实分析0421

2020年4月21日 9:41

$F\in BV([a,b])$：$\exists M>0$ s.t. $\forall\, a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$,

$$\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|\le M.$$

$P_F(a,x)$, $N_F(a,x)$, $T_F(a,b)$. 正、负、总变差.

$$\left.\begin{aligned}&F(x)=(F(a)+P_F(a,x))-N_F(a,x)\\&T_F(a,x)=P_F(a,x)+N_F(a,x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&P_F(a,x)=\tfrac12(F(x)-F(a)+T_F(a,x))\\&N_F(a,x)=\tfrac12(T_F(a,x)-F(x)+F(a)).\end{aligned}$$

$F\in BV([a,b])$, F 连续 则 $T_F(a,x)$ 关于 x 是连续函数.

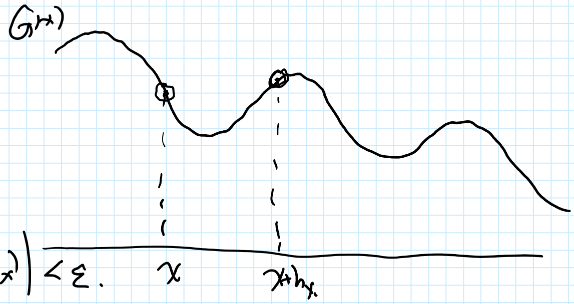
定理3.4. 若 F 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 F 几乎处处可微.

· 证明 $\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ 存在, a.e. $x\in[a,b]$.

· 先假设 F 是连续且单调递增的.

引理3.5. 设 G 是 R 上的实值连续函数. 令 $E=\{x\mid G(x+h)>G(x)\ \text{for}\ h=h_x>0\}$.
若 E 非空，则 E 一定是开集，且它可以写成可数个开区间的不交并. $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$
若 (a_k,b_k) 是这个并中的某个有限区间，则 $G(a_k)=G(b_k)$.

证明：若 E 非空. 设 $x\in E$. $\exists h_x>0$ s.t.



$G(x+h)>G(x)$. 由 G 连续. $\forall\varepsilon>0$,

$\exists\delta$, s.t. $|y-x|<\delta$,

$|G(x)-G(y)|<\varepsilon$, $|G(x+h_x)-G(y+h_x)|<\varepsilon$.

$|(y+h_x)-(x+h_x)|<\delta$

取 $\varepsilon=\frac14(G(x+h_x)-G(x))$，则

$G(y+h)>G(x+h)-\varepsilon$,

$G(y)<G(x)+\varepsilon$.

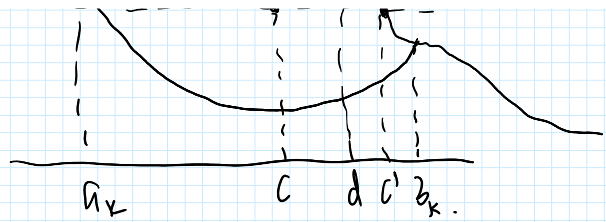
故 $G(y+h)-G(y)>G(x+h)-G(x)-2\varepsilon=\frac12(G(x+h)-G(x))>0$.

故 $B(x,\delta)\subset E$. 因此 E 是开集. 设 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$.

claim $G(a_k)=G(b_k)$.

由 $a_k\notin E$, 故 $G(a_k)\ge G(b_k)$.

由 $a_k \notin E$，故 $G(a_k) \ge G(b_k)$.



若 $G(b_k) < G(a_k)$. 由于 $b_k \notin E$.

故 $G(b_k) \ge G(x)$, $\forall x > b_k$.

由介值定理，存在 $c \in (a_k, b_k)$, s.t. $G(c) = \frac{G(a_k)+G(b_k)}{2}$.

{设 c 是最右边的点, s.t. $G(c) = \frac{G(a_k)+G(b_k)}{2}$}.

由于 $c \in (a_k, b_k) \subset E$. 故存在 $c < d < b_k$, s.t. $G(d) > G(c)$

再由介值定理, $\exists\, d < c' < b_k$. s.t. $G(c') = \frac{G(a_k)+G(b_k)}{2}$.

这与 c 是最右边的点矛盾!

推论3.6. 令 G 是 $[a,b]$ 上的实值、连续函数. 若 $E = \{x \in (a,b) \mid G(x+h) > G(x) \text{ for some } h = h_x > 0\}$. 则 E 或者是空集, 或者是开集. 若 E 是开集, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$,

且 $G(a_k) = G(b_k)$ 除非当 $a_k = a$ 时, $G(a_k) \le G(b_k)$.

Proof of Thm 3.4. 令 $\Delta_h F(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$, 定义四个 Dini 导数

$$D^+F(x) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \Delta_h F(x), \quad D_+F(x) = \liminf_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \Delta_h F(x).$$

$$D^-F(x) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \Delta_h F(x), \quad D_-F(x) = \liminf_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \Delta_h F(x).$$

要证 $\lim_{h \to 0} \Delta_h F(x)$ 存在 a.e.

显然有 $D_+F(x) \le D^+F(x)$, $D_-F(x) \le D^-F(x)$.

若 F 单增, 连续, 则 $-F(-x)$ 也是单增, 连续. 且

$$D^+(-F(-x)) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{-F(-(x+h)) + F(-x)}{h} = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{F(-x+h) - F(-x)}{h}$$

$$= (D^-F)(-x).$$

类似地, $D_-(-F(-x)) = (D_+F)(-x)$.

若 $D^+F(x) \le D_-F(x)$, a.e. $x \in [a,b]$, 则 $D^-F(-x) \le D_+F(-x)$, a.e.

$D_+F(x) \le D^+F(x) \le D_-F(x) \le D^-F(x) \le D_+F(x)$. a.e.

于是, 只要证明

① $D^+F(x) < +\infty$. a.e.

于是，只要证明 $D^+F(x)\le D_-F(x)$, a.e.

① $D^+F(x)<+\infty$, a.e.

② $D^+F(x)\le D_-F(x)$, a.e.

先证①：令 $E_\gamma=\{x \mid D^+F(x)>\gamma\}$. 则 E_γ 可测（引理）.

$\forall x\in E_\gamma$, $\exists h=h_x>0$, s.t. $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}>\gamma \iff F(x+h)-F(x)>\gamma(x+h-x)$

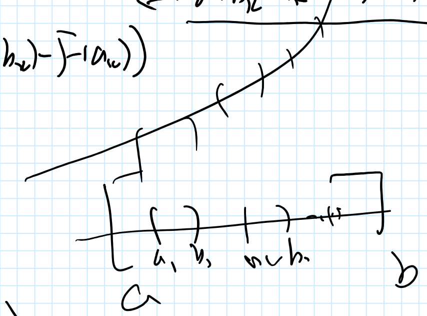
令 $G(x)=F(x)-\gamma x$，则 $G(x+h)>G(x)$.

由推论3.6. $E_\gamma\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$，且 $G(a_k)\le G(b_k) \iff F(a_k)-\gamma a_k\le F(b_k)-\gamma b_k$

$\iff \gamma(b_k-a_k)\le F(b_k)-F(a_k)$.

因此，$m(E_\gamma)\le\sum_k(b_k-a_k)\le\sum_k\frac{1}{\gamma}(F(b_k)-F(a_k))$

$\le\frac{1}{\gamma}(F(b)-F(a))$



由于 $\{D^+F(x)=\infty\}\subset\{D^+F(x)>\gamma\}$, $\forall\gamma$.

故 $m(\{D^+F(x)=+\infty\})\le\frac{1}{\gamma}(F(b)-F(a))\longrightarrow0$, $\gamma\to\infty$

再证明②：要证 $\{x: D^+F(x)>D_-F(x)\}$ 是零测集.

固定 $R>r$，令 $E=\{x\in[a,b] \mid D^+F(x)>R,\ r>D_-F(x)\}$，只要证明 E 是零测集.

否则，$m(E)>0$，则存在开集 $U\supset E$, s.t. $m(U)<m(E)\frac{R}{r}$.

设 $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，$I_n$ 不交的开区间.

若 $D_-F(x)<r$. 则 $\exists h=h_x<0$, s.t. $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}<r$.

$\iff F(x+h)-F(x)>rh=r(x+h-x)$.

令 $G(x)=F(x)-rx$. 则 $G(x+h)>G(x)$.

在 I_n 上，对 $G(x)$ 应用 "rising sun"，$\bigcup(a_k,b_k)\subset I_n$

$G(a_k)\ge G(b_k)$.

即 $F(a_k)-ra_k\ge F(b_k)-rb_k$.

$\iff r(b_k-a_k)\ge F(b_k)-F(a_k)$.

在 (a_k,b_k) 上，若 $D^+F(x)>R$. $\exists h=h_x>0$, s.t. $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}>R$.

$\Leftrightarrow F(x+h)-F(x) > R(x+h-x)$.

令 $G(x)=F(x)-Rx$. 则 $G(x+h)>G(x)$. for $h=h_x>0$.

在 (a_k, b_k) 上对 $G(x)$ 用 rising sun 引理, 可得 $\bigcup_j (a_{kj}, b_{kj})$.

$$G(a_{kj}) \le G(b_{kj}) \Leftrightarrow F(a_{kj}) - R a_{kj} \le F(b_{kj}) - R b_{kj}$$

$$\Leftrightarrow \underline{R(b_{kj}-a_{kj}) \le F(b_{kj})-F(a_{kj})}.$$

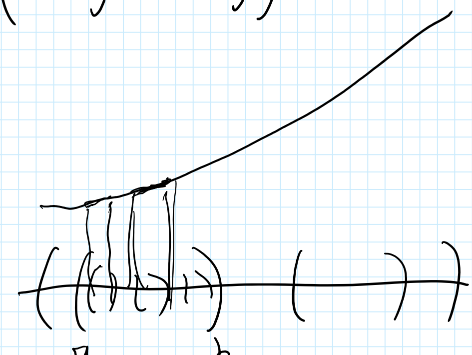
令 $O_n=\bigcup_{k,j=1}^{\infty} (a_{kj}, b_{kj})$, 则

$$\underline{m(O_n)} \le \sum_{k,j=1}^{\infty} \quad -a_{kj}) \le \frac{1}{R} \sum_{k,j=1}^{\infty}\left(F(b_{kj})-F(a_{kj})\right)$$

F 单增 $\le \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\left(F(b_k)-F(a_k)\right)$

$$\le \frac{r}{R}\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k).$$

$$\le \frac{r}{R} m(I_n)$$



由于 $E\cap I_n \subset O_n$. 且 $O_n \subset I_n$. 于是

$$m(E) \le \sum_n m(E\cap I_n) \le \sum_n m(O_n) \le \frac{r}{R}\sum_n m(I_n) \le \frac{r}{R} m(O) < m(E).$$

矛盾!

推论3.7. 若F单调递增, 连续, 则 $F'(x)$ 几乎处处存在, 并且 F' 可测, 非负.

且 $\int_a^b F'(x)dx \le F(b)-F(a)$.

证: 由Thm 3.4. 令 $G_n(x)=\frac{F(x+\frac{1}{n})-F(x)}{\frac{1}{n}}$. 则 $G_n(x)\to F'(x)$, a.e.

故 F' 非负, 可测.

由Fatou引理, $\int_a^b F'(x)dx \le \liminf_{n\to\infty}\int_a^b G_n(x)dx$.

而 $\int_a^b G_n(x)dx = \int_a^b \frac{F(x+\frac{1}{n})-F(x)}{\frac{1}{n}}dx = \frac{1}{\frac{1}{n}}\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}}F(x)dx - \int_a^b F(x)dx\right)$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}}\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}}F(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}}F(x)dx\right)$$

$\xrightarrow{n\to\infty} F(b)-F(a).$

F连续.

因此, $\int_a^b F'(x)dx \le F(b)-F(a).$

Rmk: 若F在$\mathbb{R}$上是有界函数, 则F'是可积的.

3.2. 绝对连续函数.

baby Vitali.

$B_1,\cdots,B_N.$

$B_{i_1},\cdots,B_{i_k}.$

①

② $m(\bigcup_{i=1}^N B_i) \le 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j})$

定义 (Vitali覆盖). 称由球所构成的集合$\mathcal{B}$是E的Vitali覆盖, 如果$\forall x\in E, \forall \eta>0,$ $\exists B\in\mathcal{B}$, s.t. $x\in B$. 且 $m(B)<\eta$.

引理3.9. 设E是有限测度集合. $\mathcal{B}$是E的Vitali覆盖. 则$\forall\delta>0$, 存在有限个球$B_1,\cdots,B_N\in\mathcal{B}$, 使得

① 它们彼此不交.

② $\sum_{i=1}^N |B_i| \ge m(E)-\delta.$

证明: ① 不妨设$m(E)>\delta$. 则由$m(E)<+\infty$, 知存在子集$E'\subset E$, s.t. $m(E')>\delta$. 由于$\mathcal{B}$覆盖E', 存在有限的子覆盖. 再由baby Vitali, $\exists B_1,\cdots,B_{N_1}$ 不交, 且

$$\sum_{i=1}^{N} m(B_i) > 3^{-d} m(E') > \gamma\delta, \quad \gamma=3^{-d}.$$

或者 $\sum_{i=1}^{N} m(B_i) \ge m(E)-\delta$ OK.

② 对于$B_1,\cdots,B_{N_1}$.

或者 $\sum_{i=1}^{N} m(B_i) < m(E)-\delta$. 此时, 令$E_2 = E-\bigcup_{i=1}^{N} B_i$, 则

$$m(E_2) \ge m(E)-\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) > m(E)-(m(E)-\delta) = \delta.$$

重复前面过程, 存在紧集$E_2'\subset E_2$, $m(E_2')>\delta$

由于E_2'与$\bigcup_{i=1}^N B_i$不交, 故 $dist(E_2', \bigcup_{i=1}^N B_i) \triangleq \eta>0$. 由于$\mathcal{B}$是$E_2'$的Vitali覆盖, 可用$\mathcal{B}$中直径小于$\eta$的球覆盖$E_2'$. 由$E_2'$紧, 存在有限个球$B_{N_1+1},\cdots,B_{N_2}$不交, s.t. $\sum_{i=N_1+1}^{N_2} m(B_i) > \gamma m(E_2') > \gamma\delta.$

因此, $B_1,\cdots,B_{N_2}$不交, 且 $\sum_{i=1}^{N_2} m(B_i) > 2\gamma\delta.$

因此，$B_1,\cdots,B_{N_2}$ 不交，且 $\sum_{i=1}^{N_2} m(B_i) > 2\gamma\delta$.

③ 对于 $B_1,\cdots,B_{N_2}$，或者 $\sum_{i=1}^{N_2} m(B_i) \ge m(E)-\delta$

或者 $\sum_{i=1}^{N_2} m(B_i) < m(E)-\delta$，则重复上面过程 k 步，可得

$B_1,\cdots,B_{N_k}$ 不交，且 $\sum_{i=1}^{N_k} m(B_i) \ge k\gamma\delta$.

取 $k > \frac{m(E)-\delta}{\gamma\delta}$，则 $\sum_{i=1}^{N_k} m(B_i) \ge m(E)-\delta$. $\boxtimes$

$[a,b]$上的函数F被称为是绝对连续的，如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，s.t.

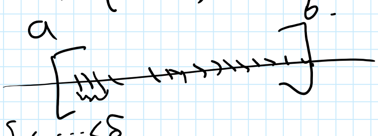
$$\underline{\sum_{k=1}^{N} |F(b_k)-F(a_k)| < \varepsilon}, \text{ 只要 } \sum_{k=1}^{N} (b_k-a_k) < \delta.$$

其中 (a_k,b_k) 不交.

Rmks: 1. 若 $F\in AC([a,b])$，则 F 连续，且一致连续.

2. 若 $F\in AC([a,b])$ 则 $F\in BV([a,b])$.

3. $f\in L^1(\mathbb{R})$，令 $F(x)=\int_a^x f(y)\,dy$，则 $F\in AC([a,b])$



$\sum l_i < \cdots < \delta$

由积分的绝对连续性，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$ s.t. 若 $m(E)<\delta$，则 $\int_E |f|\,dy<\varepsilon$.

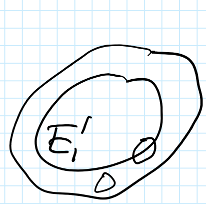
$\bigcup_{k=1}^{N}(a_k,b_k)$，$\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\delta$. $M = \sum\left(\frac{b-a}{\frac{\delta}{2}}+1\right)$.

则 $\sum_{k=1}^{N}|F(b_k)-F(a_k)| = \sum_{k=1}^{N}\left|\int_{a_k}^{b_k} f(y)\,dy\right| \le \int_{\bigcup(a_k,b_k)} |f(y)|\,dy < \varepsilon$.

Cor 3.10. We can arrange the choice of the balls so that

$$m\left(E-\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) < 2\delta.$$

Pf. 存在开集 $O\supset E$，s.t. $\underline{m(O-E)<\delta}$. 于是，由 $E'\subset E$ 子，$\mathcal{B}$是E'的Vitali覆盖. 可选取 $B_1,\cdots,B_{N_1}$ 不交，且 $\bigcup_{i=1}^{N_1} B_i \subset O$.



重复上面过程，$\bigcup_{i=1}^{N} B_i \subset O$. 因此

$m\left(E-\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \le m\left(O-\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) = m(O) - \sum_{i=1}^{N} m(B_i)$ $\quad \eta \triangleq dist(E_1', O^c) > 0$

$$m\left(E - \bigcup_{i=1} B_i\right) \le m\left(O - \bigcup_{i=1} B_i\right) = m(O) - \underbrace{\sum_{i=1} m(B_i)} \qquad \eta \triangleq \mathrm{dist}(F_1, O^c) > 0.$$

$$\le m(E) + \delta - (m(E) - \delta)$$

$$= 2\delta.$$