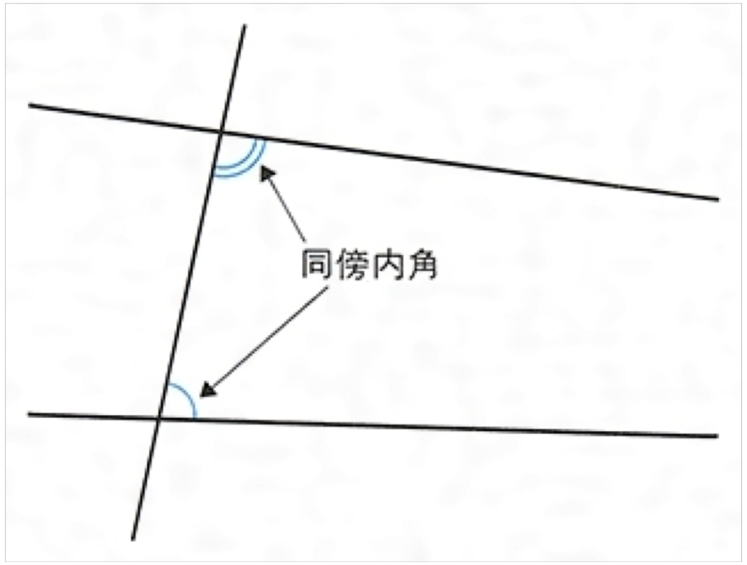
双曲幾何の発祥～ユークリッド幾何学が自明かどうか～

ユークリッド幾何学は以下の５つの公準が正しいことを前提としている.

1. 任意の１点から他の１点に対して直線を引くこと
2. 有限の直線を連続的にまっすぐ延長すること
3. 任意の中心と半径で円を描くこと
4. すべての直角(=90°)は互いに等しいこと
5. 直線が２直線と交わるとき、同じ側の内角の和が2直角より小さい場合、その２直線が限りなく延長されたとき、内角の和（同傍内角）が２直角（180°）より小さい側で交わる。

１～４は簡潔かつ自明だが,

５は条件が多くて自明ではないのでは？？



今日の流れ

- 複素数の復習
  - 複素数に関する各用語の確認
  - 一次変換から一次分数変換という上位互換へ
  - 一次分数変換が２次行列の積と似ている
  - 拡張複素数という新しい概念の登場
- リーマン球面への理解
  - 球面自体の用語確認
  - 立体投影の定義とその写像Πの性質
  - 写像Πと一次分数変換の組み合わせ

1. # 複素数の基礎
    1. 複素数・実部・虚部
    2. 複素共役・絶対値
    3. ガウス平面
    4. 複素数の方程式
        1. 円
        2. 直線
    5. 一次変換
        1. 和：平行移動
        2. 積：拡大・回転
        3. 逆数：反転
        4. 式・合成
6. 一次分数変換
7. 拡張複素数

複素数の基礎

複素共役・絶対値

$x, y \in \mathbb{R}, z = x + iy (\in \mathbb{C})$とする

- def 複素共役 *complex conjugate*
  - $\bar{z} = x - iy$
- def 絶対値 *absolute value*
  - $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = z\bar{z}$

複素数の基礎

複素数・実部・虚部

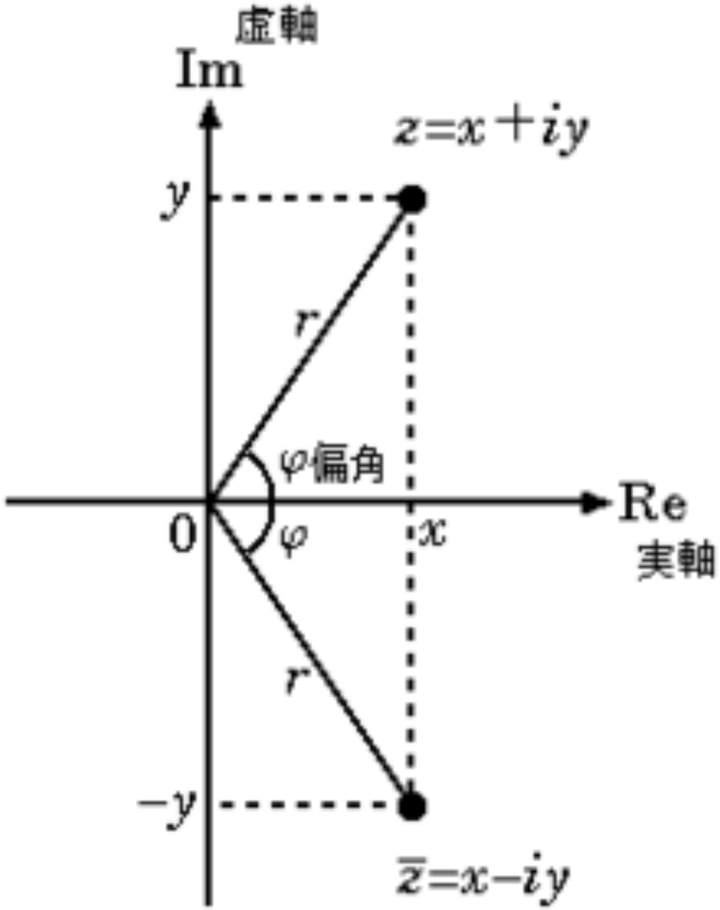
- *def* 複素数 *complex number*
  - $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, $z = x + iy$
- *def* 実部 *real part*
  - $\mathrm{Re}\, z = x$
- *def* 虚部 *imaginary part*
  - $\mathrm{Im}\, z = y$

複素数の基礎

ガウス平面 *Gaussian plane*

横軸（x軸）：実軸

縦軸（y軸）：虚軸



複素数の方程式 *Complex number equation*

def 複素数の方程式

$a, c \in \mathbb{R}, b, z \in \mathbb{C}$に対して$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$

i. $a = 0$ならば$b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$：直線

ii. $a \neq 0$ならば：円

複素数の方程式 Complex number equation

先に提示した直線の方程式を示す

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$を通る直線$l$の方程式を考える.

$z \in \mathbb{C}$が直線l上にある

$\Leftrightarrow \alpha, z, \beta$が直線$l$上にある

$\Leftrightarrow \frac{\alpha-z}{\beta-z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\alpha-z}{\beta-z} = \frac{\bar{\alpha}-\bar{z}}{\bar{\beta}-\bar{z}} \Leftrightarrow (\alpha - z)(\bar{\beta} - \bar{z}) = (\beta - z)(\bar{\alpha} - \bar{z})$

$\Leftrightarrow \left(\bar{\alpha} - \bar{\beta}\right)z - (\alpha - \beta)\bar{z} + \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 0$

$b \coloneqq \alpha - \beta, c \coloneqq \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta$と置き換えると

$\Leftrightarrow \mathrm{b\bar{z}} + \mathrm{\bar{b}z} + \mathrm{c} = 0$

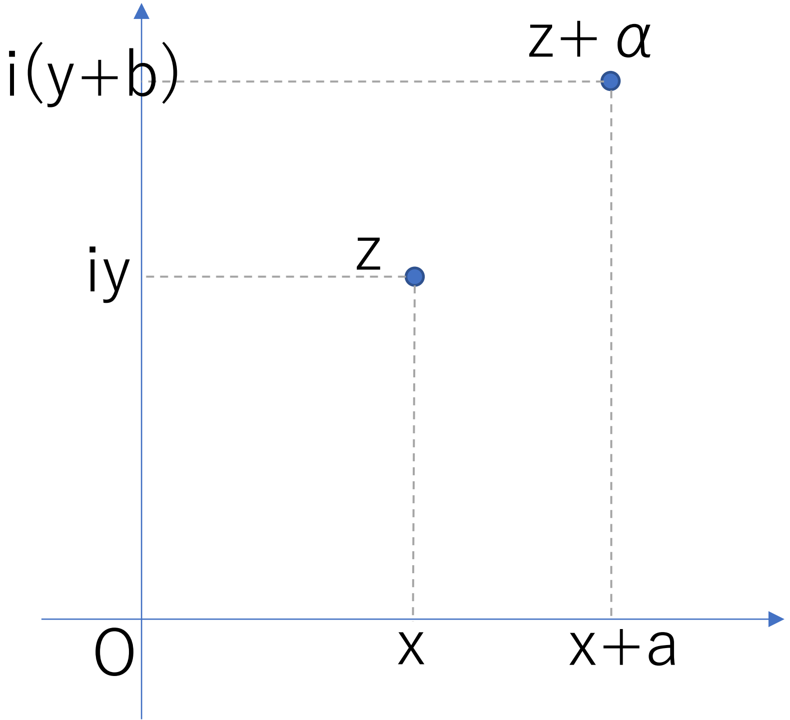
複素数の基礎

一次変換1~和：平行移動~

複素数に複素数を加えると並行移動する.

def 和：平行移動

$$\alpha = a + bi, z = x + iy(\in \mathbb{C}), \varphi(z) = \alpha + z$$



複素数の基礎

一次変換2~積：回転・拡大~

複素数に複素数をかけると原点を中心に回転するとともに拡大（もしくは縮小）される.

def 積：拡大・縮小

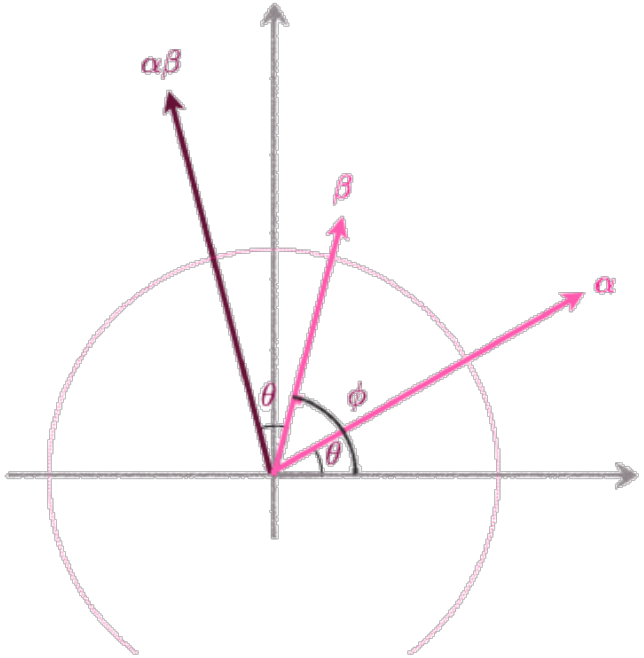
$$\alpha = a + bi, z = x + iy (\in \mathbb{C}), \psi(\mathrm{z}) = \alpha z$$

このとき，オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を用いると$z = re^{i\theta}, z' = r'e^{i\theta'}$として

$$zz' = re^{i\theta}\ r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$



複素数の基礎

一次変換3~逆数：反転~

def 逆数：反転

$$\psi(\mathrm{z})=\frac{1}{\mathrm{z}}$$

$z=x+iy$として， $\psi(\mathrm{z})=\frac{1}{\mathrm{z}}$で写してみる.

$\psi(\mathrm{z})=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2}$と計算できる.

ここで$\psi(\mathrm{z})=u(x,y)+iv(x,y)$とすると， $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}, iv(x,y)=i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$

ガウス平面上の２点$z_1=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}, z_2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$を結ぶ線分を$\psi(\mathrm{z})=\frac{1}{z}$で写すことを考える.

複素数の基礎

一次変換3~反転・鏡面変換~

ガウス平面上の2点$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$を結ぶ線分を$\psi(\mathrm{z}) = \frac{1}{z}$で写すことを考える(右図).　この2点の絶対値は$\frac{1}{2}$

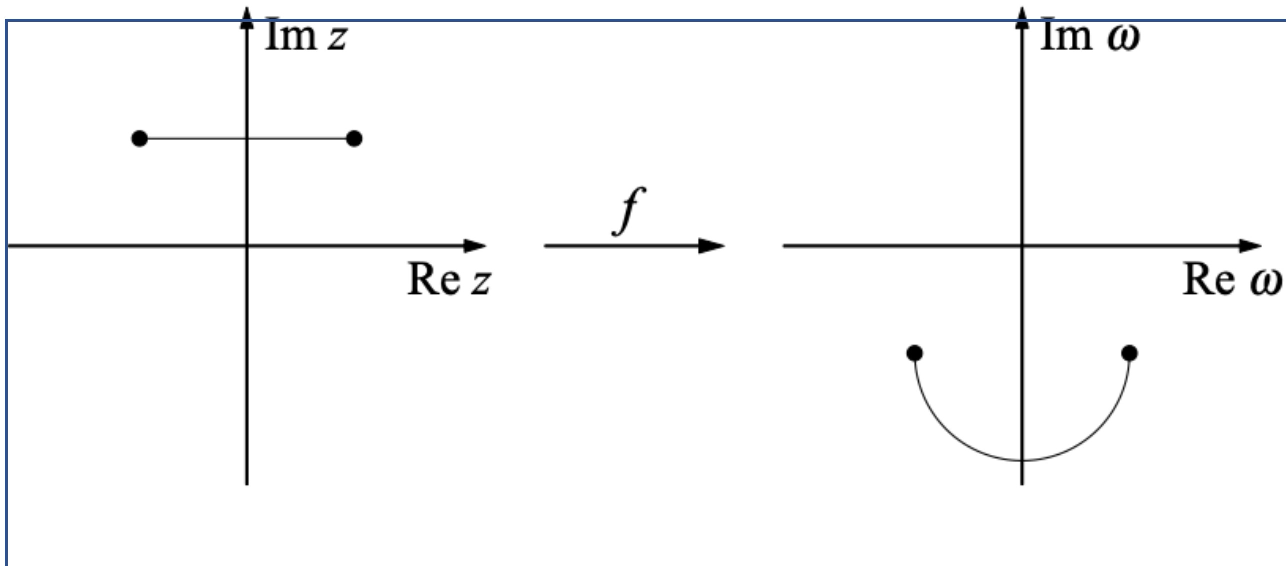
この線分は$y = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} < \mathrm{x} < \frac{1}{\sqrt{2}}$と表せられる.

これらの値を先ほどの$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+v^2}$にyを代入

すると，$u = \frac{x}{x^2+\frac{1}{2}}, v = \frac{-1}{\sqrt{2}(x^2+\frac{1}{2})}$となる.

これら点u,vを変形すると

$u^2 + \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$：円の方程式



複素数の基礎

一次分数変換1~式・合成~

fractional linear transformation : FLT

def 1.8 一次分数変換

複素数の平行移動・回転・拡大の全てを表せる最強の形.

メビウス変換ともいう.

$$\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

これ以降，2次の一次分数変換全体の集合を一次分数変換群といい，
<u>$PSL(2; \mathbb{C})$</u>と表記する

複素数の基礎

一次分数変換2~計算してみる~

def 1.8 一次分数変換

複素数の平行移動・回転・拡大の全てを表せる最強の形.

メビウス変換ともいう.

$\Phi_1(z) = z + \frac{c}{d}, \Phi_2(z) = z\,\frac{(bc-ad)}{c^2}, \Phi_3(z) = \frac{1}{z}$に対して $\Phi_1(\Phi_2(\Phi_3(z)))$を計算

順に平行移動, 拡大・回転, 反転を表す一次変換である.

一次分数変換3~PSL(2 ;C)の合成~

lem1.9

$z \in \mathbb{C}, \Phi_1, \Phi_2 \in PSL(2;\mathbb{C})$に対して$\Phi_1(\Phi_2(z))$という合成変換を考える．この時，一次分数変換の合成変換も一次分数変換となる．

Φ_1, Φ_2 …とおいてゴリ押し計算をする

一次分数変換4~PSL(2 ;C)の合成~

【実際に手を動かす】

$x, y \in \mathbb{R}, z = x + iy,$

$\Phi_1 = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \Phi_2 = \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$ に対して$\Phi_1(\Phi_2(z))$を計算する

複素数の基礎

一次分数変換5~PSL(２;C)の合成~

【実行後】

$$\Phi_1(\Phi_2(z)) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}$$

何かに似てる気がする…

複素数の基礎

一次分数変換5~PSL(2 ;C)の合成~

【実行後】

$$\Phi_1(\Phi_2(z)) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}$$

何かに似てる気がする…

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

PSLと2次行列の積を何とかして繋げたい

次の目標

一次分数変換と2次行列の積を同一視したい

結果から書くと

- リーマン曲面（拡張複素数という世界）
- 群論

の2つを用いれば，一時分数変換と2次行列を「ほぼ」同じものであるとみなせる．

まずはリーマン曲面を会得するための準備として拡張複素数をやる．

拡張複素数$\mathbb{C}_\infty$ *extended complex*

「複素数全体の集合$\mathbb{C}$」と「∞（という「記号」）」で書かれる元（実数での∞の記号の意味とは少し違う）の

和集合「$\{\mathbb{C}\} \cup \{\infty\}$」を拡張複素数といい，$\mathbb{C}_\infty$と表記する．

既存の複素数に加えて次の４つの式を新たに定義する．

$$\forall z \in \mathbb{C}_\infty\text{に対して}\begin{cases} \boxed{\dfrac{z}{\infty} = 0} \\ \boxed{\dfrac{z}{0} = \infty} \\ \boxed{\dfrac{0}{\infty} = 0} \\ \boxed{\dfrac{\infty}{0} = \infty} \end{cases}\left(\frac{0}{0}\text{や}\frac{\infty}{\infty}\text{はない}\right)$$

これの新たに定義した式一次分数変換に対応する

拡張複素数$\mathbb{C}_\infty$での一次分数変換

$$\Phi \in PSL(2;\mathbb{C}), \Phi: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{for } (z \neq \infty, cz+d \neq 0): general \\ \boxed{\infty \quad \text{for } (z \neq \infty, cz+d = 0): \dfrac{z}{0}} \\ \boxed{\dfrac{a}{c} \quad \text{for } (z = \infty, a, c \neq 0): \text{一般的な極限}} \\ \boxed{\infty \quad \text{for } (z = \infty, a \neq 0, c = 0): \dfrac{\infty}{0}} \\ \boxed{0 \quad \text{for } (z = \infty, a = 0, c \neq 0): \dfrac{0}{\infty}} \end{cases}$$

分子・分母が両方 0 の場合

lem 1.10 分子と分母が 0 の場合の同値条件

$\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$の分子・分母が両方 0 の場合

i. $az + b = cz + d = 0$ である複素数zが存在

ii. $\Leftrightarrow ad - bc = 0$：こちらは議論する

(十分性$\Longrightarrow$)

行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$を考える．上のiが成立するなら，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$である

両辺に$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$を左からかけて行列の積を計算すると

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって$ad - bc = 0$が示された

分子・分母が両方０の場合

(必要性⟸)

$ad - bc = 0$とする（¬(a = c = 0)）

$a \neq 0$のとして$z = -\frac{b}{a}$とおくと，

$$\begin{cases} az + b = 0 \\ cz + d = d - \dfrac{cb}{a} = \dfrac{ad - bc}{a} = 0 \end{cases}$$

よりiが成立.

ちなみに$c \neq 0$の時は$z = -\frac{d}{c}$で成立.

2. リーマン球面（PSLと行列の積を同一視するための材料１）
    1. 必要な用語（小円・大円・北極点）
    2. 立体投影で用いる写像Πを知る
    3. 球面から球面に写す写像$\widetilde{\Phi}: S^2 \to S^2$を考える
    4. 写像$\widetilde{\Phi}$連続性を示し，$\widetilde{\Phi}$が実用的な写像であることを確認する.

リーマン球面

小円 *small circle* ・大円 *orthodrome, Riemann circle*

def 小円

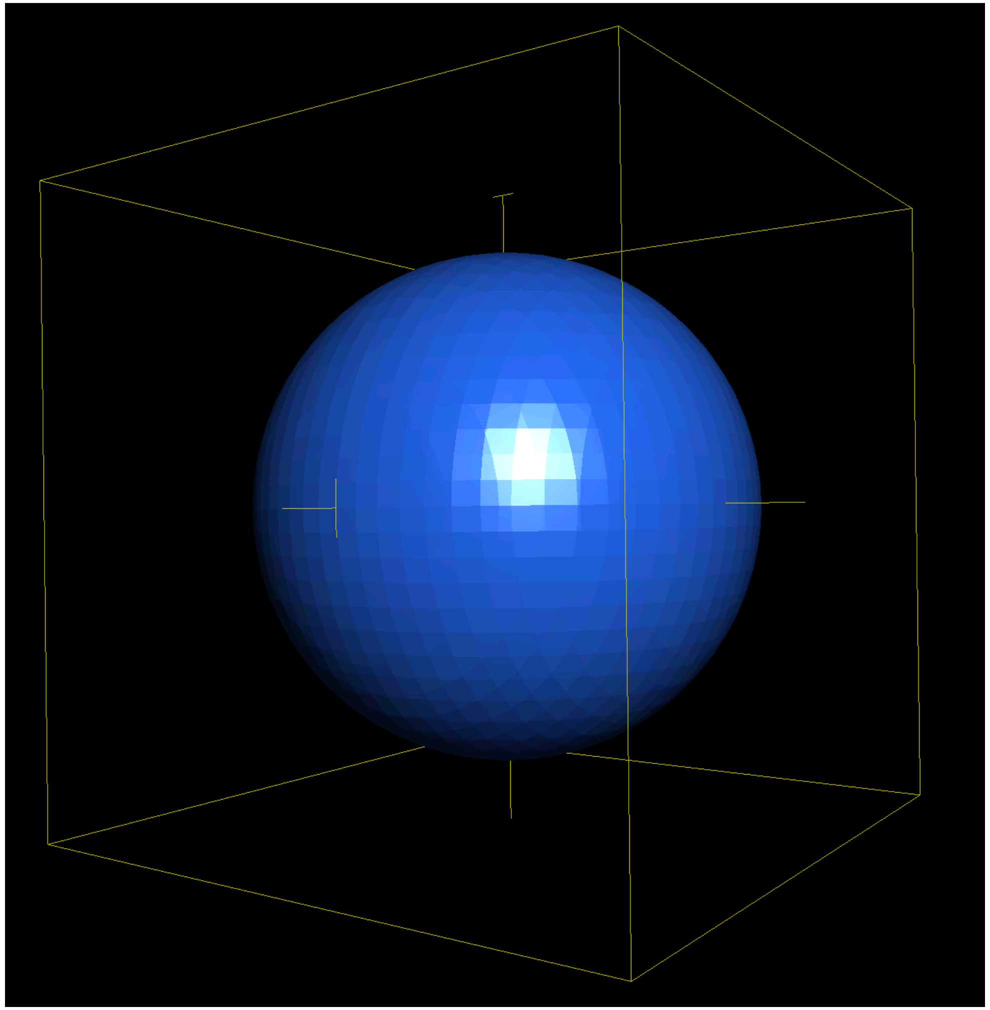
球面($\in S^2$) をナイフで切り分けた時に見られる断面の円のこと.
たくさんある．無限にある.

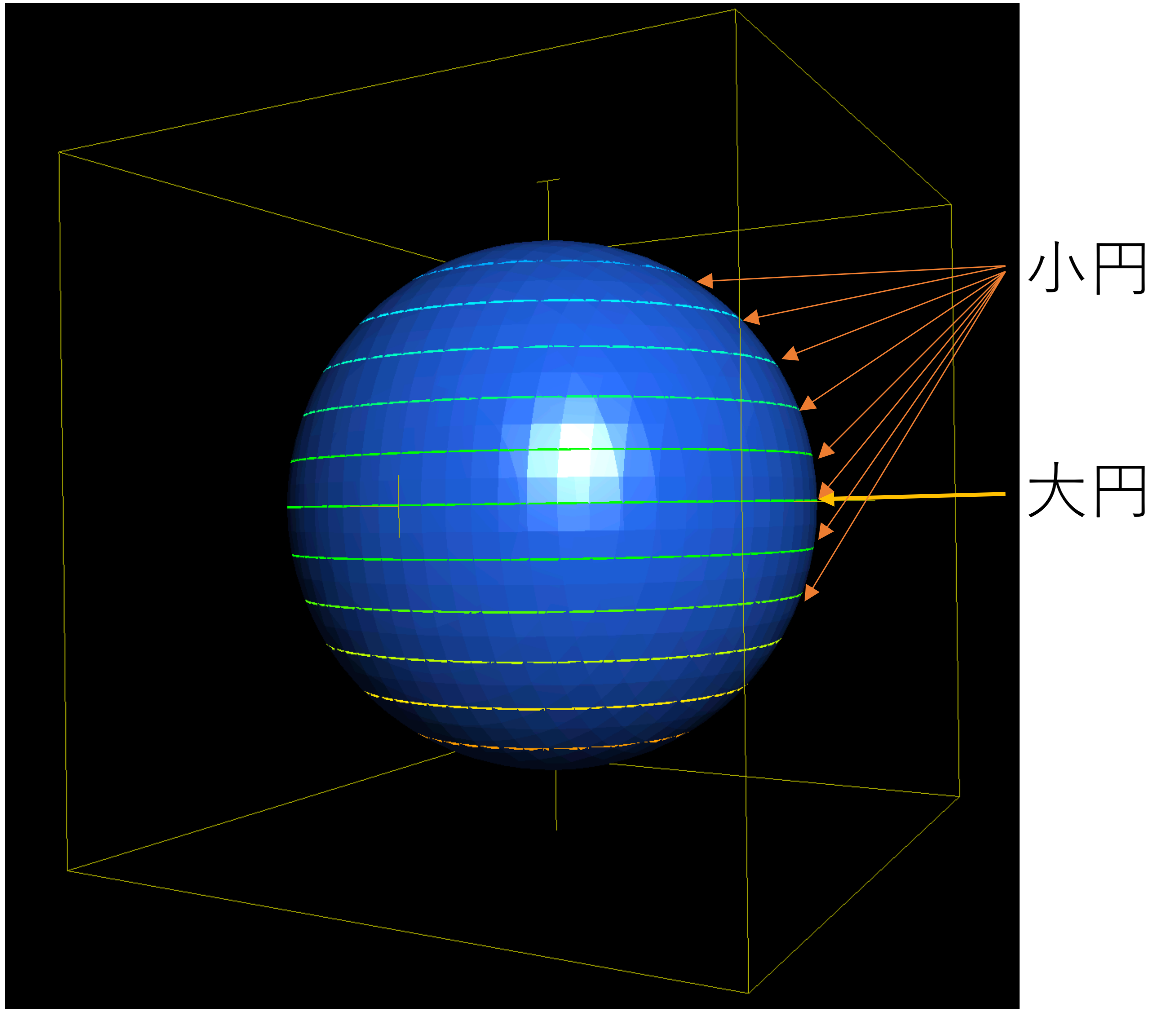
def 大円

小円のうち，球の原点を通るもの（もっとも断面が大きい小円.
つまり大円の半径は球の半径と等しい）．リーマン円ともいう.

リーマン球面

小円・大円



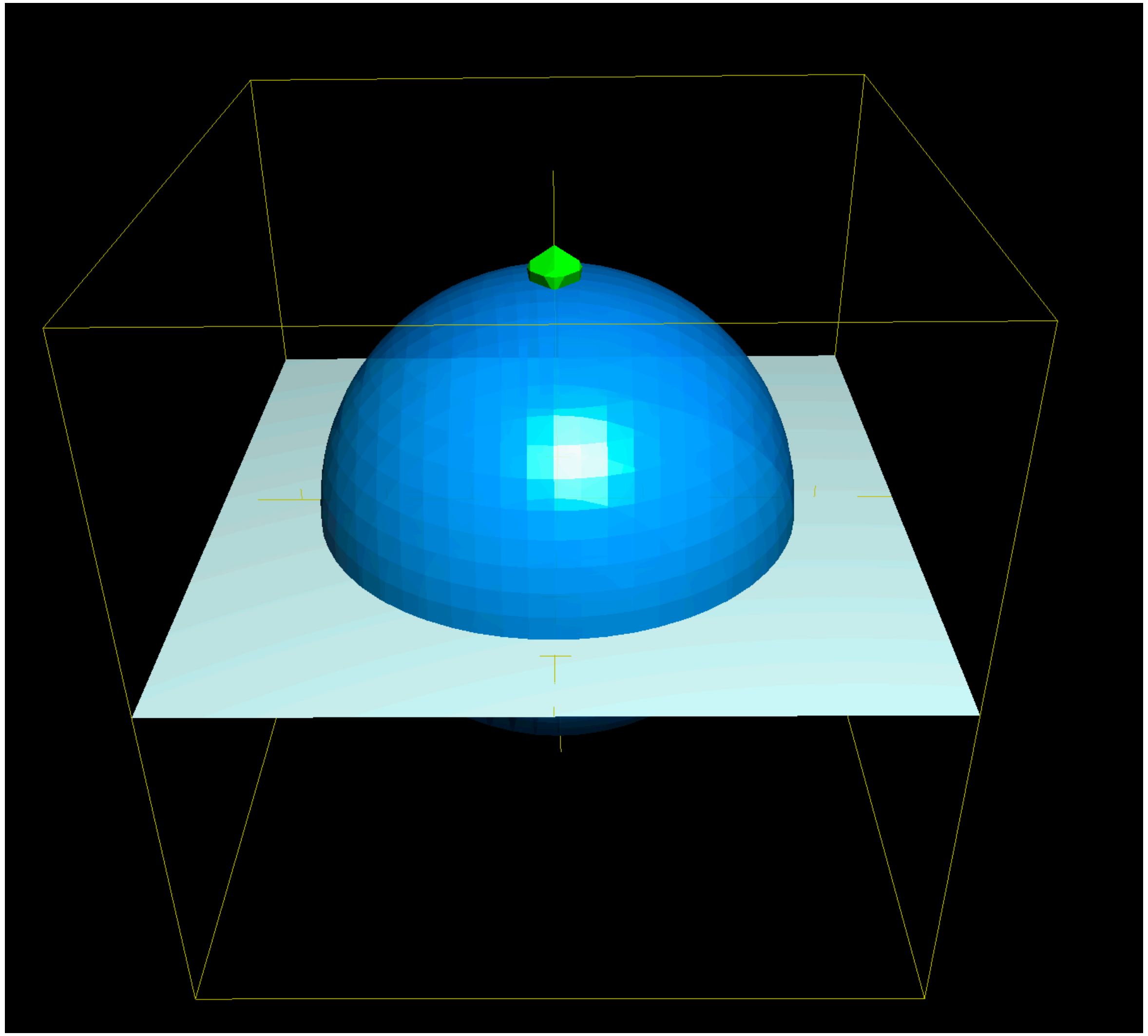


リーマン球面

北極点 *North Pole*

中心を原点にとったS^2の単位球（半径１の球）を考える．

点N(0, 0, 1)にとる．この点Nを北極点という．



リーマン球面

立体投影Π_{v0} *stereographic projection*

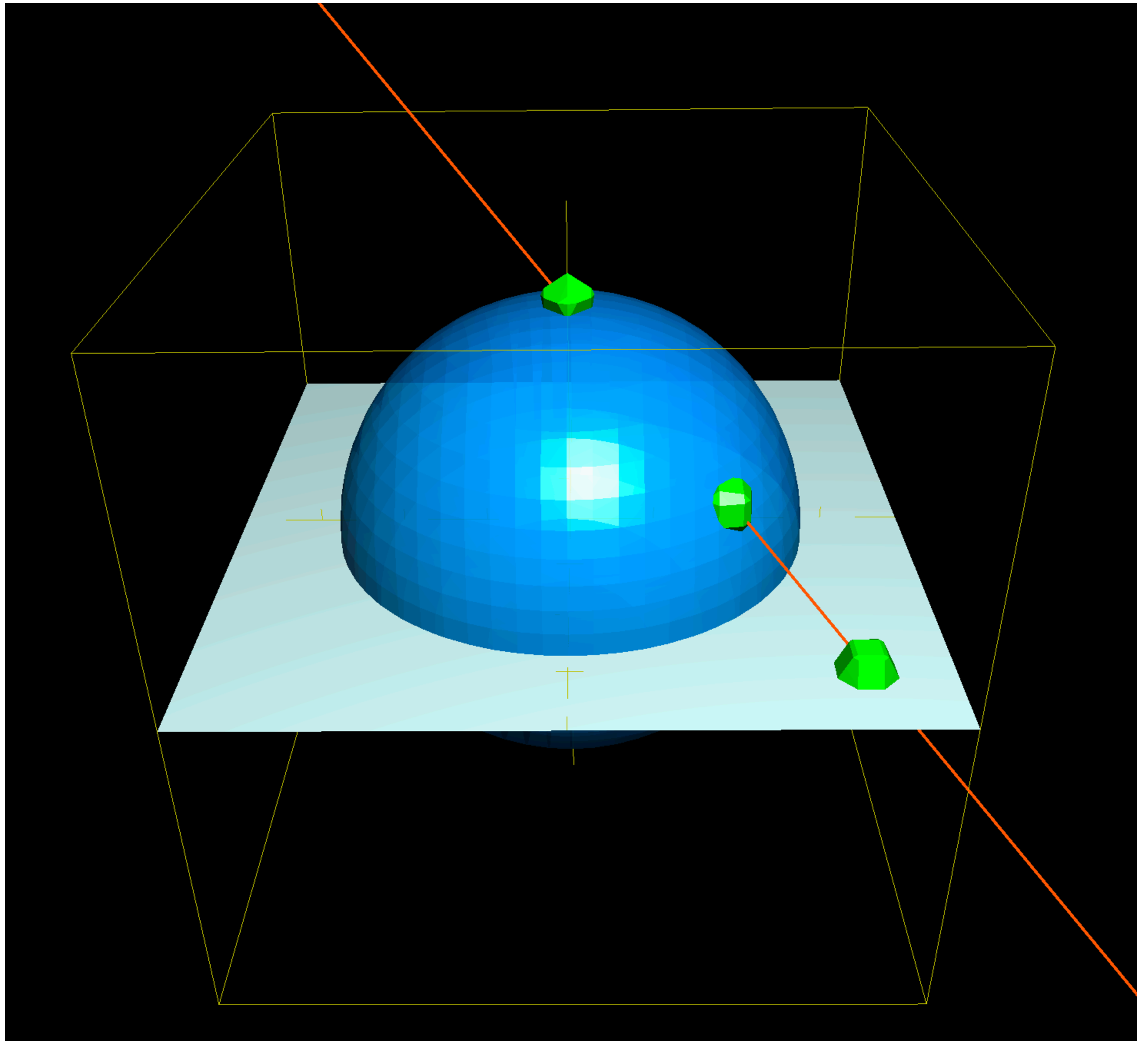
球面S^2をガウス平面$\mathbb{C}$に配置し，
球の中心を原点と重ねる．

北極点Nと任意の点$\mathrm{P} \in S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$
を通る直線で結ぶ．

すると点Pを点$\Pi_{v0}(P) \in \mathbb{C}$に写
す写像を定義できる．

$$\Pi_{v0}: S^2 \setminus \{\mathrm{N}\} \to \mathbb{C}$$

ちなみに写像Π_{v0}は全単射．



写像 Π_{v0} の全単射性を示す手順

手順

1. 任意の平面の点$Q \in \mathbb{C}$をとる
2. 逆像${\Pi_{v0}}^{-1}$を考える
3. 定義から計算して逆写像であることを確認する

ちなみに

(写像fが全単射である)⟺(fの逆写像が存在する)

写像Π

登場人物：「拡張複素数$\mathbb{C}_{\infty}$」と「北極点N」「写像Π_{v0}」

写像Π_{v0}では北極点Nから写す像を定義していない.
ここで，北極点Nを∞（ただの記号）に写すとすると,

$$\Pi : S^2 \to \mathbb{C}_{\infty}$$

と拡張できる.

全単射のΠ_{v0}に全く新しい対応を拡張したので，Πが全単射であることは明らかである.

球面から球面への写像$\tilde{\Phi}$

def 球面からそれ自身への写像

「写像$\Pi : S^2 \to \mathbb{C}_\infty$」「写像$\Phi: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$」

$\tilde{\Phi}(P) \coloneqq \Pi^{-1}\left(\Phi(\Pi(P))\right)$（Pはリーマン球面上の任意の点）

- Πで点$P \in S^2$を$\mathbb{C}_\infty$の世界へ写す
- Φで変換（平行移動，回転拡大，反転）を行う． $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$
- Π^{-1}で$\mathbb{C}_\infty$の世界からS^2へ戻す

何が嬉しい？

→球上の点を（一度$\mathbb{C}_\infty$に写すことで一）次分数変換を用いて変換できる！！

写像$\widetilde{\Phi}$の連続性*continuous*

lem 1.16 $\widetilde{\Phi}$の連続性

$$\lim_{i\to\infty}\widetilde{\Phi}(P_i)=\widetilde{\Phi}\left(\lim_{i\to\infty}P_i\right)$$

を示す

連続写像を合成すると連続写像という命題（証明略）を用いる.

$\Phi\colon \mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty, \Pi\colon S^2\to\mathbb{C}_\infty, \Pi^{-1}\colon \mathbb{C}_\infty\to S^2$は連続写像なので自動的に成り立つ.