稠密性. $\mathcal{G}\subset L^1(\mathbb{R}^d)$ 稠, $\forall\varepsilon>0$, $\forall f\in L^1$. $\exists g\in\mathcal{G}$, s.t. $\|g-f\|_{L^1}<\varepsilon$.

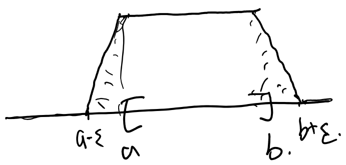
(i) 简单函数. (ii). 阶梯函数. (iii) 具有紧支集的连续函数

在 L^1 中是稠密的.

证明 (iii): 由(ii), 只须证明 $f=\chi_R$, $m(R)<+\infty$. 即可.

$d=1$. 设 $R=[a,b]$, $\forall\varepsilon>0$, 寻找具有

紧支集的连续函数 g, s.t. $\|g-\chi_R\|_{L^1}<C\varepsilon$



令 $g(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ \text{line} & x\in[a-\varepsilon,a]\cup[b,b+\varepsilon]\\ 0 & \text{other}\end{cases}$

则 $\|g-\chi_R\|_{L^1}\leq 2\varepsilon$.

$d>1$. $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_d,b_d]$.

令 $\prod_{i=1}^{d}g(x_i)=g(x)$ 则 g 具有紧支集. 连续. $\|g-\chi_R\|_{L^1}\leq C\varepsilon$.

积分的不变性.

$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall h\in\mathbb{R}^d$, 定义 $f_h(x)=f(x-h)$.

claim: $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $f_h\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 且 $\int f=\int f_h$.

由 $f=f_+-f_-$, 只需证明 $\int f_{+,h}=\int f_+$, $\int f_{-,h}=\int f_-$. 即只需证明 $f\geq0$, $f\in L^1$.

则 $\int f=\int f_h$. 对于 $f\geq0$, 存在简单函数列 $\varphi_k\nearrow f$. 故 $\varphi_{k,h}\nearrow f_h$.

故由单调收敛定理, $\int\varphi_k\to\int f$, $\int\varphi_{k,h}\to\int f_h$, as $k\to\infty$.

只须证明 $\int\varphi=\int\varphi_h$. φ 简单函数.

令 $\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}$, 则 要证 $\sum_{k=1}^{N}a_k\int\chi_{E_k}=\sum_{k=1}^{N}a_k\int\chi_{E_{k,h}}$. $m(E_k)<+\infty$.

只要证明 $m(E)<+\infty$, $\int\chi_E=\int\chi_{E,h}\iff m(E)=m(E_h)$.

由第一章. 测度的不变性, $m(E)=m(E_h)$ 成立.

$|f|=f_++f_-$, $|f_h|=f_{+,h}+f_{-,h}$

$+\infty>\int|f|=\int f_++\int f_-=\int f_{+,h}+\int f_{-,h}=\int|f_h|$

$f(\delta x)\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且 $\int f(\delta x)\,dx=\delta^{-d}\int f(x)\,dx$.

$+\infty > \int |f| = \int f_+ + \int f_- = \int f_{+,h} + \int f_{-,h} = \int |f_h|$

类似地，若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\delta > 0$, $f(\delta \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 且 $\int f(\delta x)\,dx = \delta^{-d}\int f(x)\,dx$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

例 若 g 是 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数, 使得对固定的 $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ 可积.

则 $y \mapsto f(y)g(x-y)$ 可积, 且 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy$.

$$\underset{\text{可积}}{f(x-y)g(y)} \xrightarrow[y \mapsto y+x]{\text{平移}} f(-y)g(y+x) \xrightarrow[y \mapsto -y]{\text{反射}} \underset{\text{可积}}{f(y)g(x-y)}$$

且 $\int f(x-y)g(y)\,dy = \int f(y)g(x-y)\,dy = (f*g)(x)$. 卷积

例 $\int_{|x|\geq \varepsilon} \frac{1}{|x|^a}\,dx = \int_{|\frac{x}{\varepsilon}|\geq 1} \frac{1}{|\frac{x}{\varepsilon}|^a}\frac{1}{\varepsilon^a}\,dx = \frac{1}{\varepsilon^a}\int f(\frac{x}{\varepsilon})\,dx$, $f(y) = \frac{1}{|y|^a}\chi_{|y|\geq 1}$

$$= \frac{\varepsilon^d}{\varepsilon^a}\int_{|x|\geq 1}\frac{1}{|x|^a}\,dx = \varepsilon^{d-a}\int_{|x|\geq 1}\frac{1}{|x|^a}\,dx < +\infty, \quad a > d$$

$$\int_{|x|\leq \varepsilon}\frac{1}{|x|^a}\,dx = \varepsilon^{d-a}\int_{|x|\leq 1}\frac{1}{|x|^a}\,dx < +\infty, \quad 0 < a < d$$

平移与连续性.

命题2.5. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $\|f_h - f\|_{L^1} \to 0$, as $h \to 0$.

证明: ① 若 g 是具有紧支集的连续函数 (一致连续), 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$,

s.t. $|h| < \delta$, $|g_h - g| < \varepsilon$. 故 $\|g_h - g\|_{L^1} \leq C\varepsilon$.

② $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 具有紧支集的连续函数 g. s.t. $\|g - f\|_{L^1} < \varepsilon$.

$$\|f_h - f\|_{L^1} = \|f_h - g_h + g_h - g + g - f\|_{L^1}$$
$$\leq \|f_h - g_h\|_{L^1} + \|g_h - g\|_{L^1} + \|g - f\|_{L^1}$$
$$\leq 2\varepsilon + \|g_h - g\|_{L^1}$$
$$\leq 3\varepsilon, \quad |h| \text{ 充分小}.$$

即 $\lim_{|h|\to 0}\|f_h - f\|_{L^1} = 0$.

例. 若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 中有限可测集. 则 $\lim_{|h|\to 0} m(E \cap E_h) = m(E)$.

证明: $\int \chi_E \chi_{E_h} = \int \chi_E(x)\chi_E(x) = \int \chi_E(x)\chi_E(x+h) \xrightarrow{\text{平移}} \int \chi_E = \int \chi_E^2$

例. 若 $E\subset\mathbb{R}^d$ 可测集 . . . $|h|\to 0$ . . .

证明: $\int \chi_{E\cap E_h}(x) = \int \chi_E(x)\chi_{E_h}(x) = \int \chi_E(x)\chi_E(x-h) \xrightarrow[|h|\to 0]{\text{逼近}} \int \chi_E = \int \chi_E^2$

即 $\left|\int \chi_E\,(\chi_E(x-h)-\chi_E(x))\right| \xrightarrow{|h|\to 0} 0.$

$\Longleftrightarrow \int_E |\chi_E(x+h)-\chi_E(x)| \to 0$, as $|h|\to 0$.

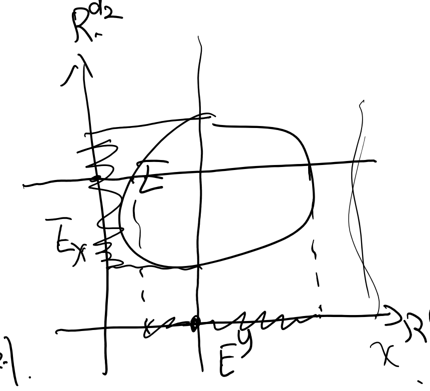
3. Fubini 定理.

$R^d = R^{d_1}\times R^{d_2}$, $d_1+d_2=d$. $d_1, d_2\geq 1$.

把 R^d 中的点表示成 (x,y), $x\in R^{d_1}$, $y\in R^{d_2}$.

若 f 是 $R^{d_1}\times R^{d_2}$ 上的函数, 固定 $y\in R^{d_2}$, f 的切片 f^y 是 x 的函数

$f^y(x)=f(x,y)$. 类似地, 固定 x, $f_x(y)=f(x,y)$.



$E\subset R^{d_1}\times R^{d_2}$, 定义 $E^y=\{x\in R^{d_1}\mid (x,y)\in E\}$

$E_x=\{y\in R^{d_2}\mid (x,y)\in E\}$.

若 E 在 $R^{d_1}\times R^{d_2}$ 中可测, E^y, E_x 是否可测?

$E=\{0\}\times \mathcal{N}^{\subset R\times R}$ 则 $E\subset \underset{R\times R}{\{0\}\times[0,1]}$ 零测.

$\Rightarrow E$ 可测.

但 $E_0=\mathcal{N}$, 不可测.

定理 3.1. 设 $f(x,y)$ 是 $R^{d_1}\times R^{d_2}$ 上的可积函数, 则

(i) f^y 在 R^{d_1} 上可积, a.e. $y\in R^{d_2}$

(ii) $\int_{R^{d_1}} f^y(x)\,dx$ 在 R^{d_2} 上可积.

(iii) $\int_{R^{d_2}}\left(\int_{R^{d_1}} f^y(x)\,dx\right)dy = \int_{R^d} f$.

证明: 令 $\mathcal{F}=\{f\in L^1(R^d): \text{(i),(ii),(iii) 成立}\}\subset L^1(R^d)$. 要证 $L^1(R^d)\subset\mathcal{F}$.

Step 1. $\mathcal{F}$ 中函数的有限线性组合仍属于 $\mathcal{F}$.

令 $\{f_k\}_{k=1}^N\subset\mathcal{F}$. 则 $\forall k$, $\exists A_k$, $m(A_k)=0$. s.t. $\forall y\notin A_k$, f_k^y 在 R^{d_1} 上可积.

令 $A=\bigcup_{k=1}^N A_k$. 则 $m(A)=0$. 且 $\forall y\notin A$, f_k^y 在 R^{d_1} 上可积, $\forall k$.

令 $A=\bigcup_{k=1}^{N} A_k$，则 $m(A)=0$，且 $\forall y\notin A$，f_k^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可积，$\forall k$.

则 $\left(\sum_{k=1}^{N} f_k\right)^y = \sum_{k=1}^{N} f_k^y$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可积，即 $\sum_{k=1}^{N} f_k$ 满足(i)

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\sum_{k=1}^{N} f_k\right)^y(x)\,dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\sum_{k=1}^{N} f_k^y\right) dx\right| \le \sum_{k=1}^{N}\left|\int f_k^y\,dx\right| \text{ 在 } \mathbb{R}^{d_2} \text{ 上可积}.$$

且 $$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\left(\sum_{k=1}^{N} f_k\right)^y(x)\,dx\right)dy = \sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\,dx\right)dy$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^d} f_k = \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{k=1}^{N} f_k$$

Step2. $f_k\in\mathcal{F}$，$f_k\nearrow f$ or $f_k\searrow f$，$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\Rightarrow f\in\mathcal{F}$.

不妨设 $f_k\nearrow f$. 不妨设 $f_k\ge 0$. 否则用 f_k-f_1 代替 f_k.

$\forall k$，$\exists A_k$，$m(A_k)=0$，s.t. $\forall y\notin A_k$，f_k^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可积.

且 $f_k^y\nearrow f^y$.

由单调收敛定理，$\lim_{k\to\infty}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\,dx}_{g_k(y)} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx}_{g(y)}$，$y\notin A=\bigcup A_k$.

$f_k^y(x)=f_k(x,y)\le f_1(x,y)$.

且 $g_k(y)\nearrow g(y)$

再由单调收敛定理，$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)\,dy \xrightarrow{k\to\infty} \int g(y)\,dy$

$\qquad\|$

$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\,dx\right)dy \overset{(iii)}{=\!=} \int_{\mathbb{R}^d} f_k$

由 $f_k\nearrow f\in L^1$，故 $\int f_k\to\int f$.

于是，$\int f = \int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx\right)dy$. $<+\infty$

故 (i) a.e. y，$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx<+\infty$. 即 a.e. y，f^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可积.

(ii). $\int f^y(x)\,dx$ 在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上可积、 $\Longrightarrow f\in\mathcal{F}$.

(iii).

Step3. 若 E 是 G_δ 集，且 $m(E)<+\infty$，且 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

① 设 $E=\bigcap_{j=1}^{\infty} O_j$，$O_j$ 开. 取开集 $O_0\supset E$，s.t. $m(O_0)<+\infty$.

① 设 $E=\bigcap_{j=1}^{\infty}O_j$，$O_j$开. 取开集 $O_0\supset E$, s.t. $m(O_0)<+\infty$.

则 $E=O_0\cap\bigcap_{j=1}^{\infty}O_j$. 令 $E_k=O_0\cap\bigcap_{j=1}^{k}O_j$，则 $\chi_{E_k}\searrow\chi_E$

$\chi_E\in L^1$. 由 Step α，只需证明 $\chi_{E_k}\in\mathcal{F}$.

② 若E是有限测度开集，则 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

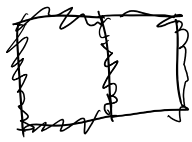
由 Chapter 1，E可以写成闭方体的几乎不交可数并. 设 $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$.

令 $E_k=\bigcup_{j=1}^{k}Q_j$，则 $E_k\nearrow E$，即 $\chi_{E_k}\nearrow\chi_E$，$\chi_E\in L^1$.

由 Step α，只须证明 $\chi_{E_k}\in\mathcal{F}$.

③ 若E是有限个方体的几乎不交并，则 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

设 $E=\bigcup_{j=1}^{k}Q_j$. 令 $\tilde{Q}_j$ 表示 Q_j 的内部，A_j 表示 Q_j 的边界的子集. 则



$$E=\bigcup_{j=1}^{k}(\tilde{Q}_j\cup A_j)$$
$$=\bigcup_{j=1}^{k}\tilde{Q}_j+\bigcup_{j=1}^{k}A_j$$

$$\chi_E=\sum_{j=1}^{k}\chi_{\tilde{Q}_j}+\chi_{\bigcup_{j=1}^{k}A_j}.\qquad \sum_{j=1}^{k}\chi_{A_j}.$$

由 Step 1，只要证明 $\chi_{\tilde{Q}_j}$，$\chi_{\bigcup_{j=1}^{k}A_j}\in\mathcal{F}$.

④ 若E是有界方体，设 $E=Q_1\times Q_2$，$Q_1\subset R^{d_1}$，R^{d_2}. 要证 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

(i). $\chi_E^y(x)=\chi_E(x,y)=\chi_{E^y}(x)=\begin{cases}\chi_{Q_1}(x) & y\in Q_2\\ 0 & y\notin Q_2\end{cases}$

故 χ_E^y 在 R^{d_1} 上可积.　　$E^y=\{x\mid (x,y)\in E=Q_1\times Q_2\}$

(ii). $\int_{R^{d_1}}\chi_E^y(x)dx=\begin{cases}|Q_1| & y\in Q_2\\ 0 & y\notin Q_2\end{cases}$　　$=\begin{cases}Q_1 & y\in Q_2.\\ \phi. & y\notin Q_2\end{cases}$

即 $\int_{R^{d_1}}\chi_E^y(x)dx=|Q_1|\chi_{Q_2}(y)$

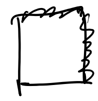
故 $\int_{R^{d_2}}\left(\int_{R^{d_1}}\chi_E^y(x)dx\right)dy=|Q_1|\int_{R^{d_2}}\chi_{Q_2}(y)dy=|Q_1||Q_2|<+\infty$.

故 $\int_{R^{d_2}}(\int_{R^{d_1}}\chi_E^{y}(x)dx)dy = 0$

(iii). $\int \chi_E = |Q_1 \times Q_2| = |Q_1||Q_2|$

故 $\int \chi_E = \int_{R^{d_2}}(\int_{R^{d_1}} \chi_E^{y}(x)dx)dy$.

⑤ 若E是闭方体边界的子集，则 $\chi_E \in \mathcal{F}$.



Q_1

设 $E = \underbrace{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{d_1},b_{d_1}]}_{Q_1} \times \underbrace{[a_{d_1+1},b_{d_1+1}]\times\cdots\times\{0\}}_{Q_2}$.

$E^y = \begin{cases} Q_1 & y \in Q_2 \\ \phi & y \notin Q_2 \end{cases}$

$|Q_2| = 0$.

$\chi_E^y(x) = \chi_{E^y}(x) = \begin{cases} \chi_{Q_1} & y \in Q_2 \\ 0 & y \notin Q_2 \end{cases}$

χ_E^y 在 R^{d_1} 上可积.

$\int_{R^{d_1}} \chi_E^y(x)dx = |Q_1|\chi_{Q_2}(y)$

$\int_{R^{d_2}}(\int_{R^{d_1}} \chi_E^y(x)dx)dy = |Q_1||Q_2| = 0$.

由于 $m_{R^d}(E)=0$. 故 $\int_{R^d}\chi_E(x,y) = 0$.

由于 $m(E^y) = 0$, a.e. $y \in R^{d_2}$, 故

$g(y) = \int_{R^{d_1}} \chi_E^y dx = 0$, a.e.

故 $\int_{R^{d_2}} g(y)dy = 0$.

即 $\int_{R^{d_2}}(\int_{R^{d_1}} \chi_E^y(x)dx)dy = \int \chi_E = 0$.

Step 4. $m(E)=0 \Rightarrow \chi_E \in \mathcal{F}$.

$\int \chi_E = 0$.

由 Chapter 1，存在 G_δ 集 $G \supset E$, s.t. $m(G \setminus E) = 0$.

故 $m(G) = 0$ 由 Step 3.

(i) a.e. y. χ_G^y 在 R^{d_1} 上可积. 故 $\chi_E^y \le \chi_G^y$ 在 R^{d_1} 上可积.

(ii) $\int \chi_E^y(x)dx \le \int \chi_G^y(x)dx$ 在 R^{d_2} 上可积.

(iii) $\int_{R^{d_2}}(\int_{R^{d_1}} \chi_G^y(x)dx)dy = \int_{R^d}\chi_G = m(G) = 0$.

故 $\int_{R^{d_2}}(\int_{R^{d_1}} \chi_E^y(x)dx)dy = 0 = \int_{R^d}\chi_E$.

Step 5. 若 $m(E) < +\infty$，则 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

由 Chapter 1，$\exists$ G_δ 集 $G \supset E$，零测集 Z. s.t. $E = G - Z$.

故 $\chi_E = \chi_G - \chi_Z$，由 Step 3，$\chi_G \in \mathcal{F}$,

由 Step 4. $\chi_Z \in \mathcal{F}$. 由 Step 1，$\chi_E \in \mathcal{F}$.

Step 6. 若f可积，则 $f \in \mathcal{F}$.

Step 6. 若 f 可积，则 $f\in\mathcal{J}$.

$f=f_+-f_-$，由 Step 1，只需证明非负可积函数 $f\in\mathcal{J}$.

由 Chapter 1，存在简单函数列 $\varphi_k\nearrow f$, $f\in L^1$. 由 Step 2，只需证明 $\varphi_k\in\mathcal{J}$, $\forall k$. 由 $\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}$，由 Step 1，只需证明 $\chi_E\in\mathcal{J}$, $\forall\, m(E)<\infty$. 由 Step 5，$\chi_E\in\mathcal{J}$ 成立.