§5 ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Перейдём к формулировке и доказательству основных утверждений теории двойственности линейного программирования.

Теорема 5.1. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$ — допустимые векторы задач* (4.1) *и* (4.2)*, соответственно. Тогда $b^\mathsf{T} y \le c^\mathsf{T} x$.*

▷ Рассмотрим сумму $S \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j$. С одной стороны

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j\right)x_i \le \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = c^\mathsf{T} x,$$

а с другой —

$$S = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right)y_j \ge \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = b^\mathsf{T} y. \quad ◁$$

Следствие 5.1. *Если для допустимых векторов x и y задач* (4.1) *и* (4.2)*, соответственно, верно равенство $c^\mathsf{T} x = b^\mathsf{T} y$, то x и y — решения.*

Лемма 5.1. *Пусть x и y — допустимые векторы задач* (4.1) *и* (4.2)*, соответственно, удовлетворяющие условиям дополняющей нежёсткости, т.е.*

$$x_i\left(c_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j\right) = 0 \ \ \textit{при} \ \ i \in I_1 \quad \textit{и} \quad y_j\left(b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right) = 0 \ \ \textit{при} \ \ j \in J_1.$$

Тогда $c^\mathsf{T} x = b^\mathsf{T} y$, а значит, x и y — решения соответствующих задач.

▷ Действительно,

$$c^\mathsf{T} x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j + \sum_{i=1}^{n}\left(c_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j\right)x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j.$$

Аналогично доказывается равенство $b^\mathsf{T} y = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$. Поэтому, $c^\mathsf{T} x = b^\mathsf{T} y$. ◁

Теорема 5.2. *Если существует решение x^* задачи* (4.1)*, то у задачи* (4.2) *также есть решение y^*, при этом $c^\mathsf{T} x^* = b^\mathsf{T} y^*$.*

▷ Пусть $V \overset{\text{def}}{=} \{v \in \mathbb{R}^n \colon \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}v_i = 0, j \in J_2\}$. Через $\widetilde{I}_1 \subset I_1$ обозначим такое подмножество индексов, что $x_i^* = 0$, $i \in \widetilde{I}_1$, а через $\widetilde{J}_1 \subset J_1$ — такое подмножество индексов, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^* = b_j$, $j \in \widetilde{J}_1$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — столбцы матрицы A, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$. Тогда для произвольного $v \in V$, такого что

$e_i^{\mathsf{T}} v \geq 0$, $i \in \widetilde{I}_1$ и $a_j^{\mathsf{T}} v \geq 0$, $j \in \widetilde{J}_1$, вектор $x^* + tv$ допустимый для задачи (4.1) при всех достаточно малых $t > 0$. Так как x^* — решение задачи, то $c^{\mathsf{T}} v \geq 0$. Поэтому, согласно следствию 4.2 справедливо равенство

$$c = \sum_{j \in \widetilde{J}_1 \sqcup J_2} y_j^* a_j + \sum_{i \in \widetilde{I}_1} z_i e_i,$$

где $y_j^* \geq 0$ при $j \in \widetilde{J}_1$ и $z_i \geq 0$ при $i \in \widetilde{I}_1$. Доопределим $y_j^* = 0$ при $j \in J_1 \setminus \widetilde{J}_1$, $z_i = 0$, $i \in I \setminus \widetilde{I}_1$ и покажем, что вектор $y^* \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)^{\mathsf{T}}$ — решение задачи (4.2). Так как $c_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* + z_i$, $i \in I$, и $y_j^* \geq 0$ при $j \in J_1$, то y^* — допустимый вектор задачи (4.2). Нетрудно видеть, что для векторов x^* и y^* выполнены условия дополняющей нежёсткости: $x_i^*\big(c_i - \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^*\big) = 0$ при $i \in I_1$ и $y_j^*\big(b_j - \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^*\big) = 0$ при $j \in J_1$, а значит, y^* — решение задачи (4.2) и $c^{\mathsf{T}} x^* = b^{\mathsf{T}} y^*$. $\lhd$

Лемма 5.2. *Если векторы x и y — решения, соответственно, задач* (4.1) *и* (4.2)*, то выполнены условиям дополняющей нежёсткости.*

$\rhd$ Через y^* обозначим решение задачи (4.2), построенное по x в доказательстве теоремы 5.2. Тогда $c^{\mathsf{T}} x = b^{\mathsf{T}} y^* = b^{\mathsf{T}} y$. Следовательно, $c^{\mathsf{T}} x = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$, а значит,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \right) x_i = \sum_{i \in I_1} \left(c_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \right) x_i = 0.$$

Так как $c_i - \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \geq 0$ и $x_i \geq 0$ при $i \in I_1$, то $x_i\big(c_i - \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} y_j\big) = 0$ при $i \in I_1$. Равенство $y_j\big(b_j - \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\big) = 0$ при $j \in J_1$ доказывается аналогично. $\lhd$

Пример 5.1 (Матричные игры)**.** Матричной игрой называют конечную антагонистическую игру. Антагонистическая игра — это игра двух лиц с нулевой суммой, т.е. выигрыш одного игрока равен проигрышу второго. Игра называется конечной, если конечно множество стратегий игроков. Пусть n, m — количества стратегий первого и второго игроков, соответственно. Без нарушения общности будем считать, что $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество стратегий первого игрока, а $Y = \{1, 2, \ldots, m\}$ — второго. Через a_{ij} обозначим выигрыш первого игрока, если он воспользуется стратегией $i \in X$, а его оппонент — стратегией $j \in Y$. Соответственно, $-a_{ij}$ — выигрыш второго игрока в этой ситуации. Таким образом, матричная игра задаётся матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ выигрышей первого игрока. Далее будем отождествлять игру и её матрицу A. Решением матричной игры в чистых стратегиях называется пара чистых стратегий $(i_0, j_0) \in X \times Y$, которые образуют седловую точку матрицы $A : a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}$, $i \in X$ и $j \in Y$ (стратегии i_0, j_0 называются оптимальными чистыми стратегиями). Из этого определения, в частности, следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.

Седловая точка матрицы A существует тогда и только тогда, когда нижняя цена игры $\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{i\in X}\min\limits_{j\in Y} a_{ij}$ равна верхней чистой цене игры $\beta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{j\in Y}\max\limits_{i\in X} a_{ij}$ (доказательство этого утверждения практически дословно повторяет доказательство теоремы 3.2). Таким образом, решение матричной игры в чистых стратегиях не всегда существует.

Расширим множество стратегий смешанными. Смешанной стратегией первого игрока называется вектор вероятностей $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^\mathsf{T}$, где $p_i \geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Число p_i — вероятность того, что первый игрок будет использовать стратегию $i \in X$. Аналогично определяется смешанная стратегия $q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)^\mathsf{T}$ второго игрока. Множество смешанных стратегий первого игрока образуют стандартный $(n-1)$-мерный симплекс $S^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R}^n \colon p_i \geq 0 \text{ и } \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1\}$, а множество смешанных стратегий второго игрока — стандартный $(m-1)$-мерный симплекс S^{m-1}.

Выигрыш первого игрока при фиксированных смешанных стратегиях p и q определяется как математическое ожидание его выигрыша:

$$F(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j = p^\mathsf{T} A q.$$

Соответственно, $-F(p,q)$ — выигрыш второго игрока. Решением матричной игры в смешанных стратегиях называют пару смешанных стратегий $(p^0, q^0) \in S^{n-1} \times S^{m-1}$, которая является седловой точкой функции F : $F(p, q^0) \leq F(p^0, q^0) \leq F(p^0, q)$, $p \in S^{n-1}$ и $q \in S^{m-1}$. Число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} F(p^0, q^0)$ называется ценной матричной игры A. Оказывается, что решение матричной игры в смешанных стратегиях существует всегда. Пусть $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$ — вектор, у которого 1 стоит на i-м месте, а все остальные компоненты равны нулю (размер вектора не фиксируем).

Теорема 5.3 (фон Нейман)**.** *Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ имеют место равенства*

$$v(A) = \max_{p\in S^{n-1}} \min_{1\leq j\leq m} p^\mathsf{T} A e_j = \min_{q\in S^{m-1}} \max_{1\leq i\leq n} e_i^\mathsf{T} A q.$$

Для любых $p^0 \in \arg\max\limits_{p\in S^{n-1}} \min\limits_{1\leq j\leq m} p^\mathsf{T} A e_j$, $q^0 \in \arg\min\limits_{q\in S^{m-1}} \max\limits_{1\leq i\leq n} e_i^\mathsf{T} A q$ пара (p^0, q^0) является решением в смешанных стратегиях матричной игры A.

$\triangleright$ Вычисление величин $\max\limits_{p}\min\limits_{j} p^\mathsf{T} A e_j$ и $\min\limits_{q}\max\limits_{i} e_i^\mathsf{T} A q$ равносильно решению задач

$$\begin{cases} u \to \max; \\ u - \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \leq 0, \quad 1 \leq j \leq m; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1; \\ p_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases} \qquad (5.1) \qquad\qquad \begin{cases} v \to \min; \\ v - \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n; \\ \sum\limits_{j=1}^{m} q_j = 1; \\ q_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq m. \end{cases} \qquad (5.2)$$

линейного программирования (5.1) и (5.2), соответственно, которые двойствены друг другу, и, как не трудно видеть, имеют решения. Поэтому,

$$\max_{p}\min_{j} p^\mathsf{T} A e_j = \min_{q}\max_{i} e_i^\mathsf{T} A q.$$

Так как $F(p,q)$ — билинейная функция, то очевидно, выполнены равенства

$$\max_p F(p,q) = \max_i e_i^\mathsf{T} Aq \quad \text{и} \quad \min_q F(p,q) = \min_j p^\mathsf{T} Ae_j,$$

а значит, $\max\limits_p \min\limits_q p^\mathsf{T}Aq = \min\limits_q \max\limits_p p^\mathsf{T}Aq$. Из доказательства теоремы 3.2, в частности, следует, что (p^0, q^0) — седловая точка функции $F(p,q)$. $\lhd$

Отметим, что некоторая задача может быть сведена к решению матричной игры, хотя в исходной постановке игроки и множества их стратегий явно не заданы. Рассмотрим пример такой задачи.

Пусть компьютерная сеть из n узлов, представлена связным неориентированным графом $G = (V, E)$, каждому ребру которого приписана его длина. В одной из вершин графа G располагается клиент, отправляющий запрос к серверу, который также следует расположить в одной из вершин графа G. Будем считать, что задержка запроса от клиента к серверу равна расстоянию между вершинами, в которых находятся клиент и сервер (расстояние между вершинами u и v графа G определяется, как наименьшая из длин путей с концами u и v). Необходимо расположить сервер так, чтобы задержка была минимальной. Если вершина, в которой находится клиент, заранее известна, то, очевидно, следует расположить сервер в той же вершине. Поэтому далее будем считать, что расположение клиента неизвестно. Чтобы минимизировать задержку в худшем случае сервер следует расположить в центре графа G, т.е. в такой вершине, для которой максимальное расстояние до других вершин минимально.

Предположим теперь, что клиент располагается в вершинах согласно некоторому закону распределения и наша цель определить смешанную стратегию расположения сервера так, чтобы минимизировать математическое ожидание задержки запроса. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — матрица попарных расстояний между вершинами графа G. Если известен вектор y вероятностей, согласно которым выбирается вершина для клиента, то оптимальный вектор x вероятностей для расположения сервера выберем как решение задачи $\min\limits_{x \in S^{n-1}} y^\mathsf{T}Ax$. В частности, сервер можно разместить в любой вершине v, такой что $v \in \arg\min\limits_{1 \le i \le n} y^\mathsf{T}Ae_i$. Наконец, если вектор y неизвестен, то определим x как оптимальную стратегию второго игрока в матричной игре с матрицей A.

Лемма 5.3. *Если целевая функция $c^\mathsf{T}x$ задачи* (5.3) *ограничена снизу на*

$$\begin{cases} c^\mathsf{T}x \to \min; \\ A^\mathsf{T}x \le b, \quad x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \tag{5.3}$$

непустом множестве допустимых векторов $X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon A^\mathsf{T}x \le b\}$, то задача (5.3) *имеет решение.*

$\rhd$ Пусть a_1, a_2, ..., a_m — столбцы матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Через S обозначим семейство подмножеств множества $\{1, 2, \dots, m\}$, такое что для любого $J \in S$ верно:

1. $J = I(x)$ для некоторого допустимого вектора $x \in X$;
2. вектор c представим в виде линейной комбинации векторов a_j, $j \in J$.

То, что семейство S не пусто показано ниже. Выберем какое-либо подмножество $J \in S$ и соответствующий допустимый вектор $x \in X$. Тогда

$$c^{\mathsf{T}} x = \sum_{j \in J} \alpha_j a_j^{\mathsf{T}} x = \sum_{j \in J} \alpha_j b_j.$$

Фиксируя для каждого $J \in S$ единственный набор коэффициентов $(\alpha_j)_{j \in J}$ из линейного разложения, рассмотрим конечное множество $U = \{\sum_{j \in J} \alpha_j b_j \colon J \in S\}$.

Докажем, что $\min_{x \in X} c^{\mathsf{T}} x = \min U$. Пусть $x \in X$ — какой-либо допустимый вектор. Пусть $V_x = \operatorname{span}\{a_i \colon i \in I(X)\}$. Если $c \in V_x$, то $c = \sum_{i \in I(x)} \alpha_i a_i$, а значит, $I(x) \in S$ и $c^{\mathsf{T}} x \in U$. Если же $c \notin V_x$, то выберем такой вектор $v \in V_x^{\perp}$, что $c^{\mathsf{T}} v < 0$. Так как функция $c^{\mathsf{T}} x$ ограничена снизу на множестве X, то существуют $t > 0$ и индекс $i \notin I(x)$, такие что $I(x) \cup \{i\} \subset I(x + tv)$. При этом $c^{\mathsf{T}} x > c^{\mathsf{T}}(x + tv)$. Заменяя x на $x + tv$, повторим приведённые рассуждения. Через не более m шагов мы придём к такому допустимому вектору x, что $I(x) \in S$. $\triangleleft$

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение

Лемма 5.4. *Если целевая функция задачи* (4.1) *ограничена снизу на непустом множестве допустимых векторов, то задача* (4.1) *имеет решение.*

Следствие 5.2. *Если множества допустимых векторов задач* (4.1) *и* (4.2) *не пусты, то эти задачи имеют решения.*

Упражнения

17. Матричная игра называется симметричной, если её матрица кососимметрическая. Докажите, что значение симметричной игры равно нулю. Кроме того, если p — оптимальная стратегия для первого игрока, то $q = p$ — оптимальная стратегия для второго игрока.