Real analysis 0416

2020年4月16日 9:36

3. 函数的微分

目标: $F(b)-F(a)=\int_a^b F'(t)\,dt$.

3.1. 有界变差函数

令 γ 是平面上的参数化曲线 $z(t)=(x(t),y(t))$, $a\le t\le b$. 称 γ 是可求长的, 如果存在 $M<+\infty$, s.t. $\forall\ a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$, $\sum_{j=1}^{N}|z(t_j)-z(t_{j-1})|\le M$.

并且定义 $L(\gamma)=\sup_{a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b}\sum_{j=1}^{N}|z(t_j)-z(t_{j-1})|$.

$\sqrt{|x(t_j)-x(t_{j-1})|^2+|y(t_j)-y(t_{j-1})|^2}$

Q: $x(t)$, $y(t)$ 满足什么条件时, γ 是可求长的?

① $x'(t)$, $y'(t)$ 几乎处处存在?

② 若 $\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$

令 $F(t)$ 是 $[a,b]$ 上的复值函数. 称 F 是有界变差函数, 如果存在 $M>0$, s.t.

$\forall\ a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$, $\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|\le M$.

Rmk. 若划分 $\tilde{P}$ 是 P 的加细. 则 $\tilde{P}$ 对应的变差大于等于 P 所对应的变差.

$$P \qquad |F(t_j)-F(t_{j-1})|$$
$$\wedge$$
$$\tilde{P} \qquad |F(\tilde{t})-F(t_{j-1})|+|F(t_j)-F(\tilde{t})| \qquad t_{j-1}\quad \tilde{t}\quad t_j$$

Thm 3.1. 参数化曲线 $(x(t),y(t))$, $a\le t\le b$ 是可求长的, 当且仅当 $x(t)$, $y(t)$ 是有界变差函数.

证明: 令 $F(t)=x(t)+iy(t)$, 则

$$F(t_j)-F(t_{j-1})=\underbrace{(x(t_j)-x(t_{j-1}))}+i\underbrace{(y(t_j)-y(t_{j-1}))}$$

$$\frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}}\le|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}\le|a|+|b|$$

$$\frac{|x(t_j)-x(t_{j-1})|+|y(t_j)-y(t_{j-1})|}{\sqrt{2}}\le|F(t_j)-F(t_{j-1})|\le|x(t_j)-x(t_{j-1})|+|y(t_j)-y(t_{j-1})|$$

$$\frac{|x(t_j)-x(t_{j-1})|+|y(t_j)-y(t_{j-1})|}{\sqrt{2}} \le |F(t_j)-F(t_{j-1})| \le |x(t_j)-x(t_{j-1})|+|y(t_j)-y(t_{j-1})|$$

若γ可求长，则 $\forall\ a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{N}\left(|x(t_j)-x(t_{j-1})|+|y(t_j)-y(t_{j-1})|\right) \le \sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})| \le M.$$

例1. 若F实值，单调增，有界M，则 $F\in BV([a,b])$.

$\forall\ a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$,

$$\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{N}\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right) = F(b)-F(a) \le 2M.$$

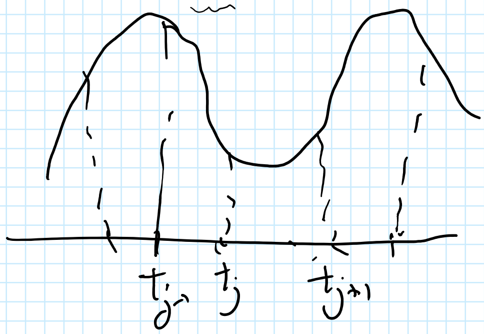
例. 若$F\in C^1([a,b])$，且$|F'(t)|\le M$, $\forall t\in[a,b]$. 则 $F\in BV([a,b])$.

$\forall\ a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$,

$$\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})| \le \sum_{j=1}^{N}|F'(\xi_j)(t_j-t_{j-1})| \le M\sum_{j=1}^{N}(t_j-t_{j-1}) = M(b-a).$$

若F是$[a,b]$上的实值函数，定义$T_F(a,x)=\sup\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|$，其中sup是对所有$[a,x]$上的划分取上确界。$T_F(a,x)$称为F的总变差函数。

若F是$[a,b]$上的实值函数，定义正变差函数 $P_F(a,x)=\sup\sum_{(+)}\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)$.



及负变差 $N_F(a,x)=\sup\sum_{(-)}-\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)$.

Rmk. 若$\tilde{P}$是P的加细，则$\tilde{P}$所对应的正变差、负变差均大于等于P所对应的正、负变差.

P　　$F(t_j)-F(t_{j-1})>0$.

若 $F(\tilde{t})<F(t_{j-1})$

若 $F(\tilde{t})\in[F(t_{j-1}),F(t_j))$.

若 $F(\tilde{t})\ge F(t_j)$.

Lem 3.2. 设F是[a,b]上的实值有界变差函数，则对于$a\le x\le b$，

有 $F(x)-F(a)=P_F(a,x)-N_F(a,x)$

$$T_F(a,x)=P_F(a,x)+N_F(a,x).$$

$P_F(a,x)=\sup\sum_{(+)}\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)$

$N_F(a,x)=\sup\sum_{(-)}-\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)$.

证明：①. 由正变差、负变差的定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ a=t_0<\cdots<t_N=x$，

s.t. $P_F(a,x)-\varepsilon\le\sum_{(+)}\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)\le P_F(a,x)$.

$$N_F(a,x)-\varepsilon\le\sum_{(-)}-\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)\le N_F(a,x).$$

于是，$F(x)-F(a)=\sum_{j=1}^{N}F(t_j)-F(t_{j-1})=\underbrace{\sum_{(+)}F(t_j)-F(t_j)}-\underbrace{\sum_{(-)}-\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)}$

$\ge P_F(a,x)-\varepsilon-N_F(a,x)$

$\le P_F(a,x)-\left(N_F(a,x)-\varepsilon\right)$

故 $\left|F(x)-F(a)-\left(P_F(a,x)-N_F(a,x)\right)\right|\le\varepsilon$.

由ε的任意性，$F(x)-F(a)=P_F(a,x)-N_F(a,x)$.

②. $\forall\ a=t_0<t_1<\cdots<t_N=x$.

$$\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|=\sum_{(+)}\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)+\sum_{(-)}-\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right).$$

$$\le P_F(a,x)+N_F(a,x).$$

故 $T_F(a,x)\le P_F(a,x)+N_F(a,x)$.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ a=t_0<t_1<\cdots<t_N=x$. s.t.

$$P_F(a,x)-\varepsilon\le\sum_{(+)}\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)\le P_F(a,x),$$

$$N_F(a,x)-\varepsilon\le\sum_{(-)}-\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)\le N_F(a,x)$$

故 $P_F(a,x)+N_F(a,x)\le\sum_{(+)}\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)$ 2ε $+\sum_{(-)}\left(F(t_j)-F(t_{j-1})\right)$.

$$\le\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|+2\varepsilon$$

$$\le T_F(a,x)+2\varepsilon.$$

于是, $T_F(a,x) = P_F(a,x) + N_F(a,x)$,

Thm 3.3 $[a,b]$上的实值函数F是有界变差函数 $\Longleftrightarrow$ F可以写成两个单调递增有界函数的差.

Pf. "$\Longleftarrow$": 若 $F = F_1 - F_2$, F_1, F_2 单增, 有界. 则 $F_1, F_2 \in BV([a,b])$.

$\exists M_1, M_2 > 0$ s.t. $\forall\, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N$,

$$\sum_{j=1}^{N} |F_1(t_j) - F_1(t_{j-1})| \le M_1, \qquad \sum_{j=1}^{N} (F_2(t_j) - F_2(t_{j-1})) \le M_2.$$

则 $\forall\, a = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = b$,

$$\sum_{j=1}^{N} |F(s_j) - F(s_{j-1})| \le \sum_{j=1}^{N} |F_1(s_j) - F_1(s_{j-1})| + \sum_{j=1}^{N} |F_2(s_j) - F_2(s_{j-1})|$$

$$\le M_1 + M_2.$$

"$\Longrightarrow$" 若F是有界变差函数, $\exists M > 0$, $T_F(a,x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$.

由 Lem 3.2, $F(x) = \underbrace{F(a) + P_F(a,x)}_{F_1(x)} - \underbrace{N_F(a,x)}_{F_2(x)}$.

由于 $P_F(a,x) + N_F(a,x) = T_F(a,x) \le M$. $0 \le P_F(a,x), N_F(a,x) \le M$

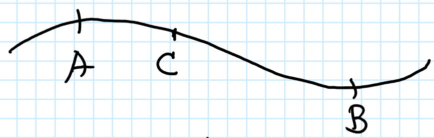
考虑曲线γ: $\underline{z(t)} = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$.

$\sum_{(t)[a,x]} \le \sum_{(t)[a,x']}$ <

设γ可求长的. 长度 $L(A,B) = \underline{T_F(A,B)}$ $a \le A \le B \le b$

claim: $L(A,C) + L(C,B) = L(A,B)$.

"$\le$". 对于任意的划分 $A = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = C$,



$C = t_N < t_{N+1} < \cdots < t_{M+N} = B$.

则 $A = t_0 < t_1 < \cdots t_{N+M} = B$ 是 A, B 段的一个划分.

$$\sum_{j=1}^{N+M} |F(t_j) - F(t_{j-1})| \le T_F(A,B).$$

$$\|$$

$$\sum^{N} \cdots \quad \sum^{N+M} |F(t_j) - F(t_{j-1})|$$

$$\| $$

$$\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})| + \sum_{j=N+1}^{N+M}|F(t_j)-F(t_{j-1})|$$

于是，$T_F(A,C)+T_F(C,B)\le T_F(A,B)$.

"$\ge$". 对于 A,B 段的任意一个划分 $A=t_0<t_1<\cdots<t_N=B$. 不妨设 C 是其中的一个分点 t_J. 则

$$\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{J}|F(t_j)-F(t_{j-1})| + \sum_{j=J+1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|$$

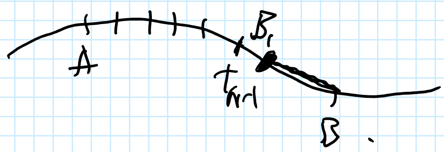
$$\le T_F(A,C)+T_F(C,B).$$

故 $T_F(A,B)\le T_F(A,C)+T_F(C,B)$.

Claim: $L(A,B)$ 关于 B 是连续函数.

证明：先证明左连续. 即 $\forall \varepsilon>0$,

$\exists B_1<B$, s.t. $L(A,B)-L(A,B_1)<\varepsilon$.



由 $L(A,B)$ 的定义，$\forall \varepsilon>0$，存在划分 $A=t_0<t_1<\cdots<t_N=B$, s.t.

$$\sum_{j=1}^{N}|z(t_j)-z(t_{j-1})| \ge L(A,B)-\varepsilon/2.$$

由于 $z(t)$ 连续，$\exists B_1<B$, s.t. $|z(B_1)-z(B)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 不妨设 $t_{N-1}<B_1<t_N=B$.

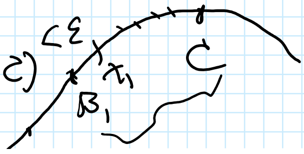
故 $$L(A,B)-\frac{\varepsilon}{2}\le \sum_{j=1}^{N-1}|z(t_j)-z(t_{j-1})| + |z(B_1)-z(t_{N-1})| + |z(B)-z(B_1)|$$

$$\le L(A,B_1)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

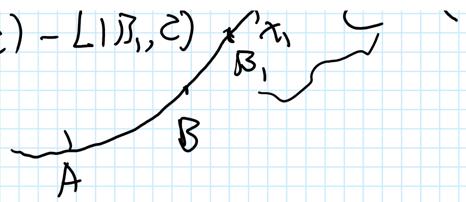
故 $L(A,B)\le L(A,B_1)+\varepsilon$.

再证明右连续. 即 $\exists B_1>B$, s.t. $L(A,B_1)-L(A,B)<\varepsilon$.

任取 $C>B$，则 $L(A,B_1)-L(A,B)=L(B,C)-L(B_1,C)<\varepsilon$



任取 $C > B$, 则 $L(A,B_1) - L(A,B) = L(B,C) - L(B_1,C)$



$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, t_0 = B < t_1 < \cdots < t_N = C$, s.t.

$$\sum_{j=1}^{N} |z(t_j) - z(t_{j-1})| > L(B,C) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $0 < B_1 < t_1$, s.t. $|z(B_1) - z(B)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 则

$$L(B,C) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j=1}^{N} |z(t_j) - z(t_{j-1})| \le \underbrace{\sum_{j=2}^{N} |z(t_j) - z(t_{j-1})| + |z(t_1) - z(B_1)|} + |z(B_1) - z(B)|$$

$$\le L(B_1, C) + \frac{\varepsilon}{2}$$

即 $L(B,C) \le L(B_1, C) + \varepsilon$.