定理(Egorov) 设$\{f_k\}$是定义在E上的可测函数列, $m(E)<+\infty$.

设$f_k\to f$ a.e. 则$\forall \varepsilon>0$, ∃闭集$A_\varepsilon\subset E$, s.t. $m(E-A_\varepsilon)<\varepsilon$,

且$f_k\to f$ uniformly on A_ε.

注1. $m(E)<+\infty$ 是必要的. 考虑 $f_n(x)=\chi_{(n,+\infty)}(x)$, 则 $f_n(x)\to 0$, as $n\to\infty$.

但在任何有限测度集合外, 不一致收敛到零.

注2. 结论中"$\varepsilon>0$". 令 $f_n(x)=\begin{cases} & \frac{1}{n}<x\le 1 \\ & 0<x\le \frac{1}{n} \\ & x=0 \end{cases}$, 则$f_n(x)\to 0$, $\forall x\in[0,1]$.

但 $\forall Z\subset[0,1]$, $m(Z)=0$, $\sup\limits_{x\in[0,1]\setminus Z} f_n(x)=1, \forall n$. 故$f_n$不一致收敛到0.

定理4.5.(Lusin) 设$m(E)<+\infty$, f是E上(finite-valued)实值函数. 则$\forall\varepsilon>0$,

存在闭集$F_\varepsilon\subset E$, $m(E-F_\varepsilon)<\varepsilon$, 且$f|_{F_\varepsilon}$连续的.

证明: 一方面, 由Thm 4.3, 存在阶梯函数列f_n, s.t.

$f_n\to f$, a.e. 且$\forall n$, 存在$E_n\subset E$, s.t.

$m(E-E_n)<\frac{1}{2^n}$, 且f_n在E_n上连续.

另一方面, 由Egorov定理, $\forall\varepsilon>0$, ∃闭集$A_\varepsilon\subset E$, $m(E-A_\varepsilon)<\varepsilon/3$,

且f_n在A_ε上一致收敛到f.

令$F'=A_\varepsilon-\bigcup\limits_{n\ge N}E_n$, 其N使得 Σ , 则 $m(E-F')\le$

$m(E-A_\varepsilon)+\sum m(E_n)<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3}$ 且 $f_n|_{F'}$连续, 同时

$f_n|_{F'}$一致收敛到$f|_{F'}$. 故$f|_{F'}$是连续的.

由Thm 3.4, 存在闭集$F_\varepsilon\subset F'$, s.t. $m(F'-F_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{3}$. 故

$m(E-F_\varepsilon)<\varepsilon$, 且 $f|_{F}$ 是连续的.

注1、2不能取0. 在[0,1]中构造类Cantor集 $\mathcal{C}$, s.t. $m(\mathcal{C})=\frac{1}{2}$.

令 $f(x)=\begin{cases} 1 & x\in\mathcal{C} \\ -1 & x\in[0,1]\setminus\mathcal{C} \end{cases}$.

则对任意的零测集, f在 $[0,1]\setminus Z$ 上是不连续的.

由于 $[0,1]\setminus Z\cap\mathcal{C}\neq\phi$, $\exists x\in[0,1]\setminus Z\cap\mathcal{C}$.

claim: $\forall\delta$, $(x-\delta,x+\delta)\cap[0,1]\setminus(Z\cup C)\neq\phi$.

故f在x处不连续.

第二章 积分理论

1. Lebesgue积分: 基本性质和收敛定理

第一步: 简单函数

设 $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}$ $m(E_k)<+\infty$.

典则表示: a_k 彼此不同且 E_k 彼此不交. a_k 非零.

由于简单函数只取有限个值, 设非零取值为 $\{c_1,\cdots,c_M\}$. 令 $F_k=\{x:\varphi(x)=c_k\}$

则 F_k 互不相交. 且 $\varphi=\sum_{k=1}^{M}c_k\chi_{F_k}$

设 φ 是简单函数, 其典则表示为 $\varphi=\sum_{k=1}^{M}c_k\chi_{F_k}$. 则定义

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)dx=\sum_{k=1}^{M}c_k m(F_k).$$

若E是 $\mathbb{R}^d$ 中的有限测度可测集, 则 $\varphi\chi_E$ 也是简单函数. 定义

$$\int_E\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\chi_E(x)dx.$$

命题1.1. 上面所定义的简单函数的积分满足下列性质:

(i) 与表示方式无关. 若 $\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}$ 是任一表示. 则 $\int\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k m(E_k)$.

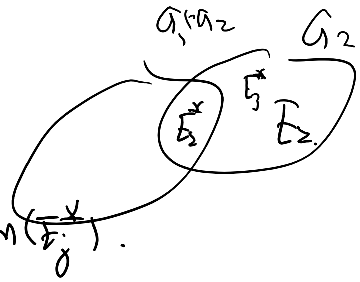
证明: ① 先假设 E_k 互不相交. 但 a_k 未必彼此不同且非零.

此时令 a_k 的每个不同的取值为 a. 令 $E'_a = \bigcup_{\{k: a_k = a\}} E_k$，由 E_k 互不相交，

$$m(E'_a) = \sum_{\{k:a_k=a\}} m(E_k)$$ 且 $\varphi = \sum_a a \chi_{E'_a}$ 是 φ 的规范表示.

故 $\int\varphi = \sum_a a\, m(E'_a) = \sum_a a\left(\sum_{\{k:a_k=a\}} m(E_k)\right) = \sum a_k m(E_k)$.

② 若 $\varphi = \sum a_k$ E_k 未必互不相交.



令 $E_k = \bigcup_{j=1} E_j^*$，且 E_j^* 彼此不交.

且 $\forall k$, $E_k = \bigcup_{E_j^* \subset E_k} E_j^*$. 故 $m(E_k) = \sum_{\{E_j^* \subset E_k\}} m(E_j^*)$.

令 $a_j^* = \sum_{\{k: E_k \supset E_j^*\}} a_k$，则 $\varphi = \quad *$. 此时，$*$ 互不相交.

由①，$\int\varphi = \sum_j a_j^* m(E_j^*) = \sum_j \left(\sum_{\{k:E_k\supset E_j^*\}} a_k\right) m(E_j)$

$$= \sum_{k=1}^N a_k m(E_k).$$

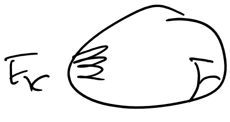
(ii) 线性性. 如果 φ, ψ 是简单函数, $a, b \in R$, 则

$$\int(a\varphi+b\psi) = a\int\varphi + b\int\psi.$$

只证 $\int(\varphi+\psi) = \int\varphi+\int\psi$. 设 $\varphi = \sum_{k=1}^N a_k\chi_{E_k}$, $\psi = \sum_{k=1}^N b_k\chi_{F_k}$.

则 $\varphi+\psi = \sum_{k=1}^N (a_k\chi_{E_k} + b_k\chi_{F_k} \quad k=1) \quad + b_k\chi_{F_k\setminus G_k} + (a_k+b_k)\chi_{G_k}]$

故 $\int(\varphi+\psi) = \sum_{k=1}^N [a_k m(E_k\setminus G_k) + b_k m(F_k\setminus G_k) + (a_k+b_k) m(G_k)]$.



$$= \sum_{k=1}^N a_k m(E_k) + \sum_{k=1}^N b_k m(F_k) = \int\varphi+\int\psi.$$

(iii) 区域可加性. 若 E, F 是 $\mathbb{R}^d$ 中不交的可测集. 且 $m(E), m(F) < +\infty$.

则 $\int_{E\cup F}\varphi = \int_E \varphi + \int_F \varphi$.

Pf. 由 $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F$. 故

$$\int_{E\cup F}\varphi = \int \varphi\chi_{E\cup F} = \int \varphi(\chi_E+\chi_F) = \int_E \varphi + \int_F \varphi.$$

(iv) 单调性. 若 $\varphi \le \psi$ 简单函数. 则 $\int\varphi \le \int\psi$.

Pf. $\psi-\varphi \ge 0$ 是简单函数. 令 $\eta \triangleq \psi-\varphi$ 的典则表示为 $\eta = \sum_{k=1}^{N} a_k\chi_{E_k}$,

其中 $a_k \ge 0$. 故 $\int\eta \ge 0$. 故 $\int\psi - \int\varphi \ge 0 \Rightarrow \int\varphi \le \int\psi$.

(v). 三角不等式. 若 φ 是简单函数. $|\varphi|$ 也是简单函数. 且 $\left|\int\varphi\right| \le \int|\varphi|$.

Pf. 令 $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k\chi_{E_k}$ 是典则表示. 则 $|\varphi| = \sum_{k=1}^{N}|a_k|\chi_{E_k}$.

于是, $\left|\int\varphi\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k)\right| \le \sum^{N}|a_k|\, m(E_k) = \int|\varphi|$.

注: 若 f, g 是几乎处处相等的简单函数. 则 $\int f = \int g$.

若 f 简单函数. 且 $f=0$, a.e. 则 $\int f = 0$. 令 $E = \{x : f(x) \ne 0\}$. 则 $m(E)=0$.

由 f 简单函数. $|f| \le M$, for some $M>0$. $|f(x)| \le M\chi_E$.

故由三角不等式, $\left|\int f\right| \le \int|f| \le \int M\chi_E = M\, m(E) = 0$

也就是说. $\int f = 0$.

第二步: 支在有限测度集合上的有界函数.

对函数 f, 定义 $\operatorname{supp} f = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \ne 0\}$. 称为 f 的支集. 若 f 可测,

则 $\operatorname{supp} f$ 可测.

称 f 支在集合 E 上, 如果 $f(x)=0$, $\forall x \notin E$. ($\operatorname{supp} f \subset E$)

由Thm 4.2 (Chapter 1)，若f是支在有限测度集合E上的有界(M)的可测函数。存在简单函数列$\{\varphi_n\}$，$|\varphi_n(x)| \leq M$，φ_n支于E，且$\varphi_n(x) \to f(x)$，$\forall x$。

引理1.2．令f是支在有限测度集合E上的有界函数．若$\{\varphi_n\}$是任意的简单函数列，有界(M)，支在E，且$\varphi_n(x) \to f(x)$，a.e. 则

(i) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int \varphi_n$ 存在

(ii) 若$f=0$, a.e. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n = 0$。

$$\left|\int\varphi_n - \int\varphi_m\right| = \left|\int(\varphi_n-\varphi_m)\right| \leq \int_E |\varphi_n-\varphi_m|$$

$\forall x$，$\exists N$，s.t. $\forall n, m > N$，$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)| < \varepsilon$。

证明：由于$m(E) < +\infty$．由Egorov，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$闭集$A_\varepsilon \subset E$，$m(E-A_\varepsilon) < \varepsilon$，且$\varphi_n$在$A_\varepsilon$上一致收敛到$f$。

于是，$\exists N$，s.t. $n, m > N$，$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$，$\forall x \in A_\varepsilon$。

因此
$$\left|\int_E\varphi_n - \int_E\varphi_m\right| = \left|\int_E(\varphi_n-\varphi_m)\right| \leq \int_E|\varphi_n-\varphi_m| = \int_{E\setminus A_\varepsilon}|\varphi_n-\varphi_m| + \int_{A_\varepsilon}|\varphi_n-\varphi_m|$$

$$\leq \int 2M\chi_{E\setminus A_\varepsilon} +$$

$$= 2M\, m(E-A_\varepsilon) + \varepsilon\, m(A_\varepsilon)$$

$$< 2M\varepsilon + \varepsilon\, m(E)$$

故$\int\varphi_n$是Cauchy列．故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n$ 存在。

(ii). 要证 $\left|\int\varphi_n\right| < \varepsilon$，$\forall \varepsilon > 0$。

重复上面过程．
$$\left|\int_E\varphi_n\right| \leq \int_{A_\varepsilon}|\varphi_n| + \int_{E\setminus A_\varepsilon}|\varphi_n| \leq \varepsilon\, m(A_\varepsilon) + M\, m(E-A_\varepsilon)$$

$$\leq \varepsilon\, m(E) + M\varepsilon,\quad n\text{充分大}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\varphi_n = 0$。

$\boxed{///}$

若 f 是支在有限测度集合上的有界函数，定义

$$\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int \varphi_n(x)dx,$$

其中 $\{\varphi_n\}$ 是任意的简单函数列，满足 $|\varphi_n(x)|\le M$，φ_n 支于 f 的支集，且 $\varphi_n\to f$. a.e.

注：$\int f$ 与 φ_n 的选取无关.

若 ψ_n 是另一个简单函数列，满足同样的条件. 令 $\eta_n=\psi_n-\varphi_n$. 则 $|\eta_n|\le 2M$.

η_n 支于 f 的支集. 且 $\eta_n\to 0$, a.e. 由 Lem 1.2 (iii). $\int\eta_n\to 0$. as $n\to\infty$.

又由 Lem 1.2 (ii), $\lim\limits_{n\to\infty}\int\psi_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n$ 存在. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\psi_n=\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n$.

若 $E\subset\mathbb{R}^d$, $m(E)<+\infty$. f 有界函数. $m(\mathrm{supp} f)<+\infty$.

定义 $\int_E f(x)dx=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\chi_E(x)dx$

定理 1.4 (有界收敛定理). 设 $\{f_n\}$ 是一列支在有限测度集合 E 上的有界可测函数.

$|f_n(x)|\le M$. 且 $f_n(x)\to f(x)$, a.e. 则 f 可测，支于 E. 几乎处处有界.

并且 $\int|f-f_n|\to 0$, as $n\to\infty$. 因此 $\int f_n\xrightarrow{n\to\infty}\int f$.

证明：只要证明 $\int|f_n-f|\to 0$.

由 Egorov 定理，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 闭集 $A_\varepsilon\subset E$, s.t. $m(E-A_\varepsilon)<\varepsilon$,

f_n 在 A_ε 上一致收敛到 f. 故对于充分大的 n, $|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$. $\forall x\in A_\varepsilon$.

所以，$\int_E|f_n-f|=\int_{E\setminus A_\varepsilon}|f_n-f|+\int_{A_\varepsilon}|f_n-f|\le 2M\,m(E-A_\varepsilon)+\varepsilon\, m(E)$

$\le(2M+m(E))\varepsilon$，当 n 充分大.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|=0$.

claim: 若 $f\ge 0$ 是支在有限测度集合 E 上的有界函数. 且 $\int f=0$. 则 $f=0$. a.e.

只要证明 $\tilde{E}=\{x: f(x)>0\}$ 是零测集. 令 $E_k=\{x\in E \mid f(x)\geq\frac{1}{k}\}$. 则

$\tilde{E}=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. 由于 $\int_{E_k}f\leq\int_E f=0$

$\int_E f=\int_{E_k}f+\underbrace{\int_{E\setminus E_k}f}_{\geq 0}\geq\int_{E_k}f$.

故 $0=\int_{E_k}f\geq\int\frac{1}{k}\chi_{E_k}=\frac{1}{k}m(E_k)$, $\forall k$.

于是, $m(E_k)=0$, $\forall k$.

因此, $m(\tilde{E})=\lim_{k\to\infty}m(E_k)=0$