# 今までの復習１

- 点を点にうつす一次分数変換がある
  - 幾何的な操作の基本となるのでとても重要
- 一次分数変換を合成すると？
  - 行列の積の計算に似てる（あくまでも人間の感覚）
- 実は「一次分数変換」と「行列の積」は２つのツールを使うと数学的に「ほぼ」同一視できる！
  - 拡張複素数（リーマン球面）
  - 群論
- では，それぞれのツールを学んでいこう

# 今までの復習２～拡張複素数～

- とは？
  - 複素数に「無限遠点∞」を加えたもの
- ガウス平面では表せないな…
  - リーマン球面の導入．手のひらで拡張複素数を表現できるように
  - 写像Πで球面と拡張複素数を行ったり来たり
  - 一次分数変換と写像Πを用いて，球面上の点の変換もできるように
  - ↑メビウス変換という（球面上の点の操作をメビウス変換というみたいでした．てっきり一次分数変換のことかと勘違いしていた）

# 今までの復習３～群論～

- 群論って？
  - 集合と演算に着目して，代数的構造を考える学問
- 群の定義
  - 閉包（とじてる）
  - 結合則が成立
  - 単位元の存在
  - 逆元の存在
- 部分群
  - 親となる部分集合と演算との組

# 今までの復習４～群論～

- 群のクラス（分類）
  - 置換群（集合Aから集合Aへの全単射）
  - 行列群（正則行列全体の集合）
  - 変換群（集合Aから集合Aへの写像．特別なものは置換・行列群へ）
  - 位相・代数群（連続性あり）
  - 群を分類する時に作用を用いている
- 作用
  - 群Gの元（つまり写像）がある空間（集合A）に対して演算を行うことを，「群Gの集合Aへの作用」という
  - 置換群を考えるとイメージしやすい

# 今までの復習５～群論～

- 同型
  - ２つの群の構造が同じ場合を指す
  - 命題での同値
- 準同型写像
  - （演算してから飛ばす）＝（飛ばしてから演算する）
- 同型写像
  - 準同型写像が全単射の時

# 今までの復習６～SLとPSLの同一視～

- (SL,・)とPSL（それぞれ群）は同型である
- しかしこの時の同型写像は全射
  - つまり，構造が全く同じではない
- SLでの±はPSLでは関係ない
  - 分数の分母分子を-1倍しても値が変わらないのに対し，SLの各要素を-1倍にすると変化してしまう
- これにて，SLとPSLの同一視できる部分とできない部分をはっきりさせられた

# 第3回目の流れ

- 一次分数変換はどういう性質を持つ？
  - 円を円に，直線を直線にうつす
  - 無限回合成した極限から，3つに分類できる
    - 双曲的
    - 楕円的
    - 放物的
- 少し戻って写像Πを具体的に計算してみる

# 円を円に，直線を直線に．

$\Phi \in \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$，$\mathrm{L}$：ガウス平面上の（円or直線の）図形

Φによって写された円L（もしくは直線L）の像も円（直線）．

$$g(A) = \{gx;\ x \in A\}$$

【示す手順】

1. ２次正則行列の性質を確認
2. SLに対して上記の性質を適用する
3. ２で求めた式に３種のPSLが存在することを確認
4. 各PSLがどのような写像なのか確認

# 2次正則行列の性質

lem $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: 2次正則行列で$a \neq 0$したとき，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$が存在する.

【補題を示す】

右辺の積を計算すると$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta\delta \\ \alpha\beta & \beta\delta + \gamma \end{pmatrix}$となる.

４変を4つの方程式から解けばいい.

特に，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{C})$の場合は右辺の行列3つもSL(2;C) □

# 行列$A \in SL(2;C)$を$\Phi$で写す(a≠0の時)

補題より$\phi(A) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$

ここで$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$だが,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in SL(2;C)$ よりPSLで写すと符号は考慮しなくて良いので

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;C)$より $\det\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \beta\gamma = 1$

つまり，PSLの合成（つまりPSL）であることがわかる.

# 行列$A \in SL(2; C)$をΦで写す(a=0の時)

a≠0の時と同様に

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} -ci & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と変形できる.

また, $\begin{pmatrix} -ci & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix} \in SL(2; C)$なので $bc = -1$

よってa=0の時もPSLの合成であることがわかる.

# 3種のPSLが存在することを確認する

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{cases} \varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{for } a \neq 0 \\ \varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} -ci & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ for } a = 0 \end{cases}$$

を見ると$\varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$の３種類のPSLに分けられる．それぞれどんな写像だろう？

# 3種類の写像を確認する

- $\phi = \varphi\begin{pmatrix}1 & \alpha \\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}$を$\frac{1 \cdot z+\alpha}{0 \cdot z+1} = z + \alpha$に写す $\Leftrightarrow$ 平行移動
- $\phi = \varphi\begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}$を$\frac{\lambda \cdot z+0}{0 \cdot z+\lambda^{-1}} = \lambda^2 z$に写す $\Leftrightarrow$ 相似変換
- $\phi = \varphi\begin{pmatrix}0 & i \\ i & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}$を$\frac{0 \cdot z+i}{i \cdot z+0} = \frac{1}{z}$に写す $\Leftrightarrow$ なんだろう？

# 3種類の写像を確認する1

lem 1.6

$L$: 中心$z_0$，半径$r$，ガウス平面$\mathbb{C}$上の円
$|z-z_0|=r$を満たす点$z\in\mathbb{C}$全体と一致する

ここで，lem1.6での円Lを$\phi=\varphi\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow z\in\mathbb{C}$を$\frac{1}{z}$で写すと

$\left|\frac{1}{z}-z_0\right|=r$である．$|z|^2=z\bar{z}$に注意して両辺２乗すると

$$r^2=\left(\frac{1}{z}-z_0\right)\left(\frac{1}{\bar{z}}-\overline{z_0}\right)=\frac{1-\bar{z}\overline{z_0}-zz_0+z\bar{z}z_0\overline{z_0}}{z\bar{z}}$$

$$r^2=\frac{1-\bar{z}\overline{z_0}-zz_0+|zz_0|^2}{z\bar{z}}$$

# 3種類の写像を確認する2

$$r^2 = \frac{1 - \bar{z}\overline{z_0} - zz_0 + |zz_0|^2}{z\bar{z}}$$

$$r^2 \cdot z\bar{z} - |zz_0|^2 = 1 - \bar{z}\overline{z_0} - zz_0$$

$$r^2 \cdot |z|^2 - |z|^2|z_0|^2 = 1 - \bar{z}\overline{z_0} - zz_0$$

$$\left|z - \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - r^2}\right|^2 = \frac{r^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2}$$

これは円の方程式だ.

一次分数変換の性質

# 円円対応2

定義1.47

$$\Phi\ \in PSL(2;\mathbb{C}), x \in S^2, \Phi \cdot x = \Pi^{-1}(\Phi\big(\Pi(x)\big))$$

のとき，・は$PSL(2;\mathbb{C})$の$S^2$への作用を定める.

系1.48

球面$S^2$上の小円も，一次分数変換によって小円にうつされる

# 点を一次分数変換で無限回合成する

やること

- 「不動点」という，（恒等写像ではない）一次分数変換で写してもそれ以上変化しない時の点の定義を確認
- 一次分数変換は無限回合成すると，３種類の不動点を持ち，分類できる
    - 双曲的
    - 楕円的
    - 放物的

# 不動点集合$_{\textit{fixed point set}}$と$\Phi^{\mathrm{i}}$

Def

写像$\Phi$（$\Phi \neq id$）で写されても元に戻る（つまり動かない）点を不動点といい，不動点の集合を不動点集合といって次の式で定義する．

$$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C}), Fix(\Phi) \coloneqq \{z \in S^2 \mid \Phi z = z\}$$

Def

$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C})$に対して$\Phi$の$i$回の積を$\Phi^i$とかく

$\Phi^i \in PSL(2;\mathbb{C})$は明らか

# 3つに分類

一次分数変換は３つ（双曲的，楕円的，放物的）に分類できる

定理

$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C}), \Phi \neq id$に対して

i. （双曲的），$Fix(\Phi)$ は２つ．$\forall z_1, \forall z_2 \in S^2, z_1 \neq z_2$に対して
$\lim_{i\to\infty} \Phi^i(z) = z_1, \lim_{i\to-\infty} \Phi^i(z) = z_2$

ii. （楕円的）$Fix(\Phi)$ は２つ．$S^2 \setminus \{z_1, z_2\}$は，無限個の小円の族$L_t$の，互いに交わらない和になる（接するのはよい）．

iii. （放物的）$Fix(\Phi)$ は唯１つ． $S^2$は$z_0$を通り互いに接する無限個の小円の族$L_t$の和になる

$$\lim_{i\to\infty} \Phi^i(z) = \lim_{i\to-\infty} \Phi^i(z) = z_0$$

# 双曲的の例

例1.53

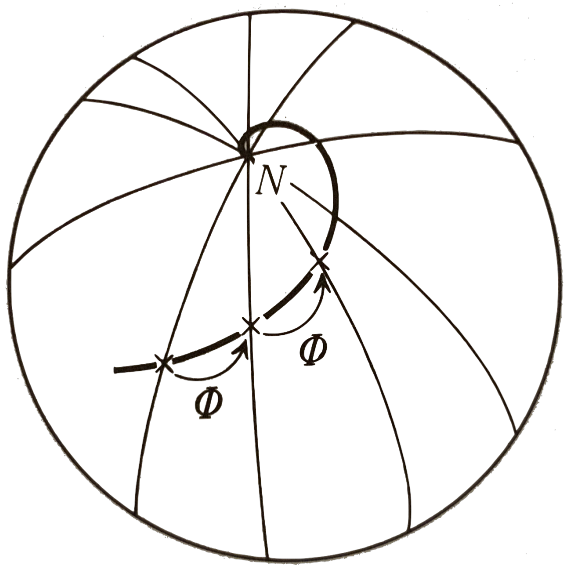
$$\theta \in \mathbb{R}, r(\in \mathbb{R}) > 1, \Phi(z) = re^{i\theta}z$$

とすると不動点は$Fix(\Phi) = \{0, \infty\}$

この不動点２点を逆写像$\Pi^{-1}$で球面に写すと

$\lim_{i\to\infty} \Phi^i(z) = S$(北極点), $\lim_{i\to-\infty} \Phi^i(z) = S$(南極点)

の２点に移る.



一次分数変換群PSL(2;C)の性質

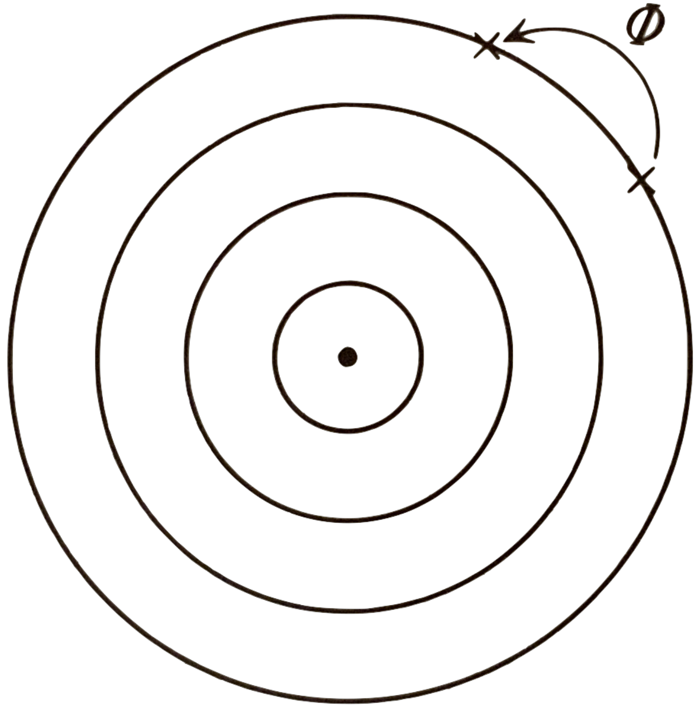
# 楕円的の例

$$\theta \in \mathbb{R}, \Phi(z) = e^{i\theta} z$$

とすると不動点は$Fix(\Phi) = \{0, \infty\}$

$e^{i\theta}$は原点を中心に角度$\theta$回転させるので，
半径t>0の円$L_t$は $\Phi(L_t) = L_t$となる．

拡張複素数$\mathbb{C}_\infty$から不動点を除いた集合は$\Pi^{-1}$で球面に写すと互いに交わらない円の族になる．

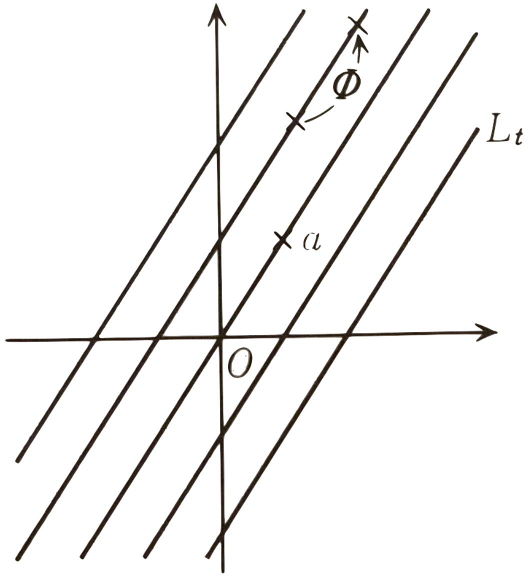


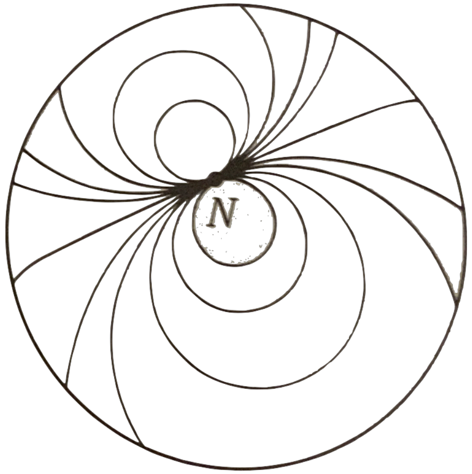
# 放物的の例

$$\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0, \Phi(z) = z + \alpha$$

とすると不動点は$Fix(\Phi) = \{\infty\}$.

**また，$L_t = \{a(x + it)|x \in \mathbb{R}\}$とすると $\Phi(L_t) = L_t$．このとき $\Pi^{-1}$ で球面に写すと，それらは小円の集合となる．この小円は北極点** Nで接する.



# 場合分け

Φ(z)と|a|の値で場合分けができる

補題

i.　（双曲的） $\Phi(z) = az, |a| \neq 1$

ii.　（楕円的） $\Phi(z) = az, |a| = 1, a \neq 1$

iii.　（放物的） $\Phi(z) = a + z, a \neq 0$

# 元の分類の保持

補題

$\Phi, \Psi \in PSL(2;\mathbb{C}), \Phi \neq id$に対して

$\Psi^{-1}\Phi\Psi$が

- 双曲的なら$\Phi$も双曲的
- 楕円的なら$\Phi$も楕円的
- 放物的なら$\Phi$も放物的

PSLで写しても，元の分類は保たれる