Real Analysis 0521

2020年5月21日 9:40

Hahn分解. ν带号测度. $\exists P$正集, N负集, s.t. $X=P\cup N$, $P\cap N=\phi$.

如果μ,ν是$(X,\mathcal{M})$上的带号测度, 称它们是彼此奇异的, 如果存在$E,F\in\mathcal{M}$ s.t. $E\cap F=\phi$, $E\cup F=X$. 且E是μ-零集, F是ν-零集. 记为$\mu\perp\nu$.

定理3.4 (Jordan分解). 若ν是$(X,\mathcal{M})$上的带号测度则存在唯一的正测度 ν^+,ν^- 使得 $\nu=\nu^+-\nu^-$ 且 $\nu^+\perp\nu^-$.

证明: 由Hahn分解. $X=P\cup N$. P ν-正集. N是ν-负集. 对任意集合$E\in\mathcal{M}$,

定义 $\nu^+(E)=\nu(E\cap P)$, $\nu^-(E)=-\nu(E\cap N)$. 则ν^+,ν^-是正测度.

由于 $\nu(E)=\nu((E\cap P)\cup(E\cap N))=\nu(E\cap P)+\nu(E\cap N)=\nu^+(E)-\nu^-(E)$, $\forall E\in\mathcal{M}$.

故 $\nu=\nu^+-\nu^-$. 对于任意的 $E\subset P$, $\nu^-(E)=-\nu(E\cap N)=-\nu(\phi)=0$.

类似可证, $\nu^+(F)=0$, $\forall F\subset N$. 故 $\nu^+\perp\nu^-$.

若 $\nu=\mu_+-\mu_-$, $\mu_+\perp\mu_-$ 是另一个分解. 则存在$X=P'\cup N'$, $P'\cap N'=\phi$.

且 P' 是μ_-零集, N'是μ_+零集. 且 $\forall E\subset P'$, $\nu(E)=\mu_+(E\cap P')-\mu_-(E\cap N')$

$=\mu_+(E\cap P')\geq 0$.

且 $\forall F\subset N'$, $\nu(F)=\mu_+(F\cap P')-\mu_-(F\cap N')=-\mu_-(F\cap N')\leq 0$.

故 P'是ν正集. N'是ν-负集. 因此, $X=P'\cup N'$是另一个ν的Hahn分解.

因此. $P\Delta P'$是ν-零集. $\forall A\in\mathcal{M}$,

$\mu_+(A)=\mu_+(A\cap P')=\nu(A\cap P')=\nu(A\cap P)=\nu^+(A)$.

类似地, $\mu_-(A)=\nu^-(A)$. ☒

在Jordan分解中, ν_+,ν_-分别叫做ν的正、负变差. $\nu=\nu^+-\nu^-$称为ν的Jordan分解. 令$|\nu|=\nu^++\nu^-$, 则称$|\nu|$为ν的全变差. 如果$|\nu|$是有限测度, 则称带号测度ν是有限的. $L^1(\nu)=L^1(\nu^+)\cap L^1(\nu^-)$. 且

$$\int_X f\,d\nu=\int_X f\,d\nu_+-\int_X f\,d\nu_-, \quad \forall f\in L^1(\nu).$$

设ν是$(X,\mathcal{M})$上的带号测度, μ是$(X,\mathcal{M})$上的正测度. 称ν关于μ是绝对

连续的. 如果 $\mu(E)=0$ 意味着 $\nu(E)=0$, $\forall E\in\mathcal{M}$. 记为 $\nu\ll\mu$.

易证 $\nu\ll\mu \iff |\nu|\ll\mu \iff \nu^+\ll\mu,\ \nu^-\ll\mu$.

Claim: 若 $\nu\perp\mu$, $\nu\ll\mu$ 则 $\nu=0$.

由 $\nu\perp\mu$, $\exists P, N$ s.t. $X=P\cup N$, $P\cap N=\phi$. P 是 μ-null, N 是 ν-null.

又由 $\nu\ll\mu$, 可知 P 是 ν-零集. 故 $\nu=0$.

定理3.5. 设 ν 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的带号测度, μ 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的正测度. 则 $\nu\ll\mu$
$\iff$ $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, s.t. $|\nu(E)|<\varepsilon$, whenever $\mu(E)<\delta$.

证: "$\Leftarrow$". 若 $\mu(E)=0$. 取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$. 则 $|\nu(E)|<\frac{1}{n}$, $\forall n$. 则 $\nu(E)=0$.

"$\Rightarrow$". 否则, $\exists\varepsilon>0$, $\forall n$, $\exists E_n$, $\mu(E_n)<\frac{1}{2^n}$, 但 $|\nu(E_n)|\geq\varepsilon$.

令 $F=\limsup\limits_{n\to\infty} E_n=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}E_j$, 则 $\mu(F)=0$. 但 $|\nu(F)|\geq\varepsilon$.

与 $\nu\ll\mu$ 矛盾!

若 μ 是一个测度, $f\in L^1(\mu)$, 令 $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$. 则 $\nu\ll\mu$. 于是

Cor3.6. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, s.t. $\left|\int_E f\,d\mu\right|<\varepsilon$, whenever $\mu(E)<\delta$.

引理3.7. ν,μ 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的有限测度, 则或者 $\nu\perp\mu$ 或者 $\exists\varepsilon>0$, $E\in\mathcal{M}$ s.t.
$\mu(E)>0$ 且 $\nu\geq\varepsilon\mu$ on E.

证明: 令 $X=P_n\cup N_n$ 是 $\nu-\frac{1}{n}\mu$ 的Hahn分解. 令 $P=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}P_n$, $N=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}N_n$. 则 $P\cup N=X$.

则 N 是 $\nu-\frac{1}{n}\mu$ 的负集, $\forall n$. 因此. $\nu(N)-\frac{1}{n}\mu(N)\leq 0 \Rightarrow \nu(N)\leq\frac{1}{n}\mu(N)\xrightarrow{n\to\infty}0$,

故 $\nu(N)=0$. 若 $\mu(P)=0$. 则 $\nu\perp\mu$. 若 $\mu(P)>0$, 则 $\exists P_n$ s.t. $\mu(P_n)>0$.
 E

且 P_n 关于 $\nu-\frac{1}{n}\mu$ 正集.
ε

定理3.8. (Lebesgue–Radon–Nikodym) 令 ν 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的一个 σ-有限的带号测度, μ 是 σ-有限正测度. 则存在唯一的 σ-有限带号测度 λ, ρ, s.t.

$$\lambda\perp\mu,\ \rho\ll\mu \text{ and } \nu=\lambda+\rho.$$

而且, 存在可积函数 $f: X\to\mathbb{R}$ s.t. $d\rho=f\,d\mu$. 并且任意两个这样的函数 μ-a.e. 相等.

证明：Case I、设 μ, ν 是有限正测度.

令 $\mathcal{F} = \{f: X \to [0,+\infty];\ \int_E f d\mu \le \nu(E),\ \forall E \in \mathcal{M}\}$.

则 ① $0 \in \mathcal{F}$. $\Rightarrow \mathcal{F}$ 非空.

② $f, g \in \mathcal{F} \Rightarrow h = \max(f, g) \in \mathcal{F}$.

$$\int_E h d\mu = \int_E \max(f,g) d\mu = \int_{\{x\in E:\ f(x)\le g(x)\}} g(x) d\mu + \int_{\{x\in E:\ f(x)>g(x)\}} f(x) d\mu$$

$$\le \nu(\{x\in E: f(x)\le g(x)\}) + \nu(\{x\in E \mid f(x)>g(x)\})$$

$$= \nu(E), \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

③ 令 $a = \sup\{\int f d\mu : f \in \mathcal{F}\}$. 则 $\exists f_n \in \mathcal{F}$, s.t. $\int f_n d\mu \to a$.

令 $g_n = \max\{f_1, \cdots, f_n\}$, 则由②, $g_n \in \mathcal{F}$. 令 $f = \sup_n f_n$, 则 $g_n \nearrow f$.

由单调收敛定理, $\int g_n d\mu \to \int f d\mu$. 由 $a \ge \int g_n d\mu \ge \int f_n d\mu \xrightarrow{n\to\infty} a$.

故 $\int g_n d\mu \to a$. 故 $\int f d\mu = a$. $f < +\infty$, a.e. 不妨设 $f(x) < +\infty$, $\forall x$.

令 $\underline{d\lambda = d\nu - f d\mu}$, 则 $\lambda(E) = \nu(E) - \int_E f d\mu \ge 0$, $\forall E \in \mathcal{M}$.

故 λ 是正测度.

Claim: $\lambda \perp \mu$.

否则, $\exists \varepsilon > 0$, $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) > 0$, s.t. $\lambda \ge \varepsilon\mu$ on E. 即 $d\lambda - \varepsilon\chi_E d\mu \ge 0$.

$\Rightarrow d\nu - (f + \varepsilon\chi_E) d\mu \ge 0$. $\Rightarrow \nu(A) \ge \int_A (f + \varepsilon\chi_E) d\mu$, $\forall A \in \mathcal{M}$.

故 $f + \varepsilon\chi_E \in \mathcal{F}$. 故 $a \ge \int (f + \varepsilon\chi_E) d\mu = a + \varepsilon\mu(E) > a$. 矛盾!

令 $d\rho = f d\mu$. 则 λ, ρ 的存在性已证.

唯一性, 若 $d\nu = d\lambda' + f' d\mu$. 则 $d(\lambda - \lambda') = (f' - f) d\mu$. f', f 可积..

$= d\lambda + f d\mu$

故 $\lambda - \lambda' \ll \mu$. 又因为 $\lambda - \lambda' \perp \mu$. 故 $\lambda - \lambda' = 0$. 则 $f - f' = 0$. a.e.

Case II, μ, ν 是 σ-有限测度.

令 $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, (不交并). $\nu(A_j), \mu(A_j) < +\infty$. 定义 $\mu_j(E) = \mu(E \cap A_j)$.

$\nu_j(E)=\nu(E\cap A_j)$. 由 Case I, $\exists\, \lambda_j, \rho_j$, s.t. $\nu_j=\lambda_j+\rho_j$, $\lambda_j\perp\mu_j$,

$\rho_j \ll \mu_j$. $\rho_j = f_j\, d\mu_j$. 由于 $\mu_j(A_j^c)=0$, $\nu_j(A_j^c)=0$. 不妨设 $f_j=0$ on A_j^c.

$\lambda_j(A_j^c)=\nu_j(A_j^c)-\int_{A_j^c} f_j\, d\mu_j = 0$. 令 $\lambda=\sum_j\lambda_j$. $f=\sum_j f_j$.

则 $d\nu=\sum_j d\nu_j = \sum_j(d\lambda_j+f_j\, d\mu_j) = d\lambda+\sum_j f_j\, d\mu = d\lambda + f\, d\mu$.

且 $\lambda\perp\mu$.

若 $\nu\ll\mu$, 由 Thm 3.8, $\exists f$, s.t. $d\nu=f\,d\mu$. 称 f 为 ν 关于 μ 是 Radon-Nikodym 导数, 记为 $\frac{d\nu}{d\mu}$: $d\nu=\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu$.

Prop 3.9 (Chain Rule). 设 ν 是 σ-有限的带号测度, μ,λ 是 σ-有限测度.

且 $\nu\ll\mu$, $\mu\ll\lambda$.

a). 若 $g\in L^1(\nu)$, 则 $g\frac{d\nu}{d\mu}\in L^1(\mu)$ 且 $\int g\, d\nu=\int g\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu$.

b). 我们有 $\nu\ll\lambda$, 并且 $\frac{d\nu}{d\lambda}=\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$. λ-a.e.

Pf. 不妨设 ν 是测度. 否则分别考虑 ν^+, ν^-.

a). $\forall E\in\mathcal{M}$, $g=\chi_E$. 则 $\nu(E)=\int_E \frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu$. (Lebesgue).

g 简单 ✓. $\longrightarrow$ g 非负可测 $\longrightarrow$ $g\in L^1(\nu)$.

b). 由 $\mu\ll\lambda$ 由(a)可得 $\int g\, d\mu=\int g\frac{d\mu}{d\lambda}\,d\lambda$, $\forall g\in L^1(\mu)$.

令 $g=\chi_E\frac{d\nu}{d\mu}$. 则 LHS $=\int_E\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu \overset{(a)}{=} \nu(E)$

RHS $=\int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\,d\lambda$. 即 $\nu(E)=\int_E\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\,d\lambda$ //

故 $\nu\ll\lambda$.

再由 Lebesgue-Radon-Nikodym, $\nu(E)=\int_E\frac{d\nu}{d\lambda}\,d\lambda$. $\forall E\in\mathcal{M}$.

$\therefore \frac{d\nu}{d\lambda}=\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$ λ-a.e. $\square$

$\frac{}{d\lambda} = d\mu \quad d\lambda$