如何证明函数的可测性？

1. 定义及等价形式.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, a))$ 可测.

2. 可测函数的某些基本运算.

3. 构造可测函数列, s.t. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

"几乎处处"

我们称定义在集合 E 上的函数 f, g 几乎处处相等, 如果集合 $\{x: f(x) \neq g(x)\}$ 是零测集. 记为 $f=g$, a.e. $x \in E$. 有时简写成 $f=g$, a.e.

· 若 f 可测, 且 $f=g$, a.e. 则 g 可测.

$\forall a$, $\{g<a\}$ 与 $\{f<a\}$ 相差零测集, 由 f 可测知 $\{f<a\}$ 是可测的.

故 $\{g<a\}$ 可测.

称某个性质几乎处处成立, 如果它在某个零测集外成立.

若 $\{f_n\}$ 是一列可测函数. 且 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, a.e. 则 f 可测.

令 $g(x) = \limsup f_n(x)$, 则 $f(x) = g(x)$, a.e. 而由于 f_n 可测, g 是可测的.

故 f 可测.

$f(x)$ 几乎处处有界: $\exists M \geq 0$, s.t. $|f(x)| \leq M$, a.e. ($\{x: |f(x)|>M\}$ 是零测集)

$f(x)$ 几乎处处有限: $|f(x)| < +\infty$, a.e. ($\{x: |f(x)| = +\infty\}$ 是零测集).

4.2. 用简单函数或阶梯函数逼近可测函数.

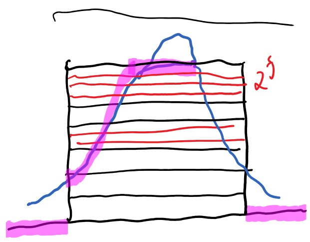
$f(x) = \sum^{N} a_k \chi_{Q_k}$ 阶梯函数.

$f = \sum_k \chi_{E_k}$ $m(E_k) < +\infty$.

简单函数.

定理4.1. 设 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的非负可测函数, 则存在非负单调递增的简单函数列 $\{\varphi_k\}$, 逐点收敛到 f.

即 $\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x)$, 且 $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$.



$k2^j$

证明: 对 $k \geq 1$, 令 Q_k 示以原点为中心, 边长为 k 的方体. 定义 $F_k(x) = \begin{cases} f(x) & x \in Q_k,\ f(x) \leq k \\ k & x \in Q_k,\ f(x) > k \\ 0 & \end{cases}$

则 $F_k(x) \to f(x)$, as $k \to \infty$.

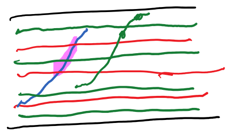
若 $f(x) < \infty$.

则 $F_k(x)\to f(x)$, as $k\to\infty$.　　　　若 $f(x)<\infty$.

$f(x)=\infty$. $F_k(x)=k$

$<F_k(x)\le$ —　　$0\le l\le k2^k-1$, 则 $E_{k,j}$ 可测.

则 $F_{k,j}$ 是简单函数.



$|F_{k,j}(x)-F_k(x)|$

$\le$

令 $\varphi_k(x)=F_{k,k}(x)$, 则 $|F_k(x)-\varphi_k(x)|\le\frac{1}{2^k}$, 故 $\varphi_k(x)\to f(x)$, as $k\to\infty$.

且 $\varphi_k(x)\le\varphi\ (x)$, $\forall x$.

定理4.2. 设f是R^d上的可测函数, 则存在简单函数列{　∞ 使得

$|\varphi_k(x)|\le|\varphi_{k+1}(x)|$, 且 $\lim\varphi_k(x)=f(x)$.

特别地, $|\varphi_k(x)|\le|f(x)|$, $\forall x, k$ $k\to\infty$

证明: 令 $f^+(x)=\max(f(x),0)\ge0$, $f^-(x)=\max(-f(x),0)\ge0$, f^+, f^- 可测.

则 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$, $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$. 由Thm 4.1, 存在非负递增

单函数列 $\varphi_k^{(1)}\nearrow f^+(x)$, $^{(2)}\nearrow f^-(x)$. 令 $\varphi_k(x)=\varphi_k^{(1)}(x)-\varphi_k^{(2)}(x)$,

则 φ_k 是简单函数. 且 $|\varphi_k(x)|=\ ^{(1)}(x)+\varphi_k^{(2)}(x)$　　于是 $\varphi_k(x)\to f^+(x)-f^-(x)=f(x)$

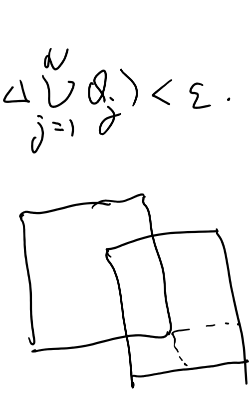
且 $|\varphi_k(x)|=\varphi_k^{(1)}(x)+\varphi_k^{(2)}(x)\nearrow f^+(x)+f^-(x)=|f(x)|$.

定理4.3. 设f是R^d上的可测函数, 则存在一列阶梯函数$\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$几乎处处收敛于$f(x)$.

证明: 第一步. 设 $f=\chi_E$, E可测, $m(E)<+\infty$.

由Thm3.4(iv), $\forall\varepsilon>0$, $\exists\bigcup_{j=1}^{N}Q_j$, Q_j闭方体, s.t. $m(E\triangle\bigcup_{j=1}^{N}Q_j)<\varepsilon$.

延长方体各边, 可得 $\tilde{R}_1,\cdots,\tilde{R}_M$, s.t. $\bigcup_{j=1}^{N}Q_j=\bigcup_{j=1}^{M}\tilde{R}_j$



且 $\tilde{R}_1,\cdots,\tilde{R}_M$ 几乎不交.

令 R_j 是包含于 $\tilde{R}_j$ 内部的矩形. s.t. $m(E\triangle\bigcup_{j=1}^{M}R_j)<2\varepsilon$

对于每段k, 只需存在 ψ_k 阶梯函数, s.t. 令 $f(x)=\Sigma$ 存在测度小于2ε的可测集 $E_k=\{x\mid f(x)\ne\psi_k(x)\}$, $m(E_k)<2^{-k}$

∞　　;　　$-k$

令 $F_k=\bigcup_{j=k+1}^{\infty}E_j$，则 $m(F_k)\le\sum_{j=k+1}^{\infty}m(E_j)\le\sum 2^{j}\le 2^{\cdots}$.

令 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$，则 $m(F)\le m(F_k)$.
$\le 2^{-k}$, $\forall k$.

由 k 的任意性，$m(F)=0$.

且 $\forall x\notin F$ 即 $x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^c=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k+1}^{\infty}E_j^c$

故 $\exists k$, s.t. $\forall j\ge k+1$, $f(x)=\varphi_j(x)$. $\Longrightarrow \varphi_j(x)\to f(x)$.

故 $\varphi_j\to f$. a.e.

第二步 作业.

4.3. Littlewood 三原理.

(i) 每个有限测度可测集都几乎是有限个方体的并.

(ii) 每个函数几乎都是连续的.

(iii) 每个收敛的可测函数列都几乎是一致收敛的.

定理 4.4 (Egorov) 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在 E 上可测函数列, $m(E)<\infty$.
设 $f_k\to f$, a.e. E. 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在闭集 $A_\varepsilon\subset E$, $m(E-A_\varepsilon)<\varepsilon$
且 $f_k(x)\to f(x)$, uniformly on A_ε.

证明: 不妨设 $f_k(x)\to f(x)$, $\forall x\in E$.
否则. 考虑 $\tilde{E}=\{x\in E\mid f_k(x)\to f(x)\}$.
则 $m(E-\tilde{E})=0$.

令 $E_k^n=\{x\in E\mid |f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{n},\ \forall j>k\}$.

则 $E_k^n\subset E_{k+1}^n$

因此. $\exists k_n$, s.t. $m(E-E_{k_n}^n)<\frac{1}{2^n}$.

要证: $\forall x\in A_\varepsilon$, $\forall n$, $\exists k(n)$,
s.t. $\forall j>k$, $|f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{n}$.

令 $E_k^n=\{x\in E\mid |f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{n},\ \forall j>k\}$

$\bigcap_n\bigcap_{k>k(n)}E_k^n$

$k\to\infty$

令 N, s.t. $\sum_{n\ge N} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$

令 $\tilde{A}_\varepsilon = \bigcap_{n\ge N} E^n_{k_n}$ 则

$$m(E-\tilde{A}_\varepsilon) = m\Big(E\cap \bigcup_{n\ge N}(E^n_{k_n})^c\Big) \le \sum_{n\ge N} m\big(E\cap (E^n_{k_n})^c\big)$$

$$\le \sum_{n\ge N} m(E-E^n_{k_n}) \le \sum_{n\ge N}\frac{1}{2^n} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

且 $\forall x\in\tilde{A}_\varepsilon$, $\forall n$, $|f_j(x)-f(x)|\le\frac{1}{n}$, $\forall j>k_n$.

故 $f_j\to f$ uniformly on $\tilde{A}_\varepsilon$.

再由Thm 3.4 (ii), $\exists$闭集 $A_\varepsilon\subset\tilde{A}_\varepsilon$, s.t. $m(\tilde{A}_\varepsilon-A_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}$.

因此, $m(E-A_\varepsilon)\le m(E-\tilde{A}_\varepsilon)+m(\tilde{A}_\varepsilon-A_\varepsilon)<\varepsilon$.

且 $f_j\to f$ uniformly on A_ε.