

Белорусский государственный университет  
Факультет прикладной математики и информатики

**ИЗБРАННЫЕ РАЗДЕЛЫ  
МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ**

канд. физ.-мат. наук Войделевич А.С.

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

Минск  
2019

# СОДЕРЖАНИЕ

§1	Выпуклые множества . . . . .	3
§2	Выпуклые функции . . . . .	8
§3	Задача выпуклой оптимизации . . . . .	12
§4	Линейное программирование . . . . .	19
§5	Теория двойственности . . . . .	25
§6	Целочисленное линейное программирование . . . . .	30
§7	Метод спуска . . . . .	34

## §1 ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть  $\mathbb{A}^n$  —  $n$ -мерное аффинное пространство над полем  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Зафиксируем некоторую точку  $O \in \mathbb{A}^n$  в качестве начала координат. Далее будет отождествлять произвольную точку  $P \in \mathbb{A}^n$  с её радиусом вектором  $\overrightarrow{OP}$ , а само пространство  $\mathbb{A}^n$  — с вещественным  $n$ -мерным векторным пространством  $\mathbb{R}^n$ . Для обозначения векторов и точек будем использовать строчные буквы, а для обозначения множеств — заглавные.

**Опр. 1.1.** Точка  $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_m p_m \in \mathbb{R}^n$ , где  $p_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_i \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ , называется *выпуклой комбинацией точек*  $p_1, p_2, \dots, p_m$ .

**Опр. 1.2.** Для произвольных точек  $x, y \in \mathbb{R}^n$  множество

$$[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\},$$

состоящее из всех возможных выпуклых комбинаций точек  $x$  и  $y$ , называется *отрезком* (с концами  $x, y$ ).

**Опр. 1.3.** Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *выпуклым*, если для произвольных двух точек  $x, y \in X$  оно содержит весь отрезок  $[x, y]$ .

Отметим, что согласно определению 1.3 пустое множество  $\emptyset$  и произвольное одноточечное множество  $\{p\}$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$ , являются выпуклыми.

**Лемма 1.1.** Множество  $X$  является выпуклым, если и только если  $X$  содержит любую выпуклую комбинацию своих точек.

▷ Если множество  $X$  содержит любую выпуклую комбинацию своих точек, то, в частности, для любых двух точек  $x, y \in X$  имеем  $[x, y] \subset X$ , а значит,  $X$  — выпуклое множество.

Обратное утверждение доказывается индукцией по количеству  $m$  точек  $p_1, p_2, \dots, p_m \in X$ , входящих в выпуклую комбинацию  $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_m p_m$ . База индукции  $m = 2$  следует из определения 1.3. Предположим теперь, что множество  $X$  содержит всевозможные выпуклые комбинации своих точек размера  $m \geq 2$ . Докажем, что  $X$  также содержит любую выпуклую комбинацию размера  $m + 1$ . Действительно, пусть  $p_1, p_2, \dots, p_{m+1} \in X$  и числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1} \geq 0$ , такие что  $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1$ . Без нарушения общности будем считать, что  $\alpha_1 < 1$  (иначе это выпуклая комбинация, состоящая из одной точки). Тогда

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_{m+1} p_{m+1} = \alpha_1 p_1 + (1 - \alpha_1)q,$$

где  $q = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1} p_2 + \frac{\alpha_3}{1 - \alpha_1} p_3 + \dots + \frac{\alpha_{m+1}}{1 - \alpha_1} p_{m+1}$ . Так как  $\sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} = 1$ , то согласно предположению индукции  $q \in X$ , а значит,  $p \in X$ . <

Рассмотрим операции над выпуклыми множествами, которые сохраняют выпуклость.

**Лемма 1.2.** Пусть  $I$  — некоторое множество индексов произвольной мощности, а  $\{X_i \subset \mathbb{R}^n : i \in I\}$  — семейство выпуклых множеств. Тогда множество  $X = \bigcap_{i \in I} X_i$  является выпуклым.

▷ Действительно, пусть  $x, y \in X$ . Тогда  $x, y \in X_i$  для всех  $i \in I$ , а значит,  $[x, y] \subset X_i$ . Таким образом,  $[x, y] \subset X$ , т.е. множество  $X$  является выпуклым. ◁

Выпуклой оболочкой  $\text{Conv } X$  произвольного множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется наименьшее (по вложению) выпуклое множество, содержащее  $X$ . Из леммы 1.2 следует, в частности, что  $\text{Conv } X$  — это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих  $X$ .

**Лемма 1.3.** Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — аффинное преобразование, т.е. преобразование, действующее по правилу  $F: x \mapsto Ax + b$ , где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Тогда для произвольных выпуклых множеств  $X \subset \mathbb{R}^n$  и  $Y \subset \mathbb{R}^m$  множества  $F(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{Fx : x \in X\} \subset \mathbb{R}^m$  и  $F^{-1}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : Fx \in Y\} \subset \mathbb{R}^n$  также являются выпуклыми.

▷ Пусть  $y_1 = Fx_1$ ,  $y_2 = Fx_2$  и  $\alpha \in [0, 1]$ . Тогда утверждение леммы следует из равенства  $\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 = \alpha Fx_1 + (1 - \alpha)Fx_2 = F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$ , которое выполнено для любого аффинного преобразования  $F$ . ◁

**Лемма 1.4.** Пусть  $\{X_i \subset \mathbb{R}^{n_i} : 1 \leq i \leq m\}$  — семейство выпуклых множеств. Тогда прямое произведение

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \in X_i, 1 \leq i \leq m\}$$

является выпуклым множеством в пространстве  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_m}$ .

▷ Пусть  $x_i, \tilde{x}_i \in X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , и  $\alpha \in [0, 1]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_m) + (1 - \alpha)(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m) = \\ = (\alpha x_1 + (1 - \alpha)\tilde{x}_1, \dots, \alpha x_m + (1 - \alpha)\tilde{x}_m) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m, \end{aligned} \quad (1.1)$$

так как  $\alpha x_i + (1 - \alpha)\tilde{x}_i \in X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . ◁

Композиция операций, сохраняющих выпуклость, также, очевидно, сохраняет выпуклость. Следовательно, для произвольных выпуклых множеств  $X_1, X_2, \dots, X_m \in \mathbb{R}^n$  и вещественных чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  множество

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i : x_i \in X_i, 1 \leq i \leq m \right\}$$

является выпуклым. Действительно, эту линейную комбинацию множеств можно представить как композицию прямого произведения и аффинного преобразования. Отметим, что линейную композицию вида  $A + B$  называют суммой Минковского множеств  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ .

**Лемма 1.5.** Замыкание  $\overline{X}$  выпуклого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  выпукло.

▷ Выберем произвольные точки  $a, b \in \overline{X}$  и число  $\alpha \in [0, 1]$ . Необходимо доказать, что  $c \stackrel{\text{def}}{=} \alpha a + (1 - \alpha)b \in \overline{X}$ . Существуют такие две последовательности точек  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  и  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ , что  $a_k \rightarrow a$  и  $b_k \rightarrow b$ . Тогда последовательность точек  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ , где  $c_k = \alpha a_k + (1 - \alpha)b_k$ , сходится к  $c$ , а значит,  $c \in \overline{X}$ . ◁

**Опр. 1.4.** Множества  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  называются *отделимыми*, если существуют ненулевой вектор  $c$  и число  $d$ , такие что  $c^\top x \geq d \geq c^\top y$  для любых  $x \in X$  и  $y \in Y$ . Если известно, что неравенства строгие  $c^\top x > d > c^\top y$ , то говорят, что множества  $X$  и  $Y$  *строго отделимы*. Гиперплоскость, заданная уравнением  $c^\top x = d$ , называется *разделяющей гиперплоскостью*.

Отметим, что согласно определению, вектор  $c$  из уравнения гиперплоскости  $c^\top x = d$  ненулевой.

**Теорема 1.1.** Если непересекающиеся множества  $X$  и  $Y \subset \mathbb{R}^n$  выпуклы, замкнуты и одно из них ограничено, то они строго отделимы.

▷ Пусть  $X$  — ограниченное множество и  $d_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x_1, x_2 \in X} \|x_1 - x_2\|$  — его диаметр. Докажем, что найдутся точки  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$ , для которых  $\|x_0 - y_0\| = \inf_{x \in X, y \in Y} \|x - y\|$ . Действительно, выберем произвольные две точки  $x_1 \in X$  и  $y_1 \in Y$ . Пусть  $\tilde{Y} = Y \cap B_r(x_1)$ , где  $B_r(x_1)$  — шар радиуса  $r = d_X + \|x_1 - y_1\|$  с центром в  $x_1$ . Множества  $X$  и  $\tilde{Y}$  являются компактными, а функция  $f$ , действующая по правилу  $f: (x, y) \in X \times \tilde{Y} \mapsto \|x - y\|$ , — непрерывной. Так как декартово произведение компактных множеств компактно, то функция  $f$  достигает свое минимальное значение в некоторых точках  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in \tilde{Y}$ . Если  $y \in Y \setminus \tilde{Y}$  и  $x \in X$ , то  $\|x - y\| \geq \|x_1 - y\| - \|x_1 - x\| \geq d_X + \|x_1 - y_1\| - d_X = \|x_1 - y_1\|$ , а значит, точки  $x_0, y_0$  искомые.

Пусть  $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n: c^\top x = d\}$  — гиперплоскость, проходящая через середину отрезка  $[x_0, y_0]$ , перпендикулярно ему. Выберем  $c = x_0 - y_0$  и  $d = (\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2)/2$ . Докажем, что множества  $X$  и  $Y$  не пересекаются с указанной гиперплоскостью, а значит, лежат в разных открытых полупространствах относительно её. Предположим противное, а именно, что некоторая точка  $y \in Y$  принадлежит плоскости  $\Pi$ . Треугольник с вершинами  $x_0, y$  и  $y_0$  является равнобедренным с основанием  $[x_0, y_0]$  и острым углом при вершине  $y$ , так как  $\|x_0 - y_0\| \leq \|y - x_0\|$ . По условию  $Y$  — выпуклое множество, а значит,  $[y, y_0] \subset Y$ . Пусть  $\tilde{y}$  — основание перпендикуляра, опущенного из вершины  $x_0$  на сторону  $[y, y_0]$ . Тогда  $\tilde{y} \in [y, y_0]$  и  $\|x_0 - \tilde{y}\| < \|x_0 - y_0\|$ . Последнее неравенство противоречит выбору точек  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$ . Таким образом,  $c^\top x > d > c^\top y$ . ◁

**Опр. 1.5.** Гиперплоскость  $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n: c^\top x = d\}$  называется *опорной к множеству  $X$  в точке  $x_0$* , если  $x_0 \in \Pi \cap \overline{X}$  и для всех  $x \in X$  одновременно выполняется одно из неравенств:  $c^\top x \geq d$  или  $c^\top x \leq d$ .

Напомним, что точка  $x$  называется *граничной* для множества  $X$ , если любая её окрестность содержит как точки, принадлежащие данному множеству, так и

не принадлежащие ему.

**Лемма 1.6.** *Выпуклое множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  в каждой граничной точке имеет опорную гиперплоскость.*

▷ Пусть  $x_0$  — граничная точка множества  $X$ . Так как  $X$  — выпуклое множество, то  $x_0$  — граничная точка замыкания  $\bar{X}$ . Следовательно, найдётся такая последовательность точек  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{X}$ , что  $y_k \rightarrow x_0$ . Согласно теореме 1.1 для множеств  $\{y_k\}$  и  $\bar{X}$  (выпуклость  $\bar{X}$  следует из леммы 1.5) найдётся такая гиперплоскость, заданная уравнением  $c_k^\top x = d_k$ , что  $c_k^\top x > d_k > c_k^\top y_k$ ,  $x \in \bar{X}$ . Без нарушения общности будем считать, что  $\|c_k\| = 1$ . Тогда, в силу построения, последовательность  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  является ограниченной. Наконец, без нарушения общности будем считать, что  $c_k \rightarrow c$  и  $d_k \rightarrow d$ . Тогда  $c^\top x \geq d$ ,  $x \in X$ , и  $c^\top x_0 = d$ . ◁

**Теорема 1.2.** *Произвольное выпуклое множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  можно отделить от точки  $y$ , ему не принадлежащей.*

▷ Действительно, если  $y \notin \bar{X}$ , то доказательство следует из теоремы 1.1, иначе — из леммы 1.6. ◁

**Теорема 1.3.** *Множества  $X$  и  $Y \subset \mathbb{R}^n$  отделимы тогда и только тогда, когда множество  $X - Y$  и точка  $\{0\}$  отделимы.*

▷ Пусть множества  $X$  и  $Y$  отделимы. Тогда существуют такие  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и  $d \in \mathbb{R}$ , что  $c^\top y \leq d \leq c^\top x$  для всех  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Следовательно,  $c^\top(x - y) \geq 0$ , а значит, гиперплоскость  $\Pi = \{x: c^\top x = 0\}$  отделяет множество  $X - Y$  от нуля.

Предположим теперь, что множества  $X - Y$  и  $\{0\}$  отделимы. Тогда существуют такие  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и  $d \in \mathbb{R}$ , что  $0 \leq d \leq c^\top z$  для всех  $z \in X - Y$ . Следовательно,  $c^\top y \leq c^\top x$  для всех  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , а значит,  $\sup_{y \in Y} c^\top y \leq \inf_{x \in X} c^\top x$ . Выберем такое

число  $\tilde{d} \in \mathbb{R}$ , что  $\sup_{y \in Y} c^\top y \leq \tilde{d} \leq \inf_{x \in X} c^\top x$ . Тогда гиперплоскость  $\Pi = \{x: c^\top x = \tilde{d}\}$  отделяет множества  $X$  и  $Y$ . ◁

**Следствие 1.1.** *Пусть  $X, Y$  — непустые выпуклые непересекающиеся множества. Тогда  $X$  и  $Y$  отделимы.*

Через  $\text{Int } X$  обозначим внутренность множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , т.е. множество всех внутренних точек  $X$ . Не сложно видеть, что, если  $X$  — выпуклое множество, то  $\text{Int } X$  также выпукло.

**Следствие 1.2.** *Пусть  $X, Y$  — выпуклые множества с непустой внутренностью, при этом  $\text{Int } X \cap \text{Int } Y = \emptyset$ . Тогда  $X$  и  $Y$  отделимы.*

### Упражнения

1. Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — непустое множество. Докажите, что любую точку  $p$ , принадлежащую выпуклой оболочке множества  $X$ , можно представить в виде выпуклой линейной комбинации не более чем  $n + 1$  точек множества  $X$ .
2. Пусть в  $\mathbb{R}^n$  заданы точки  $p_1, p_2, \dots, p_s$ , где  $s \geq n + 2$ . Докажите, что точки можно разбить на два непересекающихся множества так, что выпуклые оболочки этих двух множеств будут иметь непустое пересечение.

3. (Теорема Хелли) Пусть  $I$  — произвольное семейство индексов и  $\{X_i\}_{i \in I}$  — семейство замкнутых выпуклых множеств в  $\mathbb{R}^n$ , из которых хотя бы одно компактно. Докажите, что если любое подсемейство из  $n + 1$  множеств имеет непустое пересечение, то и всё семейство имеет непустое пересечение.
4. Озеро имеет форму невыпуклого  $n$ -угольника. Докажите, что множество точек озера, из которых видны все его берега, либо пусто, либо заполняет внутренность выпуклого  $m$ -угольника, где  $m \leq n$ .

## §2 ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

**Опр. 2.1.** Функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , заданная на выпуклом множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$ , называется выпуклой, если для любых  $x, y \in X$  и любого  $\alpha \in [0, 1]$  выполнено неравенство  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ . Если последнее неравенство строгое при  $\alpha \in (0, 1)$ , то функция  $f$  называется строго выпуклой.

**Лемма 2.1.** Для того, чтобы функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , определённая на выпуклом множестве  $X$ , была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы было выпуклым множество  $\text{epi } f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y): x \in X, y \geq f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}$ . (Множество  $\text{epi } f$  называется надграфиком функции  $f$ .)

▷ Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция. Выбрав произвольные две точки  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2) \in \text{epi } f$  и число  $\alpha \in [0, 1]$ , докажем, что  $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 \in \text{epi } f$ , т.е. что  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$ . Так как  $f(x_1) \leq y_1$  и  $f(x_2) \leq y_2$ , то необходимое неравенство следует из выпуклости функции  $f$ .

Предположим теперь, что  $\text{epi } f$  — выпуклое множество. Очевидно, что для произвольных двух точек  $x_1, x_2 \in X$  пары  $z_1 = (x_1, f(x_1))$ ,  $z_2 = (x_2, f(x_2))$  принадлежат надграфу функции  $f$ . Следовательно, для произвольного числа  $\alpha \in [0, 1]$  имеем  $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 \in \text{epi } f$ , а значит,  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ . Другими словами, функция  $f$  выпукла. ◁

**Лемма 2.2** (Неравенство Йенсена). Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция. Тогда для произвольных точек  $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$  и чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \geq 0$ , таких что  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ , справедливо неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_m f(x_m). \quad (2.1)$$

▷ Докажем неравенство (2.1) индукцией по количеству точек  $m$ . База индукции  $m = 2$  следует из определения выпуклой функции. Предположим, что неравенство (2.1) верно при  $m \geq 2$ . Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \in X$  и числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1} \geq 0$ , такие что  $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1$ . Без нарушения общности будем считать, что

$\alpha_1 < 1$ . Так как  $\sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} = 1$ , то верна цепочка неравенств

$$f\left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i\right) \leq \alpha_1 f(x_1) + (1 - \alpha_1) f\left(\sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i f(x_i). \quad \triangleleft$$

Напомним, что точка  $x$  называется внутренней для множества  $X$ , если найдётся такое  $r > 0$ , что  $B_r(x) \subset X$ .

**Лемма 2.3.** Выпуклая функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех внутренних точках множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ .



▷ Пусть  $x_0$  — внутренняя точка множества  $X$ , а значит,  $B_r(x_0) \subset X$  для некоторого  $r > 0$ . Пусть  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  — стандартный базис пространства  $\mathbb{R}^n$ . Тогда для любого  $\alpha \in [0, 1)$  справедливо неравенство

$$f(x_0 \pm \alpha r e_i) \leq (1 - \alpha)f(x_0) + \alpha f(x_0 \pm r e_i).$$

Следовательно,  $\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} f(x_0 \pm t e_i) \leq f(x_0)$ , поэтому,  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$ . Так как  $f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x_0 + h) + \frac{1}{2}f(x_0 - h)$  для любого  $h \in B_r(0)$ , то

$$f(x_0) \leq \frac{1}{2} \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Следовательно,  $f(x_0) = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , т.е. функция  $f$  непрерывна в  $x_0$ . <

**Опр. 2.2.** Вектор  $c \in \mathbb{R}^n$  называется субградиентом функции  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ , если  $f(x) \geq f(x_0) + c^\top(x - x_0)$  для всех  $x \in X$ . Множество всевозможных субградиентов функции  $f$  в точке  $x_0$  называется субдифференциалом функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $\partial f(x_0)$ .

**Лемма 2.4.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, а  $x_0$  — внутренняя точка множества  $X$ . Тогда множество  $\partial f(x_0)$  непусто.

▷ Пусть  $c^\top x + by = d$  — уравнение опорной гиперплоскости к множеству  $\text{epi } f$  в точке  $(x_0, f(x_0))$ . Тогда  $c^\top x + by \geq d$  при  $(x, y) \in \text{epi } f$  и  $c^\top x_0 + b f(x_0) = d$ . Докажем, что  $b > 0$ . Так как  $(x_0, f(x_0) + 1) \in \text{epi } f$ , то  $c^\top x_0 + b f(x_0) + b \geq d$ , т.е.  $b \geq 0$ . Если  $b = 0$ , то  $c^\top x \geq d$ ,  $x \in X$ , а значит,  $c^\top(x - x_0) \geq 0$ . Так как  $x_0$  — внутренняя точка, то  $x_0 - tc \in X$  для некоторого положительного числа  $t > 0$ . Следовательно,  $-t\|c\|^2 \geq 0$ , т.е.  $c = 0$ . Получено противоречие. Таким образом,  $b > 0$ , а значит,

$$f(x) \geq -\frac{c^\top x}{b} + \frac{d}{b} \quad \text{и} \quad f(x_0) = -\frac{c^\top x_0}{b} + \frac{d}{b}.$$

Наконец, отнимая последнее равенство от неравенства, получаем, что

$$f(x) - f(x_0) \geq (\tilde{c}, x - x_0), \quad \text{где} \quad \tilde{c} = -\frac{c}{b}. \quad <$$

Имеет место следующее обобщение неравенства Йенсена.

**Лемма 2.5.** Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, а  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  — случайный вектор. Тогда справедливо неравенство  $f(E\xi) \leq Ef(\xi)$ , при условии, что соответствующие математические ожидания существуют.

▷ Так как  $f(x) - f(y) \geq c_y^\top(x - y)$ , где  $c_y \in \partial f(y)$ , то  $f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^n} (c_y^\top x + d_y)$ . Следовательно,

$$f(E\xi) = \max_{y \in \mathbb{R}^n} (c_y^\top E\xi + d_y) = \max_{y \in \mathbb{R}^n} E(c_y^\top \xi + d_y) \leq E \max_{y \in \mathbb{R}^n} (c_y^\top \xi + d_y) = Ef(\xi). \quad <$$

**Лемма 2.6.** Если в точке  $x_0 \in X$  выпуклая функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируема, то  $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$ .

▷ Пусть  $x \in X$  и  $t \in (0, 1]$ . Тогда  $f(x_0 + t(x - x_0)) \leq (1 - t)f(x_0) + tf(x)$ , а значит,  $\frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \leq f(x) - f(x_0)$ . Устремляя  $t$  к 0, получаем, что

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top (x - x_0). \quad \triangleleft$$

**Лемма 2.7.** Если  $f \in C^2(X)$ , где  $X$  — открытое выпуклое множество, то для выпуклости функции  $f$  необходимо и достаточно, чтобы матрица  $\nabla^2 f(x)$  была неотрицательно определённой ( $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ ). Если матрица  $\nabla^2 f(x)$  положительно определена ( $\nabla^2 f(x) \succ 0$ ), то  $f$  — строго выпуклая функция.

▷ Выберем произвольные точку  $x_0 \in X$  и направление  $\ell \neq 0$ . Рассмотрим функцию  $g(t) = f(x_0 + t\ell)$ , заданную на интервале  $T \stackrel{\text{def}}{=} \{t: x_0 + t\ell \in X\}$ . Очевидно, что функция  $f$  (строго) выпукла тогда и только тогда, когда (строго) выпуклы скалярные функции  $g$  при всевозможных  $x_0 \in X$  и  $\ell \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Имеем  $g'(t) = \ell^\top \nabla f(x_0 + t\ell)$  и  $g''(t) = \ell^\top \nabla^2 f(x_0 + t\ell) \ell$ . Функция  $g$  выпукла тогда и только тогда, когда  $g''(t) \geq 0$ , что равносильно неотрицательности определённости матрицы  $\nabla^2 f(x)$ . Если  $\nabla^2 f(x) \succ 0$ , то  $g''(t) > 0$ , а значит,  $g$  — строго выпуклая функция.  $\triangleleft$

В заключении рассмотрим операции над функциями, сохраняющие выпуклость. Будем писать, что  $x \leq y$  для векторов  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , если выполнены неравенства  $x_i \leq y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Лемма 2.8.** Пусть  $f, f_1, f_2, \dots, f_m$  — выпуклые функции. Тогда следующие функции также являются выпуклыми:

- a)  $g(x) = \sum_{i=1}^m c_i f_i(x)$ , где  $c_i \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ ;
- b)  $g(x) = f(Fx)$ , где  $Fx = Ax + b$  — аффинное преобразование;
- c)  $g(x) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$ ;
- d)  $g(x) = h(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ , где  $h$  — выпуклая монотонно неубывающая функция, т.е.  $h(y) \leq h(\tilde{y})$  для всех  $y$  и  $\tilde{y}$ , таких что  $y \leq \tilde{y}$ .

▷ Доказательства утверждений тривиальным образом следуют из определения выпуклости. Для примера докажем выпуклость функции  $g$  из пункта d). Пусть  $x, y \in X$  и  $\alpha \in [0, 1]$ . Так как функции  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , выпуклы по условию, то  $f_i(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f_i(x) + (1 - \alpha)f_i(y)$ . Положим  $u = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  и  $v = (f_1(y), \dots, f_m(y))$ , тогда в силу монотонности функции  $h$  верно неравенство

$$h(f_1(\alpha x + (1 - \alpha)y), \dots, f_m(\alpha x + (1 - \alpha)y)) \leq h(\alpha u + (1 - \alpha)v).$$

Так как функция  $h$  выпукла, то  $h(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha h(u) + (1 - \alpha)h(v)$ . Наконец, в силу определения функции  $g$  имеем

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) = h(f_1(\alpha x + (1 - \alpha)y), \dots, f_m(\alpha x + (1 - \alpha)y)),$$

$g(x) = h(u)$  и  $g(y) = h(v)$ , а значит,  $g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)$ . Следовательно,  $g$  — выпуклая функция.  $\triangleleft$

### Упражнения

5. Докажите, что непрерывная выпуклая функция  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет неравенству

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

6. Докажите, что субдифференциал  $\partial f(x_0)$  произвольной выпуклой функции  $f$  в точке  $x_0$  является замкнутым выпуклым множеством.
7. Пусть  $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$ , где  $f_i(x)$  — выпуклые функции, и пусть  $c_i$  — субградиент функции  $f_i$  в точке  $x_0$ . Докажите, что вектор  $c \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i$ ,  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ , где  $\alpha_i \geq 0$  и  $\alpha_i = 0$ , если  $f_i(x_0) < f(x_0)$ , является субградиентом функции  $f(x)$ .
8. (Неравенство Караматы) Пусть даны два упорядоченных по невозрастанию набора из  $n$  действительных чисел  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Говорят, что набор  $\mathbf{a}$  *мажорирует* набор  $\mathbf{b}$ , и пишут  $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ , если  $a_1 \geq b_1$ ,  $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$ ,  $\dots$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ . Докажите, что для любой выпуклой функции  $y = f(x)$ , определённой на некотором промежутке  $I$ , и любых двух наборов  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  из этого промежутка, удовлетворяющих условию  $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ , справедливо неравенство

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n).$$

9. Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — выпуклая и вогнутая функции соответственно, определённые на выпуклом множестве  $X$ , причём для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $f(x) \geq g(x)$ . Докажите, что существует линейная функция  $h(x)$ , такая что

$$f(x) \geq h(x) \geq g(x) \quad \text{для каждого } x \in X.$$

### §3 ЗАДАЧА ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации

$$\begin{cases} f_0(x) \rightarrow \min; \\ f_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m; \\ x \in X; \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклые функции,  $0 \leq j \leq m$ , а  $X \subset \mathbb{R}^n$  — произвольное выпуклое множество. Задача (3.1) называется задачей выпуклой оптимизации (выпуклого программирования), а функция  $f_0(x)$  — целевой функцией задачи (3.1). Множество  $Y \stackrel{\text{def}}{=} X \cap \{x: f_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq m\} \subset \mathbb{R}^n$  будем называть множеством допустимых векторов (точек). Очевидно, что  $Y$  — выпуклое множество. Допустимую точку  $x \in Y$ , для которой выполнены неравенства  $f_i(x) < 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ , будем называть строго допустимой. Ограничение  $f_j(x) \leq 0$  называется активным в допустимой точке  $x \in Y$ , если  $f_j(x) = 0$ . Множество индексов активных ограничений обозначим через  $I(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{j: f_j(x) = 0, 1 \leq j \leq m\}$ .

**Опр. 3.1.** Допустимый вектор  $x^* \in Y$  называется решением задачи (3.1), если  $f_0(x^*) \leq f_0(x)$  при  $x \in Y$ .

В общем случае, когда функции  $f_j$  не обязательно выпуклы, приводят определения локального и глобального экстремумов. Однако, очевидно, что для выпуклых задач эти понятия совпадают. Более того, если дополнительно известно, что  $f_0$  — строго выпуклая функция, то задача (3.1) имеет не более одного решения.

Иногда к ограничению задачи (3.1) добавляют следующее  $Ax = b$ , где  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^k$  (отметим, что поверхность уровня  $\{x: f(x) = c\}$  произвольной выпуклой функции  $f(x)$ , вообще говоря, не является выпуклым множеством). Пусть  $\tilde{x}$  — какое-либо решение линейного уравнения  $Ax = b$  и  $K \in \mathbb{R}^{n \times d}$  — матрица, столбцы которой образуют базис  $\ker A$ ,  $\dim \ker A = d$ . Тогда,  $\{\tilde{x} + Ky: y \in \mathbb{R}^d\}$  — множество всех решений системы  $Ax = b$ . Таким образом, исходная задача равносильна задаче (3.1) для функций  $\tilde{f}_i(y) \stackrel{\text{def}}{=} f_i(\tilde{x} + Ky)$ ,  $0 \leq i \leq m$ , и множества  $\tilde{X} = K^{-1}(X - \tilde{x})$ .

**Лемма 3.1.** Пусть функция  $f_0$  из задачи (3.1) является дифференцируемой, тогда точка  $x^* \in Y$  — решение задачи (3.1), если и только если для любой точки  $x \in Y$  справедливо неравенство

$$\nabla f_0(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0. \quad (3.2)$$

▷ Пусть  $x^*$  — решение задачи (3.1), докажем, что верно неравенство (3.2). Предположим противное, т.е., что нашлась такая допустимая точка  $\tilde{x} \in Y$ , что  $\nabla f_0(x^*)^\top (\tilde{x} - x^*) < 0$ . Так как  $f_0$  — дифференцируемая функция, то имеет место равенство  $f_0(x^* + t(\tilde{x} - x^*)) = f_0(x^*) + t\nabla f_0(x^*)^\top (\tilde{x} - x^*) + o(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . При

достаточно малом  $t > 0$  слагаемое  $t(\nabla f_0(x^*)^\top(\tilde{x} - x^*) + o(t)/t)$  отрицательное, а значит,  $f_0(x^* + t(\tilde{x} - x^*)) < f_0(x^*)$ , что противоречит выбору  $x^*$ .

Предположим, что для некоторой точки  $x^* \in Y$  выполнено неравенство (3.2). Так как  $f_0(x) \geq f_0(x^*) + \nabla f_0(x^*)^\top(x - x^*)$ ,  $x \in Y$ , то  $f_0(x) \geq f_0(x^*)$ , а значит,  $x^*$  — решение задачи (3.1).  $\triangleleft$

**Опр. 3.2.** Говорят, что для задачи (3.1) выполнено условие Слейтера, если множество строго допустимых точек задачи (3.1) не пусто.

Следуя [1, с. 52–58], перейдём к доказательству фундаментального результата, который является прямым аналогом метода множителей Лагранжа. Напомним, что функция  $\mathcal{L}(x; \lambda_0, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(x)$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ , называется функцией Лагранжа задачи (3.1), а числа  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  — множителями Лагранжа.

**Теорема 3.1** (Кун, Таккер). Пусть  $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 \leq j \leq m$ , — выпуклые функции, а  $X$  — выпуклое множество. Если  $x^*$  является решением задачи (3.1), то найдутся такие множители Лагранжа  $\lambda_0^*$  и  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ , что

- a) (условие невырожденности) числа  $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$  не равны 0 одновременно;
- b) (условие неотрицательности)  $\lambda_j^* \geq 0$ ,  $0 \leq j \leq m$ ;
- c) (условия дополняющей нежёсткости)  $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ .
- d) (принцип минимума)  $\min_{x \in X} \mathcal{L}(x; \lambda_0^*, \lambda^*) = \mathcal{L}(x^*; \lambda_0^*, \lambda^*)$ ;

Пусть для некоторых множителей  $\lambda_0^*, \lambda^*$  и допустимой точки  $x^* \in Y$  выполнены условия a) – d), тогда

A)  $x^*$  — решение задачи (3.1), если  $\lambda_0^* \neq 0$ ;

B)  $\lambda_0^* \neq 0$ , если для задачи (3.1) справедливо условие Слейтера.

$\triangleright$  Пусть  $x^*$  — решение задачи (3.1). Без нарушения общности будем считать, что  $f_0(x^*) = 0$ . Действительно, если это не так, то определим новую функцию  $\tilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(x^*)$ . Рассмотрим множество  $C \subset \mathbb{R}^{m+1}$ , состоящее из таких векторов  $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)^\top$ , для которых найдётся точка  $x_\mu \in X$ , такая что выполнены неравенства

$$f_0(x_\mu) < \mu_0, \quad f_1(x_\mu) \leq \mu_1, \quad \dots, \quad f_m(x_\mu) \leq \mu_m. \quad (3.3)$$

Установим ряд свойств множества  $C$ . Сперва докажем, что множество  $C$  непусто и выпукло. Действительно, любой вектор  $\mu \in \mathbb{R}^{m+1}$  с положительными компонентами принадлежит  $C$ , так как в (3.3) для такого вектора достаточно положить  $x = x^*$ . Выпуклость множества  $C$  устанавливается аналогично доказательству выпуклости надграфика ерй  $f$  произвольной выпуклой функции  $f$ .

Докажем, что нулевой вектор  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m+1}$  не принадлежит  $C$ . Предположим противное. Тогда существует такая точка  $\tilde{x} \in X$ , что  $f_0(\tilde{x}) < 0$  и  $f_i(\tilde{x}) \leq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ , а значит,  $x^*$  не является решением задачи (3.1).

Поскольку  $C$  — выпуклое множество и  $\mathbf{0} \notin C$ , то из теоремы 1.2 отделимости следует, что найдутся такие числа  $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ , неравные одновременно нулю,

что  $\sum_{j=0}^m \lambda_j^* \mu_j \geq 0$ ,  $\mu \in C$ . Докажем, что  $\lambda_0^*$ ,  $\lambda^*$  — искомые множители Лагранжа.

Множители  $\lambda_j^*$ ,  $0 \leq j \leq m$ , неотрицательны. Действительно, очевидно, что вектор  $(\delta, \dots, \delta, 1, \delta, \dots, \delta)^T$ , где  $\delta > 0$  и 1 стоит на  $j_0$ -м месте, принадлежит  $C$ , а значит,  $\lambda_{j_0}^* \geq -\delta \sum_{j \neq j_0} \lambda_j^*$ . Так как  $\delta > 0$  выбрано произвольно, то  $\lambda_{j_0}^* \geq 0$ .

Множители  $\lambda_i^*$ ,  $1 \leq i \leq m$ , удовлетворяют условиям дополняющей нежёсткости. Выберем индекс  $i_0$ . Если  $f_{i_0}(x^*) = 0$ , то  $\lambda_{i_0}^* f_{i_0}(x^*) = 0$ . Предположим, что  $f_{i_0}(x^*) < 0$ . Очевидно, что вектор  $(\delta, 0, \dots, 0, f_{i_0}(x^*), 0, \dots, 0)^T$ , где  $\delta > 0$  и число  $f_{i_0}(x^*)$  стоит на  $i_0$ -м месте, принадлежит  $C$ . Следовательно,  $\lambda_{i_0}^* f_{i_0}(x^*) \geq -\lambda_{i_0}^* \delta$ . Таким образом,  $\lambda_{i_0}^* f_{i_0}(x^*) \geq 0$ , а значит,  $\lambda_{i_0}^* = 0$ , т.е.  $\lambda_{i_0}^* f_{i_0}(x^*) = 0$ .

В точке  $x^*$  выполнен принцип минимума. Действительно, пусть  $x \in X$ . Тогда вектор  $(f_0(x) + \delta, f_1(x), \dots, f_m(x))^T$ , где  $\delta > 0$ , принадлежит множеству  $C$ .

Следовательно,  $\lambda_0^* f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) \geq -\lambda_0^* \delta$ , а значит,  $\mathcal{L}(x; \lambda_0^*, \lambda^*) \geq 0$ . С другой стороны,  $f_0(x^*) = 0$  и выполнены условия дополняющей нежёсткости, поэтому  $\mathcal{L}(x^*; \lambda_0^*, \lambda^*) = 0$ . Таким образом,  $\mathcal{L}(x; \lambda_0^*, \lambda^*) \geq \mathcal{L}(x^*; \lambda_0^*, \lambda^*)$  для любого  $x \in X$ .

Пусть теперь для некоторых множителей  $\lambda_0^*$ ,  $\lambda^*$  и допустимой точки  $x^* \in Y$  выполнены условия а) – д). Предположим, что  $\lambda_0^* \neq 0$ . Без нарушения общности будем считать, что  $\lambda_0^* = 1$ . Тогда для любой допустимой точки  $x \in Y$  получаем

$$f_0(x) \geq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) = \mathcal{L}(x; 1, \lambda^*) \geq \mathcal{L}(x^*; 1, \lambda^*).$$

Так как  $\mathcal{L}(x^*; 1, \lambda^*) = f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) = f_0(x^*)$ , то  $x^*$  — решение задачи (3.1).

Предположим, что для задачи (3.1) выполнено условие Слейтера. Следовательно, существует точка  $\tilde{x} \in Y$ , такая что  $f_i(\tilde{x}) < 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Докажем, что  $\lambda_0^* \neq 0$ . Предположим противное. Тогда  $\mathcal{L}(\tilde{x}; 0, \lambda^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(\tilde{x}) < 0$ , так как не все множители  $\lambda_i^*$ ,  $1 \leq i \leq m$ , равны нулю. С другой стороны,  $\mathcal{L}(x^*; 0, \lambda^*) = 0$ , а значит,  $\mathcal{L}(\tilde{x}; 0, \lambda^*) < \mathcal{L}(x^*; 0, \lambda^*)$ . Получено противоречие.  $\triangleleft$

Функция  $\mathcal{L}(x; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ , заданная на множестве  $X \times \mathbb{R}_+^m$ , где  $\mathbb{R}_+^m \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{R}^m : \lambda_i \geq 0\}$ , называется нормальной функцией Лагранжа.

**Лемма 3.2.** Пусть  $(x^*, \lambda^*) \in X \times \mathbb{R}_+^m$ . Тогда точка  $x^*$  допустимая, т.е.  $x^* \in Y$ , и для пары  $(x^*, \lambda^*)$  выполнены условия а) – д) теоремы Куна – Таккера, если и только если  $(x^*, \lambda^*)$  — седловая точка нормальной функции Лагранжа, т.е.

$$\min_{x \in X} \mathcal{L}(x; \lambda^*) = \mathcal{L}(x^*; \lambda^*) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(x^*; \lambda). \quad (3.4)$$

$\triangleright$  Действительно, пусть для пары  $(x^*, \lambda^*) \in Y \times \mathbb{R}_+^m$  выполнены условия а) – д). Необходимо доказать только правое неравенство в (3.4). Для произвольных

множителей  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$  в силу условий b) и c) имеем

$$\mathcal{L}(x^*; \lambda^*) = f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) = f_0(x^*) \geq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^*) = \mathcal{L}(x^*; \lambda).$$

Пусть теперь пара  $(x^*, \lambda^*) \in X \times \mathbb{R}_+^m$  — седловая точка функции  $\mathcal{L}(x; \lambda)$ . Докажем, только что  $x^* \in Y$  и справедливо условие c), так как остальные условия, очевидно, выполнены. Если  $f_{i_0}(x^*) > 0$  для некоторого  $i_0 \geq 1$ , то имеет место неравенство  $\mathcal{L}(x^*; \lambda^*) < \mathcal{L}(x^*; \tilde{\lambda})$ , где  $\tilde{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{i_0}^* + \delta, \dots, \lambda_m^*)^\top$  и  $\delta > 0$ , которое противоречит (3.4). Следовательно,  $x^*$  — допустимая точка задачи (3.1). Так как  $\mathcal{L}(x^*; \lambda^*) \geq \mathcal{L}(x^*; 0)$ , то  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) \geq 0$ , а значит,  $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ .  $\triangleleft$

Приведём критерий существования седловой точки, из доказательства которого, в частности, будет следовать способ её построения.

**Теорема 3.2.** Пусть  $f(x, y): X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, заданная на произведении компактных множеств  $X$  и  $Y$ . Тогда

$$\min_x \max_y f(x, y) \geq \max_y \min_x f(x, y). \quad (3.5)$$

При этом равенство в (3.5) достигается тогда и только тогда, когда существует седловая точка  $(x_0, y_0)$  функции  $f$ :

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0), \quad x \in X, y \in Y.$$

$\triangleright$  Выберем произвольную точку  $\tilde{y} \in Y$ . Так как  $\max_y f(x, y) \geq f(x, \tilde{y})$ ,  $x \in X$ , то  $\min_x \max_y f(x, y) \geq \min_x f(x, \tilde{y})$ , а значит, в силу произвольного выбора  $\tilde{y}$  выполнено неравенство (3.5).

Предположим, что  $\min_x \max_y f(x, y) = \max_y \min_x f(x, y)$ . Выберем точки  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  из условий  $\max_y f(x_0, y) = \min_x \max_y f(x, y)$  и  $\min_x f(x, y_0) = \max_y \min_x f(x, y)$ . Тогда  $f(x_0, y_0) \geq \min_x f(x, y_0) = \max_y \min_x f(x, y) = \min_x \max_y f(x, y)$ . Поэтому, справедливо неравенство  $f(x_0, y_0) \geq \max_y f(x_0, y)$ . Аналогично, получаем

$$f(x_0, y_0) \leq \max_y f(x_0, y) = \min_x \max_y f(x, y) = \max_y \min_x f(x, y) = \min_x f(x, y_0).$$

Таким образом,  $(x_0, y_0)$  — седловая точка.

Пусть теперь известно, что  $(x_0, y_0)$  — седловая точка. Тогда

$$\begin{aligned} \max_y \min_x f(x, y) &\geq \min_x f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0), \\ \min_x \max_y f(x, y) &\leq \max_y f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\max_y \min_x f(x, y) \geq \min_x \max_y f(x, y)$  и неравенство (3.5) обращается в равенство.  $\triangleleft$

Отметим, что в доказательстве теоремы 3.2 условия компактности множеств  $X$ ,  $Y$  и непрерывности функции  $f(x, y)$  мы неявно использовали лишь для существования векторов  $x_0$ ,  $y_0$  при построении седловой точки.

**Пример 3.1** (Метод опорных векторов, SVM). Сформулируем задачу обучения с учителем. Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение из пространства объектов  $X$  в множество ответов  $Y$ . Отображение  $f$ , вообще говоря, не известно, однако, дана обучающая выборка  $S = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$  размера  $N$ , где  $x_i \in X$  и  $y_i = f(x_i) \in Y$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Требуется построить отображение  $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ , аппроксимирующее  $f$  на всём пространстве  $X$ .

Рассмотрим частный случай задачи обучения с учителем — задачу бинарной классификации, в которой  $Y = \{-1, 1\}$  и объекты описываются  $n$ -мерными вещественными векторами, т.е.  $X = \mathbb{R}^n$ . Далее будем считать, что в обучающей выборке содержатся объекты двух классов, а искомое отображение  $\tilde{f}$  будем строить в форме линейного порогового классификатора  $\tilde{f}(x) = \text{sign}(\omega^\top x - \omega_0)$ , где  $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  — параметры, которые необходимо определить.

Предположим, что выборка  $S$  строго линейно разделима, т.е. существуют такие значения параметров  $\omega$  и  $\omega_0$ , при которых справедливы неравенства  $y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) > 0$ ,  $1 \leq i \leq N$ . В этом случае разделяющая гиперплоскость, вообще говоря, не единственна. Идея метода опорных векторов (support vector machine) состоит в выборе такой разделяющей гиперплоскости, которая максимально далеко отстоит от ближайших к ней точек обоих классов.

Заметим, что параметры  $\omega$  и  $\omega_0$  линейного порогового классификатора  $\tilde{f}$  определяются с точностью до умножения на одну и ту же ненулевую константу. Поэтому, без ограничения общности будем считать, что  $\min_{1 \leq i \leq N} y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) = 1$ . Ориентированное расстояние от точки  $x_i$  до гиперплоскости, заданной уравнением  $\omega^\top x = \omega_0$ , равно  $(\omega^\top x_i - \omega_0)/\|\omega\|$ . Поэтому для определения параметров  $\omega$  и  $\omega_0$  необходимо решить задачу

$$\begin{cases} \|\omega\| \rightarrow \min; \\ \min_{1 \leq i \leq N} y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) = 1; \end{cases}$$

которая эквивалентна следующей

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\|\omega\|^2 \rightarrow \min; \\ y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) \geq 1, \quad 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (3.6)$$

В силу предположения о строгой линейной разделимости множество строго допустимых точек задачи (3.6) не пусто, а значит, выполнено условие Слейтера. Несложно показать, что задача (3.6) имеет решение. Действуя согласно теореме Куна – Таккера и лемме 3.2, найдём седловую точку нормальной функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{1}{2}\|\omega\|^2 - \sum_{i=1}^N \lambda_i (y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) - 1) \rightarrow \min_{\omega, \omega_0} \max_{\lambda}. \quad (3.7)$$

Фиксируя  $\lambda \in \mathbb{R}_+^N$ , решим задачу  $\mathcal{L}(\omega, \omega_0; \lambda) \rightarrow \min_{\omega, \omega_0}$ . Из условия стационарности имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \omega - \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i = 0, \quad \text{т.е.} \quad \omega = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_0} = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0. \quad (3.8)$$



Из (3.8), в частности, следует, что вектор  $\omega$  является линейной комбинацией тех векторов обучающей выборки, для которых  $\lambda_i \neq 0$ . Согласно условиям дополняющей нежёсткости для этих векторов справедливы равенства  $\omega^\top x_i - \omega_0 = y_i$ . Такие векторы называются опорными. Используя равенства (3.8), преобразуем задачу (3.7) к задаче квадратичного программирования, содержащую только двойственные переменные:

$$\begin{cases} -\mathcal{L}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -\min_{\omega, \omega_0} \mathcal{L}(\omega, \omega_0; \lambda) = -\sum_{i=1}^N \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i^\top x_j \rightarrow \min_{\lambda}; \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0; \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Пусть  $\lambda$  — решение задачи (3.9). Тогда вектор  $\omega$  вычисляется согласно (3.8). Для определения порога  $\omega_0$  достаточно взять произвольный опорный вектор  $x_i$  и положить  $\omega_0 = \omega^\top x_i - y_i$ . Однако, из-за возможных погрешностей вычислений рекомендуется брать такой опорный вектор  $x_i$  при определении  $\omega_0$ , для которого двойственная переменная  $\lambda_i$  максимальна.

Рассмотрим общий случай, не делая предположений о линейной разделимости выборки. При любом выборе параметров  $\omega$  и  $\omega_0$  линейный классификатор  $f$  может ошибаться на объектах выборки. Введём набор дополнительных переменных  $\xi_i \geq 0$ , характеризующих величину ошибки на объектах  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Уточним задачу (3.6):

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \|\omega\|^2 + C \sum_{i=1}^N \xi_i \rightarrow \min_{\omega, \omega_0, \xi}; \\ y_i (\omega^\top x_i - \omega_0) \geq 1 - \xi_i, \quad 1 \leq i \leq N; \\ \xi \geq 0; \end{cases} \quad (3.10)$$

где  $C > 0$  — некоторый заданный гиперпараметр, определяющий компромисс между максимизацией ширины разделяющей полосы и минимизацией суммарной ошибки. Очевидно, что задача (3.10) имеет решение и множество строго допустимых точек не пусто, а значит, выполнено условие Слейтера. Рассмотрим функцию Лагранжа для задачи (3.10):

$$\mathcal{L}(\omega, \omega_0, \xi; \lambda, \eta) = \frac{1}{2} \|\omega\|^2 - \sum_{i=1}^N \lambda_i (y_i (\omega^\top x_i - \omega_0) - 1) - \sum_{i=1}^N \xi_i (\lambda_i + \eta_i - C),$$

где  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)^\top$  — вектор переменных, двойственных к вектору переменных  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^\top$ . Согласно теореме Куна – Таккера и лемме 3.2 задача (3.10) сводится к поиску седловой точки функции Лагранжа:  $\mathcal{L}(\omega, \omega_0, \xi; \lambda, \eta) \rightarrow \min_{\omega, \omega_0, \xi} \max_{\lambda, \eta}$ . Зафиксируем произвольные векторы  $\lambda$  и  $\eta$ . Из условия стационарности по аргументам  $\omega$  и  $\omega_0$  получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \omega - \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i = 0, \quad \text{т.е.} \quad \omega = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_0} = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0; \quad (3.11)$$

Если для некоторого индекса  $1 \leq i \leq N$  верно неравенство  $\lambda_i + \eta_i > C$ , то, очевидно,  $\min_{\omega, \omega_0, \xi} \mathcal{L}(\omega, \omega_0, \xi; \lambda, \eta) = -\infty$ , а значит, такие множители Лагранжа  $\lambda$  и  $\eta$  не могут

быть компонентами седловой точки. Поэтому будем предполагать, что  $\lambda_i + \eta_i \leq C$ . При этом, выполнено равенство  $\xi_i(\lambda_i + \eta_i - C) = 0$ , а именно, если  $\lambda_i + \eta_i < C$ , то мы должны положить  $\xi_i = 0$ . Используя (3.11), сведём задачу поиска седловой точки к задаче квадратичного программирования:

$$\begin{cases} -\mathcal{L}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -\min_{\omega, \omega_0, \xi} \mathcal{L}(\omega, \omega_0, \xi; \lambda, \eta) = -\sum_{i=1}^N \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i^\top x_j \rightarrow \min_{\lambda}; \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0; \\ 0 \leq \lambda_i \leq C, \quad 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (3.12)$$

Пусть  $\lambda$  – решение задачи (3.12). Аналогично случаю линейной разделимой выборки, вектор  $\omega$  вычисляется согласно (3.11). Порог  $\omega_0$  определим как  $\omega_0 = \arg \min_{\omega_0} \sum_{i=1}^N \xi_i(\omega_0)$ , где  $\xi_i(\omega_0) = \max(0, 1 - y_i(\omega^\top x_i - \omega_0))$ . Несложно показать, что решение имеет вид  $\omega_0 = \omega^\top x_i - y_i$  для некоторого  $i$ , а значит,  $\omega_0$  может быть найдено за не более чем  $O(N \log N)$  арифметических операций. Однако, как правило,  $\omega_0$  удаётся определить гораздо быстрее следующим образом. Без нарушения общности будем считать, что  $\eta_i = C - \lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Если для некоторого индекса  $i$  выполнено двойное неравенство  $0 < \lambda_i < C$ , то  $\eta_i > 0$ . Из теоремы Куна – Таккера следует, что  $\xi_i = 0$  и  $y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) = 1$ , а значит,  $\omega_0 = \omega^\top x_i - y_i$ .

### Упражнения

10. Постройте эффективный алгоритм решения задачи  $\sum_{i=1}^n \max(0, a_i x + b_i) \rightarrow \min_x$ , где  $a_i$  и  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , – заданные действительные числа.
11. Докажите, что квадратичная функция  $f(x) = x^\top A x + b^\top x$  либо достигает своей нижней грани на  $\mathbb{R}^n$ , либо не ограничена снизу.
12. Докажите, что для того, чтобы точка  $x^* \in X$  была решением задачи выпуклого программирования (3.1), достаточно, чтобы для любого вектора  $v$ , удовлетворяющего системе неравенств  $v^\top \nabla f_j(x^*) \leq 0$ ,  $j \in I(x^*)$ , было верно  $v^\top \nabla f_0(x^*) \geq 0$ .

### Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление* – М.: Наука, 1979. – 432 с.

## §4 ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$  и  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $J = \{1, 2, \dots, m\}$ . Задачей линейного программирования в общей форме называется следующая задача

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_j, & j \in J_1; \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j, & j \in J_2; \\ x_i \geq 0, i \in I; \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , а  $I = I_1 \sqcup I_2$  и  $J = J_1 \sqcup J_2$  — некоторые разбиения множеств  $I$  и  $J$ , соответственно. Очевидно, что задача (4.1) — частный случай задачи выпуклого программирования. Если  $J_1 = J$  (а значит,  $J_2 = \emptyset$ ) и  $I_1 = I$ , то задача (4.1) называется стандартной (или симметричной), если же  $J_2 = J$  и  $I_1 = I$ , то задача (4.1) — канонической (или основной).

**Пример 4.1** (Расстояние землекопа). Пусть дано два конечных множества  $A = \{a_i\}_{i=1}^m$  и  $B = \{b_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{R}^n$  точек. Требуется каким-либо разумным образом измерить расстояние (меру схожести) между этими множествами. Рассмотрим так называемое расстояние землекопа (Earth mover's distance). В каждую точку  $a_i \in A$  поместим кучу песка объёма  $1/|A|$ , а в каждой точке  $b_j \in B$  выкопаем яму объёма  $1/|B|$  (очевидно, что общий объём песка в точках множества  $A$  равен общему объёму выкопанных ям в точках множества  $B$ ). Будем считать, что стоимость перемещения песка объёма  $v$  из точки  $a_i$  в точку  $b_j$  равна  $vd(a_i, b_j)$ , где  $d(a_i, b_j)$  — расстояние между точками  $a_i$  и  $b_j$ . Расстояние землекопа между множествами  $A$  и  $B$  равно минимальной стоимости, за которую можно засыпать ямы в точках множества  $B$  песком из точек множества  $A$ . Расстояние землекопа может быть найдено решением следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k v_{ij} d(a_i, b_j) \rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^k v_{ij} = \frac{1}{m}, & 1 \leq i \leq m; \\ \sum_{i=1}^m v_{ij} = \frac{1}{k}, & 1 \leq j \leq k; \\ v_{ij} \geq 0, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

**Пример 4.2** (Линейная регрессия). Пусть дана обучающая выборка  $S = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ . Задача линейной регрессии заключается в том, чтобы найти вектор  $a \in \mathbb{R}^n$  и число  $b$ , такие что  $y \approx a^T x + b$ . Как правило, поиск параметров  $a$  и  $b$  сводится к решению задачи

$$\sum_{i=1}^N (y_i - a^T x_i - b)^2 \rightarrow \min_{a,b}.$$

Однако, при таком подходе даже единственный выброс может существенно исказить искомые параметры. Для уменьшения влияния выбросов переходят к следующей задаче

$$\sum_{i=1}^N |y_i - a^T x_i - b_i| \rightarrow \min_{a, b},$$

которая, очевидно, равносильна задаче линейного программирования

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \xi_i \rightarrow \min; \\ \xi_i \geq y_i - a^T x_i - b_i \geq -\xi_i, \quad 1 \leq i \leq N; \\ \xi \geq 0. \end{cases}$$

Каждой задаче (4.1) соответствуют так называемая двойственная задача. Мотивировкой введения двойственной задачи являются следующие рассуждения. Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$  — произвольный допустимый вектор задачи (4.1). Рассмотрим произвольный вектор  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ , такой что  $y_j \geq 0$ , если  $j \in J_1$ . Умножим каждое ограничение задачи (4.1) на соответствующую компоненту вектора  $y$  и сложим их. В итоге получаем, что

$$\sum_{j=1}^m b_j y_j \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i.$$

Потребуем, чтобы  $\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq c_i$  при  $i \in I_1$  и  $\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = c_i$  при  $i \in I_2$ . Тогда справедливо неравенство  $\sum_{i=1}^n c_i x_i \geq \sum_{j=1}^m b_j y_j$ . Другими словами, чем больше величина  $\sum_{j=1}^m b_j y_j$ , тем точнее оценка снизу оптимального значения целевой функции  $c^T x$ .

Таким образом, рассмотрим следующую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m b_j y_j \rightarrow \max; \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq c_i, \quad i \in I_1; \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = c_i, \quad i \in I_2; \\ y_j \geq 0, \quad j \in J_1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Задача (4.2) называется двойственной, а задача (4.1) — прямой (или исходной). Сведём воедино правила составления двойственной задачи:

1. Каждому  $j$ -му ограничению исходной задачи соответствует переменная  $y_j$  двойственной задачи и, наоборот, каждому  $i$ -му ограничению двойственной задачи соответствует переменная  $x_i$  исходной задачи.

2. Матрица ограничений  $A$  заменяется на транспонированную  $A^T$ .
3. Свободные члены ограничений одной из задач являются коэффициентами при соответствующих переменных в целевой функции другой задачи. При этом поиск минимума заменяется на поиск максимума и наоборот.
4. В каждой из задач ограничения-неравенства следует записывать со знаком " $\geq$ " при поиске минимума и со знаком " $\leq$ " при поиске максимума.
5. Каждому  $j$ -му ограничению-неравенству прямой задачи в двойственной задаче соответствует условие неотрицательности ( $y_j \geq 0$ ), а равенству — переменная  $y_j$  без ограничения на знак. Наоборот, неотрицательной переменной  $x_i \geq 0$  соответствует в двойственной задаче  $i$ -е ограничение-неравенство, а произвольной переменной — равенство.

Нетрудно видеть, что двойственной задачей для задачи (4.2) является задача (4.1). Между решениями задач (4.1) и (4.2) имеется ряд нетривиальных связей, образующих теорию двойственности. Для доказательства некоторых утверждений этой теории нам понадобится лемма Фаркаша. Но сперва установим, что всякий конечно порождённый выпуклый конус в пространстве  $\mathbb{R}^n$  является замкнутым множеством.

**Опр. 4.1.** Подмножество  $C$  векторного пространства  $V$  называется *выпуклым конусом*, если  $\alpha x + \beta y \in C$  для любых неотрицательных чисел  $\alpha, \beta$  и любых векторов  $x, y \in C$ . Другими словами, выпуклый конус — это подмножество векторного пространства, замкнутое относительно сложения и умножения на неотрицательные числа. Конус  $C$  называется *конечно порождённым*, если найдутся такие векторы  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , что

$$C = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m : \alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

**Лемма 4.1.** Пусть  $F$  и  $H \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутые подмножества, такие что  $f \perp h$  для любых  $f \in F$  и  $h \in H$ . Тогда множество  $F + H \stackrel{\text{def}}{=} \{f + h : f \in F, h \in H\}$  замкнуто.

▷ Пусть  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F$  и  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H$  — две последовательности, такие что  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k + h_k) = x$ . Так как

$$\|f_m + h_m - (f_k + h_k)\|^2 = \|(f_m - f_k) + (h_m - h_k)\|^2 = \|f_m - f_k\|^2 + \|h_m - h_k\|^2 \rightarrow 0,$$

то  $\|f_m - f_k\|^2 \rightarrow 0$  и  $\|h_m - h_k\|^2 \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = f \in F \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = h \in H,$$

а значит,  $x = f + h \in F + H$ . ◁

**Лемма 4.2.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  — столбцы матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Тогда конус  $C \stackrel{\text{def}}{=} \{Ax : x \in \mathbb{R}_+^m\}$  замкнут.

▷ Докажем замкнутость конуса  $C_s \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s : \lambda_i \geq 0\}$  индукцией по  $s$ . Очевидно, что  $C_1 = \{\lambda_1 a_1 : \lambda_1 \geq 0\}$  — замкнутое множество. Предположим, что мы доказали, что конус  $C_s$  замкнут для любых векторов  $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}^n$ . Покажем, что тогда замкнут конус  $C_{s+1}$ . Рассмотрим произвольную последовательность  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_{s+1}$ ,

$$c_k = \lambda_1^k a_1 + \lambda_2^k a_2 + \dots + \lambda_{s+1}^k a_{s+1},$$

такую что  $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = c$ , и докажем, что  $c \in C_{s+1}$ . Если все последовательности чисел  $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ограничены, то без нарушения общности будем считать, что они сходятся:  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k = \lambda_i$ . Следовательно, имеет место равенство

$$c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s+1} a_{s+1} \in C_{s+1}.$$

Рассмотрим случай, когда хотя бы одна из последовательностей чисел  $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$  неограничена, например, с номером  $s+1$ . Без нарушения общности будем считать, что  $\lambda_{s+1}^k \uparrow +\infty$  и  $\lambda_{s+1}^k \geq \lambda_i^k$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Но тогда последовательности  $(\lambda_i^k / \lambda_{s+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ограничены, а значит, без нарушения общности будем считать, что они сходятся:  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k / \lambda_{s+1}^k = \lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Следовательно,  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + a_{s+1} = \mathbf{0}$ , т.е.

$$-a_{s+1} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s \in C_s \subset C_{s+1}.$$

Пусть  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow (a_{s+1})^\perp$  — проекция на ортогональное дополнение к одномерному подпространству, натянутому на вектор  $a_{s+1}$ . Тогда

$$PC_{s+1} = \{\lambda_1 P a_1 + \lambda_2 P a_2 + \dots + \lambda_s P a_s : \lambda_i \geq 0\}$$

в силу равенства  $P(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s+1} a_{s+1}) = \lambda_1 P a_1 + \lambda_2 P a_2 + \dots + \lambda_s P a_s$ . Более того,  $PC_{s+1} \subset C_{s+1}$ , так как  $P a_i = a_i - \frac{(a_i, a_{s+1})}{\|a_{s+1}\|^2} a_{s+1}$ . Согласно предположению индукции  $PC_{s+1}$  — замкнутое множество. Наконец, так как  $C_{s+1} = PC_{s+1} + \mathbb{R} a_{s+1}$ , то согласно лемме 4.1 множество  $C_{s+1}$  замкнуто. ◁

**Лемма 4.3** (Фаркаш). Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  и  $b \in \mathbb{R}^n$ . Тогда либо  $Ax = b$ , для некоторого  $x \in \mathbb{R}_+^m$ , либо найдётся такой вектор  $y \in \mathbb{R}^n$ , что  $y^\top A \leq \mathbf{0}$  и  $y^\top b > 0$ .

▷ Пусть выполнена первая из альтернатив, т.е. существует вектор  $x \in \mathbb{R}_+^m$ , такой что  $Ax = b$ . Предположим, что  $y^\top A \leq 0$  для некоторого вектора  $y \in \mathbb{R}^n$ , тогда  $y^\top b = y^\top Ax \leq 0$ .

Предположим теперь, что такого  $x \in \mathbb{R}_+^m$  не существует. Рассмотрим выпуклый конус  $C = \{Ax : x \in \mathbb{R}_+^m\}$ , который согласно лемме 4.2 является замкнутым множеством. По предположению  $b \notin C$ , а значит, точка  $b$  строго отделима от  $C$ , т.е. существуют ненулевой вектор  $y \in \mathbb{R}^n$  и число  $d$ , такие что  $y^\top b > d > y^\top c$ ,  $c \in C$ . Так как  $\mathbf{0} \in C$ , то  $y^\top b > d > 0$ . С другой стороны  $d \geq y^\top Ax = (A^\top y)^\top x$ . Так как компоненты вектора  $x$  могут быть сколь угодно большими, то  $y^\top A \leq \mathbf{0}$ . Таким образом, выполнена вторая альтернатива. ◁

**Следствие 4.1.** Если векторы  $b, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ , такие что для каждого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  из неравенств  $x^\top a_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$ , следует  $x^\top b \geq 0$ , то найдутся такие числа  $\lambda_i \geq 0$ , что  $b = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ .

**Следствие 4.2.** Пусть  $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ . Если векторы  $b, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ , такие что для каждого вектора  $x \in V^\perp$  из неравенств  $x^\top a_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$ , следует неравенство  $x^\top b \geq 0$ , то найдутся такие числа  $\lambda_i \geq 0$  и вектор  $v \in V$ , что  $b = v + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ .

▷ Пусть  $b', a'_1, a'_2, \dots, a'_m \in V^\perp$  — проекция векторов  $b, a_1, a_2, \dots, a_m$  на подпространство  $V^\perp$ . Тогда для любого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  из неравенств  $x^\top a'_i \geq 0$  следует  $x^\top b' \geq 0$ , а значит, найдутся такие числа  $\lambda_i \geq 0$ , что  $b' = \sum_{i=1}^m \lambda_i a'_i$ . Возвращаясь к исходным векторам, получаем, что  $b = v + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ , где  $v \in V$ . <

**Пример 4.3** (Арбитраж). Предположим, что имеется две биржи, на которых продаются и покупаются товары  $n$  различных видов. Торговец хочет заработать, покупая товары на одной бирже и продавая их на второй. В зависимости от конъюнктуры возможны  $m$  ситуаций. Через  $c_{ij}$  обозначим разницу цен за единицу товара  $i$  при наступлении ситуации  $j$  (от цены на второй бирже отнимается цена на первой). Произвольный вектор  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  назовём стратегией торговца, где через  $y_i$  обозначено количество товара  $i$ , которое покупает и продаёт торговец. Доход торговца для стратегии  $y$  в ситуации  $j$ , очевидно, равен  $\sum_{i=1}^n c_{ij} y_i$ .

**Теорема 4.1** (Де Финетти). Верно ровно одно из следующих утверждений:

1. существует такое распределение  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ ,  $p_j \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^m p_j = 1$ , на множестве ситуаций, что математическое ожидание дохода торговца для любого товара равно нулю, т.е.  $\sum_{j=1}^m c_{ij} p_j = 0, 1 \leq i \leq n$ ;
2. существует такая стратегия  $y$ , что доход торговца положительный вне зависимости от ситуации, т.е.  $\sum_{i=1}^n c_{ij} y_i > 0, 1 \leq j \leq m$ .

▷ Рассмотрим вектор  $b = (0, 0, \dots, 0, -1)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$  и матрицу размера  $(n+1) \times m$

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nm} \\ -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Если какой-либо вектор  $p \in \mathbb{R}_+^m$  удовлетворяет системе  $Ap = b$ , то справедливы равенства  $\sum_{j=1}^m c_{ij} p_j = 0, 1 \leq i \leq n$ , и  $\sum_{j=1}^m -p_j = -1$ , т.е.  $p$  — искомое распределение. Согласно лемме Фаркаша либо такой вектор  $p$  существует, либо для некоторого  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$  верно  $\tilde{y}^\top A \geq 0$ ,

$\tilde{y}^\top b < 0$ . Согласно определению матрицы  $A$  и вектора  $b$  имеем

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} \tilde{y}_i \geq \tilde{y}_{n+1}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad \text{и} \quad -\tilde{y}_{n+1} < 0.$$

Другими словами, стратегия  $y = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)^\top$  искомая.  $\triangleleft$

### Упражнения

13. Решите следующую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} c^\top x \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1; \\ 0 \leq x_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

14. (Гордон) Докажите, что для произвольной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  выполнена ровно одна из альтернатив:

(а) существует такой вектор  $x \in \mathbb{R}^m$ , что  $Ax < \mathbf{0}$ ;

(б) существует такой ненулевой вектор  $y \in \mathbb{R}^n$ , что  $A^\top y = \mathbf{0}$  и  $y \geq \mathbf{0}$ .

15. Пусть  $P = (p_{ij})_{i,j=1}^n$  — стохастическая (слева) матрица, т.е. матрица с неотрицательными элементами  $p_{ij} \geq 0$  и для всех  $j$  от 1 до  $n$  выполнено равенство  $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$  (другими словами, в каждом столбце сумма стоящих в нём элементов равна 1). Используя лемму Фаркаша, докажите, что существует такой вектор  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}_+^n$ , что  $P y = y$  и  $\sum_{i=1}^n y_i = 1$ .

16. Докажите, что для того чтобы точка  $x^* \in X$  была точкой минимума выпуклой дифференцируемой функции  $f$  на множестве  $X = \{x: a_j^\top x \leq b_j\}$  необходимо и достаточно существование таких чисел  $y_j \geq 0$ , что

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{j \in I(x^*)} y_j a_j.$$



## §5 ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Перейдём к формулировке и доказательству основных утверждений теории двойственности линейного программирования.

**Теорема 5.1.** Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $y \in \mathbb{R}^m$  — допустимые векторы задач (4.1) и (4.2), соответственно. Тогда  $b^\top y \leq c^\top x$ .

▷ Рассмотрим сумму  $S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j$ . С одной стороны

$$S = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i \leq \sum_{i=1}^n c_i x_i = c^\top x,$$

а с другой —

$$S = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right) y_j \geq \sum_{j=1}^m b_j y_j = b^\top y. \quad \triangleleft$$

**Следствие 5.1.** Если для допустимых векторов  $x$  и  $y$  задач (4.1) и (4.2), соответственно, верно равенство  $c^\top x = b^\top y$ , то  $x$  и  $y$  — решения.

**Лемма 5.1.** Пусть  $x$  и  $y$  — допустимые векторы задач (4.1) и (4.2), соответственно, удовлетворяющие условиям дополняющей нежёсткости, т.е.

$$x_i \left( c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) = 0 \quad \text{при } i \in I_1 \quad \text{и} \quad y_j \left( b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right) = 0 \quad \text{при } j \in J_1.$$

Тогда  $c^\top x = b^\top y$ , а значит,  $x$  и  $y$  — решения соответствующих задач.

▷ Действительно,

$$c^\top x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^n \left( c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j.$$

Аналогично доказывается равенство  $b^\top y = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j$ . Поэтому,  $c^\top x = b^\top y$ .  $\triangleleft$

**Теорема 5.2.** Если существует решение  $x^*$  задачи (4.1), то у задачи (4.2) также есть решение  $y^*$ , при этом  $c^\top x^* = b^\top y^*$ .

▷ Пусть  $V \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i = 0, j \in J_2\}$ . Через  $\tilde{I}_1 \subset I_1$  обозначим такое подмножество индексов, что  $x_i^* = 0, i \in \tilde{I}_1$ , а через  $\tilde{J}_1 \subset J_1$  — такое подмножество индексов, что  $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^* = b_j, j \in \tilde{J}_1$ . Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — столбцы матрицы  $A$ , а  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — стандартный базис  $\mathbb{R}^n$ . Тогда для произвольного  $v \in V$ , такого что

$e_i^\top v \geq 0$ ,  $i \in \tilde{I}_1$  и  $a_j^\top v \geq 0$ ,  $j \in \tilde{J}_1$ , вектор  $x^* + tv$  допустимый для задачи (4.1) при всех достаточно малых  $t > 0$ . Так как  $x^*$  — решение задачи, то  $c^\top v \geq 0$ . Поэтому, согласно следствию 4.2 справедливо равенство

$$c = \sum_{j \in \tilde{J}_1 \sqcup J_2} y_j^* a_j + \sum_{i \in \tilde{I}_1} z_i e_i,$$

где  $y_j^* \geq 0$  при  $j \in \tilde{J}_1$  и  $z_i \geq 0$  при  $i \in \tilde{I}_1$ . Доопределим  $y_j^* = 0$  при  $j \in J_1 \setminus \tilde{J}_1$ ,  $z_i = 0$ ,  $i \in I \setminus \tilde{I}_1$  и покажем, что вектор  $y^* \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)^\top$  — решение задачи (4.2). Так как  $c_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^* + z_i$ ,  $i \in I$ , и  $y_j^* \geq 0$  при  $j \in J_1$ , то  $y^*$  — допустимый вектор задачи (4.2). Нетрудно видеть, что для векторов  $x^*$  и  $y^*$  выполнены условия дополняющей нежёсткости:  $x_i^*(c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^*) = 0$  при  $i \in I_1$  и  $y_j^*(b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^*) = 0$  при  $j \in J_1$ , а значит,  $y^*$  — решение задачи (4.2) и  $c^\top x^* = b^\top y^*$ .  $\triangleleft$

**Лемма 5.2.** Если векторы  $x$  и  $y$  — решения, соответственно, задач (4.1) и (4.2), то выполнены условиям дополняющей нежёсткости.

$\triangleright$  Через  $y^*$  обозначим решение задачи (4.2), построенное по  $x$  в доказательстве теоремы 5.2. Тогда  $c^\top x = b^\top y^* = b^\top y$ . Следовательно,  $c^\top x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j$ , а значит,

$$\sum_{i=1}^n \left( c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i = \sum_{i \in I_1} \left( c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i = 0.$$

Так как  $c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \geq 0$  и  $x_i \geq 0$  при  $i \in I_1$ , то  $x_i(c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j) = 0$  при  $i \in I_1$ .

Равенство  $y_j(b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i) = 0$  при  $j \in J_1$  доказывается аналогично.  $\triangleleft$

**Пример 5.1** (Матричные игры). Матричной игрой называют конечную антагонистическую игру. Антагонистическая игра — это игра двух лиц с нулевой суммой, т.е. выигрыш одного игрока равен проигрышу второго. Игра называется конечной, если конечно множество стратегий игроков. Пусть  $n, m$  — количества стратегий первого и второго игроков, соответственно. Без нарушения общности будем считать, что  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество стратегий первого игрока, а  $Y = \{1, 2, \dots, m\}$  — второго. Через  $a_{ij}$  обозначим выигрыш первого игрока, если он воспользуется стратегией  $i \in X$ , а его оппонент — стратегией  $j \in Y$ . Соответственно,  $-a_{ij}$  — выигрыш второго игрока в этой ситуации. Таким образом, матричная игра задаётся матрицей  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  выигрышей первого игрока. Далее будем отождествлять игру и её матрицу  $A$ . Решением матричной игры в чистых стратегиях называется пара чистых стратегий  $(i_0, j_0) \in X \times Y$ , которые образуют седловую точку матрицы  $A$ :  $a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \leq a_{i j_0}$ ,  $i \in X$  и  $j \in Y$  (стратегии  $i_0, j_0$  называются оптимальными чистыми стратегиями). Из этого определения, в частности, следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.

Седловая точка матрицы  $A$  существует тогда и только тогда, когда нижняя цена игры  $\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in X} \min_{j \in Y} a_{ij}$  равна верхней чистой цене игры  $\beta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{j \in Y} \max_{i \in X} a_{ij}$  (доказательство этого утверждения практически дословно повторяет доказательство теоремы 3.2). Таким образом, решение матричной игры в чистых стратегиях не всегда существует.

Расширим множество стратегий смешанными. Смешанной стратегией первого игрока называется вектор вероятностей  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^\top$ , где  $p_i \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Число  $p_i$  — вероятность того, что первый игрок будет использовать стратегию  $i \in X$ . Аналогично определяется смешанная стратегия  $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)^\top$  второго игрока. Множество смешанных стратегий первого игрока образуют стандартный  $(n-1)$ -мерный симплекс  $S^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ , а множество смешанных стратегий второго игрока — стандартный  $(m-1)$ -мерный симплекс  $S^{m-1}$ .

Выигрыш первого игрока при фиксированных смешанных стратегиях  $p$  и  $q$  определяется как математическое ожидание его выигрыша:

$$F(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j = p^\top A q.$$

Соответственно,  $-F(p, q)$  — выигрыш второго игрока. Решением матричной игры в смешанных стратегиях называют пару смешанных стратегий  $(p^0, q^0) \in S^{n-1} \times S^{m-1}$ , которая является седловой точкой функции  $F : F(p, q^0) \leq F(p^0, q^0) \leq F(p^0, q)$ ,  $p \in S^{n-1}$  и  $q \in S^{m-1}$ . Число  $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} F(p^0, q^0)$  называется ценной матричной игры  $A$ . Оказывается, что решение матричной игры в смешанных стратегиях существует всегда. Пусть  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$  — вектор, у которого 1 стоит на  $i$ -м месте, а все остальные компоненты равны нулю (размер вектора не фиксируем).

**Теорема 5.3** (фон Нейман). *Для произвольной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  имеют место равенства*

$$v(A) = \max_{p \in S^{n-1}} \min_{1 \leq j \leq m} p^\top A e_j = \min_{q \in S^{m-1}} \max_{1 \leq i \leq n} e_i^\top A q.$$

Для любых  $p^0 \in \arg \max_{p \in S^{n-1}} \min_{1 \leq j \leq m} p^\top A e_j$ ,  $q^0 \in \arg \min_{q \in S^{m-1}} \max_{1 \leq i \leq n} e_i^\top A q$  пара  $(p^0, q^0)$  является решением в смешанных стратегиях матричной игры  $A$ .

▷ Вычисление величин  $\max_p \min_j p^\top A e_j$  и  $\min_q \max_i e_i^\top A q$  равносильно решению задач

$$\begin{cases} u \rightarrow \max; \\ u - \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i \leq 0, & 1 \leq j \leq m; \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1; \\ p_i \geq 0, & 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} v \rightarrow \min; \\ v - \sum_{i=1}^m a_{ij} q_j \geq 0, & 1 \leq i \leq n; \\ \sum_{j=1}^m q_j = 1; \\ q_j \geq 0, & 1 \leq j \leq m. \end{cases} \quad (5.2)$$

линейного программирования (5.1) и (5.2), соответственно, которые двойственны друг другу, и, как не трудно видеть, имеют решения. Поэтому,

$$\max_p \min_j p^\top A e_j = \min_q \max_i e_i^\top A q.$$

Так как  $F(p, q)$  — билинейная функция, то очевидно, выполнены равенства

$$\max_p F(p, q) = \max_i e_i^T A q \quad \text{и} \quad \min_q F(p, q) = \min_j p^T A e_j,$$

а значит,  $\max_p \min_q p^T A q = \min_q \max_p p^T A q$ . Из доказательства теоремы 3.2, в частности, следует, что  $(p^0, q^0)$  — седловая точка функции  $F(p, q)$ .  $\triangleleft$

Отметим, что некоторая задача может быть сведена к решению матричной игры, хотя в исходной постановке игроки и множества их стратегий явно не заданы. Рассмотрим пример такой задачи.

Пусть компьютерная сеть из  $n$  узлов, представлена связным неориентированным графом  $G = (V, E)$ , каждому ребру которого приписана его длина. В одной из вершин графа  $G$  располагается клиент, отправляющий запрос к серверу, который также следует расположить в одной из вершин графа  $G$ . Будем считать, что задержка запроса от клиента к серверу равна расстоянию между вершинами, в которых находятся клиент и сервер (расстояние между вершинами  $u$  и  $v$  графа  $G$  определяется, как наименьшая из длин путей с концами  $u$  и  $v$ ). Необходимо расположить сервер так, чтобы задержка была минимальной. Если вершина, в которой находится клиент, заранее известна, то, очевидно, следует расположить сервер в той же вершине. Поэтому далее будем считать, что расположение клиента неизвестно. Чтобы минимизировать задержку в худшем случае сервер следует расположить в центре графа  $G$ , т.е. в такой вершине, для которой максимальное расстояние до других вершин минимально.

Предположим теперь, что клиент располагается в вершинах согласно некоторому закону распределения и наша цель определить смешанную стратегию расположения сервера так, чтобы минимизировать математическое ожидание задержки запроса. Пусть  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  — матрица попарных расстояний между вершинами графа  $G$ . Если известен вектор  $y$  вероятностей, согласно которым выбирается вершина для клиента, то оптимальный вектор  $x$  вероятностей для расположения сервера выберем как решение задачи  $\min_{x \in S^{n-1}} y^T A x$ . В частности, сервер можно разместить в любой вершине  $v$ , такой что  $v \in \arg \min_{1 \leq i \leq n} y^T A e_i$ . Наконец, если вектор  $y$  неизвестен, то определим  $x$  как оптимальную стратегию второго игрока в матричной игре с матрицей  $A$ .

**Лемма 5.3.** *Если целевая функция  $c^T x$  задачи (5.3) ограничена снизу на*

$$\begin{cases} c^T x \rightarrow \min; \\ A^T x \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \quad (5.3)$$

*непустом множестве допустимых векторов  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : A^T x \leq b\}$ , то задача (5.3) имеет решение.*

▷ Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — столбцы матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Через  $S$  обозначим семейство подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, m\}$ , такое что для любого  $J \in S$  верно:

1.  $J = I(x)$  для некоторого допустимого вектора  $x \in X$ ;
2. вектор  $c$  представим в виде линейной комбинации векторов  $a_j, j \in J$ .

То, что семейство  $S$  не пусто показано ниже. Выберем какое-либо подмножество  $J \in S$  и соответствующий допустимый вектор  $x \in X$ . Тогда

$$c^T x = \sum_{j \in J} \alpha_j a_j^T x = \sum_{j \in J} \alpha_j b_j.$$

Фиксируя для каждого  $J \in S$  единственный набор коэффициентов  $(\alpha_j)_{j \in J}$  из линейного разложения, рассмотрим конечное множество  $U = \{\sum_{j \in J} \alpha_j b_j : J \in S\}$ .

Докажем, что  $\min_{x \in X} c^T x = \min U$ . Пусть  $x \in X$  — какой-либо допустимый вектор. Пусть  $V_x = \text{span}\{a_i : i \in I(x)\}$ . Если  $c \in V_x$ , то  $c = \sum_{i \in I(x)} \alpha_i a_i$ , а значит,  $I(x) \in S$  и  $c^T x \in U$ . Если же  $c \notin V_x$ , то выберем такой вектор  $v \in V_x^\perp$ , что  $c^T v < 0$ . Так как функция  $c^T x$  ограничена снизу на множестве  $X$ , то существуют  $t > 0$  и индекс  $i \notin I(x)$ , такие что  $I(x) \cup \{i\} \subset I(x + tv)$ . При этом  $c^T x > c^T(x + tv)$ . Заменяя  $x$  на  $x + tv$ , повторим приведённые рассуждения. Через не более  $m$  шагов мы придём к такому допустимому вектору  $x$ , что  $I(x) \in S$ .  $\triangleleft$

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение

**Лемма 5.4.** *Если целевая функция задачи (4.1) ограничена снизу на непустом множестве допустимых векторов, то задача (4.1) имеет решение.*

**Следствие 5.2.** *Если множества допустимых векторов задач (4.1) и (4.2) не пусты, то эти задачи имеют решения.*

### Упражнения

17. Матричная игра называется симметричной, если её матрица кососимметрическая. Докажите, что значение симметричной игры равно нулю. Кроме того, если  $p$  — оптимальная стратегия для первого игрока, то  $q = p$  — оптимальная стратегия для второго игрока.

## §6 ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Задача линейного программирования, в которой некоторые или все переменные должны быть целыми, называется задачей целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Эффективный алгоритм решения задач ЦЛП в общем случае до сих пор не известен. Один из подходов приближённого решения таких задач заключается в сведении (релаксации) их к задачам линейного программирования, в которых отсутствуют условия целочисленности. После решения релаксированной задачи полученное решение покомпонентно округляют (согласно выбранной процедуре) для удовлетворения условия целочисленности. Отметим, что найденный вектор, вообще говоря, может не быть допустимым.

**Пример 6.1** (Задача о покрытии множества). Пусть  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  — семейство подмножеств конечного множества  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ , при этом для каждого подмножества  $S_i$  определён его вес  $\omega_i \geq 0$ . Набор подмножеств  $T \subset S$  называется покрывающим, если  $V = \bigcup_{S_i \in T} S_i$ . Необходимо построить покрывающий набор  $T$  минимального

веса  $\omega(T) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{S_i \in T} \omega_i$ . Без нарушения общности будем считать, что само семейство  $S$  является покрывающим, иначе рассматриваемая задача не имеет смысла.

Рассмотрим произвольный покрывающий набор  $T$ . Каждому подмножеству  $S_i \in S$  поставим в соответствие переменную  $x_i \in \{0, 1\}$ , такую что  $x_i = 1$ , если и только если  $S_i$  входит в набор  $T$ . Так как набор  $T$  покрывающий, то для любого элемента  $v_j \in V$  найдётся подмножество  $S_i \in T$ , такое что  $v_j \in S_i$ , а значит, справедливо неравенство  $\sum_{v_j \in S_i} x_i \geq 1$ . Таким образом, для построения оптимального набора  $T$  необходимо решить задачу целочисленного линейного программирования (6.1).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \rightarrow \min; \\ \sum_{v_j \in S_i} x_i \geq 1, & 1 \leq j \leq m; \\ x_i \in \{0, 1\}, & 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \omega_i y_i \rightarrow \min; \\ \sum_{v_j \in S_i} y_i \geq 1, & 1 \leq j \leq m; \\ 0 \leq y_j \leq 1, & 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (6.2)$$

Для произвольного вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  обозначим  $\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$ . Если  $x$  — бинарный вектор, то  $\omega(x)$  равно весу соответствующего набора. Пусть  $x^*$  и  $y^*$  — решения задачи (6.1) и (6.2), соответственно. Справедливо неравенство  $\omega(x^*) \geq \omega(y^*)$ , так как  $x^*$  — допустимый вектор задачи (6.2). Предположим, что для каждого элемента  $v_j \in V$  количество подмножеств  $S_i$ , его содержащих, не больше  $k$ . Используя решение  $y^*$ , определим бинарный вектор  $z \in \{0, 1\}^n$ , такой что  $z_i = 1$ , если и только если  $y_i^* \geq \frac{1}{k}$ . Тогда набор, соответствующий вектору  $z$  является покрывающим. Действительно, выберем произвольный элемент  $v_j \in V$ . Так как  $k \max_{v_j \in S_i} y_i^* \geq \sum_{v_j \in S_i} y_i^* \geq 1$ , то  $\sum_{v_j \in S_i} z_i \geq 1$ . Более того, так как  $z_i \leq k y_i^*$ , то справедлива цепочка неравенств

$$\omega(z) = \sum_{i=1}^n \omega_i z_i \leq \sum_{i=1}^n k \omega_i y_i^* = k \omega(y^*) \leq k \omega(x^*).$$

Оказывается, что в некоторых случаях можно гарантировать существование целочисленного решения у релаксированной задачи. Рассмотрим один из таких случаев, в котором используется понятие вполне унимодулярной матрицы.

**Опр. 6.1.** *Квадратная матрица с целыми коэффициентами называется унимодулярной, если её определитель равен  $\pm 1$ . Прямоугольная матрица с целыми коэффициентами называется вполне унимодулярной, если все её миноры принимают значения из множества  $\{-1, 0, 1\}$ .*

Пусть матрица  $A$  вполне унимодулярная. Очевидно, что матрица полученная из  $A$  перестановкой строк (столбцов) также является вполне унимодулярной. Если из матрицы  $A$  вычеркнуть строку (столбец), то матрица останется вполне унимодулярной. Более того, если к матрице  $A$  добавить строку (столбец), все элементы которой нулевые за исключением быть может одного, равного  $\pm 1$ , то полученная матрица будет вполне унимодулярной.

Рассмотрим произвольный граф  $G = (V, E)$ , где  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  — множество вершин, а  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  — множество рёбер. Напомним, что матрицей инцидентности неориентированного графа  $G$  называется такая матрица  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}$ , состоящая из 0 и 1, у которой элемент  $a_{ij}$ , стоящий на пересечении строки  $i$  и столбца  $j$ , равен 1 тогда и только тогда, когда вершина  $v_i$  инцидентна ребру  $e_j$ .

**Лемма 6.1.** *Матрица инцидентности  $A$  произвольного двудольного графа  $G$  вполне унимодулярна.*

▷ Рассмотрим произвольную квадратную подматрицу  $A'$  матрицы  $A$  порядка  $k$  и докажем индукцией по  $k$ , что  $\det A' \in \{-1, 0, 1\}$ . База индукции  $k = 1$  следует из определения матрицы инцидентности. Предположим, что утверждение доказано для всех подматриц размера  $k \times k$ . Пусть  $B$  — квадратная подматрица порядка  $k + 1$ . Если некоторый столбец матрицы  $B$  состоит, полностью из 0, то  $\det B = 0$ . Если же некоторый столбец содержит ровно одну единицу, то, раскладывая определитель по этому столбцу, получим  $\det B \in \{-1, 0, 1\}$  (по предположению индукции). Предположим теперь, что каждый столбец матрицы  $B$  содержит ровно две единицы. Без нарушения общности будем считать, что первые  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ , строк матрицы  $B$  соответствуют вершинам первой доли графа  $G$ , а остальные строки — вершинам второй доли. Сумма первых  $r$  строк матрицы  $B$  равна строке, полностью состоящей из единиц. Аналогично, сумма строк, соответствующих вершинам второй доли, также равна этой строке. Следовательно,  $\det B = 0$ . <

Пусть  $G$  — ориентированный граф. Элементы матрицы инцидентности  $A$  определяются следующим образом:  $a_{ij} = 0$ , если  $v_i \notin e_j$ ,  $a_{ij} = 1$ , если  $e_j = (v_k, v_i)$  для некоторой вершины  $v_k$ , и  $a_{ij} = -1$  иначе, т.е.  $e_j = (v_i, v_k)$ . Аналогично лемме 6.1 доказывается следующее утверждение.

**Лемма 6.2.** *Матрица инцидентности произвольного ориентированного графа унимодулярна.*

Для доказательства того, что произвольная разрешимая задача линейного

программирования с вполне унимодулярной матрицей ограничений и целочисленным вектором из правой части имеет целочисленное решение, нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 6.3.** *Для разрешимой задачи линейного программирования*

$$\begin{cases} c^\top x \rightarrow \min; \\ A^\top x \geq b, \end{cases} \quad (6.3)$$

*существует такой набор столбцов  $\{a_i: i \in I\}$  матрицы ограничений  $A$ , что множество  $\{x: a_i^\top x = b_i, i \in I\}$  не пусто и произвольный его элемент является решением задачи (6.3).*

▷ Пусть  $x^*$  — решение задачи (6.3),  $I = I(x^*)$  — множество индексов активных ограничений, т.е. множество индексов всех тех столбцов матрицы  $A$ , для которых  $a_i^\top x^* = b_i$  при  $i \in I$ . Рассмотрим подпространство  $V = \{v: a_i^\top v = 0, i \in I\}$ . Так как  $x^* + tv, v \in V$ , — допустимый вектор для задачи (6.3) при достаточно малом  $t \geq 0$ , то  $c \in V^\perp$  и  $x^* + tv$  — решение задачи (6.3). Если все столбцы матрицы  $A$  принадлежат  $V^\perp$ , то набор  $\{a_i: i \in I\}$ , очевидно, искомым. Предположим обратное, тогда найдётся такой вектор  $v \in V$  и индекс  $j \notin I$ , что  $\tilde{x} = x^* + v$  — решение задачи (6.3) и  $a_j^\top \tilde{x} = b_j$  при  $i \in I \cup \{j\}$ . Добавим индекс  $j$  в множество  $I$ . Продолжая описанный процесс, построим искомым набор столбцов. <

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

**Теорема 6.1.** *Пусть разрешима задача (4.1). Тогда существует такие подмножества индексов  $\tilde{J}_1 \subset J_1$  и  $\tilde{I}_1 \subset I_1$ , что множество*

$$\{x: \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i = b_j, j \in \tilde{J}_1 \sqcup J_2\} \cap \{x: x_i = 0, i \in \tilde{I}_1\} \quad (6.4)$$

*не пусто и состоит из решений задачи (4.1).*

Если система линейных уравнений  $Ax = b$  совместна, матрица  $A$  является вполне унимодулярной, а вектор  $b$  целочисленный, то решая эту систему стандартным методом выделения наибольшего ненулевого минора, несложно отыскать у неё целочисленное решение. Таким образом, если в задаче (4.1) матрица ограничений  $A$  вполне унимодулярна и вектор  $b$  целочисленный, то множество (6.4) содержит целочисленное решение.

**Пример 6.2** (Теорема Кёнига). Рассмотрим двудольный граф  $G = (V, E)$  и пусть даны два целочисленных вектора  $b \in \mathbb{N}_0^{|V|}$ ,  $c \in \mathbb{N}_0^{|E|}$ . Через  $A$  обозначим матрицу инцидентности графа  $G$ .

**Опр. 6.2.** *Произвольное отображение  $x: E \rightarrow \mathbb{N}_0$  называется  $b$ -паросочетанием, если  $\sum_{e: v \in e} x(e) \leq b_v$  для любой вершины  $v \in V$ .*

**Опр. 6.3.** *Произвольное отображение  $y: V \rightarrow \mathbb{N}_0$  называется  $c$ -вершинным покрытием, если  $y_u + y_v \geq c_e$  для любого ребра  $e = (u, v) \in E$ .*



Задача максимального  $c$ -взвешенного  $b$ -паросочетания состоит в отыскании такого  $b$ -паросочетания  $x$ , для которого сумма  $\sum_{e \in E} c_e x(e)$  максимальна. Так как согласно лемме 6.1 матрица  $A$  вполне унимодулярна, то решение этой задачи содержится во множестве решений задачи (6.5).

$$\begin{cases} c^\top x \rightarrow \max; \\ Ax \leq b; \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (6.5) \qquad \begin{cases} b^\top y \rightarrow \min; \\ A^\top y \geq c; \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Задача минимального  $b$ -взвешенного  $c$ -вершинного покрытия состоит в отыскании такого  $c$ -вершинного покрытия  $y$ , для которого сумма  $\sum_{v \in V} b_v y(v)$  минимальна. Очевидно, что решение этой задачи является решением задачи (6.6). Так как задачи (6.5) и (6.6) двойственны, то справедлива следующая обобщённая теорема Кёнига.

**Теорема 6.2.** Для произвольных целочисленных векторов  $b \in \mathbb{N}_0^{|V|}$ ,  $c \in \mathbb{N}_0^{|E|}$  и двудольного графа  $G = (V, E)$  максимальное  $c$ -взвешенное  $b$ -паросочетание равно минимальному  $b$ -взвешенному  $c$ -вершинному покрытию.

**Пример 6.3** (Максимальный поток). Пусть  $G = (V, E)$  — взвешенный ориентированный граф с неотрицательными весами  $c_e \geq 0$ ,  $e \in E$ , которые будем называть пропускными способностями рёбер. Выберем две вершины  $s$ , называемую «источник», и  $t$ , называемую «сток». Для произвольной вершины  $v \in V$  через  $E_{out}^v \stackrel{\text{def}}{=} \{e: e = (v, u) \in E\}$  обозначим множество выходящих рёбер, а через  $E_{in}^v \stackrel{\text{def}}{=} \{e: e = (u, v) \in E\}$  — множество входящих рёбер.

**Опр. 6.4.** Поток в ориентированном графе  $G$  называется функция  $x: E \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что  $0 \leq x(e) \leq c_e$  для любого ребра  $e \in E$ , и для любого вершины  $v \in V \setminus \{s, t\}$  верно равенство  $\sum_{e \in E_{in}^v} x(e) = \sum_{e \in E_{out}^v} x(e)$ . Величиной потока называется число

$$\sum_{e \in E_{out}^s} x(e) - \sum_{e \in E_{in}^s} x(e) = \sum_{e \in E_{in}^t} x(e) - \sum_{e \in E_{out}^t} x(e).$$

Задача максимального потока заключается в отыскании потока максимальной величины. Пусть  $A$  — матрица инцидентности графа  $G$ . Через  $\tilde{A}$  обозначим матрицу, полученную из  $A$  вычёркиванием строк, соответствующих вершинам  $s$  и  $t$ . Пусть  $a$  — строка матрицы  $A$ , которая соответствует вершине  $t$ . Не сложно видеть, что задача максимального потока равносильна следующей задаче линейного программирования

$$\begin{cases} ax \rightarrow \max; \\ \tilde{A}x = 0; \\ 0 \leq x \leq c. \end{cases} \quad (6.7)$$

Из леммы 6.2 следует, что задача (6.7) имеет целочисленное решение, если вектор пропускных способностей  $c$  целочисленный.

### Упражнения

18. Матрица  $A$  называется интервальной, если любая её строка имеет следующий вид

$$(0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0).$$

Докажите, что произвольная интервальная матрица вполне унимодулярна.

## §7 МЕТОД СПУСКА

Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемая выпуклая функция, а значит, для всех  $x, y \in X$  выполнено неравенство  $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x)$ . Для численного определения минимального значения функции  $f$  используют так называемый метод

спуска, который заключается в построении последовательностей векторов  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ,  $(\Delta x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  и действительных чисел  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ , таких что  $x^{k+1} = x^k + t^k \Delta x^k \in X$  и  $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$ , где  $x^0 \in X$  — заданный начальный вектор.

На практике, элементы последовательности  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  вычисляются до тех пор пока не будет выполнен критерий остано-

ва. Например, для заданного  $\varepsilon > 0$ , таким условием является выполнение одно из неравенств:  $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon$ ,  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon$ ,  $\|\nabla f(x^k)\| \leq \varepsilon$ .

Так как  $f$  — выпуклая функция, то из неравенства  $\nabla f(x^k)^\top (y - x^k) > 0$  следует, что  $f(y) > f(x^k)$ . Таким образом, в методе спуска необходимо выполнение неравенства  $\nabla f(x^k)^\top \Delta x^k \leq 0$ . Будем говорить, что вектор  $\Delta x$  является направлением спуска в точке  $x$ , если  $\nabla f(x)^\top \Delta x \leq 0$ . Последовательность  $(t^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  называется последовательностью размеров шагов. Метод спуска имеет множество вариаций, которые различаются способом вычисления направлений спуска  $(\Delta x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  и размеров шагов  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ .

Далее будем предполагать, что  $X = \mathbb{R}^n$ . Пусть  $\Delta x$  — направление спуска в точке  $x$ . Рассмотрим два способа определения размера шага  $t$ . Первый способ заключается в решении следующей задачи

$$t^* = \arg \min_{t \geq 0} f(x + t \Delta x)$$

и называется методом наискорейшего спуска (Exact Line Search, ELS). Второй

---

### Алгоритм 7.2. Backtracking Line Search

---

**Input:** направление спуска  $\Delta x$ ,  $\alpha \in (0, 1/2)$ ,  $\beta \in (0, 1)$

**Output:** размер шага  $t$

```

1  $t \leftarrow 1$ 
2 while  $f(x + t \Delta x) > f(x) + \alpha t \nabla f(x)^\top \Delta x$  do
3    $t \leftarrow \beta t$ 
4 return  $t$ 
```

---

способ называется Backtracking Line Search (BLS) и зависит от двух параметров  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\beta \in (0, 1)$ . Начиная с  $t = 1$ , будем уменьшать  $t$ , умножением на  $\beta$ , до тех пор пока не будет выполнено неравенство  $f(x + t\Delta x) \leq f(x) + \alpha t \nabla f(x)^\top \Delta x$ . Нетрудно показать, что если выполнено неравенство  $\nabla f(x)^\top \Delta x < 0$ , то искомое  $t$  будет найдено за конечное число итераций. Действительно,

$$f(x + t\Delta x) = f(x) + t \nabla f(x)^\top \Delta x + o(t) = f(x) + \alpha t \nabla f(x)^\top \Delta x + th(t),$$

где  $h(t) = \left(\frac{o(t)}{t} + (1 - \alpha) \nabla f(x)^\top \Delta x\right)$ . При достаточно малом  $t > 0$  функция  $h(t)$  принимает отрицательные значения.

Зафиксируем точку  $x$  и определим направление  $\ell^*$ ,  $\|\ell^*\| = 1$ , наибольшего убывания, т.е.  $\ell^* = \arg \min_{\ell \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial f(x)}{\partial \ell}$ , где  $\mathbb{S}^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{x: \|x\| = 1\}$  — сфера единичного радиуса с центром в начале координат. Так как  $\frac{\partial f(x)}{\partial \ell} = \nabla f(x)^\top \ell \geq -\|\nabla f(x)\|$ , то направление наибольшего убывания  $\ell^*$  сонаправлено с  $-\nabla f(x)$ . Метод спуска, в котором  $\Delta x = -\nabla f(x)$ , называется методом градиентного спуска. Перед тем, как провести анализ сходимости метода градиентного спуска, докажем ряд вспомогательных утверждений [1].

Пусть  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — квадратные матрицы порядка  $n$  с вещественными элементами. Если матрица  $C = A - B$  является неотрицательно определённой, т.е. для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  выполнено неравенство  $x^\top C x \geq 0$ , то будем писать  $A \succeq B$ . Для векторов будем использовать евклидову норму, а для матриц — спектральную.

**Лемма 7.1.** Пусть  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  и нашлось такое положительное число  $m$ , что  $\nabla^2 f(x) \succeq mI$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Тогда для всех  $x, y$  справедливы неравенства

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + \frac{m}{2} \|y - x\|^2; \quad (7.1)$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) \geq f(x) - \frac{1}{2m} \|\nabla f(x)\|^2; \quad (7.2)$$

$$\|x - x^*\| \leq \frac{2}{m} \|\nabla f(x)\|, \quad \text{где } x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \quad (7.3)$$

▷ Согласно формуле Тейлора существует такая точка  $z$ , принадлежащая отрезку  $[x, y]$ , что  $f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + \frac{1}{2} (y - x)^\top \nabla^2 f(z) (y - x)$ .

Так как  $\nabla^2 f(z) - mI$  — неотрицательно определённая матрица, то

$$(y - x)^\top (\nabla^2 f(z) - mI) (y - x) \geq 0,$$

т.е.  $(y - x)^\top \nabla^2 f(z) (y - x) \geq m \|y - x\|^2$ , а значит, имеет место неравенство (7.1).

При фиксированном  $x$  функция  $g(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top(y - x) + \frac{m}{2}\|y - x\|^2$  является строго выпуклой. Нетрудно видеть, что  $\tilde{y} = x - \frac{1}{m}\nabla f(x)$  — стационарная точка функции  $g$ , а значит, в этой точке функция  $g$  принимает минимальное значение. Другими словами,  $g(y) \geq g(\tilde{y}) = f(x) - \frac{1}{2m}\|\nabla^2 f(x)\|$ ,  $y \in X$ . То, что  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  существует и достигается в единственной точке  $x^* \in \mathbb{R}^n$  следует из неравенства (7.1) и строгой выпуклости функции  $f$ . Так как  $f(y) \geq g(y)$ , то выполнено неравенство (7.2).

В силу (7.2) имеем

$$\begin{aligned} 0 &\geq f(x^*) - f(x) \geq \nabla f(x)^\top(x^* - x) + \frac{m}{2}\|x^* - x\|^2 \geq \\ &\geq -\|\nabla f(x)\|\|x^* - x\| + \frac{m}{2}\|x^* - x\|^2. \end{aligned}$$

Из последнего, в частности, следует неравенство (7.3).  $\triangleleft$

**Лемма 7.2.** Пусть  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  и нашлось такое положительное число  $M$ , что  $\nabla^2 f(x) \preceq MI$ . Тогда для всех  $x, y \in \mathbb{R}^n$  справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} f(y) &\leq f(x) + \nabla f(x)^\top(y - x) + \frac{M}{2}\|y - x\|^2, \\ \inf_{y \in X} f(y) &\leq f(x) - \frac{1}{2M}\|\nabla f(x)\|^2. \end{aligned} \tag{7.4}$$

$\triangleright$  Доказательство аналогично доказательству леммы 7.1.  $\triangleleft$

Наконец, перейдём к анализу сходимости метода градиентного спуска.

**Теорема 7.1.** Пусть  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  и существуют такие положительные числа  $m, M > 0$ , что  $mI \preceq \nabla^2 f(x) \preceq MI$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим  $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ , а через  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  — последовательность, построенную методом градиентного спуска. Тогда  $f(x^k) - f(x^*) \leq c^k(f(x^0) - f(x^*))$ , где  $c = 1 - m/M$ , если последовательность  $(t^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  строится согласно процедуре ELS, и  $c = 1 - 2\alpha m \min(1, \beta/M)$ , если последовательность  $(t^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  строится согласно процедуре BLS.

$\triangleright$  Зафиксируем точку  $x$  и пусть  $g(t) = f(x - t\nabla f(x))$ . Из неравенства (7.4) следует, что  $g(t) \leq f(x) + \left(\frac{Mt^2}{2} - t\right)\|\nabla f(x)\|^2$ . Пусть  $t_E$  — размер шага, полученный согласно ELS. Тогда

$$g(t_E) \leq g\left(\frac{1}{M}\right) \leq f(x) - \frac{1}{2M}\|\nabla f(x)\|^2$$

(мы сравниваем со значением функции  $g$  в точке  $M^{-1}$ , так как функция  $Mt^2/2 - t$  принимает там минимальное значение). Из (7.2) следует, что

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2m(f(x) - f(x^*)).$$

Таким образом,  $f(x - t_E \nabla f(x)) - f(x^*) \leq (1 - m/M)(f(x) - f(x^*))$ .

Пусть  $t_B$  — размер шага, который полученный согласно процедуре BLS. Покажем, что  $t_B = 1$  или  $t_B \geq \beta/M$ . Действительно, при  $0 \leq t \leq M^{-1}$  справедлива цепочка неравенств

$$g(t) \leq f(x) - t \|\nabla f(x)\|^2 + \frac{Mt^2}{2} \|\nabla f(x)\|^2 \leq f(x) - \frac{t}{2} \|\nabla f(x)\|^2 \leq f(x) - \alpha t \|\nabla f(x)\|^2.$$

Если  $t_B = 1$ , то  $f(x - t_B \nabla f(x)) \leq f(x) - \alpha \|\nabla f(x)\|^2$ , а если  $t_B \geq \beta/M$ , то верно  $f(x - t_B \nabla f(x)) \leq f(x) - \frac{\alpha\beta}{M} \|\nabla f(x)\|^2$ . Таким образом,

$$f(x - t_B \nabla f(x)) - f(x^*) \leq f(x) - f(x^*) - \alpha \min\left(1, \frac{\beta}{M}\right) \|\nabla f(x)\|^2.$$

А значит, в силу неравенства (7.2) имеем

$$f(x - t_B \nabla f(x)) \leq (1 - 2\alpha m \min(1, \beta/M))(f(x) - f(x^*)). \quad \triangleleft$$

Предположение о том, что  $\nabla^2 f(x) \succeq mI$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , является достаточно сильным. Оказывается, что сходимость имеет место и без этого предположения. Мы не будем приводить формулировку и доказательство этого результата, так как он будет следовать из анализа, проведённого в §7 при обсуждении метода проекций градиента.

В зависимости от максимального порядка смешанных производных целевой функции  $f$ , которые участвуют в методе оптимизации, различают прямые методы поиска (или метод нулевого порядка), методы первого порядка, методы второго порядка и т.д. В прямых методах поиска используется информация только о самой функции и не используется информация о её производных. Как правило, такие методы применяются, когда аналитическое представление функции  $f$  не известно. Методы первого порядка при поиске решения используют информацию как о самой функции, так и о её производных первого порядка. Рассмотренный метод градиентного спуска является методом первого порядка. Далее будет рассмотрен метод Ньютона, который является методом второго порядка, так как в этом методе используются информация о самой функции и о её производных первого и второго порядков.

Пусть  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  — выпуклая функция, гессиан  $\nabla^2 f(x)$  которой обратим в каждой точке  $x \in \mathbb{R}^n$ . Из последнего, в частности, следует, что  $\nabla^2 f(x)$  — положительно определённая матрица для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ . Выпишем формулу Тейлора второго порядка для функции  $f$  в окрестности некоторой фиксированной точки  $x$ :

$$f(x + v) = f(x) + \nabla f(x)^\top v + \frac{1}{2} v^\top \nabla^2 f(x) v + o(\|v\|^2).$$

Функция  $h(v) = f(x) + \nabla f(x)^\top v + \frac{1}{2} v^\top \nabla^2 f(x) v$  принимает минимальное значение в точке  $v^* = -\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$ . Направление  $\Delta x = v^*$  называется шагом Ньютона.

Минимальное значение функции  $h$  равно

$$h(\Delta x) = f(x) - \frac{1}{2} \nabla f(x)^\top \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x) = f(x) - \frac{1}{2} \lambda(x)^2 \approx f(x + \Delta x),$$

где  $\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla f(x)^\top \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x))^{\frac{1}{2}}$ . Непосредственно проверяется, что

$$\lambda(x)^2 = -\nabla f(x)^\top \Delta x = \Delta x^\top \nabla^2 f(x) \Delta x.$$

Метод спуска, в котором направление спуска равно шагу Ньютона, называется

---

**Алгоритм 7.3.** Метод Ньютона

---

**Input:** начальное приближение  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$

**Output:** приближённое решение

```

1 repeat
2    $\Delta x \leftarrow -\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$ 
3    $\lambda(x)^2 \leftarrow \nabla f(x)^\top \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$ 
4   Определить размер шага  $t$  согласно BLS
5    $x \leftarrow x + t\Delta x$ 
6 until  $\lambda(x)^2/2 > \varepsilon$ 
7 return x
```

---

методом Ньютона. Для определённости будем считать, что размер шага  $t = t_B$  в этом методе выбирается согласно BLS.

Для анализа метода Ньютона докажем вспомогательные леммы.

**Лемма 7.3.** Если для выпуклой функции  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  существуют такие числа  $m$ ,  $M > 0$ , что  $mI \preceq \nabla^2 f(x) \preceq MI$ , то  $f(x + t_B \Delta x) - f(x) \leq -\frac{\alpha \beta m}{M^2} \|\nabla f(x)\|^2$ .

▷ Согласно условию леммы справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \lambda(x)^2 &= \Delta x^\top \nabla^2 f(x) \Delta x \geq m \|\Delta x\|^2, \\ \lambda(x)^2 &= \nabla f(x)^\top \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x) \geq \frac{\|\nabla f(x)\|^2}{M}. \end{aligned}$$

Из неравенства (7.4) следует, что  $f(x + t\Delta x) \leq f(x) - t\lambda(x)^2 + \frac{M}{2m} t^2 \lambda(x)^2$ . Полагая в последнем неравенстве  $t = m/M$ , получаем, что

$$f(x + t\Delta x) \leq f(x) - \frac{m}{2M} \lambda(x)^2 \leq f(x) - \alpha t \lambda(x)^2.$$

Следовательно,  $t_B \geq \beta m/M$ . Таким образом,

$$f(x + t_B \Delta x) - f(x) \leq -\alpha t_B \lambda(x)^2 \leq -\alpha \beta \frac{m}{M} \lambda(x)^2 \leq -\frac{\alpha \beta m}{M^2} \|\nabla f(x)\|^2. \quad \triangleleft$$

**Лемма 7.4.** Пусть для функции  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  и чисел  $m, M, L > 0$  верно, что

$$mI \preceq \nabla^2 f(x) \preceq MI \quad \text{и} \quad \|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда  $\|\nabla f(x + \Delta x)\| \leq \frac{L}{2m^2} \|\nabla f(x)\|^2$  и если  $\|\nabla f(x)\| \leq 3(1 - 2\alpha)\frac{m^2}{L}$ , то  $t_B = 1$ .

▷ Докажем первую часть утверждения леммы.

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x + \Delta x)\| &= \|\nabla f(x + \Delta x) - \nabla f(x) - \nabla^2 f(x)\Delta x\| = \\ &= \left\| \int_0^1 (\nabla^2 f(x + t\Delta x) - \nabla^2 f(x))\Delta x dt \right\| \leq \frac{L}{2} \|\Delta x\|^2 = \\ &= \frac{L}{2} \|\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)\|^2 \leq \frac{L}{2m^2} \|\nabla f(x)\|^2. \end{aligned}$$

Пусть  $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x + t\Delta x)$ , тогда получаем  $g''(t) = \Delta x^\top \nabla^2 f(x + t\Delta x) \Delta x$ . В силу условия леммы справедливы неравенства:

$$|g''(t) - g''(0)| = |\Delta x^\top (\nabla^2 f(x + t\Delta x) - \nabla^2 f(x)) \Delta x| \leq tL \|\Delta x\|^3$$

и  $g''(0) = \lambda(x)^2 \geq m \|\Delta x\|^2$ . Тогда  $g''(t) \leq g''(0) + tL \|\Delta x\|^3 \leq \lambda(x)^2 + \frac{tL}{m^{3/2}} \lambda(x)^3$ . Проинтегрировав дважды последнюю цепочку неравенств, учитывая равенство  $g'(0) = -\lambda(x)^2$ , и положив  $t = 1$ , получаем  $f(x + \Delta x) \leq f(x) - \frac{1}{2} \lambda(x)^2 + \frac{L}{6m^{3/2}} \lambda(x)^3$ .

Так как  $\|\nabla f(x)\| \leq 3(1 - 2\alpha)\frac{m^2}{L}$ , то  $\lambda(x) \leq 3(1 - 2\alpha)\frac{m^{3/2}}{L}$ . Следовательно,

$$f(x + \Delta x) \leq f(x) - \lambda(x)^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{L\lambda(x)}{6m^{3/2}} \right) \leq f(x) - \alpha \lambda(x)^2 = f(x) + \alpha \nabla f(x)^\top \Delta x.$$

Таким образом,  $t_B = 1$ . ◁

**Теорема 7.2.** Пусть для функции  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  и чисел  $m, M, L > 0$  верно, что  $mI \preceq \nabla^2 f(x) \preceq MI$  и  $\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq L\|x - y\|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим  $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ , а через  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  — последовательность, построенную методом Ньютона. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  верно неравенство  $f(x^k) - f(x^*) < \varepsilon$  при

$$k \geq N_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x^0) - f(x^*)}{\gamma} + \log_2 \log_2 \left( \frac{m^3}{L^2 \varepsilon} \right), \quad \text{где} \quad \gamma = \gamma(m, M, L).$$

▷ Пусть  $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \min(1, 3(1 - 2\alpha))\frac{m^2}{L}$ . Если  $\|\nabla f(x)\| \leq \eta$ , то из леммы 7.4, в частности, следует, что  $\|\nabla f(x + \Delta x)\| \leq \frac{\eta}{2}$ . Действительно, так как  $\frac{L}{m^2} \leq \eta^{-1}$ , то

$\|\nabla f(x + \Delta x)\| \leq \frac{L}{2m^2} \|\nabla f(x)\|^2 \leq \frac{\eta}{2}$ . Через  $s$  обозначим наименьшее натуральное число, такое что  $\|\nabla f(x^s)\| \leq \eta$ . Из леммы 7.3 следует, что  $s \leq \frac{f(x^0) - f(x^*)}{\gamma}$ , где  $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\beta\eta^2 \frac{m}{M^2}$ . Тогда при  $k > s$  справедливо неравенство  $\|\nabla f(x^k)\| < \eta$ , а значит,

$$\frac{L}{2m^2} \|\nabla f(x^k)\| \leq \left( \frac{L}{2m^2} \|\nabla f(x^{k-1})\| \right)^2 \leq \left( \frac{L}{2m^2} \|\nabla f(x^s)\| \right)^{2^{k-s}} \leq \left( \frac{1}{2} \right)^{2^{k-s}}.$$

Из неравенства (7.2) следует, что  $f(x^k) - f(x^*) \leq \frac{1}{2m} \|\nabla f(x^k)\| \leq \frac{m^3}{L^2} 2^{-2^{k-s}} < \varepsilon$ .  $\triangleleft$

### Упражнения

19. (Метод сопряжённых направлений) Пусть  $A$  — положительно определённая матрица и  $f(x) = x^T A x - 2b^T x + c$ . Векторы (направления)  $p$  и  $q$  назовём  $A$ -сопряжёнными, если  $p^T A q = 0$ . Для данного начального приближения  $x^0$  и последовательности ненулевых сопряжённых направлений  $(p^k)_{k=0}^{n-1}$  определим последовательность точек  $(x^k)_{k=1}^n$  равенством  $x^{k+1} = x^k + t^k p^k$ , где  $t^k = \arg \min_{t \geq 0} f(x^k + t p^k)$ . Докажите, что

- (a)  $t^k = -(p^k, \nabla f(x^k)) / (p^k, A p^k)$ ;
- (b) вектор  $\nabla f(x^{k+1})$  ортогонален направлениям  $p^0, p^1, \dots, p^k$ ;
- (c)  $\nabla f(x^n) = 0$ , а значит,  $x^n$  — минимум функции  $f(x)$ ;
- (d) последовательность направлений  $(p^k)_{k=0}^{n-1}$  может быть определена как

$$\begin{cases} p^0 = -\nabla f(x^0), \\ p^k = -\nabla f(x^k) + \frac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\|\nabla f(x^{k-1})\|^2} p^{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

### Литература

1. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex Optimization* – Cambridge University Press, 2004. – 730 с.