测度(希望)：① $m(R)=|R|$ ② $m(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)=\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$，$E_j$ 不交

③ $m(E+h)=m(E)$

外测度：$m_*(E)=\inf\{\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j| \mid \bigcup Q_j$ 是E的闭方体覆盖$\}$.

1. $E_1\subset E_2$，$m_*(E_1)\le m_*(E_2)$
2. $m_*(\bigcup E_j)\le\sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$
3. $m_*(E)=\inf\limits_{O\supset E \text{ open}} m_*(O)$
4. $E=E_1\cup E_2$，$d(E_1,E_2)>0 \Rightarrow m_*(E)=m_*(E_1)+m_*(E_2)$
5. $E=\bigcup Q_j$，Q_j 几乎不交 $\Rightarrow m_*(E)=\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|$.

称 $E\subset R^d$ 可测，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 开集 $O\supset E$ s.t. $m_*(O-E)<\varepsilon$.

1. 开集都是可测的.
2. $m_*(E)=0 \Rightarrow E$ 可测
3. 可测集的可数并是可测的.
4. 闭集是可测的.

引理. 若F是闭集，K是紧集，$K\cap F=\phi$. 则 $d(K,F)>0$.

证明闭集是可测的. 设E是闭集. 要证E是可测的.

由于 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E\cap\overline{B}_k$，只需证明 $E\cap\overline{B}_k$ 可测的. 则由性质3可知E可测.

只需证明紧集是可测的. 设F是紧集，要证F可测. 由外测度的性质. $\forall\varepsilon>0$，

$\exists$ 开集 $O\supset F$，s.t. $m_*(O)\le m_*(F)+\varepsilon$. 由于F是闭，$O-F$ 是开集. 设

$O-F=\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$，$Q_j$ 几乎不交. $\forall N$，令 $K=\bigcup_{j=1}^{N} Q_j$，则K是闭集，且 $K\cap F=\phi$

由前面引理，$d(K,F)>0$. 故 $m_*(O)\ge m_*(K\cup F)=m_*(K)+m_*(F)$

$=\sum_{j=1}^{N}|Q_j|+m_*(F)$

因此，$\sum_{j=1}^{N}|Q_j|\le m_*(O)-m_*(F)\le\varepsilon$.

∞ 因此 $m_*(O-F)\le\varepsilon$

因此，$\sum_{j=1}|Q_j| \le m_*(O) - m_*(F)$

令 $N \to +\infty$，则有 $\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j| \le \varepsilon$. 因此，$m_*(O-F) \le \varepsilon$.

性质5. 可测集的补集是可测的.

证明：设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是可测集，要证 E^c 也是可测的.

由于 E 可测，$\forall n$，$\exists$ 开集 O_n，s.t. $m_*(O_n - E) \le \frac{1}{n}$.

令 $O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$，则 $O \supset E$，且 $\forall n$，$m_*(O-E) \le m_*(O_n - E) \le \frac{1}{n}$

令 $n \to \infty$，则 $m_*(O-E) = 0$.

$$O - E = O \cap E^c = E^c \cap (O^c)^c = E^c - O^c$$

令 $S = O^c \subset E^c$，则 $m_*(E^c - O^c) = m_*(O-E) = 0$

故 $E^c = O^c \cup (E^c - O^c)$

而 $O^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c$，由 O_n 开，可知 O_n^c 是闭集，可测. 因为可测集的可数并是可测的，所以 O^c 是可测集. 而由性质2，$E^c - O^c$ 可测

故 E^c 可测.

性质6. 可数个可测集的交是可测的.

证明：若 $E_j \subset \mathbb{R}^d$ 可测，要证 $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ 是可测的. 由性质5，只要证明 $\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c$ 是可测的. 事实上，$\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c$，由性质5. E_j^c 可测，

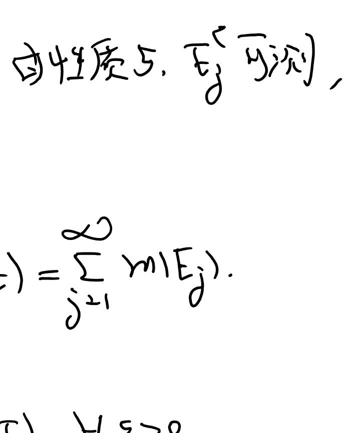
再由性质3，$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c$ 可测.

定理3.2. 若 $E_1, E_2, \cdots$ 是不交的可测集，令 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$，则 $m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$.

证明：不妨设 $m(E_j) < +\infty$.

第一步. 设每一个 E_j 都是有界的. 要证 $\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) - \varepsilon \le m(E)$，$\forall \varepsilon > 0$.

由于 E_j 可测，E_j^c 可测. 故 $\forall \varepsilon > 0$，存在开集 $O_j \supset E_j^c$，s.t. $m(O_j - E_j^c) \le \frac{\varepsilon}{2^j}$.



令 $F_j = O_j^c$（闭集），则 $F_j \subset E_j$，$m(E_j - F_j) \le \frac{\varepsilon}{2^j}$

令 $F_j = O_j^c$ (闭集), 则 $F_j \subset E_j$, $m(E_j - F_j) < 2\varepsilon$ j

且 F_j 彼此不交.

$$O_j - E_j^c = O_j \cap E_j = E_j \cap (O_j^c)^c$$
$$= E_j - F_j$$