3.3. Borel measures on $\mathbb{R}$ and the Lebesgue-Stieltjes integral.

$X \quad \Sigma$ elementary $\longrightarrow \mathcal{A} + \mu_0$

$\mu_* \longrightarrow (\mathcal{M}, \mu)$

若(X,d)是度量空间, μ_*是度量外测度, 则所有的Borel集都是可测的.

$\mu_*|_{\mathcal{B}_X}$ 是Borel测度.

目标: 构造$\mathbb{R}$上的Borel测度.

令 $\Sigma = \{(a,b]: a<b\}$ $a \geq -\infty$. 若 $b=+\infty$, $(a,+\infty)$, ϕ. 半区间.

① $\phi \in \Sigma$. ② $(a_1,b_1]$, $(a_2,b_2] \in \Sigma$, $(a_1,b_1] \cap (a_2,b_2] \in \Sigma$.

③ $(a,b]^c = (-\infty, a] \cup (b,+\infty)$ 故Σ是基本族.

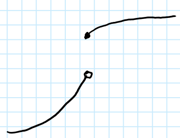
Claim: 由Σ生成的σ-代数是$\mathcal{B}_\mathbb{R}$. (F-Lem 1.2).

令$\mathcal{A}$是由Σ中元素的有限不交并构成的集合, 则$\mathcal{A}$是一个代数

令F是$\mathbb{R}$上的单调递增函数, 则F最多有可数多个间断点. 若x_0是一个间断点, 则 $F(x_0^-) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} F(x) < F(x_0^+) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}}$. $F(x_0^-) \leq F(x_0) \leq F(x_0^+)$.

假设$F(x)$ s.t. $F(x_0) = F(x_0^+)$, 则此时称$F(x)$是normalized. 即$F(x)$在x_0右连续.

Prop. 令$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是单增, 右连续. 若$(a_j, b_j]$, $j=1,\dots,n$是不交的半区间. 令



$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n (a_j,b_j]\right) = \sum_{j=1}^n \left(F(b_j) - F(a_j)\right),$$

及 $\mu_0(\phi)=0$. 则μ_0是$\mathcal{A}$上的准测度. (可选作业).

定义 $\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \left(F(b_j) - F(a_j)\right) \,\middle|\, E \subset \bigcup_{j=1}^\infty (a_j,b_j]\right\}$.

则μ^*是X上的外测度.

由Carathéodory定理, 存在$\mathcal{M}$, $\mu = \mu^*|_\mathcal{M}$ 测度.

对 $\mathcal{M} \supset \mathcal{A} \supset \Sigma$, 由$\Sigma$生成的$\sigma$-代数是$\mathcal{B}_\mathbb{R}$. 故 $\mathcal{M} \supset \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

故 $\mu|_{\mathcal{B}_\mathbb{R}}$ 是Borel测度.

Claim1. $\mu_*((a,b]) = F(b) - F(a)$.

"$\leq$". $\mu_*((a,b]) \leq F(b) - F(a)$, 因为$(a,b]$是自身的一个覆盖.

"$\geq$". 对于任意的$\bigcup_{j=1}^\infty (a_j,b_j] \supset (a,b]$. 由$F$是右连续的, $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, b_j' > b_j$, s.t.

$F(b_j') - F(b_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. 对于任意的$b>a'>a$, $[a',b] \subset \bigcup_{j=1}^\infty (a_j, b_j')$.

由紧性, 存在N, s.t. $[a',b] \subset \bigcup_{j=1}^N (a_j, b_j')$.

由紧性，存在 N，s.t. $[a', b] \subset \bigcup_{j=1}^{N} (a_j, b_j')$.

由于 F 单增，$F(b) - F(a') \le \sum_{j=1}^{N} \left(F(b_j') - F(a_j)\right)$

$$\le \sum_{j=1}^{N} \left(F(b_j') - F(b_j)\right) + \sum_{j=1}^{N} F(b_j) - F(a_j)$$

$$\le \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \left(F(b_j) - F(a_j)\right).$$

于是，$F(b) - F(a') \le \varepsilon + \mu_*((a, b])$.

由于 F 右连续，令 $a' \to a^+$ 时，$F(b) - F(a) \le \varepsilon + \mu_*((a, b])$.

由 ε 的任意性，可得 $F(b) - F(a) \le \mu_*((a, b])$.

Claim 2. μ_* 是度量外测度 $(d(x, x') = |x - x'|)$.

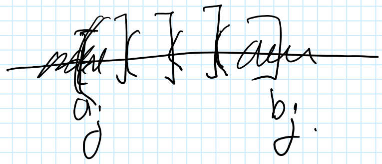
若 $E, F \subset \mathbb{R}$，$d(E, F) > 0$，要证 $\mu_*(E \cup F) = \mu_*(E) + \mu_*(F)$.

如果 $\mu_*(E)$ 或 $\mu_*(F)$ 为无穷，则 $\mu_*(E \cup F) = +\infty$，等式成立.

只需考虑 $\mu_*(E) + \mu_*(F) < +\infty$，此时 $\mu_*(E \cup F) < +\infty$.

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \supset E \cup F$，s.t. $\sum_{j=1}^{\infty} \left(F(b_j) - F(a_j)\right) \le \mu_*(E \cup F) + \varepsilon$.

由于 $d(E, F) > 0$，不妨设每个区间只与 E, F 中的某一个相交.（否则若 $(a_j, b_j]$ 与 E, F 都相交，则把它分成更小的半区间）.



即存在 J_1, J_2 s.t. $J_1 \cap J_2 = \phi$ 且

$E \subset \bigcup_{j \in J_1} (a_j, b_j]$，$F \subset \bigcup_{j \in J_2} (a_j, b_j]$.

于是，$\mu_*(E) + \mu_*(F) \le \sum_{j \in J_1} \left(F(b_j) - F(a_j)\right) + \sum_{j \in J_2} \left(F(b_j) - F(a_j)\right)$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \left(F(b_j) - F(a_j)\right)$$

$$\le \mu_*(E \cup F) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性，$\mu_*(E) + \mu_*(F) \le \mu_*(E \cup F)$.

由 Cara-thm，存在 μ，$\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ s.t. $\mu = \mu_0$ on $\mathcal{A}$.

又因为 μ_* 是度量外测度，故所有 Borel 集都可测，故 $\mu|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ 是 Borel 测度.

由于 $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (n, n+1]$，$\mu_0((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < +\infty$.

故 μ_0 是 σ-有限的. 因此，它是唯一的 μ_0 的延拓的 Borel 测度.

反之，若 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度，且有限区间的测度是有限的. 定义

$F(x) = \mu((0, x])$ 如果 $F(0) = 0$；或 $F(x) = -\mu((x, 0])$，$x < 0$.

则 · $F(x)$ 单调.

· F 右连续.

这样,我们已证下面的定理.

定理 1.5.1(S). 令 F 是 $\mathbb{R}$ 上的规范化的单增函数. 则存在唯一的 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度 μ (记为 dF) 使得 $\mu((a,b]) = F(b)-F(a)$, $\forall\, a<b$.

反之, 若 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度且在有限区间上的测度有限. 则由

$$F(x)=\mu((0,x]),\ x>0;\quad F(0)=0;\quad F(x)=-\mu((x,0]),\ x<0$$

所定义的函数是单增, 且规范化的.

注: (i). 若 F, G 单增, $F-G$ 是常数. 则它们给出了同样的测度.

$$\mu_F((a,b]) = F(b)-F(a) = G(b)-G(a) = \mu_G((a,b]).$$

反之, 若 μ 对应于 F, G 两个不同的函数. 则 $F-G$ 是常数.

若 $\mu((a,b]) = F(b)-F(a) = G(b)-G(a)$, $\forall\, a<b$.

则 $F(b)-G(b) = F(a)-G(a)$. 故 $F-G$ 是常数.

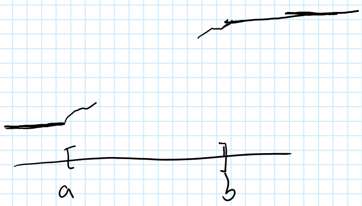
(ii). 上述构造的测度 μ 可以定义在更大的 σ-代数上.

(iii). 若 F 是 $[a,b]$ 上的单增, 规范化的函数. 可将其延拓成 $\mathbb{R}$ 上的单增, 规范化的函数.

这样所得到的测度 $\mu((-\infty,a])=0$,

$\mu([b,+\infty])=0$. 且

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu = \int_a^b f\,dF.$$



(iv). 上面定义的 Lebesgue−Stieltjes 积分可以推广到 F 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数的情形. 设 $F=\sum_{j=1}^{4}\varepsilon_j F_j$, $\varepsilon_j\in\{\pm1,\pm i\}$.

则 $\int_a^b f(x)\,dF = \sum_{j=1}^{4}\varepsilon_j\int_a^b f\,dF_j$, 其中 f 关于 $\mu=\sum_{j=1}^{4}\varepsilon_j\mu_j$ 可积.

(v). ① 若 $F\in AC([a,b])$, 则 $\int_a^b f(x)\,dF = \int_a^b f(x)F'(x)\,dx$, f Borel 可测, 且关于 $\mu=dF$ 可积.

② 若 $j_n(x)=\begin{cases}0 & x<x_n\\ 1 & x\ge x_n\end{cases}$. 令 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n j_n(x)$.

则 $\int_a^b f(x)\,dF = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\alpha_n$.

特别地, 如果 $\{x_n\}\cap E=\phi$. 则 $\int_E dF = \int_a^b 1_E\,dF = \sum_{n=1}^{\infty}1_E(x_n)\alpha_n = 0$.

$$\mu(\{x_n\}) = \int_a^b 1_{\{x_n\}}\,dF(x) = \sum_{k=1}^{\infty}1_{\{x_n\}}(x_k)\,\alpha_k = \alpha_n.$$

③ 特别地, 若 $F(x)=H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$ (Heaviside function).

$+\infty$

则 $\int_{-\infty} f(x)\,dH = f(0)$

4. 测度的绝对连续性.

4.1. 带号测度.

令 $(X, \mathcal{M})$ 是测度空间, $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度是一个函数 $\nu: \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$

s.t.

$\nu(\phi) = 0$.

②. ν 最多取 $\pm\infty$ 中的一个值.

③ 若 $E_j, j=1,2,\cdots$ 是 $\mathcal{M}$ 中不交的集合, 则 $\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$.

其中, 如果 $\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$ 有限, 则 $\sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$ 绝对收敛.

· 每个测度都是带号测度, 称之为正测度.

例 1. 如果 μ_1, μ_2 是测度, 其中一个有限. 则令 $\nu = \mu_1 - \mu_2$, 则 ν 是带号测度.

如果 $\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) < +\infty$, 若 μ_2 有限测度, 则 $\mu_2(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) < +\infty$.

故 $\mu_1(\bigcup E_j) = \mu_2(\bigcup E_j) + \nu(\bigcup E_j) < +\infty$.

故 $\mu_1(\bigcup E_j) + \mu_2(\bigcup E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(E_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_2(E_j) < +\infty$

因此 $\nu(E_j) - \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu_1(E_j) - \mu_2(E_j))$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu_1(E_j) - \mu_2(E_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(E_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_2(E_j) < +\infty.$$

2. 若 μ 是一个测度, $f: X \to [-\infty, +\infty]$ μ-可测. 且 $\int_X f^+$, $\int_X f^-$ 至少有一个是有限的. 令 $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$. 则 ν 是带号测度.

命题. 设 ν 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度. 若 $E_j \nearrow E$, $E_j, E \in \mathcal{M}$. 则

$\nu(E) = \nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \nu(E_j)$. 若 $E_j \searrow E$, $\nu(E_1) < +\infty$. 则

$\nu(E) = \nu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \nu(E_j)$.

若 ν 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度, 称集合 $E \in \mathcal{M}$ 是正集, 如果 $\nu(F) \geq 0$, $\forall F \subset E$ 可测.

类似可定义负集, 零集.

引理 3.2. ① 正集的任意子集都是正集.

② 正集的可数并仍是正集.

Pf. ① 由定义可得.

②. 令 E_j 是一列正集. 要证 $\underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}_{=E}$ 也是正集. 不妨设 E_j 是不交的.

[illegible]

(2). 令 E_j 是一列正集. 要证 $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ 也是正集. 不妨设 E_j 是不交的.

对于任意E的可测子集F, $F=\bigcup_{j=1}^{\infty}(F\cap E_j)$

故 $\nu(F)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu(F\cap E_j)\geq 0$.

Thm 3.3 (Hahn 分解). 若 ν 是一个带号测度, 则存在 ν-正集 P, ν-负集 N, s.t. $P\cup N=X$, $P\cap N=\phi$. 若 P', N' 是另一个这样的分解, 则 $P\Delta P'$ 是 ν-零集.

证明: 不妨设 ν 不取值 $+\infty$. (否则考虑 $-\nu$). 令 $m=\sup\{\nu(E) \mid E \text{ 正集}\}$.

则存在一列正集 P_j, s.t. $\nu(P_j)\to m$. 令 $P=\bigcup_{j=1}^{\infty}P_j$, 则 P 是正集.

且 $\nu(P)=m$. 令 $N=X\setminus P$. 要证 N 是负集.

否则, 设 N 不是负集.

(i) N 不包含任意非空正集. 若 $E\subset N$, E 正集, 且 $\nu(E)>0$.

则 $E\cup P$ 是正集. 且 $\nu(E\cup P)=\nu(E)+\nu(P)=m+\nu(E)>m$.

与 $\sup m$ 的定义矛盾!

(ii). 若 $A\subset N$, $\nu(A)>0$. 则存在 $B\subset A$, s.t. $\nu(B)>\nu(A)$.

由于 A 不是正集, 存在 $C\subset A$, s.t. $\nu(C)<0$. 令 $B=A\setminus C$, 则

$\nu(B)=\nu(A)-\nu(C)>\nu(A)$.

(iii). 构造一列 n_j, A_j.

由于 N 不是负集, 故存在 $A\subset N$, s.t. $\nu(A)>0$. 则由 (ii) 可知, 存在 $B\subset A$,

s.t. $\nu(B)>\nu(A)$. 令 n_1 是最小整数, s.t. $\exists A_1\subset A$, $\nu(A_1)>\frac{1}{n_1}$.

再由 (ii), 令 n_2 是最小整数 s.t. $\exists A_2\subset A_1$, $\nu(A_2)>\nu(A_1)+\frac{1}{n_2}$.

不断重复, 取 n_j 是最小整数, s.t. $\exists A_j\subset A_{j-1}$ 且 $\nu(A_j)>\nu(A_{j-1})+\frac{1}{n_j}$.

令 $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j$, 由于 $\nu(A_1)<+\infty$, 故 $\infty>\nu(A)=\lim_{j\to\infty}\nu(A_j)>\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}$

因此, $n_j\to\infty$, as $j\to\infty$. 又因为 $\nu(A)>0$, 再由 (ii), $\exists B\subset A$,

及 n, s.t. $\nu(B)>\nu(A)+\frac{1}{n}$. 令 $n_{j_0}>n$, 则 $\nu(B)>\nu(A_{j_0-1})+\frac{1}{n}$.

$n<n_{j_0}$.

由于 $B\subset A_{j_0-1}$, 与 n_{j_0} 取法矛盾!

因此, N 是负集.

(iv). 若 P', N' 是另一对满足定理条件的, 则 $P\setminus P'\subset \overset{\text{正集}}{P}$, 且 $P\setminus P'\subset N'$ 负集.

故 $P\setminus P'$ 是零集. 类似可证 $N\setminus N'$ 也是零集.