实分析

2020年2月19日 16:37

目标：测量 $\mathbb{R}^d$ 中的集合的"测度" s.t.

① $m(R)=|R|$　② $m(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)=\sum m(E_j)$　③ $m(E+h)=m(E)$.

外测度 $m_*(E)=\inf\{\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j| \mid \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ 是E的闭方体覆盖$\}$

① $m_*(\phi)=0$

② $m_*(Q)=|Q|$，Q 闭方体

要证 $A=B$，只须证明 $A\le B$ 及 $B\le A$. 要证 $A\le B$，只要证明 $\forall\varepsilon>0$，$A\le B+\varepsilon$ 或者 $A-\varepsilon\le B$.

③ Q是开方体，则 $m_*(Q)=|Q|$.

· 由于 $\bar{Q}$ 是Q的闭方体覆盖，故 $m_*(Q)\le|\bar{Q}|=|Q|$

· 要证 $|Q|\le m_*(Q)$. 事实上，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ Q的闭方体 $Q_0\subset Q$，且 $|Q|\le|Q_0|+\varepsilon$. 由于Q的闭方体覆盖一定是 Q_0 的闭方体覆盖，故

$|Q|-\varepsilon\le|Q_0|=m_*(Q_0)\le m_*(Q)$

由ε的任意性，有 $|Q|\le m_*(Q)$.

④ 矩体R的外测度 $m_*(R)=|R|$.

· $|R|\le m_*(R)$. 不妨设 $m_*(R)<+\infty$.

对于任意的R的闭方体覆盖 $\bigcup Q_j$，令 S_j 是包含 Q_j 的开方体，且 $|S_j|\le(1+\varepsilon)|Q_j|$.

则 $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ 是R的开覆盖，由有限覆盖定理，存在 $S_{j_1},\dots,S_{j_N}$，s.t. $\bigcup_{k=1}^{N} S_{j_k}\supset R$.

故 $\bigcup_{k=1}^{N}\bar{S}_{j_k}\supset R$. 由Lem 1.2，$|R|\le\sum_{k}^{N}|\overline{\quad}|\le\sum_{k=1}^{N}\quad\le\sum_{k=1}^{N}(1+\varepsilon)|Q_{j_k}|$

$\le(1+\varepsilon)\sum_{j=1}$

则 $|R|\le(1+\varepsilon)m_*(R)$

再由ε的任意性，可得 $|R|\le m_*(R)$.

· $|R|\ge m_*(R)$.

用坐标线形成边长为 $\frac{1}{k}$ 的方体网格，其中包含于R的方体的集合记为Q，

即与Q相交，又与Q'相交的方体的集合记为Q'. 则 $\sum_{Q\in Q'}|Q| \le |R|$

且 $R \subset \bigcup_{Q\in Q'\cup Q} Q$. 于是，$m_*(R) \le \sum_{Q\in Q'}|Q| + \sum_{Q\in Q}|Q| \le \frac{C}{k} + |R|$

令 $k\to\infty$，则有 $m_*(R)\le|R|$.

⑤ $m_*(\mathbb{R}^d)=\infty$.

由于$\mathbb{R}^d$的闭方体覆盖也是Q_k的闭方体覆盖，则 $m_*(\mathbb{R}^d)\ge m_*(Q_k)$

而$m_*(Q_k)=|Q_k|=k^d$. 当k趋于∞时，有$m_*(\mathbb{R}^d)=+\infty$.

⑥ $m_*(\mathcal{C})=0$.

由于$\mathcal{C}\subset\mathcal{C}_k, \forall k$. 故 $m_*(\mathcal{C})\le m_*(\mathcal{C}_k)\le 2^k\cdot 3^{-k}=(\frac{2}{3})^k$

令$k\to\infty$，则有$m_*(\mathcal{C})=0$.

外测度的性质.

由定义可知，$\forall\varepsilon>0, \exists \bigcup Q_j\supset E$, s.t. $|Q_j|\le m_*(E)+\varepsilon$.

1. 单调性. 若$E_1\subset E_2$，则$m_*(E_1)\le m_*(E_2)$

若$\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$是$E_2$的闭方体覆盖，则它也是$E_1$的闭方体覆盖. 故 $m_*(E_1)\le\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|$

对E_2的闭方体覆盖取下确界. 则有 $m_*(E_1)\le m_*(E_2)$.

claim: 若E是有界集，则$m_*(E)<+\infty$.

由E有界可知 $\exists r>0$, s.t. $E\subset B_r$. 存在有限测度的方体$Q\supset B_r$.

故$E\subset Q$. 由单调性，$m_*(E)\le m_*(Q)<+\infty$.

2. 可数次可加性.

若$E=\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$，则$m_*(E)\le\sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$.

证明：不妨设 $m_*(E_j)<+\infty$，则 $\forall j$，$m_*(E_j)<+\infty$.

$\forall\varepsilon>0, \exists\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{k,j}\supset E_j$, s.t. $\sum_{k=1}^{\infty}|Q_{k,j}|\le m_*(E_j)+\varepsilon/2^j$

于是，$\bigcup Q_{k,j}$是$\bigcup E_j=E$的闭方体覆盖. 且

$$m_*(E)\le \sum_{k,j=1}^{\infty}|Q_{k,j}| = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|Q_{k,j}|\right)\le \sum_{j=1}^{\infty}\left(m_*(E_j)+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)+\varepsilon$$

由ε的任意性，可知 $m_*(E)\le \sum m_*(E_j)$.

3. 若$E\subset\mathbb{R}^d$，∃开集$O\supset E$，s.t. $m_*(O)\le m_*(E)+\varepsilon$.

由外测度的定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\bigcup Q_j\supset E$，s.t. $\sum|Q_j|\le m_*(E)+\frac{\varepsilon}{2}$.

令O_j为包含Q_j的开方体，并且$|O_j|\le|Q_j|+\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. 令$O=\bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$

则O是开集，且 $m_*(O)\le \sum_j\left(|Q_j|+\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)$

$= \sum_{j=1}^{\infty} \cancel{m_*(Q_j)} \le \cancel{m_*(E)}+\varepsilon$.

4. 若$E=E_1\cup E_2$，$dist(E_1,E_2)>0$

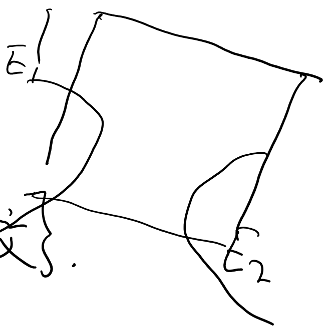
则 $m_*(E)=m_*(E_1)+m_*(E_2)$.

证明：由外测度的次可加性，$m_*(E)\le m_*(E_1)+m_*(E_2)$. 故只需证明

$m_*(E_1)+m_*(E_2)\le m_*(E)$.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\bigcup Q_j\supset E$，s.t. $\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|\le m_*(E)+\varepsilon$.

不妨设Q_j只与E_1,E_2中的一个相交，否则，等分各边成更小的方体，由于$d(E_1,E_2)>0$，不断等分各边直至小方体的直径小于$\delta=d(E_1,E_2)$.



令$J_1=\{j\mid Q_j与E_1相交\}$，$J_2=\{j\mid Q_j与E_2相交\}$.

则$J_1\cap J_2=\emptyset$. $E_1\subset\bigcup Q_j$　$E_2\subset\bigcup_{j\in J_2}Q_j$.

由单调性，$m_*(E_1)\le\sum_{j\in J_1}|Q_j|$，$m_*(E_2)\le\sum$

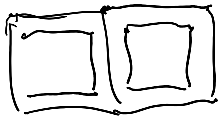
故 $m_*(E_1)+m_*(E_2)\le\sum|Q_j|\le m_*(E)+\varepsilon$.

5. 若E是可数个闭方体的几乎不交并 $E=\bigcup_{}^{\infty}Q_j$，则 $m_*(E)=\sum_{j=1}$

Pf. 只需证明 $\forall \varepsilon>0$, $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \le m_*(E)+\varepsilon$.

令 $\tilde{Q}_j$ 是包含于 Q_j 的方体 s.t. $|Q_j| \le |\tilde{Q}_j| + \frac{\varepsilon}{2^j}$. 则

$\forall N$, $\tilde{Q}_1, \cdots, \tilde{Q}_N$ 彼此不交. 且距离大于0.



由性质4可得, $m_*(\bigcup \tilde{Q}_j) =$

故 $m_*(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j) \ge m_*(\bigcup \tilde{Q}_j) = \sum_{j=1}^{N} |\tilde{Q}_j| \ge \sum ($

由ε的任意性, $m_*(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j) \ge \sum_{j=1}^{N} |Q_j|$

令 $N\to\infty$, 则 $m_*(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j) \ge \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$.

第3节. 可测集与Lebesgue测度.

称 $E\subset\mathbb{R}^d$ 是Lebesgue可测的, 如果 $\forall \varepsilon>0$, 存在开集 $O\supset E$, s.t. $m_*(O-E)<\varepsilon$.

简称E是可测的.

若E是可测的, 定义它的外测度为Lebesgue测度.

性质1. 开集都是可测的.

性质2. 若 $m_*(E)=0$. 则E可测.

由外测度的性质, $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 开 $O\supset E$, s.t. $m_*(O)\le m_*(E)+\varepsilon=\varepsilon$

故 $m_*(O-E)\le m_*(O)\le\varepsilon$.

性质3. 可测集的可数并是可测的.

要证: E_j 可测, $\forall j$. 则 $E=\bigcup E_j$ 是可测的.

由 E_j 可测, $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 开集 $O_j\supset E_j$, $m_*(O_j-E_j)<\frac{\varepsilon}{2^j}$. 令 $O=\bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$

则 $O\supset E$ 且

$$m_*(O-E) = m_*(\bigcup O_j - \bigcup E_j) \le m_*(\bigcup_{j=1}^{\infty}(O_j-E_j))$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} m_*(O_j-E_j) \le$$

性质4. 闭集是可测的.

引理. 若F是闭集, K紧集, $K\cap F=\phi$, 则 $\mathrm{dist}(F,K)>0$.

证明: 由于 $K\subset F^c$ 开, 故 $\forall x\in K$, 存在 $r_x>0$, s.t. $B_{3r_x}\subseteq F^c$.

则 $\bigcup_{x\in K} B_{2r_x}$ 是K的一个开覆盖. 由有限覆盖定理, 存在 $i=1,2,\cdots,N$, s.t.

$\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, 2r_{x_i}) \supset K$. 令 $r=\min(r_1,r_2,\cdots,r_N)$. 则 $d(K,F)>r$.

事实上, $\forall y\in F$, $x\in K$, $\exists j$ s.t. $x\in B(x_j, 2r_{x_j})$.

故 $|x-x_j|<2r_{x_j}$, $|x_j-y|>3r_{x_j}$.

于是, $|x-y|\geq |x_j-y|-|x-x_j|\geq 3r_{x_j}-2r_{x_j}=r_{x_j}\geq r$.

证明性质4.