

Белорусский государственный университет  
Факультет прикладной математики и информатики

**ИЗБРАННЫЕ РАЗДЕЛЫ  
МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ**

канд. физ.-мат. наук Войделевич А.С.

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

Минск  
2019

# СОДЕРЖАНИЕ

§1	Выпуклые множества . . . . .	3
----	------------------------------	---

## §1 ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть  $\mathbb{A}^n$  —  $n$ -мерное аффинное пространство над полем  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Зафиксируем некоторую точку  $O \in \mathbb{A}^n$  в качестве начала координат. Далее будет отождествлять произвольную точку  $P \in \mathbb{A}^n$  с её радиусом вектором  $\overrightarrow{OP}$ , а само пространство  $\mathbb{A}^n$  — с вещественным  $n$ -мерным векторным пространством  $\mathbb{R}^n$ . Для обозначения векторов и точек будем использовать строчные буквы, а для обозначения множеств — заглавные.

**Опр. 1.1.** Точка  $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_m p_m \in \mathbb{R}^n$ , где  $p_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_i \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ , называется *выпуклой комбинацией точек*  $p_1, p_2, \dots, p_m$ .

**Опр. 1.2.** Для произвольных точек  $x, y \in \mathbb{R}^n$  множество

$$[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\},$$

состоящее из всех возможных выпуклых комбинаций точек  $x$  и  $y$ , называется *отрезком* (с концами  $x, y$ ).

**Опр. 1.3.** Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *выпуклым*, если для произвольных двух точек  $x, y \in X$  оно содержит весь отрезок  $[x, y]$ .

Отметим, что согласно определению 1.3 пустое множество  $\emptyset$  и произвольное одноточечное множество  $\{p\}$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$ , являются выпуклыми.

**Лемма 1.1.** Множество  $X$  является выпуклым, если и только если  $X$  содержит любую выпуклую комбинацию своих точек.

▷ Если множество  $X$  содержит любую выпуклую комбинацию своих точек, то, в частности, для любых двух точек  $x, y \in X$  имеем  $[x, y] \subset X$ , а значит,  $X$  — выпуклое множество.

Обратное утверждение доказывается индукцией по количеству  $m$  точек  $p_1, p_2, \dots, p_m \in X$ , входящих в выпуклую комбинацию  $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_m p_m$ . База индукции  $m = 2$  следует из определения 1.3. Предположим теперь, что множество  $X$  содержит всевозможные выпуклые комбинации своих точек размера  $m \geq 2$ . Докажем, что  $X$  также содержит любую выпуклую комбинацию размера  $m + 1$ . Действительно, пусть  $p_1, p_2, \dots, p_{m+1} \in X$  и числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1} \geq 0$ , такие что  $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1$ . Без нарушения общности будем считать, что  $\alpha_1 < 1$  (иначе это выпуклая комбинация, состоящая из одной точки). Тогда

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_{m+1} p_{m+1} = \alpha_1 p_1 + (1 - \alpha_1)q,$$

где  $q = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1} p_2 + \frac{\alpha_3}{1 - \alpha_1} p_3 + \dots + \frac{\alpha_{m+1}}{1 - \alpha_1} p_{m+1}$ . Так как  $\sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} = 1$ , то согласно предположению индукции  $q \in X$ , а значит,  $p \in X$ . ◁

Рассмотрим операции над выпуклыми множествами, которые сохраняют выпуклость.

**Лемма 1.2.** Пусть  $I$  — некоторое множество индексов произвольной мощности, а  $\{X_i \subset \mathbb{R}^n : i \in I\}$  — семейство выпуклых множеств. Тогда множество  $X = \bigcap_{i \in I} X_i$  является выпуклым.

▷ Действительно, пусть  $x, y \in X$ . Тогда  $x, y \in X_i$  для всех  $i \in I$ , а значит,  $[x, y] \subset X_i$ . Таким образом,  $[x, y] \subset X$ , т.е. множество  $X$  является выпуклым. ◁

Выпуклой оболочкой  $\text{Conv } X$  произвольного множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется наименьшее (по вложению) выпуклое множество, содержащее  $X$ . Из леммы 1.2 следует, в частности, что  $\text{Conv } X$  — это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих  $X$ .

**Лемма 1.3.** Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — аффинное преобразование, т.е. преобразование, действующее по правилу  $F: x \mapsto Ax + b$ , где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Тогда для произвольных выпуклых множеств  $X \subset \mathbb{R}^n$  и  $Y \subset \mathbb{R}^m$  множества  $F(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{Fx : x \in X\} \subset \mathbb{R}^m$  и  $F^{-1}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : Fx \in Y\} \subset \mathbb{R}^n$  также являются выпуклыми.

▷ Пусть  $y_1 = Fx_1$ ,  $y_2 = Fx_2$  и  $\alpha \in [0, 1]$ . Тогда утверждение леммы следует из равенства  $\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 = \alpha Fx_1 + (1 - \alpha)Fx_2 = F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$ , которое выполнено для любого аффинного преобразования  $F$ . ◁

**Лемма 1.4.** Пусть  $\{X_i \subset \mathbb{R}^{n_i} : 1 \leq i \leq m\}$  — семейство выпуклых множеств. Тогда прямое произведение

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \in X_i, 1 \leq i \leq m\}$$

является выпуклым множеством в пространстве  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_m}$ .

▷ Пусть  $x_i, \tilde{x}_i \in X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , и  $\alpha \in [0, 1]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_m) + (1 - \alpha)(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m) = \\ = (\alpha x_1 + (1 - \alpha)\tilde{x}_1, \dots, \alpha x_m + (1 - \alpha)\tilde{x}_m) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m, \end{aligned} \quad (1.1)$$

так как  $\alpha x_i + (1 - \alpha)\tilde{x}_i \in X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . ◁

Композиция операций, сохраняющих выпуклость, также, очевидно, сохраняет выпуклость. Следовательно, для произвольных выпуклых множеств  $X_1, X_2, \dots, X_m \in \mathbb{R}^n$  и вещественных чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  множество

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i : x_i \in X_i, 1 \leq i \leq m \right\}$$

является выпуклым. Действительно, эту линейную комбинацию множеств можно представить как композицию прямого произведения и аффинного преобразования. Отметим, что линейную композицию вида  $A + B$  называют суммой Минковского множеств  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ .

**Лемма 1.5.** *Замыкание  $\overline{X}$  выпуклого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  выпукло.*

▷ Выберем произвольные точки  $a, b \in \overline{X}$  и число  $\alpha \in [0, 1]$ . Необходимо доказать, что  $c \stackrel{\text{def}}{=} \alpha a + (1 - \alpha)b \in \overline{X}$ . Существуют такие две последовательности точек  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  и  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ , что  $a_k \rightarrow a$  и  $b_k \rightarrow b$ . Тогда последовательность точек  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ , где  $c_k = \alpha a_k + (1 - \alpha)b_k$ , сходится к  $c$ , а значит,  $c \in \overline{X}$ . ◁

**Опр. 1.4.** *Множества  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  называются отделимыми, если существуют ненулевой вектор  $c$  и число  $d$ , такие что  $c^\top x \geq d \geq c^\top y$  для любых  $x \in X$  и  $y \in Y$ . Если известно, что неравенства строгие  $c^\top x > d > c^\top y$ , то говорят, что множества  $X$  и  $Y$  строго отделимы. Гиперплоскость, заданная уравнением  $c^\top x = d$ , называется разделяющей гиперплоскостью.*

Отметим, что согласно определению, вектор  $c$  из уравнения гиперплоскости  $c^\top x = d$  ненулевой.

**Теорема 1.1.** *Если непересекающиеся множества  $X$  и  $Y \subset \mathbb{R}^n$  выпуклы, замкнуты и одно из них ограничено, то они строго отделимы.*

▷ Пусть  $X$  — ограниченное множество и  $d_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x_1, x_2 \in X} \|x_1 - x_2\|$  — его диаметр. Докажем, что найдутся точки  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$ , для которых  $\|x_0 - y_0\| = \inf_{x \in X, y \in Y} \|x - y\|$ . Действительно, выберем произвольные две точки  $x_1 \in X$  и  $y_1 \in Y$ . Пусть  $\tilde{Y} = Y \cap B_r(x_1)$ , где  $B_r(x_1)$  — шар радиуса  $r = d_X + \|x_1 - y_1\|$  с центром в  $x_1$ . Множества  $X$  и  $\tilde{Y}$  являются компактными, а функция  $f$ , действующая по правилу  $f: (x, y) \in X \times \tilde{Y} \mapsto \|x - y\|$ , — непрерывной. Так как декартово произведение компактных множеств компактно, то функция  $f$  достигает свое минимальное значение в некоторых точках  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in \tilde{Y}$ . Если  $y \in Y \setminus \tilde{Y}$  и  $x \in X$ , то  $\|x - y\| \geq \|x_1 - y\| - \|x_1 - x\| \geq d_X + \|x_1 - y_1\| - d_X = \|x_1 - y_1\|$ , а значит, точки  $x_0, y_0$  искомые.

Пусть  $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n: c^\top x = d\}$  — гиперплоскость, проходящая через середину отрезка  $[x_0, y_0]$ , перпендикулярно ему. Выберем  $c = x_0 - y_0$  и  $d = (\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2)/2$ . Докажем, что множества  $X$  и  $Y$  не пересекаются с указанной гиперплоскостью, а значит, лежат в разных открытых полупространствах относительно её. Предположим противное, а именно, что некоторая точка  $y \in Y$  принадлежит плоскости  $\Pi$ . Треугольник с вершинами  $x_0, y$  и  $y_0$  является равнобедренным с основанием  $[x_0, y_0]$  и острым углом при вершине  $y$ , так как  $\|x_0 - y_0\| \leq \|y - x_0\|$ . По условию  $Y$  — выпуклое множество, а значит,  $[y, y_0] \subset Y$ . Пусть  $\tilde{y}$  — основание перпендикуляра, опущенного из вершины  $x_0$  на сторону  $[y, y_0]$ . Тогда  $\tilde{y} \in [y, y_0]$  и  $\|x_0 - \tilde{y}\| < \|x_0 - y_0\|$ . Последнее неравенство противоречит выбору точек  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$ . Таким образом,  $c^\top x > d > c^\top y$ . ◁

**Опр. 1.5.** *Гиперплоскость  $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n: c^\top x = d\}$  называется опорной к множеству  $X$  в точке  $x_0$ , если  $x_0 \in \Pi \cap \overline{X}$  и для всех  $x \in X$  одновременно выполняется одно из неравенств:  $c^\top x \geq d$  или  $c^\top x \leq d$ .*

Напомним, что точка  $x$  называется граничной для множества  $X$ , если любая

её окрестность содержит как точки, принадлежащие данному множеству, так и не принадлежащие ему.

**Лемма 1.6.** *Выпуклое множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  в каждой граничной точке имеет опорную гиперплоскость.*

▷ Пусть  $x_0$  — граничная точка множества  $X$ . Тогда найдётся такая последовательность точек  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{X}$ , что  $y_k \rightarrow x_0$ . Согласно, теореме 1.1 для множеств  $\{y_k\}$  и  $\bar{X}$  (выпуклость  $\bar{X}$  следует из леммы 1.5) найдётся такая гиперплоскость, заданная уравнением  $c_k^\top x = d_k$ , что  $c_k^\top x > d_k > c_k^\top y_k$ ,  $x \in \bar{X}$ . Без нарушения общности будем считать, что  $\|c_k\| = 1$ . Тогда, в силу построения, последовательность  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  является ограниченной. Наконец, без нарушения общности будем считать, что  $c_k \rightarrow c$  и  $d_k \rightarrow d$ . Тогда  $c^\top x \geq d$ ,  $x \in X$ , и  $c^\top x_0 = d$ . ◁

**Теорема 1.2.** *Произвольное выпуклое множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  можно отделить от точки  $y$ , ему не принадлежащей.*

▷ Действительно, если  $y \notin \bar{X}$ , то доказательство следует из теоремы 1.1, иначе — из леммы 1.6. ◁

### Упражнения

1. Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — непустое множество. Докажите, что любую точку  $p$ , принадлежащую выпуклой оболочке множества  $X$ , можно представить в виде выпуклой линейной комбинации не более чем  $n + 1$  точек множества  $X$ .
2. Пусть в  $\mathbb{R}^n$  заданы точки  $p_1, p_2, \dots, p_s$ , где  $s \geq n + 2$ . Докажите, что точки можно разбить на два непересекающихся множества так, что выпуклые оболочки этих двух множеств будут иметь непустое пересечение.
3. (Теорема Хелли) Пусть  $I$  — произвольное семейство индексов и  $\{X_i\}_{i \in I}$  — семейство замкнутых выпуклых множеств в  $\mathbb{R}^n$ , из которых хотя бы одно компактно. Докажите, что если любое подсемейство из  $n + 1$  множеств имеет непустое пересечение, то и всё семейство имеет непустое пересечение.