群論の気持ち

Group theory

一般的な人の数学に対するイメージ

- 足し算とか掛け算とかの計算で数字をいじるんでしょう？
- とりあえず微分・積分してイイ気分になるんでしょう？

これらは「対象（数）自体に着目して計算」しているだけ.

新しい方向から考える

- 「対象に着目して計算」する方針から「対象に対する計算自体に着目」する方針に転換してみよう．
- 計算自体の関係を考えるので，対象は数である必要はなくなる．現代数学では基本的に集合を対象とする．
- 計算自体の関係とはなんぞや？
  →計算（演算，写像）がどのような構造をしているか．

- 演算の(代数的)構造を「群（もしくは抽象群）」という．

群とは？

- 集合はモノを集めただけ．
- 集合の中でも，共通の演算ができるものを集めた集合を考える．

- この集合と演算を合わせたものを群という．

群を考えるにあたって

- ２つのものを用意する
  - 空間（集合）
  - 演算（写像）

空間？

- 空間とは？
  - 演算する（写像で飛ばす）集合のこと
  - 共通の性質を持てる元が定義できる集合であればなんでもいい.
  - （例）二次元平面（2次元ユークリッド空間という）
  - （例）2次平方行列全体の集合

演算？

- 演算とは？
  - 前後で性質が変わらないように写すこと．写像.
  - （例）$\pi/4$回転しても4辺の長さや頂点数は不変
  - （例）2次行列の{和,積}は2次行列になる.

群の定義を見ていく

- 群の定義
- 群の派生
- 群の例： $GL(n;\mathbb{C})$
- 部分群
  - 定義・性質
  - 例： $O(n)$
- 群の作用
  - 定義
  - 例：

群の定義

1.閉包 *closure*

$$\forall a, b \in G, ab \in G$$

2.結合法則 *associativity*

$$\forall a, \forall b, \forall c \in G, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

3.単位元の存在 *identity element*

$$\exists e \in G, \forall a \in G, a \cdot e = e \cdot a = a$$

4.逆元の存在 *inverse element*

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

群の派生

- （閉包・結合則）半群
- （＋単位元）モノイド
- （＋逆元）群
- （＋可換）アーベル群

群の例 $\sim GL(n; \mathbb{C})\sim$

$GL(n; \mathbb{C})$： n次複素正則行列全体の集合

def $\forall A, B \in GL(n; \mathbb{C}), A \cdot B.$　この時，組$(GL(n; \mathbb{C}),\ \cdot\ )$は群をなす.

【群である確認】

- n次複素正則行列の積はn次複素正則行列
- 結合則は行列の性質より成立
- 単位元は単位行列
- 逆元は逆行列

以上より，　$(GL(n; \mathbb{C}),\ \cdot\ )$は群をなす.

部分群

- 群の一部分を取り出して群となるもの.
- 親となる群の構造を部分的に引き継ぐ.

def

$$\mathrm{G}, \mathrm{H}: \text{集合},\ \mathrm{H} \subset \mathrm{G}$$
$$(\forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{H} \Rightarrow \mathrm{ab} \in \mathrm{H})\text{かつ}(\forall \mathrm{a} \in \mathrm{H}, \exists a^{-1} \in \mathrm{H}\ s.t.\ a^{-1}: \text{逆元})$$

HがGの部分集合で，Hが演算で閉じていて，かつ，任意の元に対して逆元が存在するならば，HはGの部分群という.

部分群の性質

$$(G,\ ・\ ): 集合, H \subset G: 部分集合$$

i. $h_1, h_2 \in H \Longrightarrow h_1 ・ h_2 \in H$
演算が閉じている

ii. $e \in G$ ： 単位元, $e \in H$
単位元はG,H共通

iii. $h \in H, h^{-1} \in H\ s.t.\ h^{-1}$: 逆元
逆元が存在する

部分群の例~O(n) ~ *orthogonal group*

$\mathrm{O}(\mathrm{n};\mathbb{C})$：n次複素直交行列全体の集合

def

$\forall \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{GL}(\mathrm{n};\mathbb{C}), \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}.$　この時，組$(\mathrm{GL}(\mathrm{n};\mathbb{C}),\ \cdot\ )$は群をなす.

【部分群である確認】

- $\mathrm{O}(\mathrm{n};\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(\mathrm{n};\mathbb{C})$
- 直交行列には逆元（＝逆行列）が存在する

これらより，$(\mathrm{GL}(\mathrm{n};\mathbb{C}),\ \cdot\ )$は群をなすことがわかる.

特殊線型群~ $SL(n;\mathbb{C})$ ~*special linear group*

$SL(n;\mathbb{C})$：行列式が１の複素平方行列全体

def

$\forall A, B \in SL(n;\mathbb{C}), A \cdot B.$　この時，組$(SL(n;\mathbb{C}),\ ・)$は群をなす.

これが群であるためには

- 特殊線型群の２つの行列の積の行列式も１（1*1=1）
- 単位行列は特殊線型群の元である．（det I ＝ 1）
- 特殊線型群の行列の逆行列の行列式も１

を満たす必要がある

群の種類（クラス）

構造で分けた際に群の元（＝写像）の性質で分けることができる

- 置換群：任意の集合Aから集合Aへの全単射
- 行列群：正則行列を集めた群
- 変換群：集合Aから集合Aへの構造を保つ写像全体の集合.
  置換群と行列群は変換群の特別な場合
- 位相群・代数群：変換群の構造に連続性を加えたもの

「作用」というもので群を分類している

群の作用

- 群Gの元が集合Aから集合Aへと写す写像となる時「群Gの集合Aへの作用」という.
- 集合に対して群の性質を適用させている
- （例）ユークリッド合同変換群
  - ユークリッド合同変換群の，二次元ユークリッド平面上のすべての点の集合への作用
  - 正方形は回転（や拡大，回転，反転）しても正方形

群の作用の定義

G：群，X：集合，・：G×XからXへの写像
写像・が

- $\forall g_1, \forall g_2 \in G, \forall x \in X,\ (g_1 \cdot g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$
  合成してから飛ばしても，2回飛ばしても同じ
- $\mathrm{e} \in G$:単位元, $\forall x \in X, \mathrm{e} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}$
  単位元の存在

の2つを満たすとき，写像・を「群GのXへの作用」という．

群の作用の例

X: $\mathbb{C}^n$(n次元複素ベクトル空間), $v \in \mathrm{X}$, $A \in GL(n;\mathbb{C})$, $\mathrm{A} \cdot v = \mathrm{A}v$
とした時，写像・を$(\mathrm{GL}(\mathrm{n};\mathbb{C}),\cdot)$のXへの作用と定義できる．

【群の作用であることを確認する】

1. $\mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} \cdot \upsilon) = \mathrm{A}(\mathrm{B}\upsilon) = (\mathrm{AB})\upsilon = (\mathrm{AB}) \cdot \upsilon$
   行列の結合則から
2. 単位元を単位行列とすれば明らか

２次元ユークリッド合同変換群*Euclidean group*

A,B:2次直交行列， v,w∈R^2

(A,v)・(B,w)=(AB,Av+w)
を２次元ユークリッド合同変換群(E(2),・)という

- A,B,C(:直交行列)とu,v,w∈R^2を用いて結合則が成立する
- 単位元が(I,0)である
- 逆元が$(A^{-1}, -A^{-1}v)$である

合同変換群の由来

lem

P,Q: 平面状の点，(A,v)∈E(2)

(PとQのユークリッド距離)=((A,v)•PとA,v)•Qの距離に等しい)

ユークリッド距離

いわゆる一般的に求める距離.

点(x1,y1)と点(x2,y2)のときの

ユークリッド距離は√￣{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}

つまり，変換してもユークリッド距離が保たれる変換（等長変換）ということ

同型とはなんぞや

群が２つあったときに，それぞれの群が同じ「構造」を持っていること．命題でいう同値.

元（要素）が完全に異なり演算も全く違う場合でも，

- 元の数（要素数）が等しい
- 演算の振る舞いが等しい

場合は構造が同じである．このことを同型であるという.

具体例を出してみる

同型とはなんぞや

1つ目の群を定義する

$G = \{0, 1, 2\}$という３で割った時のあまりの集合に対して
「１足して３で割ってあまりを求める」という演算f

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \\ f(2) = 0 \\ \end{cases}$$

を定義する

同型とはなんぞや

2つ目の群を定義する

$H = \{(\text{グー}), (\text{チョキー}), (\text{パー})\}$というじゃんけんの手の集合に対して

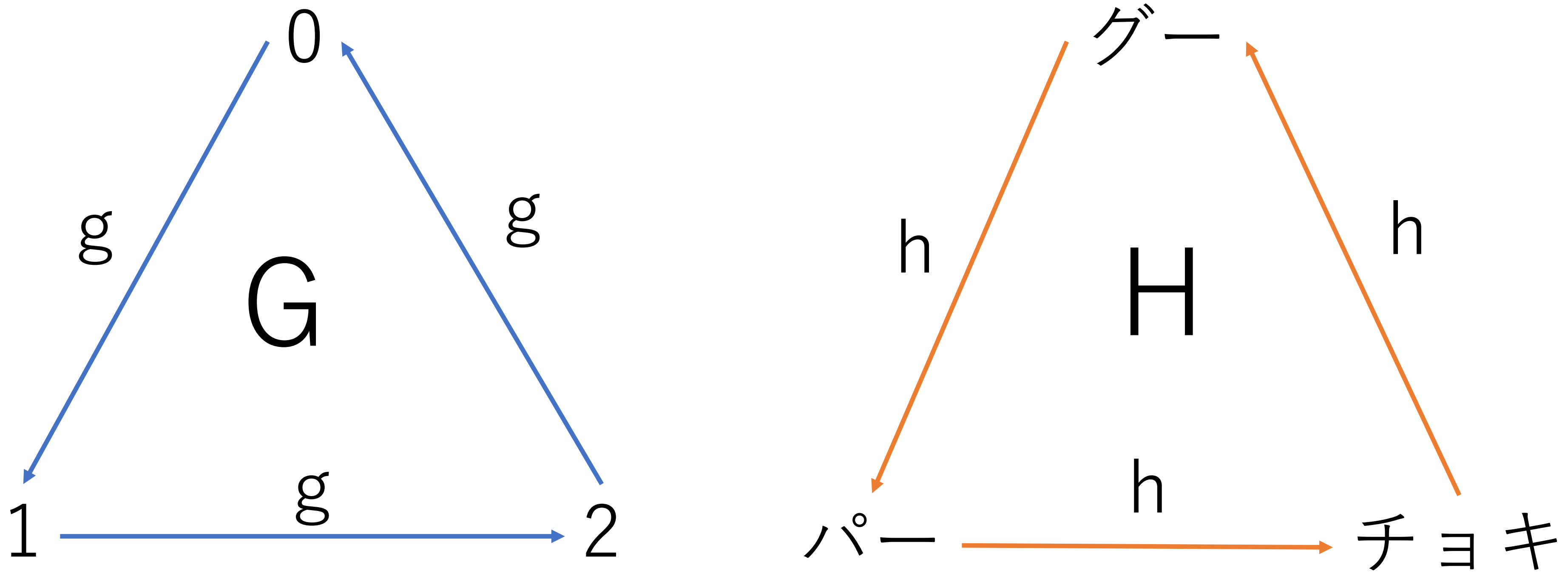
「とある手に勝つための手を求める」という演算g

$$\begin{cases} g(\text{グー}) = (\text{パー}) \\ g(\text{パー}) = (\text{チョキ}) \\ g(\text{チョキ}) = (\text{グー}) \end{cases}$$

を定義する

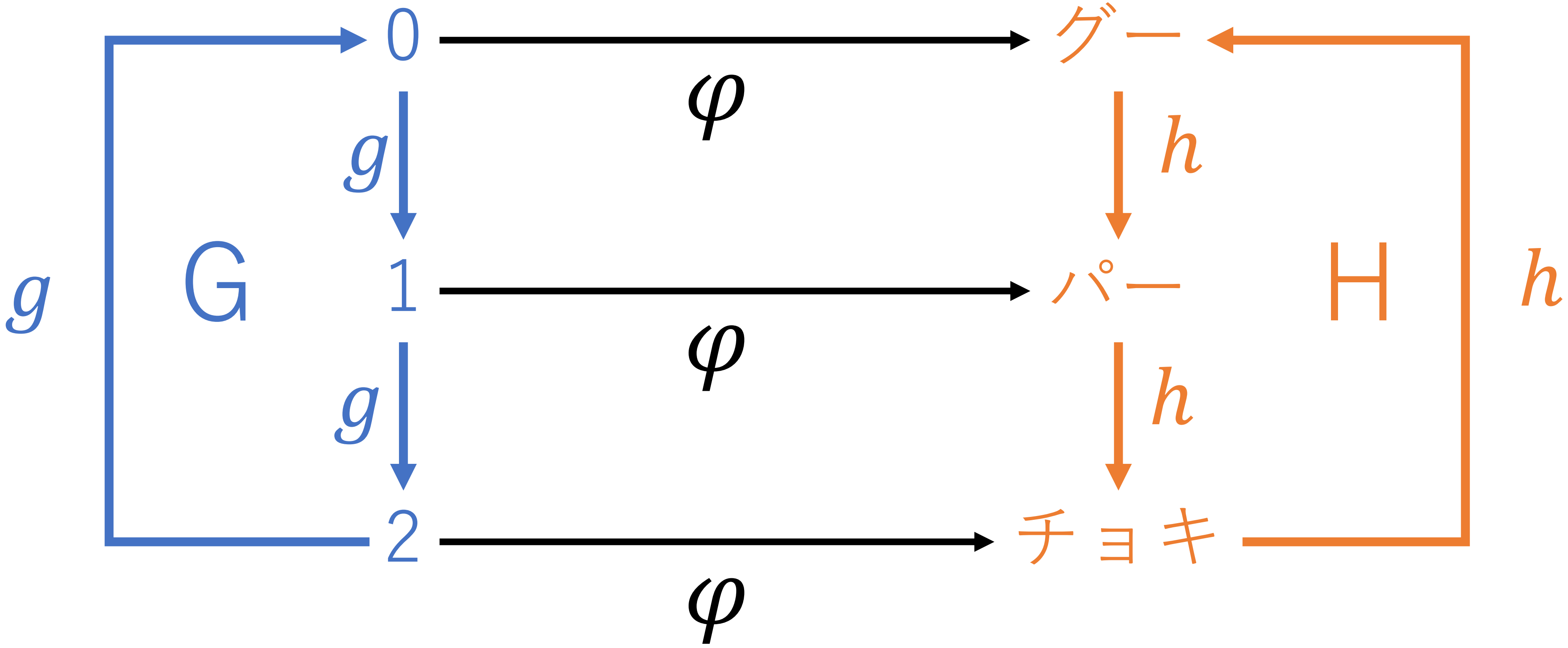
同型とはなんぞや

2つの群GとHを比較する



集合の元も演算も全然違うけど，構造は同じ！
これを同型という．

準同型写像φ：群から群への写像



写像 ϕ は準同型写像

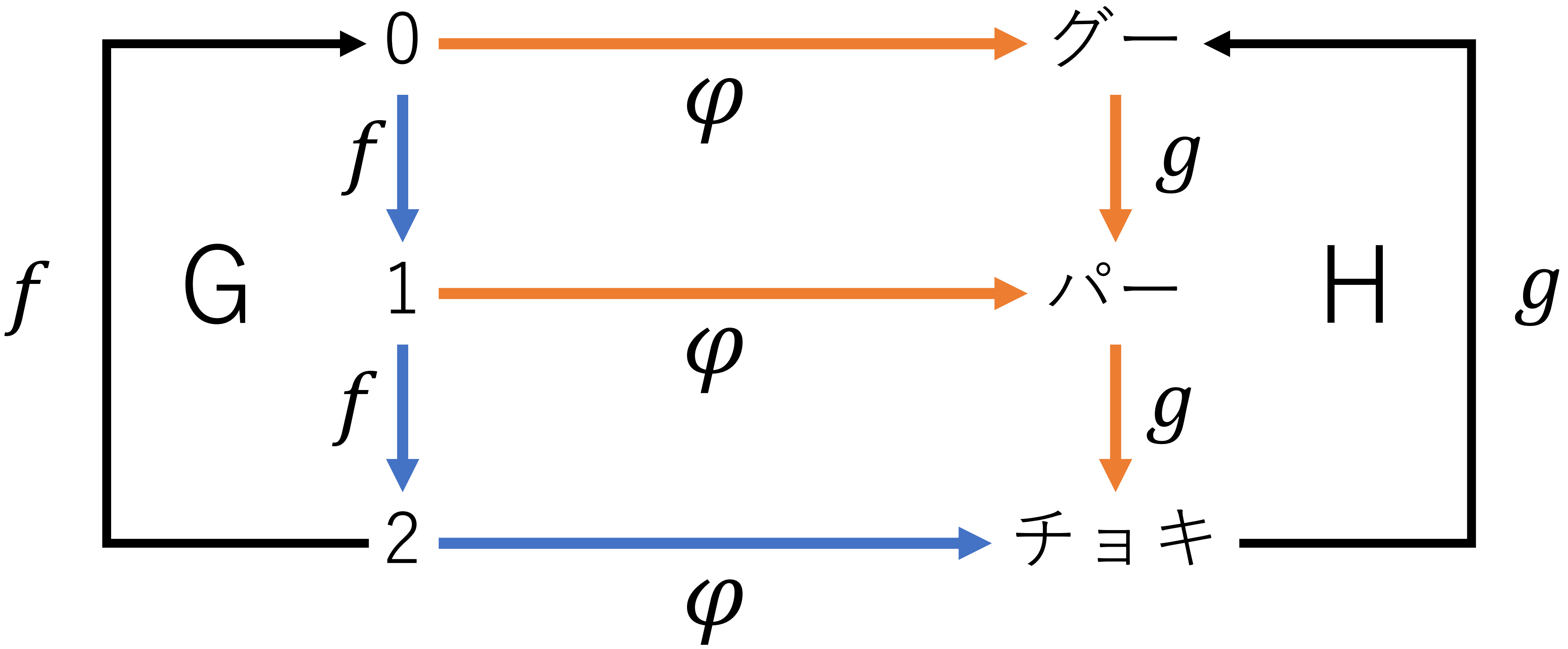
Lem 1.43

$\varphi: SL(2;\mathbb{C}) \to PSL(2;\mathbb{C})$:準同型写像.

準同型写像の定義

$$\mathrm{G}, \mathrm{H}: \mathrm{group}, \varphi: \mathrm{G} \to \mathrm{H}$$
$$\forall g_1, g_2 \in \mathrm{G}, \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

例で定義を確認：０からチョキへ



同型写像

Def 1.41 同型写像

準同型写像＋全単射

同型写像の性質

- G,H:群,　ϕ:G→H：同型写像

- 同型写像ϕはGの単位元をHの単位元に写す
- $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$