§1 ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть $\mathbb{A}^n$ — n-мерное аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем некоторую точку $O \in \mathbb{A}^n$ в качестве начала координат. Далее будет отождествлять произвольную точку $P \in \mathbb{A}^n$ с её радиусом вектором $\overrightarrow{OP}$, а само пространство $\mathbb{A}^n$ — с вещественным n-мерным векторным пространством $\mathbb{R}^n$. Для обозначения векторов и точек будем использовать строчные буквы, а для обозначения множеств — заглавные.

Опр. 1.1. *Точка* $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_m p_m \in \mathbb{R}^n$, *где* $p_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, *называется выпуклой комбинацией точек* p_1, p_2, $\ldots$, p_m.

Опр. 1.2. *Для произвольных точек* x, $y \in \mathbb{R}^n$ *множество*

$$[x, y] \overset{\text{def}}{=} \{\alpha x + (1-\alpha) y \colon \alpha \in [0,1]\},$$

состоящее из всех возможных выпуклых комбинаций точек x *и* y, *называется отрезком* (*с концами* x, y).

Опр. 1.3. *Множество* $X \subset \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для произвольных двух точек* x, $y \in X$ *оно содержит весь отрезок* $[x, y]$.

Отметим, что согласно определению 1.3 пустое множество $\varnothing$ и произвольное одноточечное множество $\{p\}$, $p \in \mathbb{R}^n$, являются выпуклыми.

Лемма 1.1. *Множество* X *является выпуклым, если и только если* X *содержит любую выпуклую комбинацию своих точек.*

$\triangleright$ Если множество X содержит любую выпуклую комбинацию своих точек, то, в частности, для любых двух точек x, $y \in X$ имеем $[x, y] \subset X$, а значит, X — выпуклое множество.

Обратное утверждение доказывается индукцией по количеству m точек p_1, p_2, $\ldots$, $p_m \in X$, входящих в выпуклую комбинацию $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_m p_m$. База индукции $m = 2$ следует из определения 1.3. Предположим теперь, что множество X содержит всевозможные выпуклые комбинации своих точек размера $m \geq 2$. Докажем, что X также содержит любую выпуклую комбинацию размера $m+1$. Действительно, пусть p_1, p_2, $\ldots$, $p_{m+1} \in X$ и числа α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_{m+1} \geq 0$, такие что $\sum\limits_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1$. Без нарушения общности будем считать, что $\alpha_1 < 1$ (иначе это выпуклая комбинация, состоящая из одной точки). Тогда

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_{m+1} p_{m+1} = \alpha_1 p_1 + (1-\alpha_1) q,$$

где $q = \dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_1} p_2 + \dfrac{\alpha_3}{1-\alpha_1} p_3 + \ldots + \dfrac{\alpha_{m+1}}{1-\alpha_1} p_{m+1}$. Так как $\sum\limits_{i=2}^{m+1} \dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_1} = 1$, то согласно предположению индукции $q \in X$, а значит, $p \in X$. $\triangleleft$

Рассмотрим операции над выпуклыми множествами, которые сохраняют выпуклость.

Лемма 1.2. *Пусть I — некоторое множество индексов произвольной мощности, а $\{X_i \subset \mathbb{R}^n : i \in I\}$ — семейство выпуклых множеств. Тогда множество $X = \bigcap\limits_{i \in I} X_i$ является выпуклым.*

$\triangleright$ Действительно, пусть x, $y \in X$. Тогда x, $y \in X_i$ для всех $i \in I$, а значит, $[x, y] \subset X_i$. Таким образом, $[x, y] \subset X$, т.е. множество X является выпуклым. $\triangleleft$

Выпуклой оболочкой $\operatorname{Conv} X$ произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется наименьшее (по вложению) выпуклое множество, содержащее X. Из леммы 1.2 следует, в частности, что $\operatorname{Conv} X$ — это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих X.

Лемма 1.3. *Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — аффинное преобразование, т.е. преобразование, действующее по правилу $F\colon x \mapsto Ax + b$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Тогда для произвольных выпуклых множеств $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ множества $F(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{Fx\colon x \in X\} \subset \mathbb{R}^m$ и $F^{-1}(Y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x\colon Fx \in Y\} \subset \mathbb{R}^n$ также являются выпуклыми.*

$\triangleright$ Пусть $y_1 = Fx_1$, $y_2 = Fx_2$ и $\alpha \in [0, 1]$. Тогда утверждение леммы следует из равенства $\alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 = \alpha F x_1 + (1 - \alpha) F x_2 = F(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2)$, которое выполнено для любого аффинного преобразования F. $\triangleleft$

Лемма 1.4. *Пусть $\{X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}\colon 1 \le i \le m\}$ — семейство выпуклых множеств. Тогда прямое произведение*

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x_1, x_2, \ldots, x_m)\colon x_i \in X_i, 1 \le i \le m\}$$

является выпуклым множеством в пространстве $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_m}$.

$\triangleright$ Пусть x_i, $\widetilde{x}_i \in X_i$, $1 \le i \le m$, и $\alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$\begin{multline} \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m) + (1 - \alpha)(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots \widetilde{x}_m) = \\ = (\alpha x_1 + (1 - \alpha)\widetilde{x}_1, \ldots, \alpha x_m + (1 - \alpha)\widetilde{x}_m) \in X_1 \times X_2 \times \ldots X_m, \quad (1.1) \end{multline}$$

так как $\alpha x_i + (1 - \alpha)\widetilde{x}_i \in X_i$, $1 \le i \le m$. $\triangleleft$

Композиция операций, сохраняющих выпуклость, также, очевидно, сохраняет выпуклость. Следовательно, для произвольных выпуклых множеств X_1, X_2, …, $X_m \in \mathbb{R}^n$ и вещественных чисел α_1, α_2, …, $\alpha_m \in \mathbb{R}$ множество

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\colon x_i \in X_i, 1 \le i \le m\}$$

является выпуклым. Действительно, эту линейную комбинацию множеств можно представить как композицию прямого произведения и аффинного преобразования. Отметим, что линейную композицию вида $A + B$ называют суммой Минковского множеств A, $B \subset \mathbb{R}^n$.

Лемма 1.5. *Замыкание $\overline{X}$ выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ выпукло.*

$\triangleright$ Выберем произвольные точки a, $b \in \overline{X}$ и число $\alpha \in [0, 1]$. Необходимо доказать, что $c \stackrel{\text{def}}{=} \alpha a + (1-\alpha) b \in \overline{X}$. Существуют такие две последовательности точек $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, что $a_k \to a$ и $b_k \to b$. Тогда последовательность точек $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, где $c_k = \alpha a_k + (1-\alpha) b_k$, сходится к c, а значит, $c \in \overline{X}$. $\triangleleft$

Опр. 1.4. *Множества X, $Y \subset \mathbb{R}^n$ называются отделимыми, если существуют ненулевой вектор c и число d, такие что $c^\mathsf{T} x \geq d \geq c^\mathsf{T} y$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Если известно, что неравенства строгие $c^\mathsf{T} x > d > c^\mathsf{T} y$, то говорят, что множества X и Y строго отделимы. Гиперплоскость, заданная уравнением $c^\mathsf{T} x = d$, называется разделяющей гиперплоскостью.*

Отметим, что согласно определению, вектор c из уравнения гиперплоскости $c^\mathsf{T} x = d$ ненулевой.

Теорема 1.1. *Если непересекающиеся множества X и $Y \subset \mathbb{R}^n$ выпуклы, замкнуты и одно из них ограничено, то они строго отделимы.*

$\triangleright$ Пусть X — ограниченное множество и $d_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{x_1, x_2 \in X} \|x_1 - x_2\|$ — его диаметр. Докажем, что найдутся точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, для которых $\|x_0 - y_0\| = \inf\limits_{x \in X, y \in Y} \|x - y\|$. Действительно, выберем произвольные две точки $x_1 \in X$ и $y_1 \in Y$. Пусть $\widetilde{Y} = Y \cap B_r(x_1)$, где $B_r(x_1)$ — шар радиуса $r = d_X + \|x_1 - y_1\|$ с центром в x_1. Множества X и $\widetilde{Y}$ являются компактными, а функция f, действующая по правилу $f\colon (x, y) \in X \times \widetilde{Y} \mapsto \|x - y\|$, — непрерывной. Так как декартово произведение компактных множеств компактно, то функция f достигает свое минимальное значение в некоторых точках $x_0 \in X$ и $y_0 \in \widetilde{Y}$. Если $y \in Y \setminus \widetilde{Y}$ и $x \in X$, то $\|x - y\| \geq \|x_1 - y\| - \|x_1 - x\| \geq d_X + \|x_1 - y_1\| - d_X = \|x_1 - y_1\|$, а значит, точки x_0, y_0 искомые.

Пусть $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n\colon c^\mathsf{T} x = d\}$ — гиперплоскость, проходящая через середину отрезка $[x_0, y_0]$, перпендикулярно ему. Выберем $c = x_0 - y_0$ и $d = (\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2)/2$. Докажем, что множества X и Y не пересекаются с указанной гиперплоскостью, а значит, лежат в разных открытых полупространствах относительно её. Предположим противное, а именно, что некоторая точка $y \in Y$ принадлежит плоскости Π. Треугольник с вершинами x_0, y и y_0 является равнобедренным с основанием $[x_0, y_0]$ и острым углом при вершине y, так как $\|x_0 - y_0\| \leq \|y - x_0\|$. По условию Y — выпуклое множество, а значит, $[y, y_0] \subset Y$. Пусть $\widetilde{y}$ — основание перпендикуляра, опущенного из вершины x_0 на сторону $[y, y_0]$. Тогда $\widetilde{y} \in [y, y_0]$ и $\|x_0 - \widetilde{y}\| < \|x_0 - y_0\|$. Последнее неравенство противоречит выбору точек $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$. Таким образом, $c^\mathsf{T} x > d > c^\mathsf{T} y$. $\triangleleft$

Опр. 1.5. *Гиперплоскость $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n\colon c^\mathsf{T} x = d\}$ называется опорной к множеству X в точке x_0, если $x_0 \in \Pi \cap \overline{X}$ и для всех $x \in X$ одновременно выполняется одно из неравенств: $c^\mathsf{T} x \geq d$ или $c^\mathsf{T} x \leq d$.*

Напомним, что точка x называется граничной для множества X, если любая её окрестность содержит как точки, принадлежащие данному множеству, так и не принадлежащие ему.

Лемма 1.6. *Выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ в каждой граничной точке имеет опорную гиперплоскость.*

$\triangleright$ Пусть x_0 — граничная точка множества X. Так как X — выпуклое множество, то x_0 — граничная точка замыкания $\overline{X}$. Следовательно, найдётся такая последовательность точек $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{X}$, что $y_k \to x_0$. Согласно, теореме 1.1 для множеств $\{y_k\}$ и $\overline{X}$ (выпуклость $\overline{X}$ следует из леммы 1.5) найдётся такая гиперплоскость, заданная уравнением $c_k^\mathsf{T} x = d_k$, что $c_k^\mathsf{T} x > d_k > c_k^\mathsf{T} y_k$, $x \in \overline{X}$. Без нарушения общности будем считать, что $\|c_k\| = 1$. Тогда, в силу построения, последовательность $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ является ограниченной. Наконец, без нарушения общности будем считать, что $c_k \to c$ и $d_k \to d$. Тогда $c^\mathsf{T} x \geq d$, $x \in X$, и $c^\mathsf{T} x_0 = d$. $\triangleleft$

Теорема 1.2. *Произвольное выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ можно отделить от точки y, ему не принадлежащей.*

$\triangleright$ Действительно, если $y \notin \overline{X}$, то доказательство следует из теоремы 1.1, иначе — из леммы 1.6. $\triangleleft$

Теорема 1.3. *Множества X и $Y \subset \mathbb{R}^n$ отделимы тогда и только тогда, когда множество $X - Y$ и точка $\{\mathbf{0}\}$ отделимы.*

$\triangleright$ Пусть множества X и Y отделимы. Тогда существуют такие $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $d \in \mathbb{R}$, что $c^\mathsf{T} y \leq d \leq c^\mathsf{T} x$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Следовательно, $c^\mathsf{T}(x - y) \geq 0$, а значит, гиперплоскость $\Pi = \{x \colon c^\mathsf{T} x = 0\}$ отделяет множество $X - Y$ от нуля.

Предположим теперь, что множества $X - Y$ и $\{\mathbf{0}\}$ отделимы. Тогда существуют такие $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $d \in \mathbb{R}$, что $0 \leq d \leq c^\mathsf{T} z$ для всех $z \in X - Y$. Следовательно, $c^\mathsf{T} y \leq c^\mathsf{T} x$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, а значит, $\sup\limits_{y\in Y} c^\mathsf{T} y \leq \inf\limits_{x\in X} c^\mathsf{T} x$. Выберем такое число $\widetilde{d} \in \mathbb{R}$, что $\sup\limits_{y\in Y} c^\mathsf{T} y \leq \widetilde{d} \leq \inf\limits_{x\in X} c^\mathsf{T} x$. Тогда гиперплоскость $\Pi = \{x \colon c^\mathsf{T} x = \widetilde{d}\}$ отделяет множества X и Y. $\triangleleft$

Следствие 1.1. *Пусть X, Y — непустые выпуклые непересекающиеся множества. Тогда X и Y отделимы.*

Через $\operatorname{Int} X$ обозначим внутренность множества $X \subset \mathbb{R}^n$, т.е. множество всех внутренних точек X. Не сложно видеть, что, если X — выпуклое множество, то $\operatorname{Int} X$ также выпукло.

Следствие 1.2. *Пусть X, Y — выпуклые множества с непустой внутренностью, при этом $\operatorname{Int} X \cap \operatorname{Int} Y = \varnothing$. Тогда X и Y отделимы.*

Упражнения

1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — непустое множество. Докажите, что любую точку p, принадлежащую выпуклой оболочке множества X, можно представить в виде выпуклой линейной комбинации не более чем $n+1$ точек множества X.
2. Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы точки $p_1, p_2, \ldots, p_s$, где $s \geq n+2$. Докажите, что точки можно разбить на два непересекающихся множества так, что выпуклые оболочки этих двух множеств будут иметь непустое пересечение.

3. (Теорема Хелли) Пусть I — произвольное семейство индексов и $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, из которых хотя бы одно компактно. Докажите, что если любое подсемейство из $n+1$ множеств имеет непустое пересечение, то и всё семейство имеет непустое пересечение.