

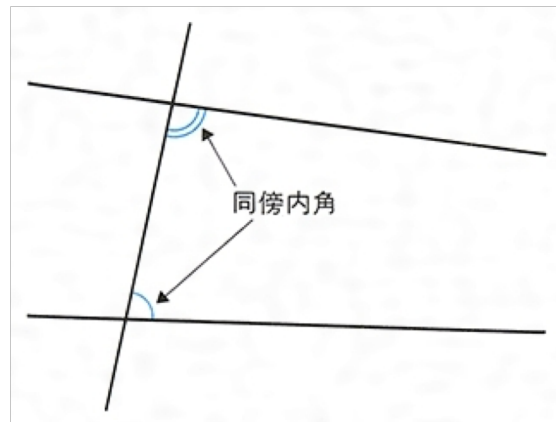
双曲幾何の発祥～ユークリッド幾何学が自明かどうか～

ユークリッド幾何学は以下の5つの公準が正しいことを前提としている。

1. 任意の1点から他の1点に対して直線を引くこと
2. 有限の直線を連続的にまっすぐ延長すること
3. 任意の中心と半径で円を描くこと
4. すべての直角($=90^\circ$)は互いに等しいこと
5. 直線が2直線と交わるとき、同じ側の内角の和が2直角より小さい場合、その2直線が限りなく延長されたとき、内角の和（同傍内角）が2直角（ 180° ）より小さい側で交わる。

1～4は簡潔かつ自明だが、

5は条件が多くて自明ではないのでは？



今日の流れ

- ・ 複素数の復習
 - ・ 複素数に関する各用語の確認
 - ・ 一次変換から一次分数変換という上位互換へ
 - ・ 一次分数変換が2次行列の積と似ている
 - ・ 拡張複素数という新しい概念の登場
- ・ リーマン球面への理解
 - ・ 球面自体の用語確認
 - ・ 立体投影の定義とその写像 Π の性質
 - ・ 写像 Π と一次分数変換の組み合わせ

1. 複素数の基礎

1. 複素数・実部・虚部
2. 複素共役・絶対値
3. ガウス平面
4. 複素数の方程式
 1. 円
 2. 直線
5. 一次変換
 1. 和：平行移動
 2. 積：拡大・回転
 3. 逆数：反転
 4. 式・合成
6. 一次分数変換
7. 拡張複素数

複素数の基礎

複素共役・絶対値

$x, y \in \mathbb{R}, z = x + iy (\in \mathbb{C})$ とする

- *def* 複素共役 *complex conjugate*

- $\bar{z} = x - iy$

- *def* 絶対値 *absolute value*

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = z\bar{z}$

複素数の基礎

複素数・実部・虚部

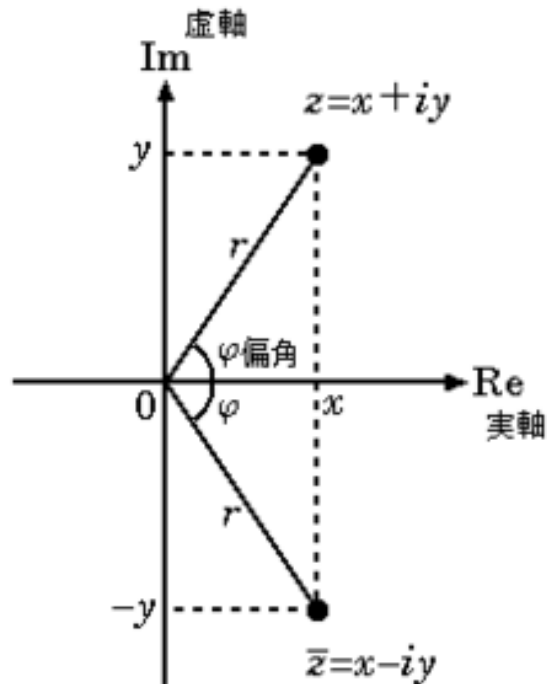
- *def* 複素数 *complex number*
 - $x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1, z = x + iy$
- *def* 実部 *real part*
 - $\operatorname{Re} z = x$
- *def* 虚部 *imaginary part*
 - $\operatorname{Im} z = y$

複素数の基礎

ガウス平面 *Gaussian plane*

横軸 (x軸) : 実軸

縦軸 (y軸) : 虚軸



複素数の基礎

複素数の方程式 *Complex number equation*

def 複素数の方程式

$$a, c \in \mathbb{R}, b, z \in \mathbb{C} \text{ に対して } az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$$

- i. $a = 0$ ならば $b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$: 直線
- ii. $a \neq 0$ ならば : 円

複素数の基礎

複素数の方程式 *Complex number equation*

先に提示した直線の方程式を示す

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を通る直線 l の方程式を考える.

$z \in \mathbb{C}$ が直線 l 上にある

$$\Leftrightarrow \alpha, z, \beta \text{が直線} l \text{上にある}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha - z}{\beta - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\alpha - z}{\beta - z} = \frac{\bar{\alpha} - \bar{z}}{\bar{\beta} - \bar{z}} \Leftrightarrow (\alpha - z)(\bar{\beta} - \bar{z}) = (\beta - z)(\bar{\alpha} - \bar{z})$$

$$\Leftrightarrow (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z - (\alpha - \beta)\bar{z} + \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 0$$

$b := \alpha - \beta, c := \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta$ と置き換えると

$$\Leftrightarrow b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$$

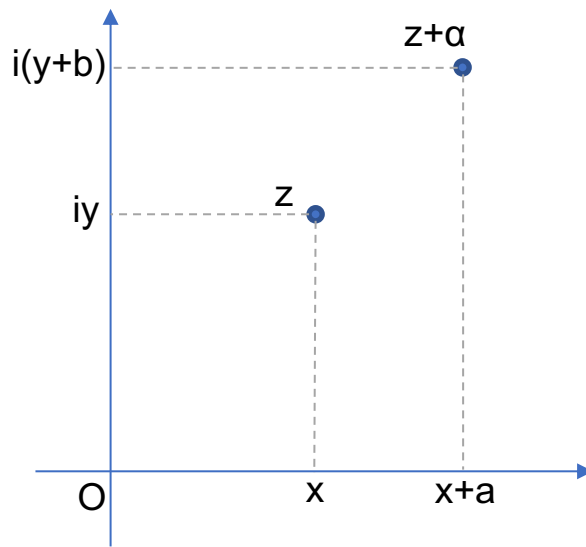
複素数の基礎

一次変換1～和：平行移動～

複素数に複素数を加えると並行移動する.

def 和：平行移動

$$\alpha = a + bi, z = x + iy (\in \mathbb{C}), \varphi(z) = \alpha + z$$



複素数の基礎

一次変換2~積：回転・拡大~

複素数に複素数をかけると原点を中心に回転するとともに拡大（もしくは縮小）される.

def 積：拡大・縮小

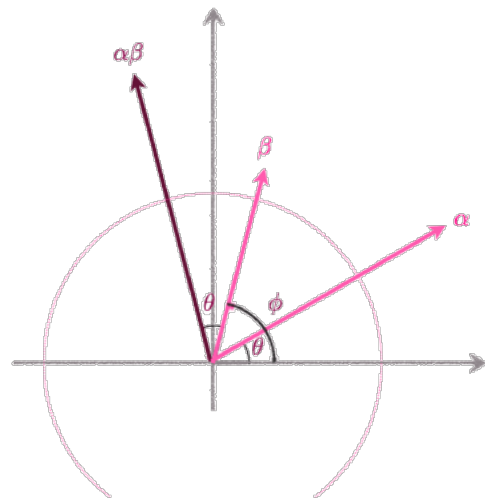
$$\alpha = a + bi, z = x + iy (\in \mathbb{C}), \psi(z) = \alpha z$$

このとき，オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

を用いると $z = re^{i\theta}, z' = r'e^{i\theta'}$ として

$$zz' = re^{i\theta} r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$



複素数の基礎

一次変換3~逆数：反転~

def 逆数：反転

$$\psi(z) = \frac{1}{z}$$

$z = x + iy$ として, $\psi(z) = \frac{1}{z}$ で写してみる.

$$\psi(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2} \text{と計算できる.}$$

ここで $\psi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とすると, $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $iv(x, y) = i \frac{-y}{x^2+y^2}$

ガウス平面上の2点 $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ を結ぶ線分を $\psi(z) = \frac{1}{z}$ で写すことを考える.

複素数の基礎

一次変換3~反転・鏡面変換~

ガウス平面上の2点 $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ を結ぶ線分を $\psi(z) = \frac{1}{z}$ で写すことを考える(右図). この2点の絶対値は $\frac{1}{2}$

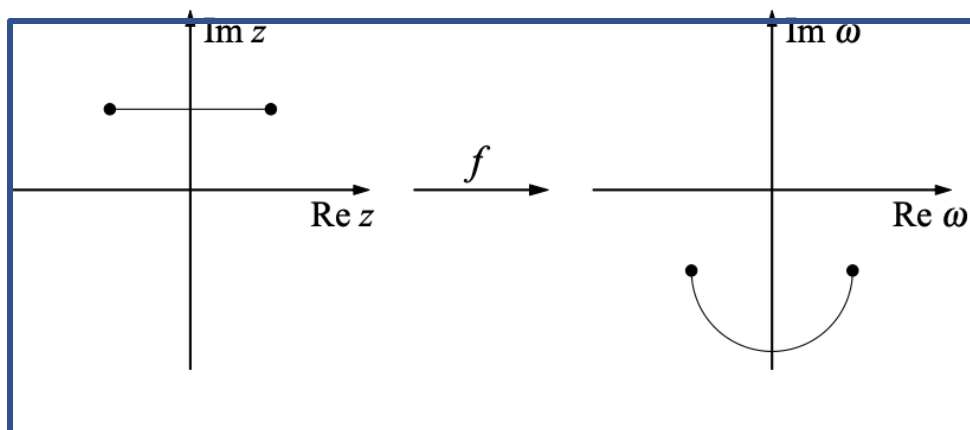
この線分は $y = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ と表せられる.

これらの値を先ほどの $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ に y を代入

すると, $u = \frac{x}{x^2+\frac{1}{2}}, v = \frac{-1}{\sqrt{2}(x^2+\frac{1}{2})}$ となる.

これら点 u, v を変形すると

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} : \text{円の方程式}$$



複素数の基礎

一次分数変換1~式・合成~

fractional linear transformation : FLT

def 1.8 一次分数変換

複素数の平行移動・回転・拡大の全てを表せる最強の形.

メビウス変換ともいう.

$$\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

これ以降, 2次の一次分数変換全体の集合を一次分数変換群といい,
 $PSL(2; \mathbb{C})$ と表記する

複素数の基礎

一次分数変換2~計算してみる~

def 1.8 一次分数変換

複素数の平行移動・回転・拡大の全てを表せる最強の形.

メビウス変換ともいう.

$\Phi_1(z) = z + \frac{c}{d}, \Phi_2(z) = z \frac{(bc-ad)}{c^2}, \Phi_3(z) = \frac{1}{z}$ に対して $\Phi_1(\Phi_2(\Phi_3(z)))$ を計算

順に平行移動, 拡大・回転, 反転を表す一次変換である.

複素数の基礎

一次分数変換3~ $PSL(2; \mathbb{C})$ の合成~

lem1.9

$z \in \mathbb{C}, \Phi_1, \Phi_2 \in PSL(2; \mathbb{C})$ に対して $\Phi_1(\Phi_2(z))$ という合成変換を考える. この時, 一次分数変換の合成変換も一次分数変換となる.

$\Phi_1, \Phi_2 \dots$ においてゴリ押し計算をする

複素数の基礎

一次分数変換4~PSL(2;C)の合成~

【実際に手を動かす】

$$x, y \in \mathbb{R}, z = x + iy,$$

$$\Phi_1 = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \Phi_2 = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \text{ に対して } \Phi_1(\Phi_2(z)) \text{ を計算する}$$

複素数の基礎

一次分数変換5~PSL(2;C)の合成~

【実行後】

$$\Phi_1(\Phi_2(z)) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}$$

何かに似てる気がする...

複素数の基礎

一次分数変換5~PSL(2;C)の合成~

【実行後】

$$\Phi_1(\Phi_2(z)) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}$$

何かに似てる気がする...

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

PSLと2次行列の積を何とかして繋げたい

複素数の基礎

次の目標

一次分数変換と2次行列の積を同一視したい

結果から書くと

- ・ リーマン曲面（拡張複素数という世界）
- ・ 群論

の2つを用いれば、一時分数変換と2次行列を「ほぼ」同じものであるとみなせる.

まずはリーマン曲面を会得するための準備として拡張複素数をやる.

複素数の基礎

拡張複素数 \mathbb{C}_∞ *extended complex*

「複素数全体の集合 \mathbb{C} 」と「 ∞ （という「記号」）」で書かれる元（実数での ∞ の記号の意味とは少し違う）の

和集合「 $\{\mathbb{C}\} \cup \{\infty\}$ 」を拡張複素数といい、 \mathbb{C}_∞ と表記する.

既存の複素数に加えて次の4つの式を新たに定義する.

$$\forall z \in \mathbb{C}_\infty \text{ に対して } \begin{cases} \frac{z}{\infty} = 0 \\ \frac{z}{0} = \infty \\ \frac{0}{\infty} = 0 \\ \frac{\infty}{0} = \infty \end{cases} \left(\frac{0}{0} \text{ や } \frac{\infty}{\infty} \text{ はない} \right)$$

これの新たに定義した式一次分数変換に対応する

拡張複素数 \mathbb{C}_∞ での一次分数変換

$$\Phi \in PSL(2; \mathbb{C}), \Phi: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

$$\Phi(z) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{az + b}{cz + d} & \text{for } (z \neq \infty, cz + d \neq 0): \text{general} \\ \infty & \text{for } (z \neq \infty, cz + d = 0): \frac{z}{0} \\ \frac{a}{c} & \text{for } (z = \infty, a, c \neq 0): \text{一般的な極限} \\ \infty & \text{for } (z = \infty, a \neq 0, c = 0): \frac{\infty}{0} \\ 0 & \text{for } (z = \infty, a = 0, c \neq 0): \frac{0}{\infty} \end{array} \right.$$

複素数の基礎

分子・分母が両方 0 の場合

lem 1.10 分子と分母が 0 の場合の同値条件

$\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ の分子・分母が両方 0 の場合

i. $az + b = cz + d = 0$ である複素数 z が存在

ii. $\Leftrightarrow ad - bc = 0$: こちらは議論する

(十分性 \Rightarrow)

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 上の i が成立するなら, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である

両辺に $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を左からかけて行列の積を計算すると

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって $ad - bc = 0$ が示された

複素数の基礎

分子・分母が両方 0 の場合

(必要性 \Leftarrow)

$ad - bc = 0$ とする ($\neg(a = c = 0)$)

$a \neq 0$ のとして $z = -\frac{b}{a}$ とおくと,

$$\begin{cases} az + b = 0 \\ cz + d = d - \frac{cb}{a} = \frac{ad - bc}{a} = 0 \end{cases}$$

より i が成立.

ちなみに $c \neq 0$ の時は $z = -\frac{d}{c}$ で成立.

2. リーマン球面（PSLと行列の積を同一視するための材料 1）
 1. 必要な用語（小円・大円・北極点）
 2. 立体投影で用いる写像 Π を知る
 3. 球面から球面に写す写像 $\tilde{\Phi}: S^2 \rightarrow S^2$ を考える
 4. 写像 $\tilde{\Phi}$ 連続性を示し、 $\tilde{\Phi}$ が実用的な写像であることを確認する.

リーマン球面

小円 *small circle* ・ 大円 *orthodrome, Riemann circle*

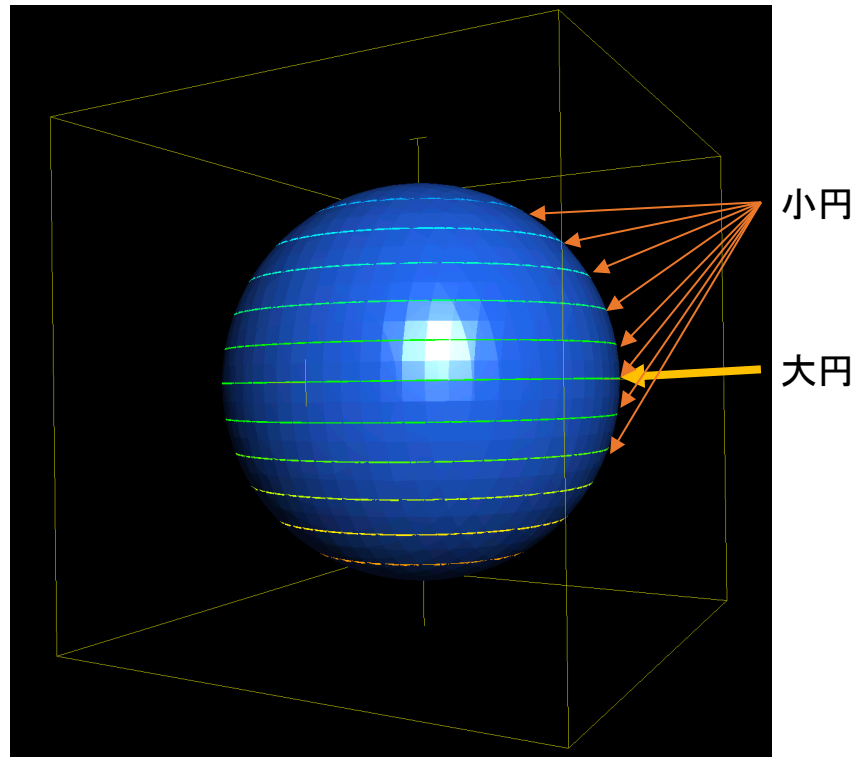
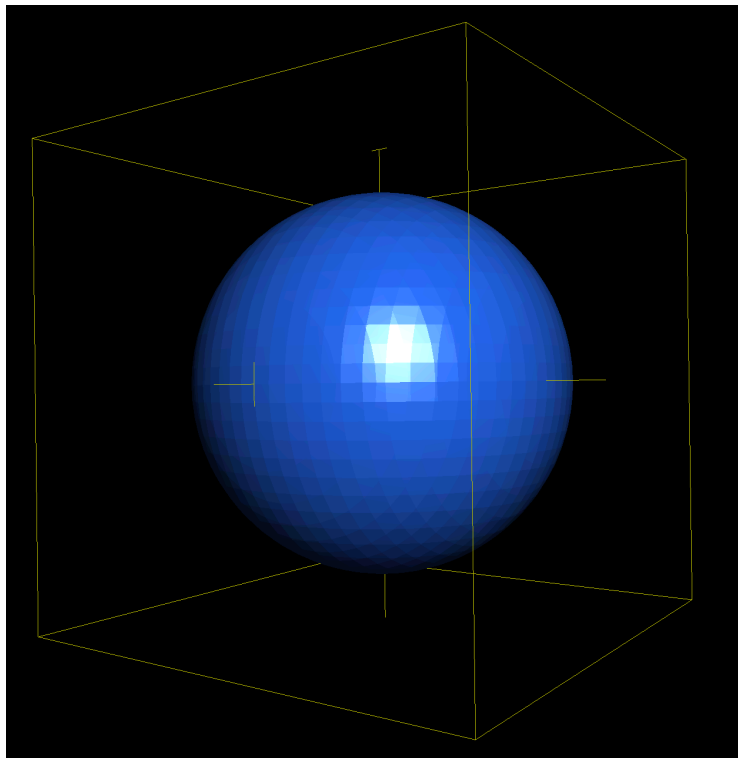
def 小円

球面($\in S^2$) をナイフで切り分けた時に見られる断面の円のこと.
たくさんある. 無限にある.

def 大円

小円のうち, 球の原点を通るもの (もっとも断面が大きい小円.
つまり大円の半径は球の半径と等しい). リーマン円ともいう.

リーマン球面 小円・大円

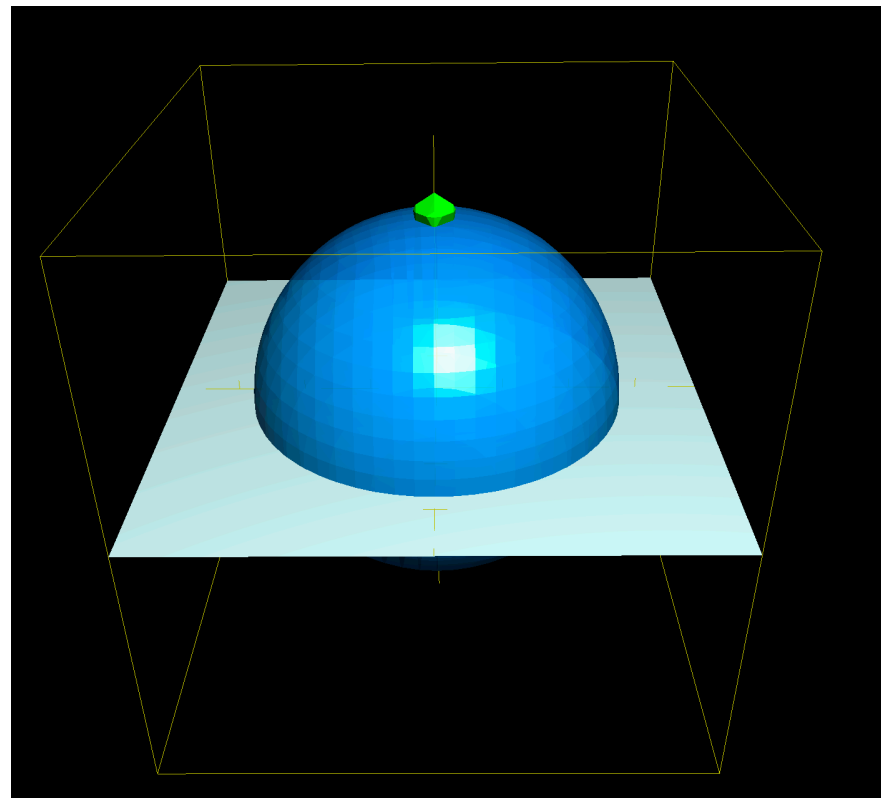


リーマン球面

北極点 *North Pole*

中心を原点にとった S^2 の単位球
(半径 1 の球) を考える.

点 $N(0, 0, 1)$ にとる. この点 N を
北極点という.



リーマン球面

立体投影 Π_{v_0} *stereographic projection*

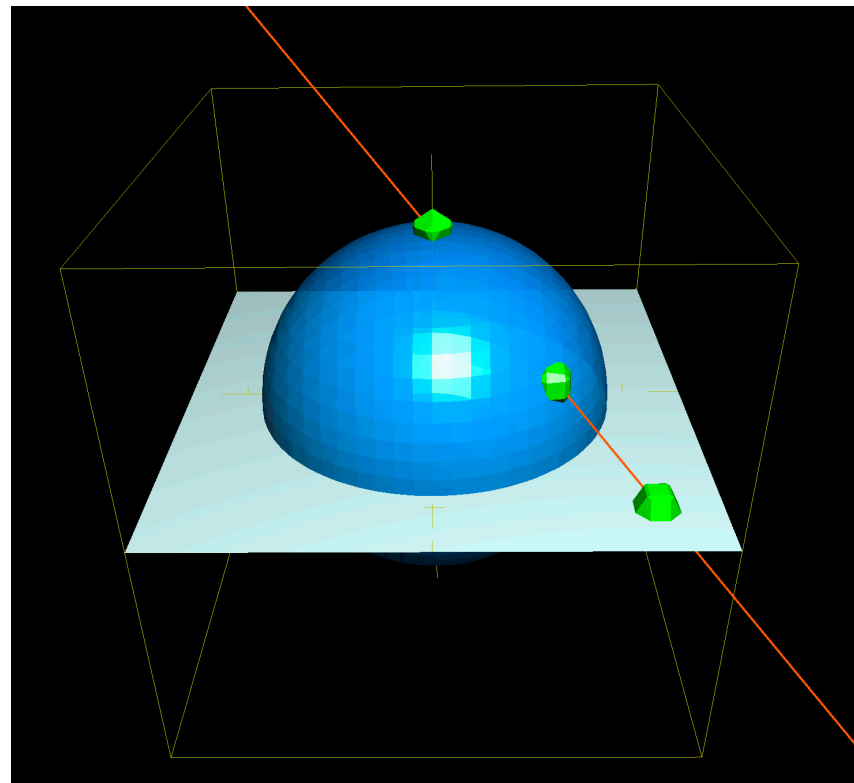
球面 S^2 をガウス平面 \mathbb{C} に配置し、
球の中心を原点と重ねる.

北極点 N と任意の点 $P \in S^2 \setminus \{N\}$
を通る直線で結ぶ.

すると点 P を点 $\Pi_{v_0}(P) \in \mathbb{C}$ に写
す写像を定義できる.

$$\Pi_{v_0}: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$$

ちなみに写像 Π_{v_0} は全単射.



リーマン球面

写像 Π_{ν_0} の全単射性を示す手順

手順

1. 任意の平面の点 $Q \in \mathbb{C}$ をとる
2. 逆像 $\Pi_{\nu_0}^{-1}$ を考える
3. 定義から計算して逆写像であることを確認する

ちなみに

(写像 f が全単射である) \Leftrightarrow (f の逆写像が存在する)

リーマン球面 写像 Π

登場人物：「拡張複素数 \mathbb{C}_∞ 」と「北極点 N 」「写像 Π_{v_0} 」

写像 Π_{v_0} では北極点 N から写す像を定義していない.

ここで, 北極点 N を ∞ (ただの記号) に写すとする,
$$\Pi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

と拡張できる.

全単射の Π_{v_0} に全く新しい対応を拡張したので, Π が全単射であることは明らかである.

リーマン球面

球面から球面への写像 $\tilde{\Phi}$

def 球面からそれ自身への写像

「写像 $\Pi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ 」 「写像 $\Phi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ 」

$\Phi(P) := \Pi^{-1} (\Phi(\Pi(P)))$ (P はリーマン球面上の任意の点)

- Π で点 $P \in S^2$ を \mathbb{C}_∞ の世界へ写す
- Φ で変換（平行移動, 回転拡大, 反転）を行う. $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$
- Π^{-1} で \mathbb{C}_∞ の世界から S^2 へ戻す

何が嬉しい？

→球上の点を（一度 \mathbb{C}_∞ に写すことで）次分数変換を用いて変換できる！！

リーマン球面

写像 $\tilde{\Phi}$ の連続性_{*continuous*}

lem 1.16 $\tilde{\Phi}$ の連続性

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}(P_i) = \tilde{\Phi}(\lim_{i \rightarrow \infty} P_i)$$

を示す

連続写像を合成すると連続写像という命題（証明略）を用いる.

$\Phi: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty, \Pi: S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty, \Pi^{-1}: \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ は連続写像なので自動的に成り立つ.

前回から今回の流れ

- ・ 複素数の一次変換から一次分数変換を考える
- ・ 一次分数変換PSLと行列の積が似てる
- ・ 「リーマン球面（学習済）」と「群論」を使えば繋げられる模様
- ・ まずは群論の基礎
- ・ そして一次分数変換群を再確認
- ・ 最後に2つの材料を使ってPSLとSLをつなげる

前回の復習 1

一次変換から最強の形へ

- 双曲幾何では複素数を基本に話を進めていく
- 点を点に写す一次変換というのが全部で3種類ある
 - 和：平行移動
 - 積：回転・拡大
 - 逆数：反転
- 3種類の一次変換を1つの式で表せないか？
 - 一次分数変換：俺が考えた全てを含んだ最強の一次変換の式
 - $\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

前回の復習 2

一次分数変換の性質

- 一次分数変換の合成はどうなる？
 - 合成しても一次分数変換
 - 行列の積に似ている（けどちょっと違う）
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(\Phi_2(z)) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$
 - どうかしての合成変換と行列の積を同一視できないか？
 - 2つの要素を使えばできる！
 - 拡張複素数とリーマン球面
 - 群論
 - とりあえず順番に勉強していこう

前回の復習 3

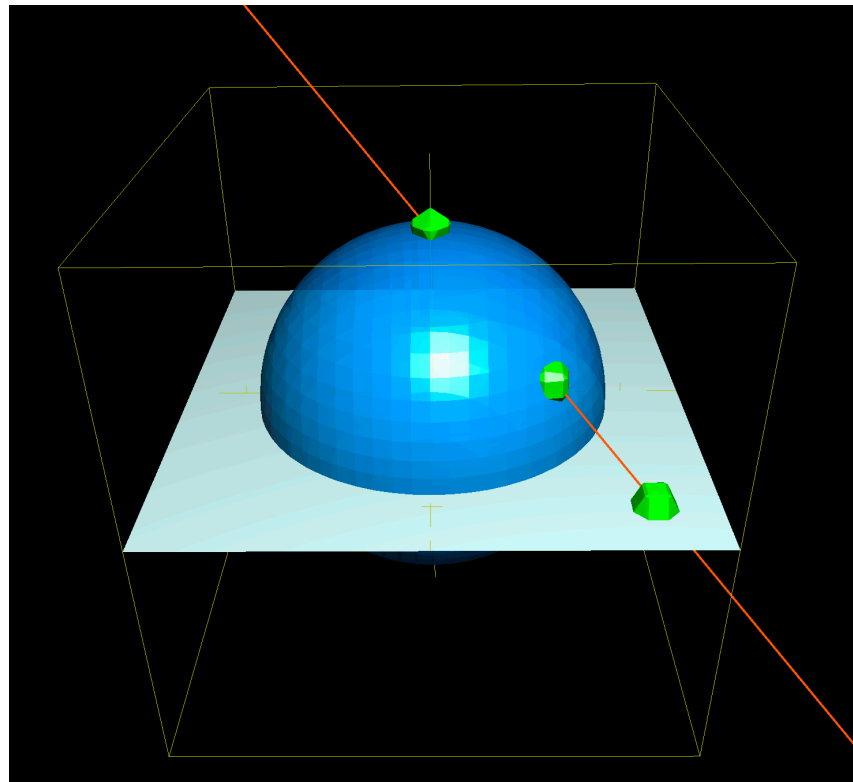
拡張複素数のお出まし

- ・ 拡張複素数とはなんぞや
 - ・ 複素数Cに「 ∞ 」を加えたやつ
- ・ 一次分数変換を拡張複素数で再定義する
 - ・ $ad - bc = 0$ と $\frac{0}{0}$ が同値になるので都合が悪いので定義はしない
 - ・ 分母に ∞ があったり0があったりしても定義できる

前回の復習 4

立体投影：写像 Π

- 原点で球面をガウス平面に重ねる
- 写像 Πv_0
 - 北極点を除く任意の球面とガウス平面の点とを対応させる
- 写像 Πv_0 に拡張複素数を対応させる
 - 北極点と ∞ を対応させる
 - こうすると球面で拡張複素数（つまり ∞ ）を扱うことができる
- 写像 Π と一次分数変換を使って球面から球面への写像を定義できる！



群論に関して

- ・ 群論は別の「群論の気持ち」スライドを参照

1. $\text{PSL}(2;\mathbb{C})$ と $\text{SL}(2;\mathbb{C})$ の関係性

1. 一次分数変換群 PSL

1. 定理

2. 群を成すことを示す

2. Lem 1.35 写像 \cdot のリーマン球面への作用

3. 系 1.36 PSL は全単射

4. Def 1.38 準同型写像

5. Def 1.41 同型写像

これらの定義・定理・補題・系を用いて $\text{SL} \rightarrow \text{PSL}$ の写像を考える

6. Lem 1.43 写像 φ は準同型写像

7. Lem 1.44 写像 φ は全射. また $\varphi(A)=\varphi(B) \Rightarrow A=B$ or $A=-B$

つまり, PSL は SL で \pm を同一視したものである.

ちなみ SL 上の同値関係における同値類に群を与えたもの.

一次分数変換群～合成～

登場人物「 $PSL(2; \mathbb{C})$ ：一時分数変換全体の集合」

定義1.33

$$\Phi_1, \Phi_2 \in PSL(2; \mathbb{C}), \Phi_1 \cdot \Phi_2 := \Phi_1(\Phi_2(z))$$

PSLの合成はPSLであるということ.

一次分数変換群～群～

定理1.34

$(PSL(2; \mathbb{C}), \cdot)$ は群をなす

示す

- 結合則
PSLの性質から成立
- 単位元
恒等写像（対応とかの話とか挟めそう）
- 逆元
PSLには逆行列が存在する

リーマン球面への作用

$\Phi \in PSL(2; \mathbb{C}), z \in \mathbb{C}_\infty, \Phi \cdot z := \Phi(z)$ とする

$\cdot : PSL(2; \mathbb{C}) \times \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ は $PSL(2; \mathbb{C})$ のリーマン球面 \mathbb{C}_∞ への作用を定める.

一次分数変換は全単射

系 1.36 一次分数変換は全単射である

- $\cdot : PSL(2; \mathbb{C}) \times \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ は $PSL(2; \mathbb{C})$ のリーマン球面 \mathbb{C}_∞ への作用を定める.
- 群 G が集合 X に作用していると仮定する. $\forall g \in G, x \in X, g \cdot x : X \rightarrow X$ の写像は全単射

の 2 点より示される

立体投影：写像 Π も同型写像

全単射は前で示した.

準同型写像（演算してから写すのと写してから演算するのが一致すること）を示せばよい

S^2 と $PSL(2; \mathbb{C})$ が同じ構造をしているということ.

写像 φ の性質

Lem 1.44 $\varphi: SL(2; \mathbb{C}) \rightarrow PSL(2; \mathbb{C})$ は全射

【示す方針】

1. 全射の定義を再確認する（写された元の全てに出発地点がある写像）
2. 任意の一次分数変換を考える
3. 一次分数変換を変数変換する
4. 係数を2次行列にした際に行列式を計算し、 $SL(2; \mathbb{C})$ となることを確認

写像 ϕ が全射であることを示す

$\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad - bc \neq 0$) という一次分数変換を考える.

$s := \sqrt{ad - bc}$, $a' := \frac{a}{s}$, $b' := \frac{b}{s}$, $c' := \frac{c}{s}$, $d' := \frac{d}{s}$ とすると

$$\cdot \quad \Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{s}z + \frac{b}{s}}{\frac{c}{s}z + \frac{d}{s}} = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

$$\cdot \quad \det \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \frac{ad-bc}{s^2} = 1 \text{ より } \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \in SL(2; \mathbb{C})$$

上の2式より, $\Phi = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ なので全射性が示された

$\varphi(A)=\varphi(B)$ のとき $A=B$ or $A=-B$

$A, B \in SL(2; \mathbb{C})$, $\varphi(A) = \varphi(B)$ を仮定. JUN同型写像の性質を用いて

$$\varphi(A^{-1}B) = \varphi(A^{-1})\varphi(B) = \varphi(A)^{-1}\varphi(B) = id(\text{ほぼ}) = E$$

$A^{-1}B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ としたとき,

$$A^{-1}B = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A, B \in SL(2; \mathbb{C}) \Rightarrow A^{-1}B \in SL(2; \mathbb{C})$$

より $a = d = \pm 1$ なので $A^{-1}B = \pm I$. よって $A = B$ or $A = -B$

今までの復習 1

- ・ 点を点にうつす一次分数変換がある
 - ・ 幾何的な操作の基本となるのでとても重要
- ・ 一次分数変換を合成すると？
 - ・ 行列の積の計算に似てる（あくまでも人間の感覚）
- ・ 実は「一次分数変換」と「行列の積」は2つのツールを使うと数学的に「ほぼ」同一視できる！
 - ・ 拡張複素数（リーマン球面）
 - ・ 群論
- ・ では、それぞれのツールを学んでいこう

今までの復習 2 ～拡張複素数～

- ・ とは？
 - ・ 複素数に「無限遠点 ∞ 」を加えたもの
- ・ ガウス平面では表せないな...
 - ・ リーマン球面の導入. 手のひらで拡張複素数を表現できるように
 - ・ 写像 Π で球面と拡張複素数を行ったり来たり
 - ・ 一次分数変換と写像 Π を用いて, 球面上の点の変換もできるように
 - ・ ↑メビウス変換という (球面上の点の操作をメビウス変換というみたいでした. てっきり一次分数変換のことかと勘違いしていた)

今までの復習 3 ～群論～

- ・ 群論って？
 - ・ 集合と演算に着目して，代数的構造を考える学問
- ・ 群の定義
 - ・ 閉包（とじてる）
 - ・ 結合則が成立
 - ・ 単位元の存在
 - ・ 逆元の存在
- ・ 部分群
 - ・ 親となる部分集合と演算との組

今までの復習 4 ～群論～

- ・ 群のクラス（分類）
 - ・ 置換群（集合Aから集合Aへの全単射）
 - ・ 行列群（正則行列全体の集合）
 - ・ 変換群（集合Aから集合Aへの写像. 特別なものは置換・行列群へ）
 - ・ 位相・代数群（連続性あり）
 - ・ 群を分類する時に作用を用いている
- ・ 作用
 - ・ 群Gの元（つまり写像）がある空間（集合A）に対して演算を行うことを, 「群Gの集合Aへの作用」という
 - ・ 置換群を考えるとイメージしやすい

今までの復習 5 ～群論～

- ・ 同型
 - ・ 2つの群の構造が同じ場合を指す
 - ・ 命題での同値
- ・ 準同型写像
 - ・ $(\text{演算してから飛ばす}) = (\text{飛ばしてから演算する})$
- ・ 同型写像
 - ・ 準同型写像が全単射の時

今までの復習 6 ～SLとPSLの同一視～

- (SL, \cdot) とPSL（それぞれ群）は同型である
- しかしこの時の同型写像は全射
 - つまり，構造が全く同じではない
- SLでの \pm はPSLでは関係ない
 - 分数の分母分子を-1倍しても値が変わらないのに対し，SLの各要素を-1倍にすると変化してしまう
- これにて，SLとPSLの同一視できる部分とできない部分をはっきりさせられた

第3回目の流れ

- ・ 一次分数変換はどのような性質を持つ？
 - ・ 円を円に，直線を直線にうつす
 - ・ 無限回合成した極限から，3つに分類できる
 - ・ 双曲的
 - ・ 楕円の
 - ・ 放物的
- ・ 少し戻って写像 Π を具体的に計算してみる

円を円に，直線を直線に.

$\Phi \in \text{PSL}(2; \mathbb{C})$, L : ガウス平面上の (円or直線の) 図形
 Φ によって写された円 L (もしくは直線 L) の像も円 (直線) .

$$g(A) = \{gx; x \in A\}$$

【示す手順】

1. 2次正則行列の性質を確認
2. SL に対して上記の性質を適用する
3. 2で求めた式に3種の PSL が存在することを確認
4. 各 PSL がどのような写像なのか確認

一次分数変換の性質 > 円円対応 > 示す 1

2次正則行列の性質

lem $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: 2次正則行列で $a \neq 0$ したとき,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ が存在する.

【補題を示す】

右辺の積を計算すると $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta\delta \\ \alpha\beta & \beta\delta + \gamma \end{pmatrix}$ となる.

4 変を4つの方程式から解けばいい.

特に, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{C})$ の場合は右辺の行列3つも $SL(2; \mathbb{C})$ □

一次分数変換の性質 > 円円対応 > 示す 2

行列 $A \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ を Φ で写す ($a \neq 0$ の時)

$$\text{補題より } \phi(A) = \varphi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

ここで $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ だが,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ より PSL で写すと符号は考慮しなくて良いので

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{C}) \text{ より } \det \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \beta\gamma = 1$$

つまり, PSL の合成 (つまり PSL) であることがわかる.

一次分数変換の性質 > 円円対応 > 示す 2

行列 $A \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ を Φ で写す ($a=0$ の時)

$a \neq 0$ の時と同様に

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} -ci & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と変形できる.

また, $\begin{pmatrix} -ci & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ なので $bc = -1$

よって $a=0$ の時も PSL の合成であることがわかる.

一次分数変換の性質 > 円円対応 > 示す3

3種のPSLが存在することを確認する

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} \varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{for } a \neq 0 \\ \varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} -ci & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{for } a = 0 \end{cases}$$

を見ると $\varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ の3種類のPSLに分けられる。それぞれどんな写像だろう？

一次分数変換の性質 > 円円対応 > 示す4

3種類の写像を確認する

- $\phi = \varphi \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C} \text{を} \frac{1 \cdot z + \alpha}{0 \cdot z + 1} = z + \alpha \text{に写す} \Leftrightarrow \text{平行移動}$
- $\phi = \varphi \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C} \text{を} \frac{\lambda \cdot z + 0}{0 \cdot z + \lambda^{-1}} = \lambda^2 z \text{に写す} \Leftrightarrow \text{相似変換}$
- $\phi = \varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C} \text{を} \frac{0 \cdot z + i}{i \cdot z + 0} = \frac{1}{z} \text{に写す} \Leftrightarrow \text{なんだろう？}$

一次分数変換の性質 > 円円対応 > 示す4

3種類の写像を確認する1

lem 1.6

L : 中心 z_0 , 半径 r , ガウス平面 \mathbb{C} 上の円

$|z - z_0| = r$ を満たす点 $z \in \mathbb{C}$ 全体と一致する

ここで, lem1.6での円 L を $\phi = \varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}$ を $\frac{1}{z}$ で写すと

$\left| \frac{1}{z} - z_0 \right| = r$ である. $|z|^2 = z\bar{z}$ に注意して両辺2乗すると

$$r^2 = \left(\frac{1}{z} - z_0 \right) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \bar{z}_0 \right) = \frac{1 - \bar{z}\bar{z}_0 - zz_0 + z\bar{z}z_0\bar{z}_0}{z\bar{z}}$$

$$r^2 = \frac{1 - \bar{z}\bar{z}_0 - zz_0 + |zz_0|^2}{z\bar{z}}$$

一次分数変換の性質 > 円円対応 > 示す4

3種類の写像を確認する2

$$r^2 = \frac{1 - \bar{z}\bar{z}_0 - zz_0 + |zz_0|^2}{}$$

$$r^2 \cdot z\bar{z} - |zz_0|^2 \stackrel{z\bar{z}}{=} 1 - \bar{z}\bar{z}_0 - zz_0$$

$$r^2 \cdot |z|^2 - |z|^2 |z_0|^2 = 1 - \bar{z}\bar{z}_0 - zz_0$$

$$\left| z - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2} \right|^2 = \frac{r^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2}$$

これは円の方程式だ.

一次分数変換の性質

円円対応2

定義1.47

$$\Phi \in PSL(2; \mathbb{C}), x \in S^2, \Phi \cdot x = \Pi^{-1}(\Phi(\Pi(x)))$$

のとき, \cdot は $PSL(2; \mathbb{C})$ の S^2 への作用を定める.

系1.48

球面 S^2 上の小円も, 一次分数変換によって小円にうつされる

点を一次分数変換で無限回合成する

やること

- ・ 「不動点」という，（恒等写像ではない）一次分数変換で写してもそれ以上変化しない時の点の定義を確認
- ・ 一次分数変換は無限回合成すると，3種類の不動点を持ち，分類できる
 - ・ 双曲的
 - ・ 楕円の
 - ・ 放物的

一次分数変換群 $PSL(2; \mathbb{C})$ の性質 > 元の分類

不動点集合 *fixed point set* と Φ^i

Def

写像 Φ ($\Phi \neq id$) で写されても元に戻る (つまり動かない) 点を不動点といい, 不動点の集合を不動点集合といって次の式で定義する.

$$\Phi \in PSL(2; \mathbb{C}), Fix(\Phi) := \{z \in S^2 \mid \Phi z = z\}$$

Def

$\Phi \in PSL(2; \mathbb{C})$ に対して Φ の i 回の積を Φ^i とかく

$\Phi^i \in PSL(2; \mathbb{C})$ は明らか

一次分数変換群 $PSL(2;\mathbb{C})$ の性質 > 元の分類

3つに分類

一次分数変換は3つ（**双曲的**, **楕円の**, **放物的**）に分類できる
定理

$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C}), \Phi \neq id$ に対して

- i. **（双曲的）** $Fix(\Phi)$ は2つ. $\forall z_1, \forall z_2 \in S^2, z_1 \neq z_2$ に対して
$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi^i(z) = z_1, \lim_{i \rightarrow -\infty} \Phi^i(z) = z_2$$
- ii. **（楕円の）** $Fix(\Phi)$ は2つ. $S^2 \setminus \{z_1, z_2\}$ は, 無限個の小円の族
 L_t の, 互いに交わらない和になる（接するのはよい）.
- iii. **（放物的）** $Fix(\Phi)$ は唯1つ. S^2 は z_0 を通り互いに接する無限個の小円の族 L_t の和になる
$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi^i(z) = \lim_{i \rightarrow -\infty} \Phi^i(z) = z_0$$

一次分数変換群 $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ の性質 > 元の分類

双曲的の例

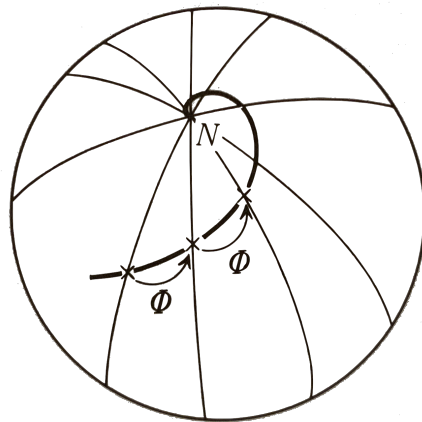
例1.53

$$\theta \in \mathbb{R}, r(\in \mathbb{R}) > 1, \Phi(z) = re^{i\theta}z$$

とすると不動点は $\mathrm{Fix}(\Phi) = \{0, \infty\}$

この不動点2点を逆写像 Π^{-1} で球面に写すと
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi^i(z) = S(\text{北極点}), \lim_{i \rightarrow -\infty} \Phi^i(z) = S(\text{南極点})$

の2点に移る.



一次分数変換群 $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ の性質

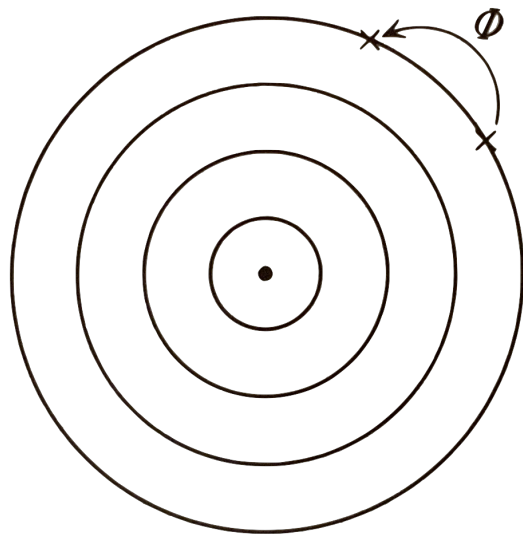
楕円的の例

$$\theta \in \mathbb{R}, \Phi(z) = e^{i\theta} z$$

とすると不動点は $\mathrm{Fix}(\Phi) = \{0, \infty\}$

$e^{i\theta}$ は原点を中心に角度 θ 回転させるので、半径 $t > 0$ の円 L_t は $\Phi(L_t) = L_t$ となる。

拡張複素数 \mathbb{C}_∞ から不動点を除いた集合は Π^{-1} で球面に写すと互いに交わらない円の族になる。



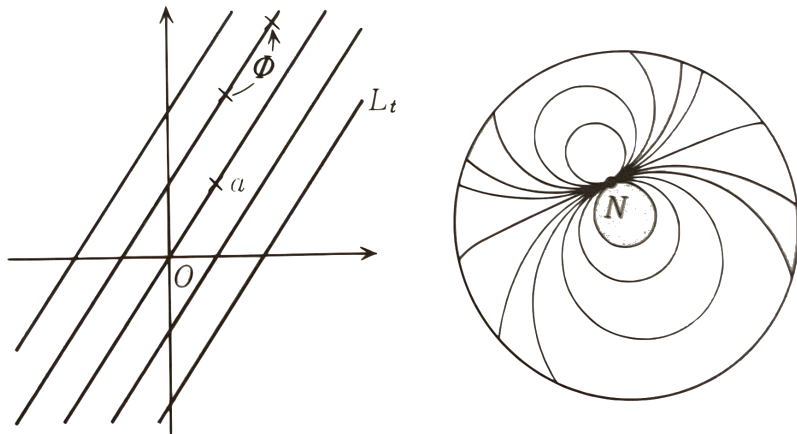
一次分数変換群 $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ の性質 > 元の種類

放物的の例

$$\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0, \Phi(z) = z + \alpha$$

とすると不動点は $\mathrm{Fix}(\Phi) = \{\infty\}$.

また, $L_t = \{a(x + it) \mid x \in \mathbb{R}\}$ とすると $\Phi(L_t) = L_t$. このとき Π^{-1} で球面に写すと, それらは小円の集合となる. この小円は北極点 N で接する.



一次分数変換群 $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ の性質 > 元の分類 場合分け

$\Phi(z)$ と $|a|$ の値で場合分けができる

補題

- i. (双曲的) $\Phi(z) = az, |a| \neq 1$
- ii. (楕円の) $\Phi(z) = az, |a| = 1, a \neq 1$
- iii. (放物的) $\Phi(z) = a + z, a \neq 0$

一次分数変換群 $PSL(2; \mathbb{C})$ の性質 > 元の分類

元の分類の保持

補題

$\Phi, \Psi \in PSL(2; \mathbb{C}), \Phi \neq id$ に対して
 $\Psi^{-1}\Phi\Psi$ が

- 双曲的なら Φ も双曲的
- 楕円のなら Φ も楕円の
- 放物的なら Φ も放物的

PSL で写しても、元の分類は保たれる