设f是广义实值函数 $f = f_+ - f_-$

① 定义 $\int f = \int f_+ - \int f_-$

② 若 $f \ge 0$，则 $\int f = \sup\limits_{0 \le g \le f} \int g$

g有界，支在有限测度集合上.

③ 若f有界，支在有限测度集合E上. 令$\{\varphi_n\}$是简单函数列，$|\varphi_n(x)| \le M$，φ_n支于E，且$\varphi_n \to f$, a.e. 定义 $\int f = \lim\limits_{n\to\infty}\int \varphi_n$.

④ φ简单函数，设 $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$. $m(E_k) < +\infty$. 则定义 $\int \varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k)$.

若$\int |f| < +\infty$，则称f可积.

收敛定理

① 有界收敛定理. $m(E) < \infty$. $|f_n(x)| \le M$. 支于E. $f_n \to f$ a.e $\Rightarrow \int |f_n - f| \to 0$.

② Fatou引理: $f_n \ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, a.e. $\int f \le \liminf\limits_{n\to\infty} \int f_n$.

③ 单调收敛定理: $f_n \ge 0$, $f_n \nearrow f \Rightarrow \int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$.

④ 控制收敛定理: $f_n \to f$ a.e, $|f_n(x)| \le g(x) \in L^1 \Rightarrow \int |f_n - f| \to 0$.

⑤ 正项级数逐项求积分 $a_k(x) \ge 0, \forall k. \Rightarrow \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx$.

考虑函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^{d+1}} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

claim: $\int_{|x| \ge \varepsilon} f(x)\,dx \le \frac{C}{\varepsilon}$, for some $C > 0$.

$$\int_{|x|\ge\varepsilon} f(x)\,dx = \int_{\bigcup_{k=0}^{\infty} \underbrace{\{x:\, 2^k\varepsilon \le |x| < 2^{k+1}\varepsilon\}}_{\triangleq A_k}} f(x)\,dx$$

$$= \int \sum_{k=0}^{\infty} f(x)\chi_{A_k}(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int \underbrace{f(x)\chi_{A_k}(x)}\, dx.$$

在 A_k 上, $0 \le f(x) \le \frac{1}{(2^k\varepsilon)^{d+1}} \chi_{A_k}(x)$, 故

$$\int_{|x|\ge\varepsilon} f(x)\,dx \le \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{1}{(2^k\varepsilon)^{d+1}} \chi_{A_k}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(A_k)}{(2^k\varepsilon)^{d+1}}$$

$$A_k = \{x: 2^k\varepsilon \le |x| < 2^{k+1}\varepsilon\} = 2^k\varepsilon \{x: 1 \le |x| < 2\} = 2^k\varepsilon A_0$$

故 $m(A_k) = (2^k\varepsilon)^d m(A_0)$

故 $\int_{|x|\ge\varepsilon} f(x)\,dx \le \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(2^k\varepsilon)^d\, m(A_0)}{(2^k\varepsilon)^{d+1}}} = \frac{2m(A_0)}{\varepsilon}$.

取 $C = 2m(A_0)$, 则 $\int_{|x|\ge\varepsilon} f(x)\,dx \le \frac{C}{\varepsilon}$.

测度与特征函数的积分.

1. 若 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $[0,1]$ 中的可测集. $[0,1]$ 中的每个点至少属于 n 个集合中的 k 个, $(k \le n)$. 则在 $E_1, \cdots, E_n$ 中必有一个集合的测度 $\ge \frac{k}{n}$.

证: 由定义, $\sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}(x) \ge k$, $\forall x \in [0,1]$.

在 $[0,1]$ 上积分, $\sum_{k=1}^{n} m(E_k) \ge k$

由鸽巢原理, 存在 k_0, s.t. $m(E_{k_0}) \ge \frac{k}{n}$.

2. 令 $\{E_k\}$ 是一列可测集 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < +\infty$. 则属于无穷多个 E_k 的点构成的集合测度为 0.

证: 令 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x)$, 要证 $E = \{x \mid f(x) = \infty\}$ 是零测集.

对 f 积分, $\int f = \int \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < +\infty$.

故 $f < +\infty$, a.e. 故 E 是零测集.

两个重要性质. [illegible] s.t. $\int |f| < \varepsilon$.

① $f\in L^1(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists B$, $m(B)<\infty$, $\cdots$ B^c ...

② $f\in L^1(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$. s.t 若 $m(E)<\delta$，则 $\int_E |f|<\varepsilon$.

设 $f_n\in L^1([0,1])$, $F\in L^1([0,1])$，且 (i) $|f_n(x)|\le F(x)$, $\forall x\in[0,1]$. $\forall n=1,2,\cdots$

(ii). 对任意的 $g\in C([0,1])$, $\lim_{n\to\infty}\int f_n g=0$.

证明：对任意的可测集 $E\subset[0,1]$. $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n=0$.

证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ s.t. $\forall\, m(D)<\varepsilon$,

$$\int_D F(x)\,dx<\varepsilon.$$

由第一章，存在开 $G\supset E\supset K$ 紧. s.t.

$m(G\setminus K)<\delta$,

于是存在 $g\in C([0,1])$. s.t. $0\le g\le 1$, $|g-\chi_E|\le\chi_{G\setminus K}$.

于是，$\int_E f_n=\int f_n(\chi_E-g)+\underbrace{\int f_n g}_{\downarrow n\to\infty,\ 0}$

而 $\left|\int f_n(\chi_E-g)\right|\le\int|f_n|\chi_{G\setminus K}$

$$\le\int_{G\setminus K}F(x)\,dx<\varepsilon.$$

故 $\forall\varepsilon>0$, $\left|\int_E f_n\right|<2\varepsilon$, 当 n 充分大.

即 $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n=0$.

$\int f_n(\chi_E-g)+\int f_n g$

$\forall\delta>0$，$\exists$ 开 $G\supset E\supset K$ 紧.

s.t. $m(G\setminus K)<\delta$. $0\le g\le 1$.

$\exists\, g\in C([0,1])$, s.t.

$|g-\chi_E|\le\chi_{G\setminus K}$.

$\left|\int f_n(\chi_E-g)\right|$

$\le\int_{G\setminus K}F(x)\,dx$.

2. 可积函数空间 $L^1(\mathbb{R}^d)$.

定义 $\|f\|=\|f\|_{L^1}=\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,dx$.

$L^1(\mathbb{R}^d)=\{f\text{ 可测}\mid \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}<+\infty\}$.

① $\|f\|_{L^1}=0 \Leftrightarrow f=0$, a.e.

... $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 则 $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$. 且 $\|g\|_{L^1}=\|f\|_{L^1}$.

① $\|f\|_{L^1}=0 \Leftrightarrow f=0$, a.e.

② 若 $f=g$, a.e. $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 则 $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$. 且 $\|g\|_{L^1}=\|f\|_{L^1}$.

③. 定义"$\sim$"：若 $f=g$, a.e. 则 $f\sim g$. 则"$\sim$"是等价关系.

$[f]=\{g \text{ 可测} \mid f=g, \text{a.e.}\}$. 则 $\forall g\in[f]$, $\|g\|_{L^1}=\|f\|_{L^1}$.

④. $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 表示 $[f]$.

命题 2.1. 设 $f, g\in L^1(\mathbb{R}^d)$

(i) $\|af\|_{L^1}=|a|\,\|f\|_{L^1}$, $\forall a\in\mathbb{C}$.

(ii). $\|f+g\|_{L^1}\le\|f\|_{L^1}+\|g\|_{L^1}$.

(iii) $\|f\|_{L^1}=0 \Leftrightarrow f=0$, a.e.

(iv) $d(f,g)=\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ 定义了 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 上的距离.

(① $d(f,g)\ge 0$, $d(f,g)=0 \Leftrightarrow f=g$, a.e. ② $d(f,g)=d(g,f)$

③ $d(f,g)\le d(f,h)+d(h,g)$, $\forall f,g,h\in L^1(\mathbb{R}^d)$).

称 $f_k\to f$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$, 如果 $d(f_k,f)\to 0$, 当 $k\to\infty$. $\Leftrightarrow \|f_k-f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\to 0$, as $k\to\infty$.

设 (V,d) 是度量空间, 如果对任意的 Cauchy 列 $\{x_k\}\subset V$, $(d(x_k,x_{k'})\to 0$, $k,k'\to\infty)$.

存在 $x\in V$, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$ $(d(x_k,x)\to 0$, as $k\to\infty)$.

定理 2.2. (Riesz-Fisher) 向量空间 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 在其度量下是完备的.

证明: 令 $\{f_n\}$ 是 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中的 Cauchy 列, 要证 $\exists f\in L^1$, s.t. $f_n\to f$ in L^1.

由于 $\{f_n\}$ 是 L^1 中的 Cauchy 列. $\forall k$, $\exists n_k$, s.t. $\forall n\ge n_k$, $\|f_n-f_{n_k}\|_{L^1}<2^{-k}$.

$k=1$. $\exists n_1$, s.t. $\|f_n-f_{n_1}\|_{L^1}<2^{-1}$.

$k=2$. $\exists n_2\ge n_1$, s.t. $\|f_n-f_{n_2}\|_{L^1}<2^{-2}$. 故 $\|f_{n_2}-f_{n_1}\|_{L^1}\le 2^{-1}$.

重复上面过程, 可得 $\{f_{n_k}\}$, s.t. $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_{L^1}<2^{-k}$.

下面要证明 $f_{n_k}(x)$ 几乎处处收敛.

$f_{n_k}=f_{n_1}+(f_{n_2}-f_{n_1})+\cdots+f_{n_k}-f_{n_{k-1}}$

令 $f(x)=f_{n_1}(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x))$,

令 $f(x)=f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x))$，

$f_{n_k}=f_{n_1}+(f_{n_2}-f_{n_1})+\cdots+(f_{n_k}-f_{n_{k-1}})$

$=f_{n_1}+\sum_{j=1}^{k-1}(f_{n_{j+1}}-f_{n_j})$

$\to f_{n_1}+\sum_{j=1}^{\infty}(f_{n_{j+1}}-f_{n_j})$.

则 $|f(x)|\le \underbrace{|f_{n_1}(x)|+\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|}\triangleq g(x)$.

由 Cor 1.10, $\int|g(x)|\le\int|f_{n_1}(x)|+\sum_{k=1}^{\infty}\int|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|$

$\le\int|f_{n_1}|+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}<+\infty$.

故 $|g(x)|<+\infty$, a.e. 因此，$|f(x)|<+\infty$, a.e.

故 $f_{n_k}(x)=f_{n_1}(x)+\sum_{j=1}^{k-1}(f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x))\xrightarrow{k\to\infty}f(x)$, a.e.

下面证明 $f_{n_k}\to f$ in L^1.

由于 $|f_{n_k}(x)|\le g(x)\in L^1$, $f_{n_k}\to f$, a.e. 故由控制收敛定理，$\|f_{n_k}-f\|_{L^1}\to 0$, as $k\to\infty$.

再证明 $f_n\to f$ in L^1.

$\|f_n-f\|_{L^1}\le\|f_n-f_{n_k}\|_{L^1}+\|f_{n_k}-f\|_{L^1}\to 0$, as $k,n\to\infty$.

推论 2.3. 若 $f_n\to f$ in L^1，则存在子列 $\{f_{n_k}\}$, s.t. $f_{n_k}\to f$, a.e.

稠密性. 称函数族 $G\subset L^1(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中是稠密的，如果 $\forall f\in L^1(\mathbb{R}^d)$，

$\forall\varepsilon>0$, $\exists g\in G$, s.t. $\|f-g\|_{L^1}<\varepsilon$.

定理 2.4. 下面的函数族在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中稠密.

(i) 简单函数 (ii) 阶梯函数 (iii) 具有紧支集的连续函数.

证明：(i). 由第二章结论，$\forall f\in L^1$，存在简单函数列 φ_k, s.t. $\varphi_k(x)\to f(x)$，

且 $|\varphi_k(x)|\le|\varphi_{k+1}(x)|\le|f(x)|\in L^1$. 由控制收敛定理，

$\int|\varphi_k(x)-f(x)|\to 0$, as $k\to\infty$.

(ii) 由 (i)，对任意的简单函数 φ，存在阶梯函数列 ψ_k, s.t. $\psi_k\to\varphi$ in L^1.

(iii) 由(ii)，对任意的简单函数 φ，存在阶梯函数列 ψ_k，s.t. $\psi_k \to \varphi$ in L^1.

只需证明 χ_E，$m(E)<+\infty$，可以用阶梯函数逼近.

由Chapter1，$\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 几乎不交的矩形 R_j，s.t.

$$m(E \triangle \bigcup_{j=1}^{N} R_j) < 2\varepsilon.$$

令 $\psi = \sum_{j=1}^{N} \chi_{R_j}$，则 $\|\psi - \chi_E\|_{L^1} \le \|\chi_{E \triangle \bigcup_{j=1}^{N} R_j}\|_{L^1} < 2\varepsilon.$