2020年4月7日 9:33

$$\begin{tikzcd}
\text{a.e.} \arrow[rr, shift left, "m(E)<+\infty"] \arrow[dr, shift left, "\text{控制收敛定理}"] & & \text{in measure} \arrow[ll, shift left, "\text{子列}"] \arrow[dl, shift left, "\text{控制收敛}"] \\
& L^1\text{收敛} \arrow[ul, shift left, "\text{子列}"] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

$f_k \to f$ in measure.

$\forall \varepsilon>0$, $m(\{x: |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}) \to 0$, as $k\to\infty$.

设 $f_k\to f$ in L^1, 要证 $f_k \to f$ in measure.

$\forall \varepsilon>0$, $\int_{\mathbb{R}^d}|f_k-f| \longrightarrow 0$

$$\ge \int_{\{x:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}} |f_k-f| > \varepsilon\, m(\{x:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})$$

故 $m(\{x:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}) \longrightarrow 0$, as $k\to\infty$.

若 $f_n\to f$ in measure, 且 $|f_n(x)|\le g(x)\in L^1$. 则 $f_n\to f$ in L^1.

证: 要证 $\int|f_n-f|\to 0$, as $n\to\infty$.

Recall: 要证 $x_n\to x$ 只需证明对任一子列, 仍有子列收敛到 x.

考虑任意子列 $\int|f_{n_k}-f|$. 由于 $f_{n_k}\to f$ in measure,

故存在子列 $f_{n_{k_j}}$, s.t. $f_{n_{k_j}}\to f$ a.e.

又因为 $|f_{n_{k_j}}(x)|\le g(x)\in L^1$. 由控制收敛定理, $\int|f_{n_{k_j}}-f|\to 0$.

故 $\int|f_n-f|\to 0$.

★ L^p空间.

定义. (i) 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^d$ 上的可测函数. 记 $\|f\|_{L^p(E)}=\left(\int_E|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $0<p<\infty$.

$$L^p(E)=\{f: \|f\|_{L^p(E)}<+\infty\}.$$

(ii) 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^d$ 上的可测函数, $m(E)>0$. 令

$$\|f\|_{L^\infty(E)}=\inf\{M: |f(x)|\le M, \text{ a.e. } x\in E\}.$$

$$\|f\|_{L^\infty(E)}=\{f: \|f\|_{L^\infty(E)}<+\infty\}.$$

Thm 若 $f,g\in L^p(E)$, $0<p\le\infty$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则 $\alpha f+\beta g\in L^p(E)$.

证: 若 $0<p<\infty$, $\int|\alpha f+\beta g|^p \le \int(2^p|\alpha|^p|f|^p+2^p|\beta|^p|g|^p) = 2^p|\alpha|^p\int|f|^p+2^p|\beta|^p\int|g|^p < +\infty$.

即 $\alpha f+\beta g\in L^p$.

若 $p=\infty$， claim： $|f(x)|\le\|f\|_{L^\infty}$，a.e.

只要证明 $E\triangleq\{x: |f(x)|>\|f\|_{L^\infty}\}$ 是零测集. 由于 $E=\bigcup_{n\ge1}\{x: |f(x)|>\|f\|_{L^\infty}+\frac{1}{n}\}$.

由 $\|f\|_{L^\infty}=\inf\{M: |f(x)|\le M,\ a.e.\}$，故 $\{x: |f(x)|>\|f\|_{L^\infty}+\frac{1}{n}\}$ 是零测集. 故 E 是零测集.

$\forall f, g\in L^\infty(E)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，

$$|\alpha f(x)+\beta g(x)|\le|\alpha||f(x)|+|\beta||g(x)|\le|\alpha|\,\|f\|_{L^\infty}+|\beta|\,\|g\|_{L^\infty},\quad a.e.$$

故 $\|\alpha f+\beta g\|_{L^\infty}\le|\alpha|\,\|f\|_{L^\infty}+|\beta|\,\|g\|_{L^\infty}$.

称 p' 是 p 的共轭指标，如果 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 规定 $p=1$ 的共轭指标是 ∞，$p=\infty$ 的共轭指标是 1.

定理（Hölder 不等式）. 设 p, p' 为共轭指标，若 $f\in L^p(E)$，$g\in L^{p'}(E)$，则有

$$\|fg\|_{L^1(E)}\le\|f\|_{L^p(E)}\|g\|_{L^{p'}(E)}.$$

Recall：若 $p, p'<\infty$，则 $a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{p'}}\le\frac{a}{p}+\frac{b}{p'}$，$a, b>0$.

（若 $p, p'<\infty$）

证：不妨设 $\|f\|_{L^p}=1$，$\|g\|_{L^{p'}}=1$. 则只要证明 $\|fg\|_{L^1}\le1$.

否则，令 $\tilde{f}=\frac{f}{\|f\|_{L^p}}$，$\tilde{g}=\frac{g}{\|g\|_{L^{p'}}}$，则 $\|\tilde{f}\|_{L^p}=\frac{1}{\|f\|_{L^p}}\|f\|_{L^p}=1$，

$\|\tilde{g}\|_{L^{p'}}=1$. 故 $\|\tilde{f}\tilde{g}\|_{L^1}\le1 \iff \left\|\frac{fg}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}}\right\|_{L^1}\le1$

$\iff \|fg\|_{L^1}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$

$$\int|f(x)||g(x)|=\int(|f|^p)^{\frac{1}{p}}(|g|^{p'})^{\frac{1}{p'}}\le\int\left(\frac{|f|^p}{p}+\frac{|g|^{p'}}{p'}\right)=\frac{1}{p}\int|f|^p+\frac{1}{p'}\int|g|^{p'}$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

$1=\|f\|_{L^p}^p=\int|f(x)|^p$

若 p 或 $p'=+\infty$.（不妨设 $p=\infty$，此时 $p'=1$）.

只要证明 $\|fg\|_{L^1}\le\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}$.

$$\int|f(x)||g(x)|\le\int\|f\|_{L^\infty}|g(x)|=\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}.\ \blacksquare$$

$\|f(x)g(x)\| \le \int \|f\|_{L^\infty} |g(x)| \cdots \|_{L^\infty}$ ▨

定理.（Minkowski不等式）. 若 $f, g \in L^p(E)$, $(1 \le p \le \infty)$, 则 $\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$.

证明：$p=1,\infty$ 已证. 设 $1<p<\infty$.

$$\|f+g\|_{L^p}^p = \int |f+g|^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| \le \underbrace{\int |f+g|^{p-1}|f|} + \int |f+g|^{p-1}|g| \qquad \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \||f+g|^{p-1}\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} + \||f+g|^{p-1}\|_{L^{p'}} \|g\|_{L^p}$$

$$= \|f+g\|_{L^p}^{p-1} \left(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\right).$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \qquad ▨$$

$$\||f+g|^{p-1}\|_{L^{p'}} = \left(\int |f+g|^{(p-1)p'} dx\right)^{\frac{p-1}{p'(p-1)}} = \left(\int |f+g|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_{L^p}^{p-1}$$

$$\||f|^\alpha\|_{L^p} = \left(\int |f|^{\alpha \cdot p} dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |f|^{\alpha p} dx\right)^{\frac{1}{\alpha p}\cdot \alpha} = \|f\|_{L^{\alpha p}}^\alpha$$

$$\||f|^{p-1}\|_{L^{p'}} = \|f\|_{L^{p'(p-1)}}^{p-1} = \|f\|_{L^p}^{p-1}.$$

Rmk: ① $\|\cdot\|_{L^p}$ $(1 \le p \le \infty)$ 是范数

② 当 $0<p<1$ 时. $(a+b)^p < a^p + b^p$, $a, b > 0$

令 $f = \chi_E$, $g = \chi_F$. 其中 $E \cap F = \phi$, $m(E), m(F) < +\infty$.

$$\int |f+g|^p = m(E) + m(F) = \underbrace{m(E)^{\frac{1}{p}\cdot p}} + \underbrace{m(F)^{\frac{1}{p}\cdot p}}$$

$$> \left(m(E)^{\frac{1}{p}} + m(F)^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\right)^p.$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p} > \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

定义 $d(f,g) = \|f-g\|_{L^p}$, $\forall f, g \in L^p$, $1 \le p \le \infty$.

则 $d(f,g) = d(g,f)$. $d(f,g) = 0 \Longleftrightarrow f = g$. $d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g)$.

故 (L^p, d) 构成度量空间.

设 $\{f_k\} \subset L^p(E)$, $1 \le p \le \infty$. 若 $\lim\limits_{k,j\to\infty} \|f_k - f_j\|_{L^p} = 0$. 则称 $\{f_k\}$ 是 $L^p(E)$ 中的 Cauchy 列. 称 $f_k \to f$ in L^p, 如果 $\lim\limits_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0$.

定理 L^p 空间 ($1 \le p \le \infty$) 是完备的度量空间.

证明: ① $1 \le p < \infty$.

设 $\{f_k\}$ 是 L^p 中的 Cauchy 列, 则 $\lim\limits_{l,k\to\infty} \|f_k - f_l\|_{L^p} = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $E_{k,l} = \{x \mid |f_k(x) - f_l(x)| > \varepsilon\}$, 则

$$0 \leftarrow \int |f_k - f_l|^p \ge \int_{E_{k,l}} |f_k - f_l|^p > \varepsilon^p m(E_{k,l}), \ \forall \varepsilon > 0.$$

故 $m(E_{k,l}) \to 0$, as $k, l \to \infty$. 即 $\{f_k\}$ 是依测度 Cauchy 列.

由 Riesz-Fisher, 存在子列 f_{k_j} s.t. $f_{k_j} \to f$ a.e. for some f.

由 Fatou, $\int |f_k - f|^p \le \liminf\limits_{j\to\infty} \int |f_k - f_{k_j}|^p \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

且 三角不等式, $\|f\|_{L^p} \le \|f - f_k\|_{L^p} + \|f_k\|_{L^p} < +\infty$.

故 $f_k \to f$ in L^p.

② $p = \infty$.

若 $\|f_k - f_j\|_{L^\infty(E)} \to 0$, as $k, j \to \infty$. 则存在零测集 Z, s.t. $|f_k(x) - f_j(x)| \to 0$ uniformly on $E \setminus Z$. 故存在 $f(x)$, s.t. $f_k(x) \to f(x)$ uniformly on $E \setminus Z$.

即 $\|f_k - f\|_{L^\infty} \to 0$, as $k \to \infty$.

设 $G \subset L^p$, 称 G 在 L^p 中稠密, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall f \in L^p$, $\exists g \in G$, s.t. $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$.

定理. 以下集合在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ ($1 \le p < \infty$) 中稠密.

(1) 具有紧支集的连续函数. (2) 具有紧支集的阶梯函数.

如果 $L^p(E)$ 中存在稠密且元素可数的子集, 则称 $L^p(E)$ 是可分的.

定理. $L^p(E)$ ($1 \le p < \infty$) 是可分的.

L^p 空间的范数公式.

证明. 若 $f \in L^p$, $1 \le p < \infty$, 则存在 $g \in L^{p'}$ 且 $\|g\|_{L^{p'}} = 1$, s.t.

L^p 空间的对偶公式.

定理 若 $f\in L^p$, $1\le p<\infty$ 则存在 $g\in L^{p'}$ 且 $\|g\|_{L^{p'}}=1$, s.t.

$$\|f\|_{L^p}=\int f(x)g(x)\,dx. \qquad \left(\|f\|_{L^p}=\sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1}\left|\int f(x)g(x)\,dx\right|\right).$$

证明: $p=1$. 令 $g(x)=\operatorname{sgn}f(x)$, 则 $|g(x)|\le 1$. 故 $\|g\|_{L^\infty}=1$.

且 $\left|\int f(x)g(x)\,dx\right|=\int|f(x)|=\|f\|_{L^1}$.

$1<p<\infty$. 令 $g(x)=\dfrac{|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_{L^p}^{p-1}}\operatorname{sgn}f(x)$. 则 $\|g\|_{L^{p'}}=\dfrac{1}{\|f\|_{L^p}^{p-1}}\left\||f|^{p-1}\right\|_{L^{p'}}=1$.

且 $\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx=\int\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^{p-1}}\,dx=\frac{\|f\|_{L^p}^p}{\|f\|_{L^p}^{p-1}}=\|f\|_{L^p}$. $\qquad C=\|f\|_{L^p}^{p-1}$.

定理. 若 $f\in L^\infty$. 则有 $\|f\|_{L^\infty}=\sup_{\|g\|_{L^1}=1}\left|\int f(x)g(x)\,dx\right|$.

证: "$\ge$" $\displaystyle\sup_{\|g\|_{L^1}=1}\left|\int fg\right|\overset{\text{H}\ddot{\text{o}}\text{lder}}{\le}\sup_{\|g\|_{L^1}=1}\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}\le\|f\|_{L^\infty}$.

"$\le$". 只要证明 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\|g\|_{L^1}=1$, s.t. $\|f\|_{L^\infty}\le\left|\int f(x)g(x)\,dx\right|+\varepsilon$.

令 $\|f\|_{L^\infty}=M$. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists A\subset\mathbb{R}^d$, $m(A)\triangleq a>0$, s.t.

$$|f(x)|>M-\varepsilon,\quad\forall x\in A.$$

令 $g(x)=\frac{1}{a}\chi_A(x)\operatorname{sgn}f(x)$, 则 $\|g\|_{L^1}=\frac{1}{a}m(A)=1$.

且 $\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx=\frac{1}{a}\int_A|f(x)|\,dx\ge(M-\varepsilon)\frac{m(A)}{a}=M-\varepsilon$.

即 $M\le\left|\int f(x)g(x)\,dx\right|+\varepsilon$.

定理(广义 Minkowski 不等式). 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上的可测函数. 若对几乎处处的 $y\in\mathbb{R}^d$, $f(x,y)$ 属于 $L^p(\mathbb{R}^d)$, $(1\le p<\infty)$, 且有 $\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\triangleq M<+\infty$.

则 $$\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int f(x,y)\,dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int|f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}dy.$$

$$\big\|\|f\|_{L^1_y}\big\|_{L^p_x}\le\big\|\|f\|_{L^p_x}\big\|_{L^1_y}$$

证明: 令 $F(x)=\int f(x,y)\,dy$. 则

$$\|F\|_{L^p}=\sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1}\left|\int F(x)g(x)\,dx\right|=\sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1}\left|\int\left(\int f(x,y)g(x)\,dy\right)dx\right|$$

$\displaystyle\int\left|\int f(x,y)g(x)\right|\overset{\text{Tonelli}}{\le}\int\left(\int|f(x,y)|\,|g(x)|\,dx\right)dy\le\int\left(\int|f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\|g\|_{p'}\,dy$

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(x,y)g(x)|\,dxdy \overset{\text{Tonelli}}{=} \int\left(\int|f(x,y)||g(x)|\,dx\right)dy \le \int\left(\int|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac1p}\|g\|_{L^{p'}}\,dy$$

$$= \|g\|_{L^{p'}}\int\left(\int|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac1p}dy < +\infty.$$

故 $f(x,y)g(x)\in L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$. 由Fubini定理,

$$\left|\int\left(\int f(x,y)g(x)\,dy\right)dx\right| = \left|\int\left(\int f(x,y)g(x)\,dx\right)dy\right| \le \int\left(\int|f(x,y)||g(x)|\,dx\right)dy$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \int\left(\int|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac1p}dy\,\|g\|_{L^{p'}}$$

故 $\|f\|_{L^p} \le \int\left(\int|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac1p}dy$.

Rmk. 令 $f(x,y)=\begin{cases} f(x) & 0\le y\le 1\\ g(x) & 1\le y\le 2\end{cases}$, $f(x), g(x)\in L^p$.

由广义Minkowski,

$$\left(\int\left|\int_0^2 f(x,y)\,dy\right|^p dx\right)^{\frac1p} \le \int_0^2\left(\int|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac1p}dy$$

$$\left(\int\left|\int_0^2 f(x,y)\,dy\right|^p dx\right)^{\frac1p} = \left(\int\left|\int_0^1 f(x)\,dy+\int_1^2 g(x)\,dy\right|^p dx\right)^{\frac1p} = \left(\int|f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac1p} = \|f+g\|_{L^p}.$$

$$\int_0^2\left(\int|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac1p}dy = \int_0^1\left(\int|f(x)|^p dx\right)^{\frac1p}dy + \int_1^2\left(\int|g(x)|^p dx\right)^{\frac1p}dy = \|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}.$$

例. (Hardy) 设 $1<p<\infty$, $f\in L^p((0,\infty))$. 令 $F(x)=\frac1x\int_0^x f(t)\,dt$, $x>0$.

则 $F\in L^p((0,\infty))$, 且 $\|F\|_{L^p}\le\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}$.

证明: $F(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$, 由广义Minkowski不等式,

$$\|F\|_{L^p_x} = \left\|\int_0^1 f(xt)\,dt\right\|_{L^p_x} \le \int_0^1\|f(xt)\|_{L^p_x}\,dt$$

$$=\int_0^1 t^{-\frac1p}\|f\|_{L^p}\,dt$$

$$=\|f\|_{L^p}\frac{1}{1-\frac1p}t^{1-\frac1p}\Big|_0^1 = \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}.$$

$$\|f(xt)\|_{L^p_x} = \left\||f(xt)|^p\right\|_{L^1_x}^{\frac1p}$$

$$= \| f_t(x) \|_{L^p_x}$$

$$= \left[t^{-1} \| |f|^p \|_1 \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= t^{-\frac{1}{p}} \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = t^{-\frac{1}{p}} \| f \|_{L^p}.$$