta)\bar{z} + \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 0$$

$b \coloneqq \alpha - \beta, c \coloneqq \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta$と置き換えると

$$\Leftrightarrow \mathrm{b}\bar{\mathrm{z}} + \bar{\mathrm{b}}\mathrm{z} + \mathrm{c} = 0$$

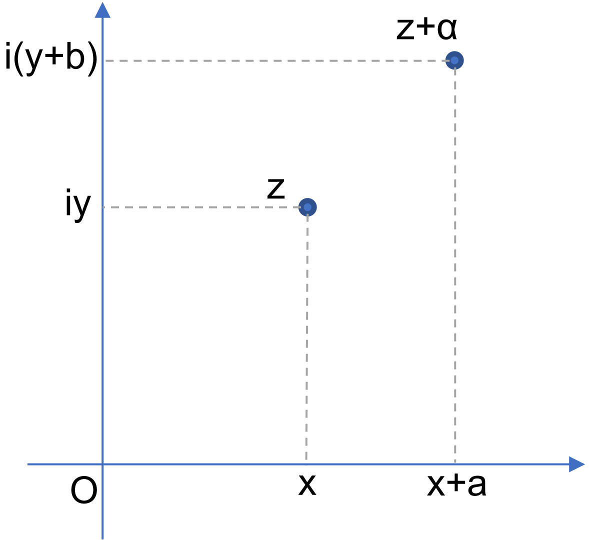
複素数の基礎

一次変換1~和：平行移動~

複素数に複素数を加えると並行移動する.

def 和：平行移動

$$\alpha = a + bi, z = x + iy (\in \mathbb{C}), \varphi(z) = \alpha + z$$



複素数の基礎

一次変換2~積：回転・拡大~

複素数に複素数をかけると原点を中心に回転するとともに拡大（もしくは縮小）される.

def 積：拡大・縮小

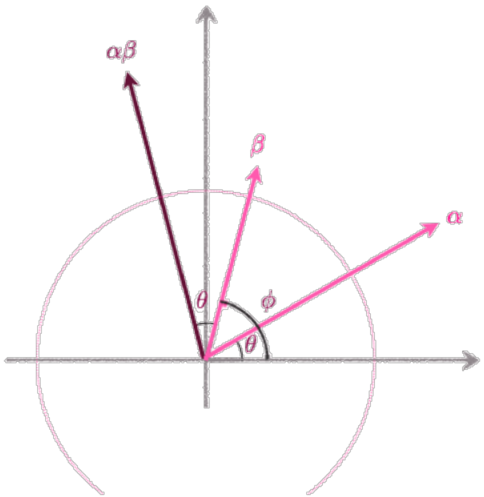
$$\alpha = a + bi, z = x + iy(\in \mathbb{C}), \psi(\mathrm{z}) = \alpha z$$

このとき，オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を用いると$z = re^{i\theta}, z' = r'e^{i\theta'}$として

$$zz' = re^{i\theta}\ r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$



複素数の基礎
一次変換3~逆数：反転~

def 逆数：反転

$$\psi(\mathrm{z}) = \frac{1}{\mathrm{z}}$$

$z = x + iy$として，　$\psi(\mathrm{z}) = \frac{1}{\mathrm{z}}$で写してみる.

$\psi(\mathrm{z}) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$と計算できる.

ここで$\psi(\mathrm{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$とすると，　$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, iv(x,y) = i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$

ガウス平面上の２点$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$を結ぶ線分を$\psi(\mathrm{z}) = \frac{1}{z}$で写すことを考える.

複素数の基礎

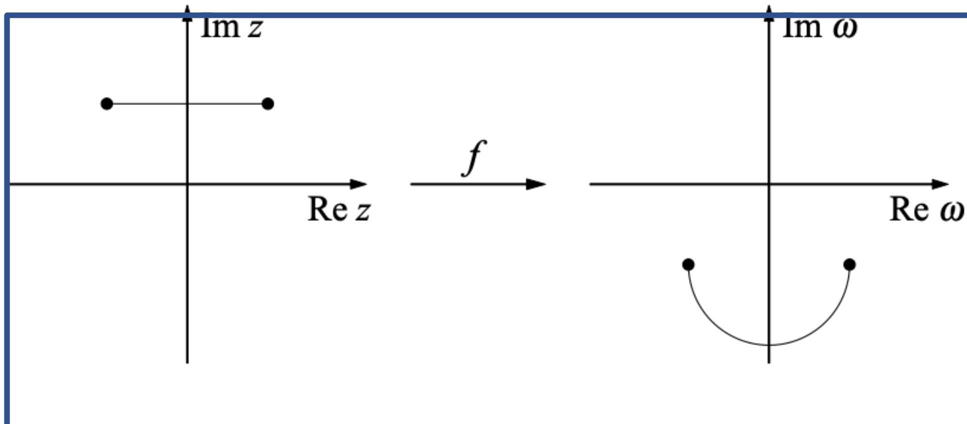
一次変換3~反転・鏡面変換~

ガウス平面上の２点$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$を結ぶ線分を$\psi(\mathrm{z}) = \frac{1}{z}$で写すことを考える(右図)．この２点の絶対値は$\frac{1}{2}$

この線分は$y = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} < \mathrm{x} < \frac{1}{\sqrt{2}}$と表せられる.

これらの値を先ほどの$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$にyを代入

すると，$u = \frac{x}{x^2+\frac{1}{2}}, v = \frac{-1}{\sqrt{2}(x^2+\frac{1}{2})}$となる.



これら点u,vを変形すると

$u^2 + \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$：円の方程式

複素数の基礎

一次分数変換1~式・合成~

fractional linear transformation : FLT

def 1.8 一次分数変換

複素数の平行移動・回転・拡大の全てを表せる最強の形.

メビウス変換ともいう.

$$\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

これ以降，2次の一次分数変換全体の集合を一次分数変換群といい，
$\underline{PSL(2; \mathbb{C})}$と表記する

複素数の基礎

一次分数変換2~計算してみる~

def 1.8 一次分数変換

複素数の平行移動・回転・拡大の全てを表せる最強の形.

メビウス変換ともいう.

$\Phi_1(z) = z + \frac{c}{d}, \Phi_2(z) = z\frac{(bc-ad)}{c^2}, \Phi_3(z) = \frac{1}{z}$に対して $\Phi_1(\Phi_2(\Phi_3(z)))$を計算

順に平行移動，拡大・回転，反転を表す一次変換である.

複素数の基礎

一次分数変換3~PSL(２;C)の合成~

lem1.9

$z \in \mathbb{C}, \Phi_1, \Phi_2 \in PSL(2;\mathbb{C})$に対して$\Phi_1(\Phi_2(z))$という合成変換を考える．この時，一次分数変換の合成変換も一次分数変換となる．

Φ_1, Φ_2 …とおいてゴリ押し計算をする

複素数の基礎

一次分数変換4~PSL(２;C)の合成~

【実際に手を動かす】

$x, y \in \mathbb{R}, z = x + iy,$

$\Phi_1 = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \Phi_2 = \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$に対して$\Phi_1(\Phi_2(z))$を計算する

複素数の基礎

一次分数変換5~PSL(２;C)の合成~

【実行後】

$$\Phi_1(\Phi_2(z)) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}$$

何かに似てる気がする…

複素数の基礎

一次分数変換5~PSL(２;C)の合成~

【実行後】

$$\Phi_1(\Phi_2(z)) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}$$

何かに似てる気がする…

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

PSLと2次行列の積を何とかして繋げたい

複素数の基礎

次の目標

一次分数変換と2次行列の積を同一視したい

結果から書くと

- リーマン曲面（拡張複素数という世界）
- 群論

の2つを用いれば，一時分数変換と2次行列を「ほぼ」同じものであるとみなせる.

まずはリーマン曲面を会得するための準備として拡張複素数をやる.

複素数の基礎

拡張複素数$\mathbb{C}_\infty$ *extended complex*

「複素数全体の集合$\mathbb{C}$」と「∞（という「記号」）」で書かれる元（実数での∞の記号の意味とは少し違う）の

和集合「$\{\mathbb{C}\}\cup\{\infty\}$」を拡張複素数といい，$\mathbb{C}_\infty$と表記する.

既存の複素数に加えて次の４つの式を新たに定義する.

$$\forall z\in\mathbb{C}_\infty \text{に対して} \begin{cases} \boxed{\dfrac{z}{\infty}=0} \\ \boxed{\dfrac{z}{0}=\infty} \\ \boxed{\dfrac{0}{\infty}=0} \\ \boxed{\dfrac{\infty}{0}=\infty} \end{cases} \left(\frac{0}{0}\text{や}\frac{\infty}{\infty}\text{はない}\right)$$

これの新たに定義した式一次分数変換に対応する

複素数の基礎

拡張複素数$\mathbb{C}_\infty$での一次分数変換

$$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C}), \Phi: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{for } (z \neq \infty, cz+d \neq 0):\ general \\ \boxed{\infty \quad \text{for } (z \neq \infty, cz+d = 0):\ \dfrac{z}{0}} \\ \boxed{\dfrac{a}{c} \quad \text{for } (z = \infty, a, c \neq 0):\ \text{一般的な極限}} \\ \boxed{\infty \quad \text{for } (z = \infty, a \neq 0, c = 0):\ \dfrac{\infty}{0}} \\ \boxed{0 \quad \text{for } (z = \infty, a = 0, c \neq 0):\ \dfrac{0}{\infty}} \end{cases}$$

分子・分母が両方０の場合

lem 1.10 分子と分母が０の場合の同値条件

$\Phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$**の分子・分母が両方０の場合**

i. $az+b=cz+d=0$ である複素数zが存在

ii. $\Leftrightarrow ad-bc=0$：こちらは議論する
(十分性⟹)
行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$を考える．上のiが成立するなら，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$である
両辺に$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$を左からかけて行列の積を計算すると
$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
よって$ad-bc=0$が示された

複素数の基礎
分子・分母が両方０の場合

(必要性⟸)
$ad-bc=0$とする（¬(a = c = 0)）

$a\neq 0$のとして$z=-\frac{b}{a}$とおくと,

$$\begin{cases} az+b=0 \\ cz+d=d-\dfrac{cb}{a}=\dfrac{ad-bc}{a}=0 \end{cases}$$

よりiが成立.

ちなみに$c\neq 0$の時は$z=-\frac{d}{c}$で成立.

2. リーマン球面（PSLと行列の積を同一視するための材料１）
    1. 必要な用語（小円・大円・北極点）
    2. 立体投影で用いる写像Πを知る
    3. 球面から球面に写す写像$\widetilde{\Phi}: S^2 \to S^2$を考える
    4. 写像$\widetilde{\Phi}$連続性を示し，$\widetilde{\Phi}$が実用的な写像であることを確認する.

リーマン球面

小円 *small circle* ・大円 *orthodrome, Riemann circle*

def 小円

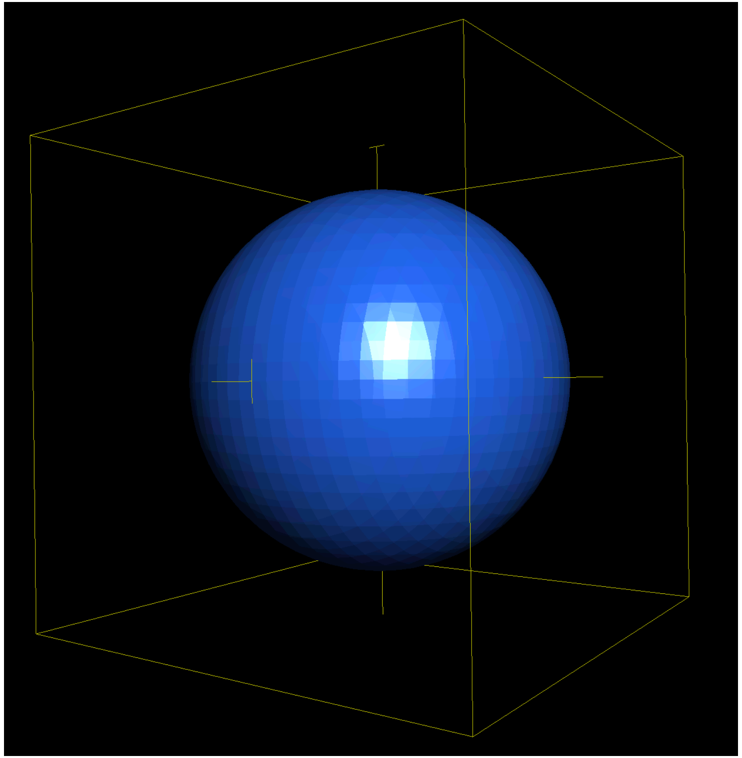
球面($\in S^2$) をナイフで切り分けた時に見られる断面の円のこと.
たくさんある．無限にある.

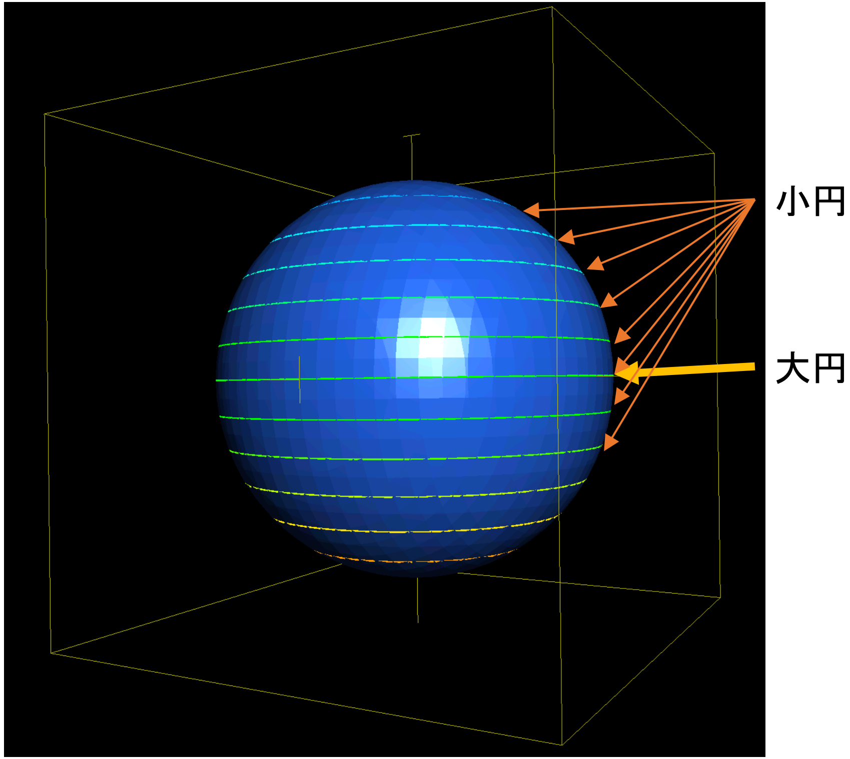
def 大円

小円のうち，球の原点を通るもの（もっとも断面が大きい小円.
つまり大円の半径は球の半径と等しい）．リーマン円ともいう.

リーマン球面

小円・大円

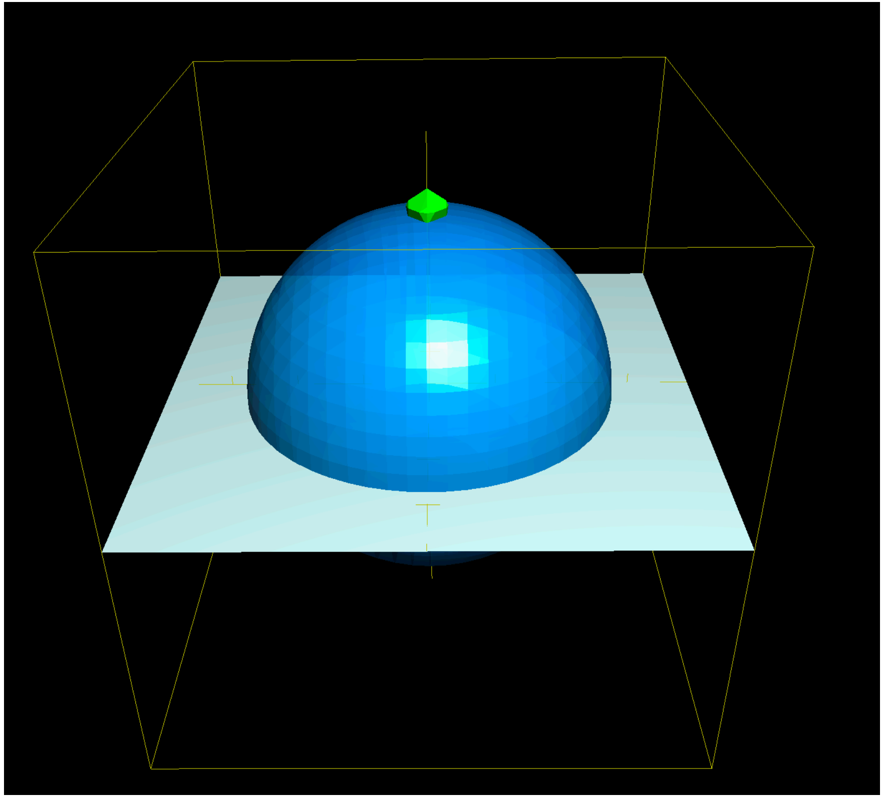




リーマン球面
北極点 *North Pole*

中心を原点にとったS^2の単位球（半径１の球）を考える.

点N(0, 0, 1)にとる.　この点Nを北極点という.



リーマン球面

立体投影Π_{v0} *stereographic projection*

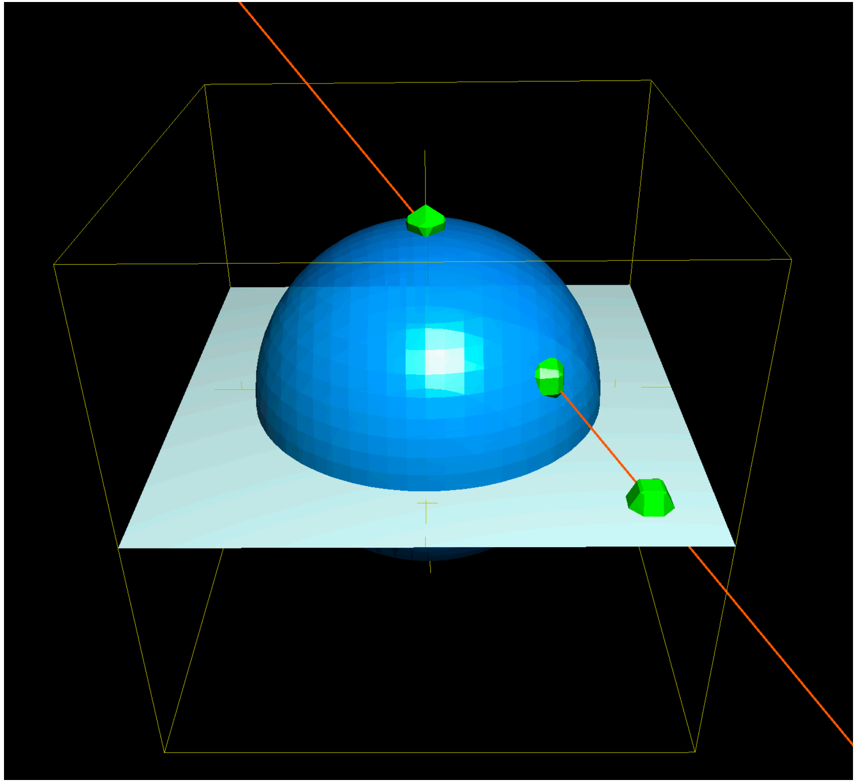
球面S^2をガウス平面$\mathbb{C}$に配置し，
球の中心を原点と重ねる．

北極点Nと任意の点$\mathrm{P} \in S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$
を通る直線で結ぶ．

すると点Pを点$\Pi_{v0}(P) \in \mathbb{C}$に写
す写像を定義できる．

$$\Pi_{v0}: S^2 \setminus \{\mathrm{N}\} \to \mathbb{C}$$

ちなみに写像Π_{v0}は全単射．



写像 Π_{v0}の全単射性を示す手順

手順

1. 任意の平面の点$\mathrm{Q} \in \mathbb{C}$をとる
2. 逆像${\Pi_{v0}}^{-1}$を考える
3. 定義から計算して逆写像であることを確認する

ちなみに

(写像fが全単射である)⇔(fの逆写像が存在する)

リーマン球面
写像Π

登場人物：「拡張複素数$\mathbb{C}_\infty$」と「北極点N」「写像Π_{v0}」

写像Π_{v0}では北極点Nから写す像を定義していない.
ここで，北極点Nを∞（ただの記号）に写すとすると，

$$\Pi : S^2 \to \mathbb{C}_\infty$$

と拡張できる.
全単射のΠ_{v0}に全く新しい対応を拡張したので，Πが全単射であることは明らかである.

球面から球面への写像$\tilde{\Phi}$

def 球面からそれ自身への写像

「写像$\Pi : S^2 \to \mathbb{C}_\infty$」「写像$\Phi\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$」

$\tilde{\Phi}(P) \coloneqq \Pi^{-1}\left(\Phi(\Pi(P))\right)$（Pはリーマン球面上の任意の点）

- Πで点$P \in S^2$ を$\mathbb{C}_\infty$の世界へ写す
- Φで変換（平行移動，回転拡大，反転）を行う． $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$
- Π^{-1}で$\mathbb{C}_\infty$の世界からS^2へ戻す

何が嬉しい？

→球上の点を（一度$\mathbb{C}_\infty$に写すことで一）次分数変換を用いて変換できる！！

写像$\widetilde{\Phi}$の連続性 *continuous*

lem 1.16 $\widetilde{\Phi}$の連続性

$$\lim_{i\to\infty}\widetilde{\Phi}(P_i)=\widetilde{\Phi}\left(\lim_{i\to\infty}P_i\right)$$

を示す

連続写像を合成すると連続写像という命題（証明略）を用いる.

$\Phi:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty,\Pi:S^2\to\mathbb{C}_\infty,\Pi^{-1}:\mathbb{C}_\infty\to S^2$は連続写像なので自動的に成り立つ.

前回から今回の流れ

- 複素数の一次変換から一次分数変換を考える
- 一次分数変換PSLと行列の積が似てる
- 「リーマン球面（学習済）」と「群論」を使えば繋げられる模様
- まずは群論の基礎
- そして一次分数変換群を再確認
- 最後に2つの材料を使ってPSLとSLをつなげる

前回の復習１

一次変換から最強の形へ

- 双曲幾何では複素数を基本に話を進めていく
- 点を点に写す一次変換というのが全部で３種類ある
  - 和：平行移動
  - 積：回転・拡大
  - 逆数：反転
- ３種類の一次変換を1つの式で表せないか？
  - 一次分数変換：俺が考えた全てを含んだ最強の一次変換の式
  - $\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

前回の復習２

一次分数変換の性質

- 一次分数変換の合成はどうなる？
  - 合成しても一次分数変換
  - 行列の積に似ている（けどちょっと違う）

$$
\begin{cases}
\Phi_1(\Phi_2(z)) = \dfrac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)} \\
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

  - どうにかしての合成変換と行列の積を同一視できないか？
  - 2つの要素を使えばできる！
    - 拡張複素数とリーマン球面
    - 群論
    - とりあえず順番に勉強していこう

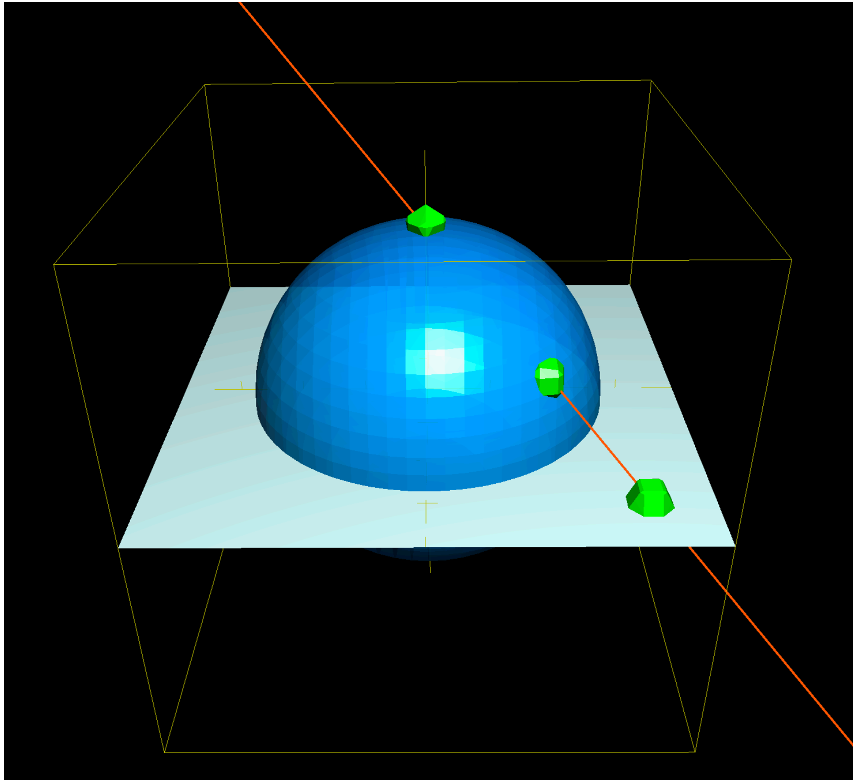
前回の復習３
拡張複素数のお出まし

- 拡張複素数とはなんぞや
  - 複素数Cに「∞」を加えたやつ
- 一次分数変換を拡張複素数で再定義する
  - $ad-bc=0$と$\frac{0}{0}$が同値になるので都合が悪いので定義はしない
  - 分母に∞があったり０があったりしても定義できる

前回の復習４

立体投影：写像Π

- 原点で球面をガウス平面に重ねる
- 写像Πv0
  - 北極点を除く任意の球面とガウス平面の点とを対応させる
- 写像Πv0に拡張複素数を対応させる
  - 北極点と∞を対応させる
  - こうすると球面で拡張複素数（つまり∞）を扱うことができる
- 写像Πと一次分数変換を使って球面から球面への写像を定義できる！



2. 群（PSLと行列の積を同一視するための材料２）
    1. 群のなんとなく
    2. 定義
    3. 群の例
    4. 部分群の定義と性質
    5. 直交群
    6. 特殊線型群
    7. 群の作用
    8. ユークリッド合同変換群
    9. 一次分数変換群

群のなんとなく

1. 群とは？
代数学の基本的な概念のひとつ.
登場人物は「集合G」と「演算子f」のみ.
Gとfが”何かしら”の条件を満たすと群と呼ばれる

群の定義group

1. 閉包 *closure*

$$\forall a, b \in G, \qquad ab \in G$$

全てのGの元同士の積はGに含まれる

2. 結合法則 *associativity*

$$\forall a, b, c \in G, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

積の計算順序は関係ない

3. 単位元の存在 *identity element*

$$\exists e \in G, \forall a \in G, a \cdot e = e \cdot a = a$$

２つの元の積が片方の元と等しい**単位元**eという元が存在する

4. 逆元の存在 *inverse element*

$$\forall a \in G, \exists a^{-1}, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

２つの元の積が単位元eとなる**逆元**という元が存在する

群の例１～n次複素正則行列の集合～

$GL(n;\mathbb{C})$： n次複素正則行列全体の集合

可逆行列 *invertible matrix*

⟺正則行列 *inverse matrix*

⟺逆行列*inverse matrix* をもつ

def（行列の積AB）

「$\forall A, B \in GL(n;\mathbb{C}), A \cdot B$」

この時，組(GL(n;C),・)は群を🍆

確かめる

対称群 *symmetric group*

X = {1,...,n}:集合.

σ:X→X（:全単射）.　（ちなみにこの写像を置換と呼ぶ.）

Snをσ全体のなす集合.

all σ1,σ2 Sn, σ1•σ2を合成写像としたとき，(Sn, •)は群を🍆

この群のことをn次の対称群とよぶ

部分群～定義～subgroup

def 1.24 G, H: set, $(G,\ ・)$: $group$,

$(H \subseteq G) \land (H$の積がGの積への制限$) \Longrightarrow (H,\ ・)$: $subgroup$

Gの一部分でもGの演算が行える集合のことを部分群という

部分群～性質～

lem 1.25 $(G,\cdot)$: $group, H \subset G$: $subset$

i. $h_1, h_2 \in H \Longrightarrow h_1 \cdot h_2 \in H$

ii. $e \in G$: $identity\ element, e \in H$

iii. $h \in H$: $inverse\ element \Longrightarrow h^{-1} \in H$

直交群O(n)*orthogonal group*：GL(n;C or R)の部分群

直交群をO(n)とする.

O(n)はGL(n;R)(:一般線型群)の直交行列全体からなる部分集合

ここで行列Aが直交行列であるとはtAA=I(tは転置，Iは単位行列)

O(n)がGL(n;R)の部分群であるためには

- ２つの直交行列の積は直交行列である
- 単位行列は直交行列である
- 直交行列の逆行列は直交行列である

の３つを満たす必要がある

特殊線型群：SL(n;C)*special linear group*

とは，行列式が１の複素平方行列全体のこと.

これが群であるためには

- 特殊線型群の２つの行列の積の行列式も１（1*1=1）
- 単位行列は特殊線型群の元である.（det I = 1）
- 特殊線型群の行列の逆行列の行列式も１

を満たす必要がある

群の作用～定義～group action

G:群group，X:集合set，「G×X:直積集合」，「•：G×X→X:写像」，「g∈G,x∈X, (g,x)∈G×X, •(g,x)=g•x」

このとき，

- (g1 • g2)•x=g1•(g2•x)
- e•x=x (eはGの単位元)

を満たす時，GのXへの作用という.

群の作用~例~

例1.29

X: $\mathbb{C}^n$(n次元複素ベクトル空間), $v \in X, A \in GL(n; \mathbb{C}), \mathrm{A} \cdot v = \mathrm{A}v$

とした時，GL(n; ℂ)のXへの作用と定義できる.

【群の作用であることを確認する】

1. $A \cdot (B \cdot v) = A(Bv) = (AB)v = (AB) \cdot v$
2. 単位元を単位行列とすれば明らか

２次元ユークリッド合同変換群*Euclidean group*

A,B:2次直交行列，v,w∈R^2

(A,v)・(B,w)=(AB,Av+w)
を２次元ユークリッド合同変換群E(2)という

これが群であるには
- A,B,C(:直交行列)とu,v,w∈R^2を用いて結合則が成立する
- 単位元が(I,0)である
- 逆元が(A^-1, -A^-1v)である

の３つを満たしていることを確認すればよい

def 平面へのE(2)の作用

$u \in R^2$, $(A,v) \in E(2)$としたとき

$(A,v) \bullet u = Au + v$

を平面へのE(2)の作用とする.

部分群の公理を確かめる

簡単なの清書の時に書く

合同変換群の由来

lem

P,Q: 平面状の点，(A,v)∈E(2)

(PとQのユークリッド距離)=((A,v)•PとA,v)•Qの距離に等しい)

ユークリッド距離

いわゆる一般的に求める距離.

点(x1,y1)と点(x2,y2)のときの

ユークリッド距離は√{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}

つまり，変換してもユークリッド距離が保たれる変換（等長変換）ということ

1. PSL(2;C)とSL(2;C)の関係性

1. 一次分数変換群PSL
   1. 定理
   2. 群を成すことを示す
2. Lem1.35 写像・のリーマン球面への作用
3. 系1.36 PSLは全単射
4. Def 1.38 準同型写像
5. Def 1.41 同型写像

   これらの定義・定理・補題・系を用いてSL→PSLの写像を考える
6. Lem 1.43 写像φは準同型写像
7. Lem 1.44 写像φは全射．またφ(A)=φ(B) => A=B or A=-B

   つまり，PSLはSLで±を同一視したものである.

   ちなみSL上の同値関係における同値類に群を与えたもの.

一次分数変換群~合成~

登場人物「PSL(2;C)：一時分数変換全体の集合」

定義1.33

$$\Phi_1, \Phi_2 \in PSL(2;\mathbb{C}), \Phi_1 \cdot \Phi_2 := \Phi_1(\Phi_2(z))$$

PSLの合成はPSLであるということ.

一次分数変換群~群~

定理1.34

$(PSL(2;\mathbb{C}),\cdot)$は群をなす

示す

- 結合則
  PSLの性質から成立
- 単位元
  恒等写像（対応とかの話とか挟めそう）
- 逆元
  PSLには逆行列が存在する

リーマン球面への作用

$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C}), z \in \mathbb{C}_\infty, \Phi \cdot z \coloneqq \Phi(z)$とする

$\cdot : PSL(2;\mathbb{C}) \times \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$は $PSL(2;\mathbb{C})$ のリーマン球面 $\mathbb{C}_\infty$への作用を定める.

一次分数変換は全単射

系 1.36 一次分数変換は全単射である

- ・: $PSL(2;\mathbb{C})\times\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ は $PSL(2;\mathbb{C})$ のリーマン球面 $\mathbb{C}_\infty$への作用を定める.
- 群Gが集合Xに作用していると仮定する. $\forall \mathrm{g} \in G, \mathrm{x} \in X, g \cdot x: X \to X$の写像は全単射

の２点より示される

準同型写像

Def 1.38 準同型写像

$$\mathrm{G}, \mathrm{H}: \mathrm{group}, \varphi: \mathrm{G} \to \mathrm{H}$$
$$\forall g_1, g_2 \in \mathrm{G}, \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

が成立する時，写像φが準同型写像であるという．

同型とはなんぞや

群が２つあったときに，それぞれの群が同じ「構造」を持っていること．命題でいう同値.

元（要素）が完全に異なり演算も全く違う場合でも，

- 元の数（要素数）が等しい
- 演算の振る舞いが等しい

場合は構造が同じである．このことを同型であるという.

具体例を出してみる

同型とはなんぞや

1つ目の群を定義する

$G=\{0,1,2\}$という３で割った時のあまりの集合に対して

「１足して３で割ってあまりを求める」という演算f

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=2 \\ f(2)=0 \\ \end{cases}$$

を定義する

同型とはなんぞや

2つ目の群を定義する

$H = \{$(グー)，(チョキー)，(パー)$\}$というじゃんけんの手の集合に対して

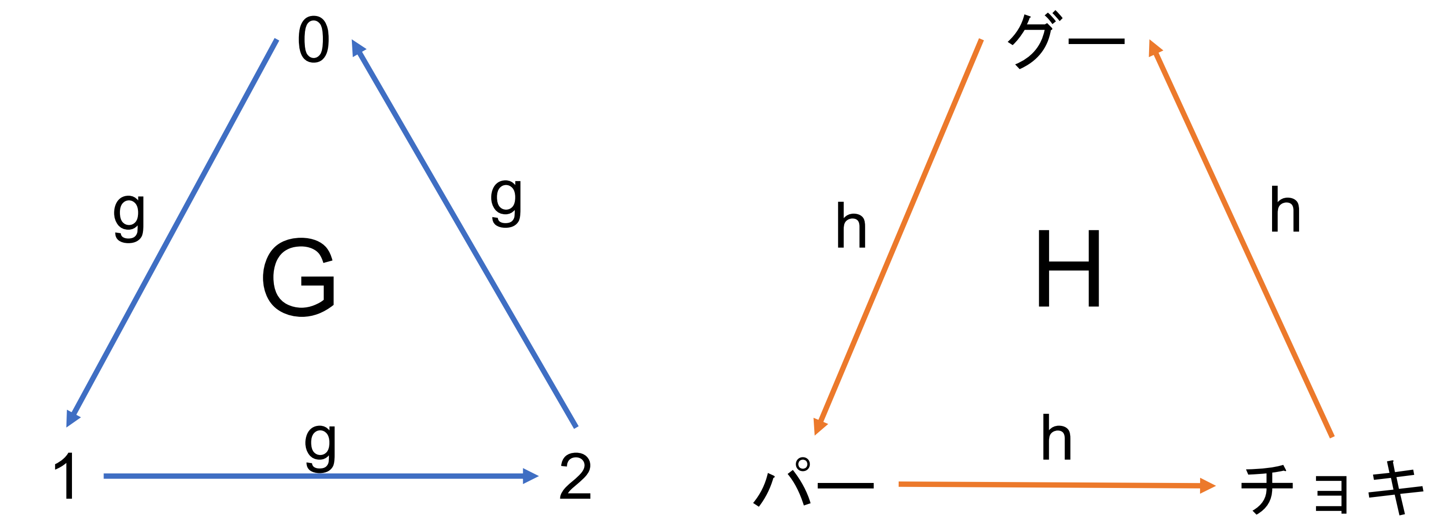
「とある手に勝つための手を求める」という演算g

$$\begin{cases} g(\text{グー}) = (\text{パー}) \\ g(\text{パー}) = (\text{チョキ}) \\ g(\text{チョキ}) = (\text{グー}) \end{cases}$$

を定義する

同型とはなんぞや

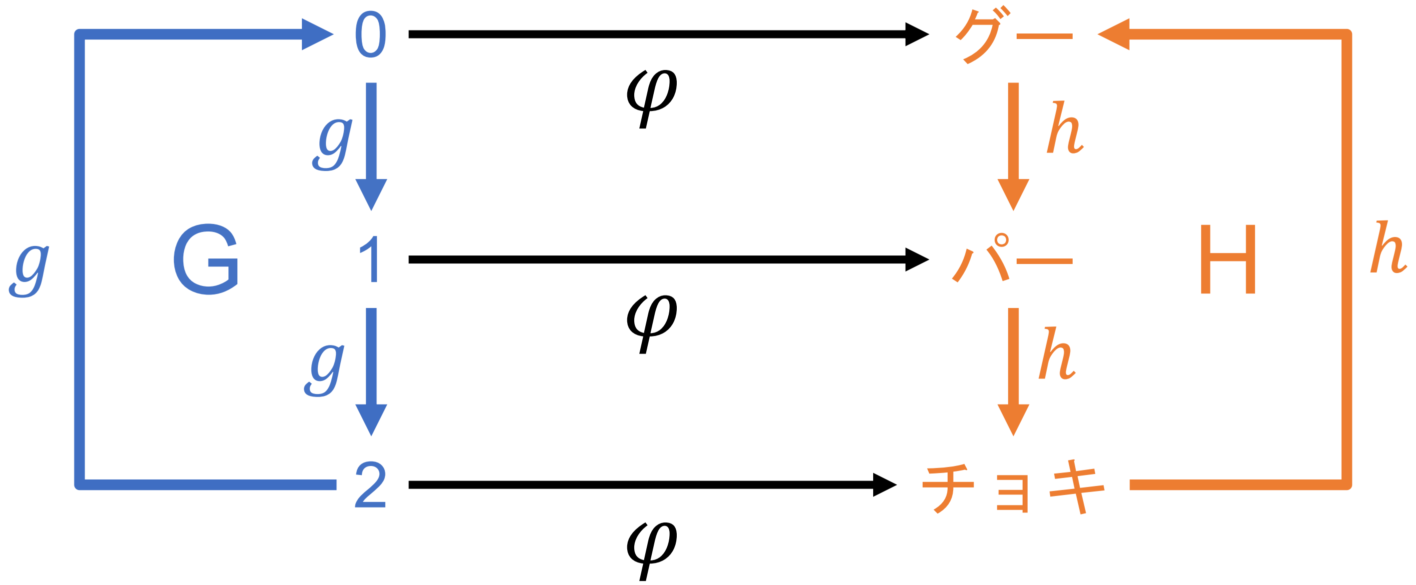
2つの群GとHを比較する



集合の元も演算も全然違うけど，構造は同じ！

これを同型という．

準同型写像φ：群から群への写像



写像φは準同型写像

Lem 1.43

$\varphi: SL(2;\mathbb{C}) \to PSL(2;\mathbb{C})$:準同型写像.

準同型写像の定義

$$\mathrm{G}, \mathrm{H}: \mathrm{group}, \varphi: \mathrm{G} \to \mathrm{H}$$
$$\forall g_1, g_2 \in \mathrm{G}, \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

例で定義を確認：０からチョキへ

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, "\varphi"'] \arrow[d, "f"'] & & \text{グー} \arrow[d, "g"] \\
1 \arrow[rr, "\varphi"'] \arrow[d, "f"'] & & \text{パー} \arrow[d, "g"] \\
2 \arrow[rr, "\varphi"'] \arrow[uu, bend left=90, "f", "G"'] & & \text{チョキ} \arrow[uu, bend right=90, "g"', "H"]
\end{tikzcd}$$

同型写像

Def 1.41 同型写像

準同型写像＋全単射

同型写像の性質

- G,H:群，φ:G→H：同型写像
- 同型写像φはGの単位元をHの単位元に写す
- $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$

立体投影：写像Πも同型写像

全単射は前で示した.

準同型写像（演算してから写すのと写してから演算するのが一致すること）を示せばよい

S^2 と$PSL(2;\mathbb{C})$が同じ構造をしているということ.

写像φの性質

Lem 1.44 $\varphi\colon \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$は全射

【示す方針】

1. 全射の定義を再確認する （写された元の全てに出発地点がある写像）
2. 任意の一次分数変換を考える
3. 一次分数変換を変数変換する
4. 係数を2時行列にした際に行列式を計算し，$SL(2;\mathbb{C})$となることを確認

写像φが全射であることを示す

$\Phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}\,(ad-bc\neq 0)$　という一次分数変換を考える.

$s\coloneqq\sqrt{ad-bc}, a'\coloneqq\frac{a}{s}, b'\coloneqq\frac{b}{s}, c'\coloneqq\frac{c}{s}, d'\coloneqq\frac{d}{s}$とすると

- $\Phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\frac{a}{s}z+\frac{b}{s}}{\frac{c}{s}z+\frac{d}{s}}=\frac{a\prime z+b\prime}{c\prime z+d\prime}$
- $det\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}=\frac{ad-bc}{s^2}=1$より$\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}\in SL(2;\mathbb{C})$

上の２式より，　$\Phi=\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}$なので全射性が示された

φ(A)=φ(B) のときA=B or A=-B

$A, B \in SL(2;\mathbb{C}), \varphi(A) = \varphi(B)$を仮定．同型写像の性質を用いて

$$\varphi(A^{-1}B) = \varphi(A^{-1})\varphi(B) = \varphi(A)^{-1}\varphi(B) = id = E$$

$A^{-1}B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$としたとき,

$$A^{-1}B = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A, B \in SL(2;\mathbb{C}) \Rightarrow A^{-1}B \in SL(2;\mathbb{C})$$

より$a = d = \pm 1$なので$A^{-1}B = \pm I$．よって$A = B\ or\ A = -B$

1. 一次分数変換PSL(2;C)の性質

1. SL(2;C)を写す
2. 円円対応
   1. 概要・示す手順1~4
      1. 示す１：補題4.16とそれを示す
      2. 示す２：行列$\mathrm{A} \in \mathrm{SL}(2; C)$をϕ $\in \mathrm{PSL}(2; C)$で写す($\mathrm{a} \neq 0$, $\mathrm{a} = 0$)
      3. 示す３：3種のPSLが存在することを確認する
      4. 示す４：３種類のPSLがどんな写像か確認する
3. 元の分類
   1. 不動点集合
   2. 双曲的，楕円的，放物的に分ける
   3. 双曲的
   4. 楕円的
   5. 放物的
   6. 場合分け
   7. まだタイトルが決めていない
   8. 対角化？的な

円を円に，直線を直線に.

Φ：一次分数変換，L：ガウス平面上の（円or直線の）図形

Φによって写された円L（もしくは直線L）の像も円（直線）.

$$g(A) = \{gx | x \in A\}$$

【証明の手順】

1. 補題1.46を確認
2. 行列Aをa=0, a≠0に場合分けし，写像ϕ ∈ PSLで写しPSLの合成であることを確認
3. ２で求めた３種のPSLが存在することを確認
4. 各PSLがどのように写す写像なのか確認を行う

補題1.46（とこの証明）

lem $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: 2次正則行列で$a \neq 0$したとき，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$が存在する.

【補題を示す】

右辺の積を計算すると$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta\delta \\ \alpha\beta & \beta\delta + \gamma \end{pmatrix}$となる.

４変を4つの方程式から解けばいい.

特に，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{C})$の場合は右辺の行列3つもSL(2;C) □

行列$\mathrm{A}\in\mathrm{SL}(2;C)$をΦで写す(a≠0の時)

補題より$\phi(A)=\varphi\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=\varphi(\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \delta\\ 0 & 1\end{pmatrix})$

ここで$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$だが，

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2;C)$ よりPSLで写すと符号は考慮しなくて良いので

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=\varphi\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}1 & \delta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2;C)$より $\det\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}=1\Leftrightarrow\beta\gamma=1$

つまり，PSLの合成（つまりPSL）であることがわかる.

行列$A \in \mathrm{SL}(2;C)$をΦで写す(a=0の時)

a≠0の時と同様に

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} -ci & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と変形できる.

また，$\begin{pmatrix} -ci & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;C)$なので $bc = -1$

よってa=0の時もPSLの合成であることがわかる.

3種のPSLが存在することを確認する

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{for } a \neq 0 \\ \varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} -ci & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ for } a = 0 \end{cases}$$

を見ると$\varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$の３種類のPSLに分けられる．それぞれどんな写像だろう？

3種類の写像を確認する

- $\phi = \varphi\begin{pmatrix}1 & \alpha \\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}$を$\frac{1\cdot z+\alpha}{0\cdot z+1} = z + \alpha$に写す ⇔ 平行移動

- $\phi = \varphi\begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}$を$\frac{\lambda\cdot z+0}{0\cdot z+\lambda^{-1}} = \lambda^2 z$に写す ⇔ 相似変換

- $\phi = \varphi\begin{pmatrix}0 & i \\ i & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}$を$\frac{0\cdot z+i}{i\cdot z+0} = \frac{1}{z}$に写す ⇔ なんだろう？

3種類の写像を確認する1

lem 1.6

L: 中心z_0，半径r，ガウス平面$\mathbb{C}$上の円
$|z - z_0| = r$を満たす点$z \in \mathbb{C}$全体と一致する

ここで，lem1.6での円Lを$\phi = \varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}$を$\frac{1}{z}$で写すと

$\left|\frac{1}{z} - z_0\right| = r$である．$|z|^2 = z\bar{z}$に注意して両辺２乗すると

$$r^2 = \left(\frac{1}{z} - z_0\right)\left(\frac{1}{\bar{z}} - \overline{z_0}\right) = \frac{1 - \bar{z}\overline{z_0} - zz_0 + z\bar{z}z_0\overline{z_0}}{z\bar{z}}$$

$$r^2 = \frac{1 - \bar{z}\overline{z_0} - zz_0 + |zz_0|^2}{z\bar{z}}$$

一次分数変換の性質 > 円円対応 > 示す4

3種類の写像を確認する2

$$r^2 = \frac{1 - \bar{z}\overline{z_0} - zz_0 + |zz_0|^2}{z\bar{z}}$$

$$r^2 \cdot z\bar{z} - |zz_0|^2 = 1 - \bar{z}\overline{z_0} - zz_0$$

$$r^2 \cdot |z|^2 - |z|^2|z_0|^2 = 1 - \bar{z}\overline{z_0} - zz_0$$

$$\left|z - \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - r^2}\right|^2 = \frac{r^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2}$$

これは円の方程式だ.

一次分数変換の性質
円円対応2

定義1.47

$$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C}), x \in S^2, \Phi \cdot x = \Pi^{-1}(\Phi(\Pi(x)))$$

のとき，・は$PSL(2;\mathbb{C})$のS^2への作用を定める.

系1.48

球面S^2上の小円も，一次分数変換によって小円にうつされる

一次分数変換群PSL(2;C)の性質

元の分類~不動点集合~

Def

写像Φで写されても元に戻る（つまり動かない）点を不動点fixed pointといい，不動点の集合を不動点集合fixed point setといって次の式で定義する.

$$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C}), Fix(\Phi) \coloneqq \{z \in S^2 \mid \Phi z = z\}$$

Def

$$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C})\text{に対して}\Phi\text{の}i\text{回の積を}\Phi^i\text{とかく}$$

$\Phi^i \in PSL(2;\mathbb{C})$は明らか

一次分数変換群PSL(2;C)の性質

元の分類~{双曲的, 楕円的, 放物的}のどれか~

一次分数変換は３つ（双曲的，楕円的，放物的）に分類できる

定理1.49

$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C}), \Phi \neq id$に対して

i. （双曲的）, $Fix(\Phi)$ は２つ．$\forall z_1, \forall z_2 \in S^2, z_1 \neq z_2$に対して $\lim_{i\to\infty} \Phi^i(z) = z_1, \lim_{i\to-\infty} \Phi^i(z) = z_2$

ii. （楕円的）$Fix(\Phi)$ は２つ．$S^2 \setminus \{z_1, z_2\}$は，無限個の小円の族$L_t$の，互いに交わらない和になる（接するのはよい）．

iii. （放物的） $Fix(\Phi)$ は唯１つ． S^2はz_0を通り互いに接する無限個の小円の族L_tの和になる

$$\lim_{i\to\infty} \Phi^i(z) = \lim_{i\to-\infty} \Phi^i(z) = z_0$$

一次分数変換群PSL(2;C)の性質

元の分類~双曲的~

例1.53

$$\theta \in \mathbb{R}, r(\in \mathbb{R}) > 1, \Phi = re^{i\theta}z$$

とすると不動点は$Fix(\Phi) = \{0, \infty\}$

この不動点２点を逆写像Π^{-1}で球面に写すと

$$\lim_{i\to\infty} \Phi^i(z) = S(\text{北極点}), \lim_{i\to-\infty} \Phi^i(z) = S(\text{南極点})$$

の２点に移る.

一次分数変換群PSL(2;C)の性質

元の分類~楕円的~

定義1.50(ii)

例1.52

$$\theta \in \mathbb{R}, \Phi = e^{i\theta} z$$

とすると不動点は$Fix(\Phi) = \{0, \infty\}$

$e^{i\theta}$は原点を中心に角度θ回転させるので，半径t>0の円L_tは$\Phi(L_t) = L_t$となる.

拡張複素数$\mathbb{C}_\infty$から不動点を除いた集合は Π^{-1}で球面に写すと互いに交わらない円の族になる.

一次分数変換群PSL(2;C)の性質

元の分類~放物的~

定義1.50(iii)

例1.51

$$\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0, \Phi = z + \alpha$$

とすると不動点は$Fix(\Phi) = \{\infty\}$.

また，$L_t = \{a(x + it) | x \in \mathbb{R}\}$とすると $\Phi(L_t) = L_t$．このとき Π^{-1} で球面に写すと，それらは小円の集合となる．この小円は北極点Nで接する．

一次分数変換群PSL(2;C)の性質

元の分類~場合分け~

Φ(z)と|a|の値で場合分けができる

補題1.54

i. (双曲的) $\Phi(z) = az, |a| \neq 1$

ii. (楕円的) $\Phi(z) = az, |a| = 1, a \neq 1$

iii. (放物的) $\Phi(z) = a + z, a \neq 0$

一次分数変換群PSL(2;C)の性質

補題1.55

$\Phi, \Psi \in PSL(2;\mathbb{C}), \Phi \neq id$に対して

$\Psi^{-1}\Phi\Psi$が

- 双曲的ならΦも双曲的
- 楕円的ならΦも楕円的
- 放物的ならΦも放物的

PSLで写しても，元の分類は保たれる