

Белорусский государственный университет
Факультет прикладной математики и информатики

**ИЗБРАННЫЕ РАЗДЕЛЫ
МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ**

канд. физ.-мат. наук Войделевич А.С.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Минск
2019

СОДЕРЖАНИЕ

§1	Выпуклые множества	3
§2	Выпуклые функции	8
§3	Задача выпуклой оптимизации	12
§4	Линейное программирование	19
§5	Теория двойственности	25

§1 ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть \mathbb{A}^n — n -мерное аффинное пространство над полем \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем некоторую точку $O \in \mathbb{A}^n$ в качестве начала координат. Далее будет отождествлять произвольную точку $P \in \mathbb{A}^n$ с её радиусом вектором \overrightarrow{OP} , а само пространство \mathbb{A}^n — с вещественным n -мерным векторным пространством \mathbb{R}^n . Для обозначения векторов и точек будем использовать строчные буквы, а для обозначения множеств — заглавные.

Опр. 1.1. Точка $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_m p_m \in \mathbb{R}^n$, где $p_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, называется *выпуклой комбинацией точек* p_1, p_2, \dots, p_m .

Опр. 1.2. Для произвольных точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ множество

$$[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\},$$

состоящее из всех возможных выпуклых комбинаций точек x и y , называется *отрезком* (с концами x, y).

Опр. 1.3. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для произвольных двух точек $x, y \in X$ оно содержит весь отрезок $[x, y]$.

Отметим, что согласно определению 1.3 пустое множество \emptyset и произвольное одноточечное множество $\{p\}$, $p \in \mathbb{R}^n$, являются выпуклыми.

Лемма 1.1. Множество X является выпуклым, если и только если X содержит любую выпуклую комбинацию своих точек.

▷ Если множество X содержит любую выпуклую комбинацию своих точек, то, в частности, для любых двух точек $x, y \in X$ имеем $[x, y] \subset X$, а значит, X — выпуклое множество.

Обратное утверждение доказывается индукцией по количеству m точек $p_1, p_2, \dots, p_m \in X$, входящих в выпуклую комбинацию $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_m p_m$. База индукции $m = 2$ следует из определения 1.3. Предположим теперь, что множество X содержит всевозможные выпуклые комбинации своих точек размера $m \geq 2$. Докажем, что X также содержит любую выпуклую комбинацию размера $m + 1$. Действительно, пусть $p_1, p_2, \dots, p_{m+1} \in X$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1} \geq 0$, такие что $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1$. Без нарушения общности будем считать, что $\alpha_1 < 1$ (иначе это выпуклая комбинация, состоящая из одной точки). Тогда

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_{m+1} p_{m+1} = \alpha_1 p_1 + (1 - \alpha_1)q,$$

где $q = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1} p_2 + \frac{\alpha_3}{1 - \alpha_1} p_3 + \dots + \frac{\alpha_{m+1}}{1 - \alpha_1} p_{m+1}$. Так как $\sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} = 1$, то согласно предположению индукции $q \in X$, а значит, $p \in X$. <

Рассмотрим операции над выпуклыми множествами, которые сохраняют выпуклость.

Лемма 1.2. Пусть I — некоторое множество индексов произвольной мощности, а $\{X_i \subset \mathbb{R}^n : i \in I\}$ — семейство выпуклых множеств. Тогда множество $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ является выпуклым.

▷ Действительно, пусть $x, y \in X$. Тогда $x, y \in X_i$ для всех $i \in I$, а значит, $[x, y] \subset X_i$. Таким образом, $[x, y] \subset X$, т.е. множество X является выпуклым. ◁

Выпуклой оболочкой $\text{Conv } X$ произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется наименьшее (по вложению) выпуклое множество, содержащее X . Из леммы 1.2 следует, в частности, что $\text{Conv } X$ — это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих X .

Лемма 1.3. Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — аффинное преобразование, т.е. преобразование, действующее по правилу $F: x \mapsto Ax + b$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Тогда для произвольных выпуклых множеств $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ множества $F(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{Fx : x \in X\} \subset \mathbb{R}^m$ и $F^{-1}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : Fx \in Y\} \subset \mathbb{R}^n$ также являются выпуклыми.

▷ Пусть $y_1 = Fx_1$, $y_2 = Fx_2$ и $\alpha \in [0, 1]$. Тогда утверждение леммы следует из равенства $\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 = \alpha Fx_1 + (1 - \alpha)Fx_2 = F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$, которое выполнено для любого аффинного преобразования F . ◁

Лемма 1.4. Пусть $\{X_i \subset \mathbb{R}^{n_i} : 1 \leq i \leq m\}$ — семейство выпуклых множеств. Тогда прямое произведение

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \in X_i, 1 \leq i \leq m\}$$

является выпуклым множеством в пространстве $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_m}$.

▷ Пусть $x_i, \tilde{x}_i \in X_i$, $1 \leq i \leq m$, и $\alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_m) + (1 - \alpha)(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m) = \\ = (\alpha x_1 + (1 - \alpha)\tilde{x}_1, \dots, \alpha x_m + (1 - \alpha)\tilde{x}_m) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m, \end{aligned} \quad (1.1)$$

так как $\alpha x_i + (1 - \alpha)\tilde{x}_i \in X_i$, $1 \leq i \leq m$. ◁

Композиция операций, сохраняющих выпуклость, также, очевидно, сохраняет выпуклость. Следовательно, для произвольных выпуклых множеств $X_1, X_2, \dots, X_m \in \mathbb{R}^n$ и вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ множество

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i : x_i \in X_i, 1 \leq i \leq m \right\}$$

является выпуклым. Действительно, эту линейную комбинацию множеств можно представить как композицию прямого произведения и аффинного преобразования. Отметим, что линейную композицию вида $A + B$ называют суммой Минковского множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Лемма 1.5. Замыкание \overline{X} выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ выпукло.

▷ Выберем произвольные точки $a, b \in \overline{X}$ и число $\alpha \in [0, 1]$. Необходимо доказать, что $c \stackrel{\text{def}}{=} \alpha a + (1 - \alpha)b \in \overline{X}$. Существуют такие две последовательности точек $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, что $a_k \rightarrow a$ и $b_k \rightarrow b$. Тогда последовательность точек $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, где $c_k = \alpha a_k + (1 - \alpha)b_k$, сходится к c , а значит, $c \in \overline{X}$. ◁

Опр. 1.4. Множества $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ называются *отделимыми*, если существуют ненулевой вектор c и число d , такие что $c^\top x \geq d \geq c^\top y$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Если известно, что неравенства строгие $c^\top x > d > c^\top y$, то говорят, что множества X и Y *строго отделимы*. Гиперплоскость, заданная уравнением $c^\top x = d$, называется *разделяющей гиперплоскостью*.

Отметим, что согласно определению, вектор c из уравнения гиперплоскости $c^\top x = d$ ненулевой.

Теорема 1.1. Если непересекающиеся множества X и $Y \subset \mathbb{R}^n$ выпуклы, замкнуты и одно из них ограничено, то они строго отделимы.

▷ Пусть X — ограниченное множество и $d_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x_1, x_2 \in X} \|x_1 - x_2\|$ — его диаметр. Докажем, что найдутся точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, для которых $\|x_0 - y_0\| = \inf_{x \in X, y \in Y} \|x - y\|$. Действительно, выберем произвольные две точки $x_1 \in X$ и $y_1 \in Y$. Пусть $\tilde{Y} = Y \cap B_r(x_1)$, где $B_r(x_1)$ — шар радиуса $r = d_X + \|x_1 - y_1\|$ с центром в x_1 . Множества X и \tilde{Y} являются компактными, а функция f , действующая по правилу $f: (x, y) \in X \times \tilde{Y} \mapsto \|x - y\|$, — непрерывной. Так как декартово произведение компактных множеств компактно, то функция f достигает свое минимальное значение в некоторых точках $x_0 \in X$ и $y_0 \in \tilde{Y}$. Если $y \in Y \setminus \tilde{Y}$ и $x \in X$, то $\|x - y\| \geq \|x_1 - y\| - \|x_1 - x\| \geq d_X + \|x_1 - y_1\| - d_X = \|x_1 - y_1\|$, а значит, точки x_0, y_0 искомые.

Пусть $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n: c^\top x = d\}$ — гиперплоскость, проходящая через середину отрезка $[x_0, y_0]$, перпендикулярно ему. Выберем $c = x_0 - y_0$ и $d = (\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2)/2$. Докажем, что множества X и Y не пересекаются с указанной гиперплоскостью, а значит, лежат в разных открытых полупространствах относительно её. Предположим противное, а именно, что некоторая точка $y \in Y$ принадлежит плоскости Π . Треугольник с вершинами x_0, y и y_0 является равнобедренным с основанием $[x_0, y_0]$ и острым углом при вершине y , так как $\|x_0 - y_0\| \leq \|y - x_0\|$. По условию Y — выпуклое множество, а значит, $[y, y_0] \subset Y$. Пусть \tilde{y} — основание перпендикуляра, опущенного из вершины x_0 на сторону $[y, y_0]$. Тогда $\tilde{y} \in [y, y_0]$ и $\|x_0 - \tilde{y}\| < \|x_0 - y_0\|$. Последнее неравенство противоречит выбору точек $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$. Таким образом, $c^\top x > d > c^\top y$. ◁

Опр. 1.5. Гиперплоскость $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n: c^\top x = d\}$ называется *опорной к множеству X в точке x_0* , если $x_0 \in \Pi \cap \overline{X}$ и для всех $x \in X$ одновременно выполняется одно из неравенств: $c^\top x \geq d$ или $c^\top x \leq d$.

Напомним, что точка x называется *граничной* для множества X , если любая её окрестность содержит как точки, принадлежащие данному множеству, так и

не принадлежащие ему.

Лемма 1.6. *Выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ в каждой граничной точке имеет опорную гиперплоскость.*

▷ Пусть x_0 — граничная точка множества X . Так как X — выпуклое множество, то x_0 — граничная точка замыкания \bar{X} . Следовательно, найдётся такая последовательность точек $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{X}$, что $y_k \rightarrow x_0$. Согласно теореме 1.1 для множеств $\{y_k\}$ и \bar{X} (выпуклость \bar{X} следует из леммы 1.5) найдётся такая гиперплоскость, заданная уравнением $c_k^\top x = d_k$, что $c_k^\top x > d_k > c_k^\top y_k$, $x \in \bar{X}$. Без нарушения общности будем считать, что $\|c_k\| = 1$. Тогда, в силу построения, последовательность $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ является ограниченной. Наконец, без нарушения общности будем считать, что $c_k \rightarrow c$ и $d_k \rightarrow d$. Тогда $c^\top x \geq d$, $x \in X$, и $c^\top x_0 = d$. ◁

Теорема 1.2. *Произвольное выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ можно отделить от точки y , ему не принадлежащей.*

▷ Действительно, если $y \notin \bar{X}$, то доказательство следует из теоремы 1.1, иначе — из леммы 1.6. ◁

Теорема 1.3. *Множества X и $Y \subset \mathbb{R}^n$ отделимы тогда и только тогда, когда множество $X - Y$ и точка $\{0\}$ отделимы.*

▷ Пусть множества X и Y отделимы. Тогда существуют такие $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $d \in \mathbb{R}$, что $c^\top y \leq d \leq c^\top x$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Следовательно, $c^\top(x - y) \geq 0$, а значит, гиперплоскость $\Pi = \{x: c^\top x = 0\}$ отделяет множество $X - Y$ от нуля.

Предположим теперь, что множества $X - Y$ и $\{0\}$ отделимы. Тогда существуют такие $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $d \in \mathbb{R}$, что $0 \leq d \leq c^\top z$ для всех $z \in X - Y$. Следовательно, $c^\top y \leq c^\top x$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, а значит, $\sup_{y \in Y} c^\top y \leq \inf_{x \in X} c^\top x$. Выберем такое

число $\tilde{d} \in \mathbb{R}$, что $\sup_{y \in Y} c^\top y \leq \tilde{d} \leq \inf_{x \in X} c^\top x$. Тогда гиперплоскость $\Pi = \{x: c^\top x = \tilde{d}\}$ отделяет множества X и Y . ◁

Следствие 1.1. *Пусть X, Y — непустые выпуклые непересекающиеся множества. Тогда X и Y отделимы.*

Через $\text{Int } X$ обозначим внутренность множества $X \subset \mathbb{R}^n$, т.е. множество всех внутренних точек X . Не сложно видеть, что, если X — выпуклое множество, то $\text{Int } X$ также выпукло.

Следствие 1.2. *Пусть X, Y — выпуклые множества с непустой внутренностью, при этом $\text{Int } X \cap \text{Int } Y = \emptyset$. Тогда X и Y отделимы.*

Упражнения

1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — непустое множество. Докажите, что любую точку p , принадлежащую выпуклой оболочке множества X , можно представить в виде выпуклой линейной комбинации не более чем $n + 1$ точек множества X .
2. Пусть в \mathbb{R}^n заданы точки p_1, p_2, \dots, p_s , где $s \geq n + 2$. Докажите, что точки можно разбить на два непересекающихся множества так, что выпуклые оболочки этих двух множеств будут иметь непустое пересечение.

3. (Теорема Хелли) Пусть I — произвольное семейство индексов и $\{X_i\}_{i \in I}$ — семейство замкнутых выпуклых множеств в \mathbb{R}^n , из которых хотя бы одно компактно. Докажите, что если любое подсемейство из $n + 1$ множеств имеет непустое пересечение, то и всё семейство имеет непустое пересечение.
4. Озеро имеет форму невыпуклого n -угольника. Докажите, что множество точек озера, из которых видны все его берега, либо пусто, либо заполняет внутренность выпуклого m -угольника, где $m \leq n$.

§2 ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Опр. 2.1. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на выпуклом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, называется выпуклой, если для любых $x, y \in X$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполнено неравенство $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$. Если последнее неравенство строгое при $\alpha \in (0, 1)$, то функция f называется строго выпуклой.

Лемма 2.1. Для того, чтобы функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, определённая на выпуклом множестве X , была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы было выпуклым множество $\text{epi } f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y): x \in X, y \geq f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}$. (Множество $\text{epi } f$ называется надграфиком функции f .)

▷ Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Выбрав произвольные две точки $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \text{epi } f$ и число $\alpha \in [0, 1]$, докажем, что $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 \in \text{epi } f$, т.е. что $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$. Так как $f(x_1) \leq y_1$ и $f(x_2) \leq y_2$, то необходимое неравенство следует из выпуклости функции f .

Предположим теперь, что $\text{epi } f$ — выпуклое множество. Очевидно, что для произвольных двух точек $x_1, x_2 \in X$ пары $z_1 = (x_1, f(x_1))$, $z_2 = (x_2, f(x_2))$ принадлежат надграфу функции f . Следовательно, для произвольного числа $\alpha \in [0, 1]$ имеем $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 \in \text{epi } f$, а значит, $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$. Другими словами, функция f выпукла. ◁

Лемма 2.2 (Неравенство Йенсена). Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Тогда для произвольных точек $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ и чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \geq 0$, таких что $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, справедливо неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_m f(x_m). \quad (2.1)$$

▷ Докажем неравенство (2.1) индукцией по количеству точек m . База индукции $m = 2$ следует из определения выпуклой функции. Предположим, что неравенство (2.1) верно при $m \geq 2$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \in X$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1} \geq 0$, такие что $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1$. Без нарушения общности будем считать, что

$\alpha_1 < 1$. Так как $\sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} = 1$, то верна цепочка неравенств

$$f\left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i\right) \leq \alpha_1 f(x_1) + (1 - \alpha_1) f\left(\sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i f(x_i). \quad \triangleleft$$

Напомним, что точка x называется внутренней для множества X , если найдётся такое $r > 0$, что $B_r(x) \subset X$.

Лемма 2.3. Выпуклая функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех внутренних точках множества $X \subset \mathbb{R}^n$.

▷ Пусть x_0 — внутренняя точка множества X , а значит, $B_r(x_0) \subset X$ для некоторого $r > 0$. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — стандартный базис пространства \mathbb{R}^n . Тогда для любого $\alpha \in [0, 1)$ справедливо неравенство

$$f(x_0 \pm \alpha r e_i) \leq (1 - \alpha)f(x_0) + \alpha f(x_0 \pm r e_i).$$

Следовательно, $\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} f(x_0 \pm t e_i) \leq f(x_0)$, поэтому, $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$. Так как $f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x_0 + h) + \frac{1}{2}f(x_0 - h)$ для любого $h \in B_r(\mathbf{0})$, то

$$f(x_0) \leq \frac{1}{2} \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Следовательно, $f(x_0) = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$, т.е. функция f непрерывна в x_0 . <

Опр. 2.2. Вектор $c \in \mathbb{R}^n$ называется субградиентом функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$, если $f(x) \geq f(x_0) + c^\top(x - x_0)$ для всех $x \in X$. Множество всевозможных субградиентов функции f в точке x_0 называется субдифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

Лемма 2.4. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, а x_0 — внутренняя точка множества X . Тогда множество $\partial f(x_0)$ непусто.

▷ Пусть $c^\top x + by = d$ — уравнение опорной гиперплоскости к множеству $\text{epi } f$ в точке $(x_0, f(x_0))$. Тогда $c^\top x + by \geq d$ при $(x, y) \in \text{epi } f$ и $c^\top x_0 + b f(x_0) = d$. Докажем, что $b > 0$. Так как $(x_0, f(x_0) + 1) \in \text{epi } f$, то $c^\top x_0 + b f(x_0) + b \geq d$, т.е. $b \geq 0$. Если $b = 0$, то $c^\top x \geq d$, $x \in X$, а значит, $c^\top(x - x_0) \geq 0$. Так как x_0 — внутренняя точка, то $x_0 - tc \in X$ для некоторого положительного числа $t > 0$. Следовательно, $-t\|c\|^2 \geq 0$, т.е. $c = 0$. Получено противоречие. Таким образом, $b > 0$, а значит,

$$f(x) \geq -\frac{c^\top x}{b} + \frac{d}{b} \quad \text{и} \quad f(x_0) = -\frac{c^\top x_0}{b} + \frac{d}{b}.$$

Наконец, отнимая последнее равенство от неравенства, получаем, что

$$f(x) - f(x_0) \geq (\tilde{c}, x - x_0), \quad \text{где} \quad \tilde{c} = -\frac{c}{b}. \quad <$$

Имеет место следующее обобщение неравенства Йенсена.

Лемма 2.5. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, а $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — случайный вектор. Тогда справедливо неравенство $f(E\xi) \leq Ef(\xi)$, при условии, что соответствующие математические ожидания существуют.

▷ Так как $f(x) - f(y) \geq c_y^\top(x - y)$, где $c_y \in \partial f(y)$, то $f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^n} (c_y^\top x + d_y)$. Следовательно,

$$f(E\xi) = \max_{y \in \mathbb{R}^n} (c_y^\top E\xi + d_y) = \max_{y \in \mathbb{R}^n} E(c_y^\top \xi + d_y) \leq E \max_{y \in \mathbb{R}^n} (c_y^\top \xi + d_y) = Ef(\xi). \quad <$$

Лемма 2.6. Если в точке $x_0 \in X$ выпуклая функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируема, то $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$.

▷ Пусть $x \in X$ и $t \in (0, 1]$. Тогда $f(x_0 + t(x - x_0)) \leq (1 - t)f(x_0) + tf(x)$, а значит, $\frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \leq f(x) - f(x_0)$. Устремляя t к 0, получаем, что

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top (x - x_0). \quad \triangleleft$$

Лемма 2.7. Если $f \in C^2(X)$, где X — открытое выпуклое множество, то для выпуклости функции f необходимо и достаточно, чтобы матрица $\nabla^2 f(x)$ была неотрицательно определённой ($\nabla^2 f(x) \succeq 0$). Если матрица $\nabla^2 f(x)$ положительно определена ($\nabla^2 f(x) \succ 0$), то f — строго выпуклая функция.

▷ Выберем произвольные точку $x_0 \in X$ и направление $\ell \neq 0$. Рассмотрим функцию $g(t) = f(x_0 + t\ell)$, заданную на интервале $T \stackrel{\text{def}}{=} \{t: x_0 + t\ell \in X\}$. Очевидно, что функция f (строго) выпукла тогда и только тогда, когда (строго) выпуклы скалярные функции g при всевозможных $x_0 \in X$ и $\ell \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Имеем $g'(t) = \ell^\top \nabla f(x_0 + t\ell)$ и $g''(t) = \ell^\top \nabla^2 f(x_0 + t\ell) \ell$. Функция g выпукла тогда и только тогда, когда $g''(t) \geq 0$, что равносильно неотрицательности определённости матрицы $\nabla^2 f(x)$. Если $\nabla^2 f(x) \succ 0$, то $g''(t) > 0$, а значит, g — строго выпуклая функция. \triangleleft

В заключении рассмотрим операции над функциями, сохраняющие выпуклость. Будем писать, что $x \leq y$ для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, если выполнены неравенства $x_i \leq y_i$, $1 \leq i \leq n$.

Лемма 2.8. Пусть f, f_1, f_2, \dots, f_m — выпуклые функции. Тогда следующие функции также являются выпуклыми:

- a) $g(x) = \sum_{i=1}^m c_i f_i(x)$, где $c_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$;
- b) $g(x) = f(Fx)$, где $Fx = Ax + b$ — аффинное преобразование;
- c) $g(x) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$;
- d) $g(x) = h(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, где h — выпуклая монотонно неубывающая функция, т.е. $h(y) \leq h(\tilde{y})$ для всех y и \tilde{y} , таких что $y \leq \tilde{y}$.

▷ Доказательства утверждений тривиальным образом следуют из определения выпуклости. Для примера докажем выпуклость функции g из пункта d). Пусть $x, y \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$. Так как функции f_i , $1 \leq i \leq m$, выпуклы по условию, то $f_i(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f_i(x) + (1 - \alpha)f_i(y)$. Положим $u = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ и $v = (f_1(y), \dots, f_m(y))$, тогда в силу монотонности функции h верно неравенство

$$h(f_1(\alpha x + (1 - \alpha)y), \dots, f_m(\alpha x + (1 - \alpha)y)) \leq h(\alpha u + (1 - \alpha)v).$$

Так как функция h выпукла, то $h(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha h(u) + (1 - \alpha)h(v)$. Наконец, в силу определения функции g имеем

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) = h(f_1(\alpha x + (1 - \alpha)y), \dots, f_m(\alpha x + (1 - \alpha)y)),$$

$g(x) = h(u)$ и $g(y) = h(v)$, а значит, $g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)$. Следовательно, g — выпуклая функция. \triangleleft

Упражнения

5. Докажите, что непрерывная выпуклая функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

6. Докажите, что субдифференциал $\partial f(x_0)$ произвольной выпуклой функции f в точке x_0 является замкнутым выпуклым множеством.
7. Пусть $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$, где $f_i(x)$ — выпуклые функции, и пусть c_i — субградиент функции f_i в точке x_0 . Докажите, что вектор $c \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, где $\alpha_i \geq 0$ и $\alpha_i = 0$, если $f_i(x_0) < f(x_0)$, является субградиентом функции $f(x)$.
8. (Неравенство Караматы) Пусть даны два упорядоченных по невозрастанию набора из n действительных чисел $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Говорят, что набор \mathbf{a} *мажорирует* набор \mathbf{b} , и пишут $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$, если $a_1 \geq b_1$, $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$, \dots , $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Докажите, что для любой выпуклой функции $y = f(x)$, определённой на некотором промежутке I , и любых двух наборов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ из этого промежутка, удовлетворяющих условию $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$, справедливо неравенство

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n).$$

9. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — выпуклая и вогнутая функции соответственно, определённые на выпуклом множестве X , причём для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$. Докажите, что существует линейная функция $h(x)$, такая что

$$f(x) \geq h(x) \geq g(x) \quad \text{для каждого } x \in X.$$

§3 ЗАДАЧА ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации

$$\begin{cases} f_0(x) \rightarrow \min; \\ f_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m; \\ x \in X; \end{cases} \quad (3.1)$$

где $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклые функции, $0 \leq j \leq m$, а $X \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное выпуклое множество. Задача (3.1) называется задачей выпуклой оптимизации (выпуклого программирования), а функция $f_0(x)$ — целевой функцией задачи (3.1). Множество $Y \stackrel{\text{def}}{=} X \cap \{x: f_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq m\} \subset \mathbb{R}^n$ будем называть множеством допустимых векторов (точек). Очевидно, что Y — выпуклое множество. Допустимую точку $x \in Y$, для которой выполнены неравенства $f_i(x) < 0$, $1 \leq i \leq m$, будем называться строго допустимой. Ограничение $f_j(x) \leq 0$ называется активным в допустимой точке $x \in Y$, если $f_j(x) = 0$. Множество индексов активных ограничений обозначим через $I(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{j: f_j(x) = 0, 1 \leq j \leq m\}$.

Опр. 3.1. Допустимый вектор $x^* \in Y$ называется решением задачи (3.1), если $f_0(x^*) \leq f_0(x)$ при $x \in Y$.

В общем случае, когда функции f_j не обязательно выпуклы, приводят определения локального и глобального экстремумов. Однако, очевидно, что для выпуклых задач эти понятия совпадают. Более того, если дополнительно известно, что f_0 — строго выпуклая функция, то задача (3.1) имеет не более одного решения.

Иногда к ограничению задачи (3.1) добавляют следующее $Ax = b$, где $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$ (отметим, что поверхность уровня $\{x: f(x) = c\}$ произвольной выпуклой функции $f(x)$, вообще говоря, не является выпуклым множеством). Пусть \tilde{x} — какое-либо решение линейного уравнения $Ax = b$ и $K \in \mathbb{R}^{n \times d}$ — матрица, столбцы которой образуют базис $\ker A$, $\dim \ker A = d$. Тогда, $\{\tilde{x} + Ky: y \in \mathbb{R}^d\}$ — множество всех решений системы $Ax = b$. Таким образом, исходная задача равносильна задаче (3.1) для функций $\tilde{f}_i(y) \stackrel{\text{def}}{=} f_i(\tilde{x} + Ky)$, $0 \leq i \leq m$, и множества $\tilde{X} = K^{-1}(X - \tilde{x})$.

Лемма 3.1. Пусть функция f_0 из задачи (3.1) является дифференцируемой, тогда точка $x^* \in Y$ — решение задачи (3.1), если и только если для любой точки $x \in Y$ справедливо неравенство

$$\nabla f_0(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0. \quad (3.2)$$

▷ Пусть x^* — решение задачи (3.1), докажем, что верно неравенство (3.2). Предположим противное, т.е., что нашлась такая допустимая точка $\tilde{x} \in Y$, что $\nabla f_0(x^*)^\top (\tilde{x} - x^*) < 0$. Так как f_0 — дифференцируемая функция, то имеет место равенство $f_0(x^* + t(\tilde{x} - x^*)) = f_0(x^*) + t\nabla f_0(x^*)^\top (\tilde{x} - x^*) + o(t)$, $t \in [0, 1]$. При

достаточно малом $t > 0$ слагаемое $t(\nabla f_0(x^*)^\top(\tilde{x} - x^*) + o(t)/t)$ отрицательное, а значит, $f_0(x^* + t(\tilde{x} - x^*)) < f_0(x^*)$, что противоречит выбору x^* .

Предположим, что для некоторой точки $x^* \in Y$ выполнено неравенство (3.2). Так как $f_0(x) \geq f_0(x^*) + \nabla f_0(x^*)^\top(x - x^*)$, $x \in Y$, то $f_0(x) \geq f_0(x^*)$, а значит, x^* — решение задачи (3.1). \triangleleft

Опр. 3.2. Говорят, что для задачи (3.1) выполнено условие Слейтера, если множество строго допустимых точек задачи (3.1) не пусто.

Следуя [1, с. 52–58], перейдём к доказательству фундаментального результата, который является прямым аналогом метода множителей Лагранжа. Напомним, что функция $\mathcal{L}(x; \lambda_0, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(x)$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, называется функцией Лагранжа задачи (3.1), а числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ — множителями Лагранжа.

Теорема 3.1 (Кун, Таккер). Пусть $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq m$, — выпуклые функции, а X — выпуклое множество. Если x^* является решением задачи (3.1), то найдутся такие множители Лагранжа λ_0^* и $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$, что

- a) (условие невырожденности) числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ не равны 0 одновременно;
- b) (условие неотрицательности) $\lambda_j^* \geq 0$, $0 \leq j \leq m$;
- c) (условия дополняющей нежёсткости) $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$, $1 \leq i \leq m$.
- d) (принцип минимума) $\min_{x \in X} \mathcal{L}(x; \lambda_0^*, \lambda^*) = \mathcal{L}(x^*; \lambda_0^*, \lambda^*)$;

Пусть для некоторых множителей λ_0^*, λ^* и допустимой точки $x^* \in Y$ выполнены условия a) – d), тогда

A) x^* — решение задачи (3.1), если $\lambda_0^* \neq 0$;

B) $\lambda_0^* \neq 0$, если для задачи (3.1) справедливо условие Слейтера.

\triangleright Пусть x^* — решение задачи (3.1). Без нарушения общности будем считать, что $f_0(x^*) = 0$. Действительно, если это не так, то определим новую функцию $\tilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(x^*)$. Рассмотрим множество $C \subset \mathbb{R}^{m+1}$, состоящее из таких векторов $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)^\top$, для которых найдётся точка $x_\mu \in X$, такая что выполнены неравенства

$$f_0(x_\mu) < \mu_0, \quad f_1(x_\mu) \leq \mu_1, \quad \dots, \quad f_m(x_\mu) \leq \mu_m. \quad (3.3)$$

Установим ряд свойств множества C . Сперва докажем, что множество C непусто и выпукло. Действительно, любой вектор $\mu \in \mathbb{R}^{m+1}$ с положительными компонентами принадлежит C , так как в (3.3) для такого вектора достаточно положить $x = x^*$. Выпуклость множества C устанавливается аналогично доказательству выпуклости надграфика ерй f произвольной выпуклой функции f .

Докажем, что нулевой вектор $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m+1}$ не принадлежит C . Предположим противное. Тогда существует такая точка $\tilde{x} \in X$, что $f_0(\tilde{x}) < 0$ и $f_i(\tilde{x}) \leq 0$, $1 \leq i \leq m$, а значит, x^* не является решением задачи (3.1).

Поскольку C — выпуклое множество и $\mathbf{0} \notin C$, то из теоремы 1.2 отделимости следует, что найдутся такие числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$, неравные одновременно нулю,

что $\sum_{j=0}^m \lambda_j^* \mu_j \geq 0$, $\mu \in C$. Докажем, что λ_0^* , λ^* — искомые множители Лагранжа.

Множители λ_j^* , $0 \leq j \leq m$, неотрицательны. Действительно, очевидно, что вектор $(\delta, \dots, \delta, 1, \delta, \dots, \delta)^T$, где $\delta > 0$ и 1 стоит на j_0 -м месте, принадлежит C , а значит, $\lambda_{j_0}^* \geq -\delta \sum_{j \neq j_0} \lambda_j^*$. Так как $\delta > 0$ выбрано произвольно, то $\lambda_{j_0}^* \geq 0$.

Множители λ_i^* , $1 \leq i \leq m$, удовлетворяют условиям дополняющей нежёсткости. Выберем индекс i_0 . Если $f_{i_0}(x^*) = 0$, то $\lambda_{i_0}^* f_{i_0}(x^*) = 0$. Предположим, что $f_{i_0}(x^*) < 0$. Очевидно, что вектор $(\delta, 0, \dots, 0, f_{i_0}(x^*), 0, \dots, 0)^T$, где $\delta > 0$ и число $f_{i_0}(x^*)$ стоит на i_0 -м месте, принадлежит C . Следовательно, $\lambda_{i_0}^* f_{i_0}(x^*) \geq -\lambda_{i_0}^* \delta$. Таким образом, $\lambda_{i_0}^* f_{i_0}(x^*) \geq 0$, а значит, $\lambda_{i_0}^* = 0$, т.е. $\lambda_{i_0}^* f_{i_0}(x^*) = 0$.

В точке x^* выполнен принцип минимума. Действительно, пусть $x \in X$. Тогда вектор $(f_0(x) + \delta, f_1(x), \dots, f_m(x))^T$, где $\delta > 0$, принадлежит множеству C .

Следовательно, $\lambda_0^* f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) \geq -\lambda_0^* \delta$, а значит, $\mathcal{L}(x; \lambda_0^*, \lambda^*) \geq 0$. С другой стороны, $f_0(x^*) = 0$ и выполнены условия дополняющей нежёсткости, поэтому $\mathcal{L}(x^*; \lambda_0^*, \lambda^*) = 0$. Таким образом, $\mathcal{L}(x; \lambda_0^*, \lambda^*) \geq \mathcal{L}(x^*; \lambda_0^*, \lambda^*)$ для любого $x \in X$.

Пусть теперь для некоторых множителей λ_0^* , λ^* и допустимой точки $x^* \in Y$ выполнены условия а) – д). Предположим, что $\lambda_0^* \neq 0$. Без нарушения общности будем считать, что $\lambda_0^* = 1$. Тогда для любой допустимой точки $x \in Y$ получаем

$$f_0(x) \geq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) = \mathcal{L}(x; 1, \lambda^*) \geq \mathcal{L}(x^*; 1, \lambda^*).$$

Так как $\mathcal{L}(x^*; 1, \lambda^*) = f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) = f_0(x^*)$, то x^* — решение задачи (3.1).

Предположим, что для задачи (3.1) выполнено условие Слейтера. Следовательно, существует точка $\tilde{x} \in Y$, такая что $f_i(\tilde{x}) < 0$, $1 \leq i \leq m$. Докажем, что $\lambda_0^* \neq 0$. Предположим противное. Тогда $\mathcal{L}(\tilde{x}; 0, \lambda^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(\tilde{x}) < 0$, так как не все множители λ_i^* , $1 \leq i \leq m$, равны нулю. С другой стороны, $\mathcal{L}(x^*; 0, \lambda^*) = 0$, а значит, $\mathcal{L}(\tilde{x}; 0, \lambda^*) < \mathcal{L}(x^*; 0, \lambda^*)$. Получено противоречие. \triangleleft

Функция $\mathcal{L}(x; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$, заданная на множестве $X \times \mathbb{R}_+^m$, где $\mathbb{R}_+^m \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{R}^m : \lambda_i \geq 0\}$, называется нормальной функцией Лагранжа.

Лемма 3.2. Пусть $(x^*, \lambda^*) \in X \times \mathbb{R}_+^m$. Тогда точка x^* допустимая, т.е. $x^* \in Y$, и для пары (x^*, λ^*) выполнены условия а) – д) теоремы Куна – Таккера, если и только если (x^*, λ^*) — седловая точка нормальной функции Лагранжа, т.е.

$$\min_{x \in X} \mathcal{L}(x; \lambda^*) = \mathcal{L}(x^*; \lambda^*) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(x^*; \lambda). \quad (3.4)$$

\triangleright Действительно, пусть для пары $(x^*, \lambda^*) \in Y \times \mathbb{R}_+^m$ выполнены условия а) – д). Необходимо доказать только правое неравенство в (3.4). Для произвольных

множителей $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ в силу условий b) и c) имеем

$$\mathcal{L}(x^*; \lambda^*) = f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) = f_0(x^*) \geq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^*) = \mathcal{L}(x^*; \lambda).$$

Пусть теперь пара $(x^*, \lambda^*) \in X \times \mathbb{R}_+^m$ — седловая точка функции $\mathcal{L}(x; \lambda)$. Покажем, только что $x^* \in Y$ и справедливо условие c), так как остальные условия, очевидно, выполнены. Если $f_{i_0}(x^*) > 0$ для некоторого $i_0 \geq 1$, то имеет место неравенство $\mathcal{L}(x^*; \lambda^*) < \mathcal{L}(x^*; \tilde{\lambda})$, где $\tilde{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{i_0}^* + \delta, \dots, \lambda_m^*)^\top$ и $\delta > 0$, которое противоречит (3.4). Следовательно, x^* — допустимая точка задачи (3.1). Так как $\mathcal{L}(x^*; \lambda^*) \geq \mathcal{L}(x^*; 0)$, то $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) \geq 0$, а значит, $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$, $1 \leq i \leq m$. \triangleleft

Приведём критерий существования седловой точки, из доказательства которого, в частности, будет следовать способ её построения.

Теорема 3.2. Пусть $f(x, y) : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, заданная на произведении компактных множеств X и Y . Тогда

$$\min_x \max_y f(x, y) \geq \max_y \min_x f(x, y). \quad (3.5)$$

При этом равенство в (3.5) достигается тогда и только тогда, когда существует седловая точка (x_0, y_0) функции f :

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0), \quad x \in X, y \in Y.$$

\triangleright Выберем произвольную точку $\tilde{y} \in Y$. Так как $\max_y f(x, y) \geq f(x, \tilde{y})$, $x \in X$, то $\min_x \max_y f(x, y) \geq \min_x f(x, \tilde{y})$, а значит, в силу произвольного выбора \tilde{y} выполнено неравенство (3.5).

Предположим, что $\min_x \max_y f(x, y) = \max_y \min_x f(x, y)$. Выберем точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ из условий $\max_y f(x_0, y) = \min_x \max_y f(x, y)$ и $\min_x f(x, y_0) = \max_y \min_x f(x, y)$. Тогда $f(x_0, y_0) \geq \min_x f(x, y_0) = \max_y \min_x f(x, y) = \min_x \max_y f(x, y)$. Поэтому, справедливо неравенство $f(x_0, y_0) \geq \max_y f(x_0, y)$. Аналогично, получаем

$$f(x_0, y_0) \leq \max_y f(x_0, y) = \min_x \max_y f(x, y) = \max_y \min_x f(x, y) = \min_x f(x, y_0).$$

Таким образом, (x_0, y_0) — седловая точка.

Пусть теперь известно, что (x_0, y_0) — седловая точка. Тогда

$$\begin{aligned} \max_y \min_x f(x, y) &\geq \min_x f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0), \\ \min_x \max_y f(x, y) &\leq \max_y f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Следовательно, $\max_y \min_x f(x, y) \geq \min_x \max_y f(x, y)$ и неравенство (3.5) обращается в равенство. \triangleleft

Отметим, что в доказательстве теоремы 3.2 условия компактности множеств X , Y и непрерывности функции $f(x, y)$ мы неявно использовали лишь для существования векторов x_0 , y_0 при построении седловой точки.

Пример 3.1 (Метод опорных векторов, SVM). Сформулируем задачу обучения с учителем. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение из пространства объектов X в множество ответов Y . Отображение f , вообще говоря, не известно, однако, дана обучающая выборка $S = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ размера N , где $x_i \in X$ и $y_i = f(x_i) \in Y$, $1 \leq i \leq N$. Требуется построить отображение $\tilde{f}: X \rightarrow Y$, аппроксимирующее f на всём пространстве X .

Рассмотрим частный случай задачи обучения с учителем — задачу бинарной классификации, в которой $Y = \{-1, 1\}$ и объекты описываются n -мерными вещественными векторами, т.е. $X = \mathbb{R}^n$. Далее будем считать, что в обучающей выборке содержатся объекты двух классов, а искомое отображение \tilde{f} будем строить в форме линейного порогового классификатора $\tilde{f}(x) = \text{sign}(\omega^\top x - \omega_0)$, где $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\omega_0 \in \mathbb{R}$ — параметры, которые необходимо определить.

Предположим, что выборка S строго линейно разделима, т.е. существуют такие значения параметров ω и ω_0 , при которых справедливы неравенства $y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) > 0$, $1 \leq i \leq N$. В этом случае разделяющая гиперплоскость, вообще говоря, не единственна. Идея метода опорных векторов (support vector machine) состоит в выборе такой разделяющей гиперплоскости, которая максимально далеко отстоит от ближайших к ней точек обоих классов.

Заметим, что параметры ω и ω_0 линейного порогового классификатора \tilde{f} определяются с точностью до умножения на одну и ту же ненулевую константу. Поэтому, без ограничения общности будем считать, что $\min_{1 \leq i \leq N} y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) = 1$. Ориентированное расстояние от точки x_i до гиперплоскости, заданной уравнением $\omega^\top x = \omega_0$, равно $(\omega^\top x_i - \omega_0)/\|\omega\|$. Поэтому для определения параметров ω и ω_0 необходимо решить задачу

$$\begin{cases} \|\omega\| \rightarrow \min; \\ \min_{1 \leq i \leq N} y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) = 1; \end{cases}$$

которая эквивалентна следующей

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\|\omega\|^2 \rightarrow \min; \\ y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) \geq 1, \quad 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (3.6)$$

В силу предположения о строгой линейной разделимости множество строго допустимых точек задачи (3.6) не пусто, а значит, выполнено условие Слейтера. Несложно показать, что задача (3.6) имеет решение. Действуя согласно теореме Куна – Таккера и лемме 3.2, найдём седловую точку нормальной функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{1}{2}\|\omega\|^2 - \sum_{i=1}^N \lambda_i (y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) - 1) \rightarrow \min_{\omega, \omega_0} \max_{\lambda}. \quad (3.7)$$

Фиксируя $\lambda \in \mathbb{R}_+^N$, решим задачу $\mathcal{L}(\omega, \omega_0; \lambda) \rightarrow \min_{\omega, \omega_0}$. Из условия стационарности имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \omega - \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i = 0, \quad \text{т.е.} \quad \omega = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_0} = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0. \quad (3.8)$$

Из (3.8), в частности, следует, что вектор ω является линейной комбинацией тех векторов обучающей выборки, для которых $\lambda_i \neq 0$. Согласно условиям дополняющей нежёсткости для этих векторов справедливы равенства $\omega^\top x_i - \omega_0 = y_i$. Такие векторы называются опорными. Используя равенства (3.8), преобразуем задачу (3.7) к задаче квадратичного программирования, содержащую только двойственные переменные:

$$\begin{cases} -\mathcal{L}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -\min_{\omega, \omega_0} \mathcal{L}(\omega, \omega_0; \lambda) = -\sum_{i=1}^N \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i^\top x_j \rightarrow \min_{\lambda}; \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0; \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Пусть λ — решение задачи (3.9). Тогда вектор ω вычисляется согласно (3.8). Для определения порога ω_0 достаточно взять произвольный опорный вектор x_i и положить $\omega_0 = \omega^\top x_i - y_i$. Однако, из-за возможных погрешностей вычислений рекомендуется брать такой опорный вектор x_i при определении ω_0 , для которого двойственная переменная λ_i максимальна.

Рассмотрим общий случай, не делая предположений о линейной разделимости выборки. При любом выборе параметров ω и ω_0 линейный классификатор f может ошибаться на объектах выборки. Введём набор дополнительных переменных $\xi_i \geq 0$, характеризующих величину ошибки на объектах x_i , $1 \leq i \leq N$. Уточним задачу (3.6):

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \|\omega\|^2 + C \sum_{i=1}^N \xi_i \rightarrow \min_{\omega, \omega_0, \xi}; \\ y_i (\omega^\top x_i - \omega_0) \geq 1 - \xi_i, \quad 1 \leq i \leq N; \\ \xi \geq 0; \end{cases} \quad (3.10)$$

где $C > 0$ — некоторый заданный гиперпараметр, определяющий компромисс между максимизацией ширины разделяющей полосы и минимизацией суммарной ошибки. Очевидно, что задача (3.10) имеет решение и множество строго допустимых точек не пусто, а значит, выполнено условие Слейтера. Рассмотрим функцию Лагранжа для задачи (3.10):

$$\mathcal{L}(\omega, \omega_0, \xi; \lambda, \eta) = \frac{1}{2} \|\omega\|^2 - \sum_{i=1}^N \lambda_i (y_i (\omega^\top x_i - \omega_0) - 1) - \sum_{i=1}^N \xi_i (\lambda_i + \eta_i - C),$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)^\top$ — вектор переменных, двойственных к вектору переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^\top$. Согласно теореме Куна – Таккера и лемме 3.2 задача (3.10) сводится к поиску седловой точки функции Лагранжа: $\mathcal{L}(\omega, \omega_0, \xi; \lambda, \eta) \rightarrow \min_{\omega, \omega_0, \xi} \max_{\lambda, \eta}$. Зафиксируем произвольные векторы λ и η . Из условия стационарности по аргументам ω и ω_0 получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \omega - \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i = 0, \quad \text{т.е.} \quad \omega = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_0} = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0; \quad (3.11)$$

Если для некоторого индекса $1 \leq i \leq N$ верно неравенство $\lambda_i + \eta_i > C$, то, очевидно, $\min_{\omega, \omega_0, \xi} \mathcal{L}(\omega, \omega_0, \xi; \lambda, \eta) = -\infty$, а значит, такие множители Лагранжа λ и η не могут

быть компонентами седловой точки. Поэтому будем предполагать, что $\lambda_i + \eta_i \leq C$. При этом, выполнено равенство $\xi_i(\lambda_i + \eta_i - C) = 0$, а именно, если $\lambda_i + \eta_i < C$, то мы должны положить $\xi_i = 0$. Используя (3.11), сведём задачу поиска седловой точки к задаче квадратичного программирования:

$$\begin{cases} -\mathcal{L}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -\min_{\omega, \omega_0, \xi} \mathcal{L}(\omega, \omega_0, \xi; \lambda, \eta) = -\sum_{i=1}^N \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i^\top x_j \rightarrow \min_{\lambda}; \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0; \\ 0 \leq \lambda_i \leq C, \quad 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (3.12)$$

Пусть λ – решение задачи (3.12). Аналогично случаю линейной разделимой выборки, вектор ω вычисляется согласно (3.11). Порог ω_0 определим как $\omega_0 = \arg \min_{\omega_0} \sum_{i=1}^N \xi_i(\omega_0)$, где $\xi_i(\omega_0) = \max(0, 1 - y_i(\omega^\top x_i - \omega_0))$. Несложно показать, что решение имеет вид $\omega_0 = \omega^\top x_i - y_i$ для некоторого i , а значит, ω_0 может быть найдено за не более чем $O(N \log N)$ арифметических операций. Однако, как правило, ω_0 удаётся определить гораздо быстрее следующим образом. Без нарушения общности будем считать, что $\eta_i = C - \lambda_i$, $1 \leq i \leq N$. Если для некоторого индекса i выполнено двойное неравенство $0 < \lambda_i < C$, то $\eta_i > 0$. Из теоремы Куна – Таккера следует, что $\xi_i = 0$ и $y_i(\omega^\top x_i - \omega_0) = 1$, а значит, $\omega_0 = \omega^\top x_i - y_i$.

Упражнения

10. Постройте эффективный алгоритм решения задачи $\sum_{i=1}^n \max(0, a_i x + b_i) \rightarrow \min_x$, где a_i и b_i , $1 \leq i \leq n$, – заданные действительные числа.
11. Докажите, что квадратичная функция $f(x) = x^\top A x + b^\top x$ либо достигает своей нижней грани на \mathbb{R}^n , либо не ограничена снизу.
12. Докажите, что для того, чтобы точка $x^* \in X$ была решением задачи выпуклого программирования (3.1), достаточно, чтобы для любого вектора v , удовлетворяющего системе неравенств $v^\top \nabla f_j(x^*) \leq 0$, $j \in I(x^*)$, было верно $v^\top \nabla f_0(x^*) \geq 0$.

Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление* – М.: Наука, 1979. – 432 с.

§4 ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ и $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $J = \{1, 2, \dots, m\}$. Задачей линейного программирования в общей форме называется следующая задача

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_j, & j \in J_1; \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j, & j \in J_2; \\ x_i \geq 0, i \in I; \end{cases} \quad (4.1)$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а $I = I_1 \sqcup I_2$ и $J = J_1 \sqcup J_2$ — некоторые разбиения множеств I и J , соответственно. Очевидно, что задача (4.1) — частный случай задачи выпуклого программирования. Если $J_1 = J$ (а значит, $J_2 = \emptyset$) и $I_1 = I$, то задача (4.1) называется стандартной (или симметричной), если же $J_2 = J$ и $I_1 = I$, то задача (4.1) — канонической (или основной).

Пример 4.1 (Расстояние землекопа). Пусть дано два конечных множества $A = \{a_i\}_{i=1}^m$ и $B = \{b_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{R}^n$ точек. Требуется каким-либо разумным образом измерить расстояние (меру схожести) между этими множествами. Рассмотрим так называемое расстояние землекопа (Earth mover's distance). В каждую точку $a_i \in A$ поместим кучу песка объёма $1/|A|$, а в каждой точке $b_j \in B$ выкопаем яму объёма $1/|B|$ (очевидно, что общий объём песка в точках множества A равен общему объёму выкопанных ям в точках множества B). Будем считать, что стоимость перемещения песка объёма v из точки a_i в точку b_j равна $vd(a_i, b_j)$, где $d(a_i, b_j)$ — расстояние между точками a_i и b_j . Расстояние землекопа между множествами A и B равно минимальной стоимости, за которую можно засыпать ямы в точках множества B песком из точек множества A . Расстояние землекопа может быть найдено решением следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k v_{ij} d(a_i, b_j) \rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^k v_{ij} = \frac{1}{m}, & 1 \leq i \leq m; \\ \sum_{i=1}^m v_{ij} = \frac{1}{k}, & 1 \leq j \leq k; \\ v_{ij} \geq 0, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

Пример 4.2 (Линейная регрессия). Пусть дана обучающая выборка $S = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$. Задача линейной регрессии заключается в том, чтобы найти вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и число b , такие что $y \approx a^T x + b$. Как правило, поиск параметров a и b сводится к решению задачи

$$\sum_{i=1}^N (y_i - a^T x_i - b)^2 \rightarrow \min_{a,b}.$$

Однако, при таком подходе даже единственный выброс может существенно исказить искомые параметры. Для уменьшения влияния выбросов переходят к следующей задаче

$$\sum_{i=1}^N |y_i - a^T x_i - b_i| \rightarrow \min_{a, b},$$

которая, очевидно, равносильна задаче линейного программирования

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \xi_i \rightarrow \min; \\ \xi_i \geq y_i - a^T x_i - b_i \geq -\xi_i, \quad 1 \leq i \leq N; \\ \xi \geq 0. \end{cases}$$

Каждой задаче (4.1) соответствуют так называемая двойственная задача. Мотивировкой введения двойственной задачи являются следующие рассуждения. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ — произвольный допустимый вектор задачи (4.1). Рассмотрим произвольный вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$, такой что $y_j \geq 0$, если $j \in J_1$. Умножим каждое ограничение задачи (4.1) на соответствующую компоненту вектора y и сложим их. В итоге получаем, что

$$\sum_{j=1}^m b_j y_j \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i.$$

Потребуем, чтобы $\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq c_i$ при $i \in I_1$ и $\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = c_i$ при $i \in I_2$. Тогда справедливо неравенство $\sum_{i=1}^n c_i x_i \geq \sum_{j=1}^m b_j y_j$. Другими словами, чем больше величина $\sum_{j=1}^m b_j y_j$, тем точнее оценка снизу оптимального значения целевой функции $c^T x$.

Таким образом, рассмотрим следующую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m b_j y_j \rightarrow \max; \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq c_i, \quad i \in I_1; \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = c_i, \quad i \in I_2; \\ y_j \geq 0, \quad j \in J_1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Задача (4.2) называется двойственной, а задача (4.1) — прямой (или исходной). Сведём воедино правила составления двойственной задачи:

1. Каждому j -му ограничению исходной задачи соответствует переменная y_j двойственной задачи и, наоборот, каждому i -му ограничению двойственной задачи соответствует переменная x_i исходной задачи.

2. Матрица ограничений A заменяется на транспонированную A^T .
3. Свободные члены ограничений одной из задач являются коэффициентами при соответствующих переменных в целевой функции другой задачи. При этом поиск минимума заменяется на поиск максимума и наоборот.
4. В каждой из задач ограничения-неравенства следует записывать со знаком " \geq " при поиске минимума и со знаком " \leq " при поиске максимума.
5. Каждому j -му ограничению-неравенству прямой задачи в двойственной задаче соответствует условие неотрицательности ($y_j \geq 0$), а равенству — переменная y_j без ограничения на знак. Наоборот, неотрицательной переменной $x_i \geq 0$ соответствует в двойственной задаче i -е ограничение-неравенство, а произвольной переменной — равенство.

Нетрудно видеть, что двойственной задачей для задачи (4.2) является задача (4.1). Между решениями задач (4.1) и (4.2) имеется ряд нетривиальных связей, образующих теорию двойственности. Для доказательства некоторых утверждений этой теории нам понадобится лемма Фаркаша. Но сперва установим, что всякий конечно порождённый выпуклый конус в пространстве \mathbb{R}^n является замкнутым множеством.

Опр. 4.1. Подмножество C векторного пространства V называется *выпуклым конусом*, если $\alpha x + \beta y \in C$ для любых неотрицательных чисел α, β и любых векторов $x, y \in C$. Другими словами, выпуклый конус — это подмножество векторного пространства, замкнутое относительно сложения и умножения на неотрицательные числа. Конус C называется *конечно порождённым*, если найдутся такие векторы v_1, v_2, \dots, v_m , что

$$C = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m : \alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

Лемма 4.1. Пусть F и $H \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутые подмножества, такие что $f \perp h$ для любых $f \in F$ и $h \in H$. Тогда множество $F + H \stackrel{\text{def}}{=} \{f + h : f \in F, h \in H\}$ замкнуто.

▷ Пусть $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F$ и $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H$ — две последовательности, такие что $\lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k + h_k) = x$. Так как

$$\|f_m + h_m - (f_k + h_k)\|^2 = \|(f_m - f_k) + (h_m - h_k)\|^2 = \|f_m - f_k\|^2 + \|h_m - h_k\|^2 \rightarrow 0,$$

то $\|f_m - f_k\|^2 \rightarrow 0$ и $\|h_m - h_k\|^2 \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = f \in F \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = h \in H,$$

а значит, $x = f + h \in F + H$. ◁

Лемма 4.2. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ — столбцы матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Тогда конус $C \stackrel{\text{def}}{=} \{Ax : x \in \mathbb{R}_+^m\}$ замкнут.

▷ Докажем замкнутость конуса $C_s \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s : \lambda_i \geq 0\}$ индукцией по s . Очевидно, что $C_1 = \{\lambda_1 a_1 : \lambda_1 \geq 0\}$ — замкнутое множество. Предположим, что мы доказали, что конус C_s замкнут для любых векторов $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что тогда замкнут конус C_{s+1} . Рассмотрим произвольную последовательность $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_{s+1}$,

$$c_k = \lambda_1^k a_1 + \lambda_2^k a_2 + \dots + \lambda_{s+1}^k a_{s+1},$$

такую что $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = c$, и докажем, что $c \in C_{s+1}$. Если все последовательности чисел $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ограничены, то без нарушения общности будем считать, что они сходятся: $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k = \lambda_i$. Следовательно, имеет место равенство

$$c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s+1} a_{s+1} \in C_{s+1}.$$

Рассмотрим случай, когда хотя бы одна из последовательностей чисел $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ неограничена, например, с номером $s+1$. Без нарушения общности будем считать, что $\lambda_{s+1}^k \uparrow +\infty$ и $\lambda_{s+1}^k \geq \lambda_i^k$, $1 \leq i \leq s$. Но тогда последовательности $(\lambda_i^k / \lambda_{s+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ограничены, а значит, без нарушения общности будем считать, что они сходятся: $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k / \lambda_{s+1}^k = \lambda_i$, $1 \leq i \leq s$. Следовательно, $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + a_{s+1} = \mathbf{0}$, т.е.

$$-a_{s+1} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s \in C_s \subset C_{s+1}.$$

Пусть $P: \mathbb{R}^n \rightarrow (a_{s+1})^\perp$ — проекция на ортогональное дополнение к одномерному подпространству, натянутому на вектор a_{s+1} . Тогда

$$PC_{s+1} = \{\lambda_1 P a_1 + \lambda_2 P a_2 + \dots + \lambda_s P a_s : \lambda_i \geq 0\}$$

в силу равенства $P(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s+1} a_{s+1}) = \lambda_1 P a_1 + \lambda_2 P a_2 + \dots + \lambda_s P a_s$. Более того, $PC_{s+1} \subset C_{s+1}$, так как $P a_i = a_i - \frac{(a_i, a_{s+1})}{\|a_{s+1}\|^2} a_{s+1}$. Согласно предположению индукции PC_{s+1} — замкнутое множество. Наконец, так как $C_{s+1} = PC_{s+1} + \mathbb{R} a_{s+1}$, то согласно лемме 4.1 множество C_{s+1} замкнуто. ◁

Лемма 4.3 (Фаркаш). Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Тогда либо $Ax = b$, для некоторого $x \in \mathbb{R}_+^m$, либо найдётся такой вектор $y \in \mathbb{R}^n$, что $y^\top A \leq \mathbf{0}$ и $y^\top b > 0$.

▷ Пусть выполнена первая из альтернатив, т.е. существует вектор $x \in \mathbb{R}_+^m$, такой что $Ax = b$. Предположим, что $y^\top A \leq 0$ для некоторого вектора $y \in \mathbb{R}^n$, тогда $y^\top b = y^\top Ax \leq 0$.

Предположим теперь, что такого $x \in \mathbb{R}_+^m$ не существует. Рассмотрим выпуклый конус $C = \{Ax : x \in \mathbb{R}_+^m\}$, который согласно лемме 4.2 является замкнутым множеством. По предположению $b \notin C$, а значит, точка b строго отделима от C , т.е. существуют ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^n$ и число d , такие что $y^\top b > d > y^\top c$, $c \in C$. Так как $\mathbf{0} \in C$, то $y^\top b > d > 0$. С другой стороны $d \geq y^\top Ax = (A^\top y)^\top x$. Так как компоненты вектора x могут быть сколь угодно большими, то $y^\top A \leq \mathbf{0}$. Таким образом, выполнена вторая альтернатива. ◁

Следствие 4.1. Если векторы $b, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, такие что для каждого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ из неравенств $x^\top a_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$, следует $x^\top b \geq 0$, то найдутся такие числа $\lambda_i \geq 0$, что $b = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$.

Следствие 4.2. Пусть $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$. Если векторы $b, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, такие что для каждого вектора $x \in V^\perp$ из неравенств $x^\top a_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$, следует неравенство $x^\top b \geq 0$, то найдутся такие числа $\lambda_i \geq 0$ и вектор $v \in V$, что $b = v + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$.

▷ Пусть $b', a'_1, a'_2, \dots, a'_m \in V^\perp$ — проекция векторов b, a_1, a_2, \dots, a_m на подпространство V^\perp . Тогда для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ из неравенств $x^\top a'_i \geq 0$ следует $x^\top b' \geq 0$, а значит, найдутся такие числа $\lambda_i \geq 0$, что $b' = \sum_{i=1}^m \lambda_i a'_i$. Возвращаясь к исходным векторам, получаем, что $b = v + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$, где $v \in V$. <

Пример 4.3 (Арбитраж). Предположим, что имеется две биржи, на которых продаются и покупаются товары n различных видов. Торговец хочет заработать, покупая товары на одной бирже и продавая их на второй. В зависимости от конъюнктуры возможны m ситуаций. Через c_{ij} обозначим разницу цен за единицу товара i при наступлении ситуации j (от цены на второй бирже отнимается цена на первой). Произвольный вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ назовём стратегией торговца, где через y_i обозначено количество товара i , которое покупает и продаёт торговец. Доход торговца для стратегии y в ситуации j , очевидно, равен $\sum_{i=1}^n c_{ij} y_i$.

Теорема 4.1 (Де Финетти). Верно ровно одно из следующих утверждений:

1. существует такое распределение $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $p_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^m p_j = 1$, на множестве ситуаций, что математическое ожидание дохода торговца для любого товара равно нулю, т.е. $\sum_{j=1}^m c_{ij} p_j = 0, 1 \leq i \leq n$;
2. существует такая стратегия y , что доход торговца положительный вне зависимости от ситуации, т.е. $\sum_{i=1}^n c_{ij} y_i > 0, 1 \leq j \leq m$.

▷ Рассмотрим вектор $b = (0, 0, \dots, 0, -1)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$ и матрицу размера $(n+1) \times m$

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nm} \\ -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Если какой-либо вектор $p \in \mathbb{R}_+^m$ удовлетворяет системе $Ap = b$, то справедливы равенства $\sum_{j=1}^m c_{ij} p_j = 0, 1 \leq i \leq n$, и $\sum_{j=1}^m -p_j = -1$, т.е. p — искомое распределение. Согласно лемме Фаркаша либо такой вектор p существует, либо для некоторого $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ верно $\tilde{y}^\top A \geq 0$,

$\tilde{y}^T b < 0$. Согласно определению матрицы A и вектора b имеем

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} \tilde{y}_i \geq \tilde{y}_{n+1}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad \text{и} \quad -\tilde{y}_{n+1} < 0.$$

Другими словами, стратегия $y = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)^T$ искомая. \triangleleft

Упражнения

13. Решите следующую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} c^T x \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1; \\ 0 \leq x_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

14. (Гордон) Докажите, что для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ выполнена ровно одна из альтернатив:

(а) существует такой вектор $x \in \mathbb{R}^m$, что $Ax < 0$;

(б) существует такой ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^n$, что $A^T y = 0$ и $y \geq 0$.

15. Пусть $P = (p_{ij})_{i,j=1}^n$ — стохастическая (слева) матрица, т.е. матрица с неотрицательными элементами $p_{ij} \geq 0$ и для всех j от 1 до n выполнено равенство $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$ (другими словами, в каждом столбце сумма стоящих в нём элементов равна 1). Используя лемму Фаркаша, докажите, что существует такой вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$, что $P y = y$ и $\sum_{i=1}^n y_i = 1$.

16. Докажите, что для того чтобы точка $x^* \in X$ была точкой минимума выпуклой дифференцируемой функции f на множестве $X = \{x: a_j^T x \leq b_j\}$ необходимо и достаточно существование таких чисел $y_j \geq 0$, что

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{j \in I(x^*)} y_j a_j.$$

§5 ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Перейдём к формулировке и доказательству основных утверждений теории двойственности линейного программирования.

Теорема 5.1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$ — допустимые векторы задач (4.1) и (4.2), соответственно. Тогда $b^\top y \leq c^\top x$.

▷ Рассмотрим сумму $S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j$. С одной стороны

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i \leq \sum_{i=1}^n c_i x_i = c^\top x,$$

а с другой —

$$S = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right) y_j \geq \sum_{j=1}^m b_j y_j = b^\top y. \quad \triangleleft$$

Следствие 5.1. Если для допустимых векторов x и y задач (4.1) и (4.2), соответственно, верно равенство $c^\top x = b^\top y$, то x и y — решения.

Лемма 5.1. Пусть x и y — допустимые векторы задач (4.1) и (4.2), соответственно, удовлетворяющие условиям дополняющей нежёсткости, т.е.

$$x_i \left(c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) = 0 \text{ при } i \in I_1 \quad \text{и} \quad y_j \left(b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right) = 0 \text{ при } j \in J_1.$$

Тогда $c^\top x = b^\top y$, а значит, x и y — решения соответствующих задач.

▷ Действительно,

$$c^\top x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^n \left(c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j.$$

Аналогично доказывается равенство $b^\top y = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j$. Поэтому, $c^\top x = b^\top y$. \triangleleft

Теорема 5.2. Если существует решение x^* задачи (4.1), то у задачи (4.2) также есть решение y^* , при этом $c^\top x^* = b^\top y^*$.

▷ Пусть $V \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i = 0, j \in J_2\}$. Через $\tilde{I}_1 \subset I_1$ обозначим такое подмножество индексов, что $x_i^* = 0, i \in \tilde{I}_1$, а через $\tilde{J}_1 \subset J_1$ — такое подмножество индексов, что $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^* = b_j, j \in \tilde{J}_1$. Пусть a_1, a_2, \dots, a_m — столбцы матрицы A , а e_1, e_2, \dots, e_n — стандартный базис \mathbb{R}^n . Тогда для произвольного $v \in V$, такого что

$e_i^\top v \geq 0$, $i \in \tilde{I}_1$ и $a_j^\top v \geq 0$, $j \in \tilde{J}_1$, вектор $x^* + tv$ допустимый для задачи (4.1) при всех достаточно малых $t > 0$. Так как x^* — решение задачи, то $c^\top v \geq 0$. Поэтому, согласно следствию 4.2 справедливо равенство

$$c = \sum_{j \in \tilde{J}_1 \sqcup J_2} y_j^* a_j + \sum_{i \in \tilde{I}_1} z_i e_i,$$

где $y_j^* \geq 0$ при $j \in \tilde{J}_1$ и $z_i \geq 0$ при $i \in \tilde{I}_1$. Доопределим $y_j^* = 0$ при $j \in J_1 \setminus \tilde{J}_1$, $z_i = 0$, $i \in I \setminus \tilde{I}_1$ и покажем, что вектор $y^* \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)^\top$ — решение задачи (4.2). Так как $c_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^* + z_i$, $i \in I$, и $y_j^* \geq 0$ при $j \in J_1$, то y^* — допустимый вектор задачи (4.2). Нетрудно видеть, что для векторов x^* и y^* выполнены условия дополняющей нежёсткости: $x_i^*(c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^*) = 0$ при $i \in I_1$ и $y_j^*(b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^*) = 0$ при $j \in J_1$, а значит, y^* — решение задачи (4.2) и $c^\top x^* = b^\top y^*$. \triangleleft

Лемма 5.2. Если векторы x и y — решения, соответственно, задач (4.1) и (4.2), то выполнены условиям дополняющей нежёсткости.

\triangleright Через y^* обозначим решение задачи (4.2), построенное по x в доказательстве теоремы 5.2. Тогда $c^\top x = b^\top y^* = b^\top y$. Следовательно, $c^\top x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j$, а значит,

$$\sum_{i=1}^n \left(c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i = \sum_{i \in I_1} \left(c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i = 0.$$

Так как $c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \geq 0$ и $x_i \geq 0$ при $i \in I_1$, то $x_i(c_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j) = 0$ при $i \in I_1$.

Равенство $y_j(b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i) = 0$ при $j \in J_1$ доказывается аналогично. \triangleleft

Пример 5.1 (Матричные игры). Матричной игрой называют конечную антагонистическую игру. Антагонистическая игра — это игра двух лиц с нулевой суммой, т.е. выигрыш одного игрока равен проигрышу второго. Игра называется конечной, если конечно множество стратегий игроков. Пусть n, m — количества стратегий первого и второго игроков, соответственно. Без нарушения общности будем считать, что $X = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество стратегий первого игрока, а $Y = \{1, 2, \dots, m\}$ — второго. Через a_{ij} обозначим выигрыш первого игрока, если он воспользуется стратегией $i \in X$, а его оппонент — стратегией $j \in Y$. Соответственно, $-a_{ij}$ — выигрыш второго игрока в этой ситуации. Таким образом, матричная игра задаётся матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ выигрышей первого игрока. Далее будем отождествлять игру и её матрицу A . Решением матричной игры в чистых стратегиях называется пара чистых стратегий $(i_0, j_0) \in X \times Y$, которые образуют седловую точку матрицы A : $a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \leq a_{i j_0}$, $i \in X$ и $j \in Y$ (стратегии i_0, j_0 называются оптимальными чистыми стратегиями). Из этого определения, в частности, следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.

Седловая точка матрицы A существует тогда и только тогда, когда нижняя цена игры $\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in X} \min_{j \in Y} a_{ij}$ равна верхней чистой цене игры $\beta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{j \in Y} \max_{i \in X} a_{ij}$ (доказательство этого утверждения практически дословно повторяет доказательство теоремы 3.2). Таким образом, решение матричной игры в чистых стратегиях не всегда существует.

Расширим множество стратегий смешанными. Смешанной стратегией первого игрока называется вектор вероятностей $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^\top$, где $p_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Число p_i — вероятность того, что первый игрок будет использовать стратегию $i \in X$. Аналогично определяется смешанная стратегия $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)^\top$ второго игрока. Множество смешанных стратегий первого игрока образуют стандартный $(n-1)$ -мерный симплекс $S^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$, а множество смешанных стратегий второго игрока — стандартный $(m-1)$ -мерный симплекс S^{m-1} .

Выигрыш первого игрока при фиксированных смешанных стратегиях p и q определяется как математическое ожидание его выигрыша:

$$F(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j = p^\top A q.$$

Соответственно, $-F(p, q)$ — выигрыш второго игрока. Решением матричной игры в смешанных стратегиях называют пару смешанных стратегий $(p^0, q^0) \in S^{n-1} \times S^{m-1}$, которая является седловой точкой функции $F : F(p, q^0) \leq F(p^0, q^0) \leq F(p^0, q)$, $p \in S^{n-1}$ и $q \in S^{m-1}$. Число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} F(p^0, q^0)$ называется ценной матричной игры A . Оказывается, что решение матричной игры в смешанных стратегиях существует всегда. Пусть $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$ — вектор, у которого 1 стоит на i -м месте, а все остальные компоненты равны нулю (размер вектора не фиксируем).

Теорема 5.3 (фон Нейман). *Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ имеют место равенства*

$$v(A) = \max_{p \in S^{n-1}} \min_{1 \leq j \leq m} p^\top A e_j = \min_{q \in S^{m-1}} \max_{1 \leq i \leq n} e_i^\top A q.$$

Для любых $p^0 \in \arg \max_{p \in S^{n-1}} \min_{1 \leq j \leq m} p^\top A e_j$, $q^0 \in \arg \min_{q \in S^{m-1}} \max_{1 \leq i \leq n} e_i^\top A q$ пара (p^0, q^0) является решением в смешанных стратегиях матричной игры A .

▷ Вычисление величин $\max_p \min_j p^\top A e_j$ и $\min_q \max_i e_i^\top A q$ равносильно решению задач

$$\begin{cases} u \rightarrow \max; \\ u - \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i \leq 0, & 1 \leq j \leq m; \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1; \\ p_i \geq 0, & 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} v \rightarrow \min; \\ v - \sum_{i=1}^m a_{ij} q_j \geq 0, & 1 \leq i \leq n; \\ \sum_{j=1}^m q_j = 1; \\ q_j \geq 0, & 1 \leq j \leq m. \end{cases} \quad (5.2)$$

линейного программирования (5.1) и (5.2), соответственно, которые двойственны друг другу, и, как не трудно видеть, имеют решения. Поэтому,

$$\max_p \min_j p^\top A e_j = \min_q \max_i e_i^\top A q.$$

Так как $F(p, q)$ — билинейная функция, то очевидно, выполнены равенства

$$\max_p F(p, q) = \max_i e_i^T A q \quad \text{и} \quad \min_q F(p, q) = \min_j p^T A e_j,$$

а значит, $\max_p \min_q p^T A q = \min_q \max_p p^T A q$. Из доказательства теоремы 3.2, в частности, следует, что (p^0, q^0) — седловая точка функции $F(p, q)$. \triangleleft

Отметим, что некоторая задача может быть сведена к решению матричной игры, хотя в исходной постановке игроки и множества их стратегий явно не заданы. Рассмотрим пример такой задачи.

Пусть компьютерная сеть из n узлов, представлена связным неориентированным графом $G = (V, E)$, каждому ребру которого приписана его длина. В одной из вершин графа G располагается клиент, отправляющий запрос к серверу, который также следует расположить в одной из вершин графа G . Будем считать, что задержка запроса от клиента к серверу равна расстоянию между вершинами, в которых находятся клиент и сервер (расстояние между вершинами u и v графа G определяется, как наименьшая из длин путей с концами u и v). Необходимо расположить сервер так, чтобы задержка была минимальной. Если вершина, в которой находится клиент, заранее известна, то, очевидно, следует расположить сервер в той же вершине. Поэтому далее будем считать, что расположение клиента неизвестно. Чтобы минимизировать задержку в худшем случае сервер следует расположить в центре графа G , т.е. в такой вершине, для которой максимальное расстояние до других вершин минимально.

Предположим теперь, что клиент располагается в вершинах согласно некоторому закону распределения и наша цель определить смешанную стратегию расположения сервера так, чтобы минимизировать математическое ожидание задержки запроса. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — матрица попарных расстояний между вершинами графа G . Если известен вектор y вероятностей, согласно которым выбирается вершина для клиента, то оптимальный вектор x вероятностей для расположения сервера выберем как решение задачи $\min_{x \in S^{n-1}} y^T A x$. В частности, сервер можно разместить в любой вершине v , такой что $v \in \arg \min_{1 \leq i \leq n} y^T A e_i$. Наконец, если вектор y неизвестен, то определим x как оптимальную стратегию второго игрока в матричной игре с матрицей A .

Лемма 5.3. *Если целевая функция $c^T x$ задачи (5.3) ограничена снизу на*

$$\begin{cases} c^T x \rightarrow \min; \\ A^T x \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \quad (5.3)$$

непустом множестве допустимых векторов $X = \{x \in \mathbb{R}^n : A^T x \leq b\}$, то задача (5.3) имеет решение.

▷ Пусть a_1, a_2, \dots, a_m — столбцы матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Через S обозначим семейство подмножеств множества $\{1, 2, \dots, m\}$, такое что для любого $J \in S$ верно:

1. $J = I(x)$ для некоторого допустимого вектора $x \in X$;
2. вектор c представим в виде линейной комбинации векторов $a_j, j \in J$.

То, что семейство S не пусто показано ниже. Выберем какое-либо подмножество $J \in S$ и соответствующий допустимый вектор $x \in X$. Тогда

$$c^T x = \sum_{j \in J} \alpha_j a_j^T x = \sum_{j \in J} \alpha_j b_j.$$

Фиксируя для каждого $J \in S$ единственный набор коэффициентов $(\alpha_j)_{j \in J}$ из линейного разложения, рассмотрим конечное множество $U = \{ \sum_{j \in J} \alpha_j b_j : J \in S \}$.

Докажем, что $\min_{x \in X} c^T x = \min U$. Пусть $x \in X$ — какой-либо допустимый вектор. Пусть $V_x = \text{span} \{a_i : i \in I(x)\}$. Если $c \in V_x$, то $c = \sum_{i \in I(x)} \alpha_i a_i$, а значит, $I(x) \in S$ и $c^T x \in U$. Если же $c \notin V_x$, то выберем такой вектор $v \in V_x^\perp$, что $c^T v < 0$. Так как функция $c^T x$ ограничена снизу на множестве X , то существуют $t > 0$ и индекс $i \notin I(x)$, такие что $I(x) \cup \{i\} \subset I(x + tv)$. При этом $c^T x > c^T(x + tv)$. Заменяя x на $x + tv$, повторим приведённые рассуждения. Через не более m шагов мы придём к такому допустимому вектору x , что $I(x) \in S$. \triangleleft

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение

Лемма 5.4. *Если целевая функция задачи (4.1) ограничена снизу на непустом множестве допустимых векторов, то задача (4.1) имеет решение.*

Следствие 5.2. *Если множества допустимых векторов задач (4.1) и (4.2) не пусты, то эти задачи имеют решения.*

Упражнения

17. Матричная игра называется симметричной, если её матрица кососимметрическая. Докажите, что значение симметричной игры равно нулю. Кроме того, если p — оптимальная стратегия для первого игрока, то $q = p$ — оптимальная стратегия для второго игрока.