

## §4 ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$  и  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $J = \{1, 2, \dots, m\}$ . Задачей линейного программирования в общей форме называется следующая задача

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_j, & j \in J_1; \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j, & j \in J_2; \\ x_i \geq 0, i \in I; \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , а  $I = I_1 \sqcup I_2$  и  $J = J_1 \sqcup J_2$  — некоторые разбиения множеств  $I$  и  $J$ , соответственно. Очевидно, что задача (4.1) — частный случай задачи выпуклого программирования. Если  $J_1 = J$  (а значит,  $J_2 = \emptyset$ ) и  $I_1 = I$ , то задача (4.1) называется стандартной (или симметричной), если же  $J_2 = J$  и  $I_1 = I$ , то задача (4.1) — канонической (или основной).

**Пример 4.1** (Расстояние землекопа). Пусть дано два конечных множества  $A = \{a_i\}_{i=1}^m$  и  $B = \{b_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{R}^n$  точек. Требуется каким-либо разумным образом измерить расстояние (меру схожести) между этими множествами. Рассмотрим так называемое расстояние землекопа (Earth mover's distance). В каждую точку  $a_i \in A$  поместим кучу песка объёма  $1/|A|$ , а в каждой точке  $b_j \in B$  выкопаем яму объёма  $1/|B|$  (очевидно, что общий объём песка в точках множества  $A$  равен общему объёму выкопанных ям в точках множества  $B$ ). Будем считать, что стоимость перемещения песка объёма  $v$  из точки  $a_i$  в точку  $b_j$  равна  $vd(a_i, b_j)$ , где  $d(a_i, b_j)$  — расстояние между точками  $a_i$  и  $b_j$ . Расстояние землекопа между множествами  $A$  и  $B$  равно минимальной стоимости, за которую можно засыпать ямы в точках множества  $B$  песком из точек множества  $A$ . Расстояние землекопа может быть найдено решением следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k v_{ij} d(a_i, b_j) \rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^k v_{ij} = \frac{1}{m}, & 1 \leq i \leq m; \\ \sum_{i=1}^m v_{ij} = \frac{1}{k}, & 1 \leq j \leq k; \\ v_{ij} \geq 0, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

**Пример 4.2** (Линейная регрессия). Пусть дана обучающая выборка  $S = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ . Задача линейной регрессии заключается в том, чтобы найти вектор  $a \in \mathbb{R}^n$  и число  $b$ , такие что  $y \approx a^T x + b$ . Как правило, поиск параметров  $a$  и  $b$  сводится к решению задачи

$$\sum_{i=1}^N (y_i - a^T x_i - b)^2 \rightarrow \min_{a,b}.$$

Однако, при таком подходе даже единственный выброс может существенно исказить искомые параметры. Для уменьшения влияния выбросов переходят к следующей задаче

$$\sum_{i=1}^N |y_i - a^T x_i - b_i| \rightarrow \min_{a, b},$$

которая, очевидно, равносильна задаче линейного программирования

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \xi_i \rightarrow \min; \\ \xi_i \geq y_i - a^T x_i - b_i \geq -\xi_i, \quad 1 \leq i \leq N; \\ \xi \geq 0. \end{cases}$$

Каждой задаче (4.1) соответствуют так называемая двойственная задача. Мотивировкой введения двойственной задачи являются следующие рассуждения. Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$  — произвольный допустимый вектор задачи (4.1). Рассмотрим произвольный вектор  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ , такой что  $y_j \geq 0$ , если  $j \in J_1$ . Умножим каждое ограничение задачи (4.1) на соответствующую компоненту вектора  $y$  и сложим их. В итоге получаем, что

$$\sum_{j=1}^m b_j y_j \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i.$$

Потребуем, чтобы  $\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq c_i$  при  $i \in I_1$  и  $\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = c_i$  при  $i \in I_2$ . Тогда справедливо неравенство  $\sum_{i=1}^n c_i x_i \geq \sum_{j=1}^m b_j y_j$ . Другими словами, чем больше величина  $\sum_{j=1}^m b_j y_j$ , тем точнее оценка снизу оптимального значения целевой функции  $c^T x$ .

Таким образом, рассмотрим следующую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m b_j y_j \rightarrow \max; \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq c_i, \quad i \in I_1; \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = c_i, \quad i \in I_2; \\ y_j \geq 0, \quad j \in J_1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Задача (4.2) называется двойственной, а задача (4.1) — прямой (или исходной). Сведём воедино правила составления двойственной задачи:

1. Каждому  $j$ -му ограничению исходной задачи соответствует переменная  $y_j$  двойственной задачи и, наоборот, каждому  $i$ -му ограничению двойственной задачи соответствует переменная  $x_i$  исходной задачи.

2. Матрица ограничений  $A$  заменяется на транспонированную  $A^T$ .
3. Свободные члены ограничений одной из задач являются коэффициентами при соответствующих переменных в целевой функции другой задачи. При этом поиск минимума заменяется на поиск максимума и наоборот.
4. В каждой из задач ограничения-неравенства следует записывать со знаком " $\geq$ " при поиске минимума и со знаком " $\leq$ " при поиске максимума.
5. Каждому  $j$ -му ограничению-неравенству прямой задачи в двойственной задаче соответствует условие неотрицательности ( $y_j \geq 0$ ), а равенству — переменная  $y_j$  без ограничения на знак. Наоборот, неотрицательной переменной  $x_i \geq 0$  соответствует в двойственной задаче  $i$ -е ограничение-неравенство, а произвольной переменной — равенство.

Нетрудно видеть, что двойственной задачей для задачи (4.2) является задача (4.1). Между решениями задач (4.1) и (4.2) имеется ряд нетривиальных связей, образующих теорию двойственности. Для доказательства некоторых утверждений этой теории нам понадобится лемма Фаркаша. Но сперва установим, что всякий конечно порождённый выпуклый конус в пространстве  $\mathbb{R}^n$  является замкнутым множеством.

**Опр. 4.1.** Подмножество  $C$  векторного пространства  $V$  называется *выпуклым конусом*, если  $\alpha x + \beta y \in C$  для любых неотрицательных чисел  $\alpha, \beta$  и любых векторов  $x, y \in C$ . Другими словами, выпуклый конус — это подмножество векторного пространства, замкнутое относительно сложения и умножения на неотрицательные числа. Конус  $C$  называется *конечно порождённым*, если найдутся такие векторы  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , что

$$C = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m : \alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

**Лемма 4.1.** Пусть  $F$  и  $H \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутые подмножества, такие что  $f \perp h$  для любых  $f \in F$  и  $h \in H$ . Тогда множество  $F + H \stackrel{\text{def}}{=} \{f + h : f \in F, h \in H\}$  замкнуто.

▷ Пусть  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F$  и  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H$  — две последовательности, такие что  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k + h_k) = x$ . Так как

$$\|f_m + h_m - (f_k + h_k)\|^2 = \|(f_m - f_k) + (h_m - h_k)\|^2 = \|f_m - f_k\|^2 + \|h_m - h_k\|^2 \rightarrow 0,$$

то  $\|f_m - f_k\|^2 \rightarrow 0$  и  $\|h_m - h_k\|^2 \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = f \in F \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = h \in H,$$

а значит,  $x = f + h \in F + H$ . ◁

**Лемма 4.2.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  — столбцы матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Тогда конус  $C \stackrel{\text{def}}{=} \{Ax : x \in \mathbb{R}_+^m\}$  замкнут.

▷ Докажем замкнутость конуса  $C_s \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s : \lambda_i \geq 0\}$  индукцией по  $s$ . Очевидно, что  $C_1 = \{\lambda_1 a_1 : \lambda_1 \geq 0\}$  — замкнутое множество. Предположим, что мы доказали, что конус  $C_s$  замкнут для любых векторов  $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}^n$ . Покажем, что тогда замкнут конус  $C_{s+1}$ . Рассмотрим произвольную последовательность  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_{s+1}$ ,

$$c_k = \lambda_1^k a_1 + \lambda_2^k a_2 + \dots + \lambda_{s+1}^k a_{s+1},$$

такую что  $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = c$ , и докажем, что  $c \in C_{s+1}$ . Если все последовательности чисел  $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ограничены, то без нарушения общности будем считать, что они сходятся:  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k = \lambda_i$ . Следовательно, имеет место равенство

$$c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s+1} a_{s+1} \in C_{s+1}.$$

Рассмотрим случай, когда хотя бы одна из последовательностей чисел  $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$  неограничена, например, с номером  $s+1$ . Без нарушения общности будем считать, что  $\lambda_{s+1}^k \uparrow +\infty$  и  $\lambda_{s+1}^k \geq \lambda_i^k$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Но тогда последовательности  $(\lambda_i^k / \lambda_{s+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ограничены, а значит, без нарушения общности будем считать, что они сходятся:  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k / \lambda_{s+1}^k = \lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Следовательно,  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + a_{s+1} = \mathbf{0}$ , т.е.

$$-a_{s+1} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s \in C_s \subset C_{s+1}.$$

Пусть  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow (a_{s+1})^\perp$  — проекция на ортогональное дополнение к одномерному подпространству, натянутому на вектор  $a_{s+1}$ . Тогда

$$PC_{s+1} = \{\lambda_1 P a_1 + \lambda_2 P a_2 + \dots + \lambda_s P a_s : \lambda_i \geq 0\}$$

в силу равенства  $P(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s+1} a_{s+1}) = \lambda_1 P a_1 + \lambda_2 P a_2 + \dots + \lambda_s P a_s$ . Более того,  $PC_{s+1} \subset C_{s+1}$ , так как  $P a_i = a_i - \frac{(a_i, a_{s+1})}{\|a_{s+1}\|^2} a_{s+1}$ . Согласно предположению индукции  $PC_{s+1}$  — замкнутое множество. Наконец, так как  $C_{s+1} = PC_{s+1} + \mathbb{R} a_{s+1}$ , то согласно лемме 4.1 множество  $C_{s+1}$  замкнуто. ◁

**Лемма 4.3** (Фаркаш). Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  и  $b \in \mathbb{R}^n$ . Тогда либо  $Ax = b$ , для некоторого  $x \in \mathbb{R}_+^m$ , либо найдётся такой вектор  $y \in \mathbb{R}^n$ , что  $y^\top A \leq \mathbf{0}$  и  $y^\top b > 0$ .

▷ Пусть выполнена первая из альтернатив, т.е. существует вектор  $x \in \mathbb{R}_+^m$ , такой что  $Ax = b$ . Предположим, что  $y^\top A \leq 0$  для некоторого вектора  $y \in \mathbb{R}^n$ , тогда  $y^\top b = y^\top Ax \leq 0$ .

Предположим теперь, что такого  $x \in \mathbb{R}_+^m$  не существует. Рассмотрим выпуклый конус  $C = \{Ax : x \in \mathbb{R}_+^m\}$ , который согласно лемме 4.2 является замкнутым множеством. По предположению  $b \notin C$ , а значит, точка  $b$  строго отделима от  $C$ , т.е. существуют ненулевой вектор  $y \in \mathbb{R}^n$  и число  $d$ , такие что  $y^\top b > d > y^\top c$ ,  $c \in C$ . Так как  $\mathbf{0} \in C$ , то  $y^\top b > d > 0$ . С другой стороны  $d \geq y^\top Ax = (A^\top y)^\top x$ . Так как компоненты вектора  $x$  могут быть сколь угодно большими, то  $y^\top A \leq \mathbf{0}$ . Таким образом, выполнена вторая альтернатива. ◁

**Следствие 4.1.** Если векторы  $b, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ , такие что для каждого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  из неравенств  $x^\top a_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$ , следует  $x^\top b \geq 0$ , то найдутся такие числа  $\lambda_i \geq 0$ , что  $b = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ .

**Следствие 4.2.** Пусть  $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ . Если векторы  $b, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ , такие что для каждого вектора  $x \in V^\perp$  из неравенств  $x^\top a_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$ , следует неравенство  $x^\top b \geq 0$ , то найдутся такие числа  $\lambda_i \geq 0$  и вектор  $v \in V$ , что  $b = v + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ .

▷ Пусть  $b', a'_1, a'_2, \dots, a'_m \in V^\perp$  — проекция векторов  $b, a_1, a_2, \dots, a_m$  на подпространство  $V^\perp$ . Тогда для любого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  из неравенств  $x^\top a'_i \geq 0$  следует  $x^\top b' \geq 0$ , а значит, найдутся такие числа  $\lambda_i \geq 0$ , что  $b' = \sum_{i=1}^m \lambda_i a'_i$ . Возвращаясь к исходным векторам, получаем, что  $b = v + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ , где  $v \in V$ . <

**Пример 4.3** (Арбитраж). Предположим, что имеется две биржи, на которых продаются и покупаются товары  $n$  различных видов. Торговец хочет заработать, покупая товары на одной бирже и продавая их на второй. В зависимости от конъюнктуры возможны  $m$  ситуаций. Через  $c_{ij}$  обозначим разницу цен за единицу товара  $i$  при наступлении ситуации  $j$  (от цены на второй бирже отнимается цена на первой). Произвольный вектор  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  назовём стратегией торговца, где через  $y_i$  обозначено количество товара  $i$ , которое покупает и продаёт торговец. Доход торговца для стратегии  $y$  в ситуации  $j$ , очевидно, равен  $\sum_{i=1}^n c_{ij} y_i$ .

**Теорема 4.1** (Де Финетти). Верно ровно одно из следующих утверждений:

1. существует такое распределение  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ ,  $p_j \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^m p_j = 1$ , на множестве ситуаций, что математическое ожидание дохода торговца для любого товара равно нулю, т.е.  $\sum_{j=1}^m c_{ij} p_j = 0, 1 \leq i \leq n$ ;
2. существует такая стратегия  $y$ , что доход торговца положительный вне зависимости от ситуации, т.е.  $\sum_{i=1}^n c_{ij} y_i > 0, 1 \leq j \leq m$ .

▷ Рассмотрим вектор  $b = (0, 0, \dots, 0, -1)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$  и матрицу размера  $(n+1) \times m$

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nm} \\ -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Если какой-либо вектор  $p \in \mathbb{R}_+^m$  удовлетворяет системе  $Ap = b$ , то справедливы равенства  $\sum_{j=1}^m c_{ij} p_j = 0, 1 \leq i \leq n$ , и  $\sum_{j=1}^m -p_j = -1$ , т.е.  $p$  — искомое распределение. Согласно лемме Фаркаша либо такой вектор  $p$  существует, либо для некоторого  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$  верно  $\tilde{y}^\top A \geq 0$ ,

$\tilde{y}^T b < 0$ . Согласно определению матрицы  $A$  и вектора  $b$  имеем

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} \tilde{y}_i \geq \tilde{y}_{n+1}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad \text{и} \quad -\tilde{y}_{n+1} < 0.$$

Другими словами, стратегия  $y = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)^T$  искомая.  $\triangleleft$

### Упражнения

13. Решите следующую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} c^T x \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1; \\ 0 \leq x_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

14. (Гордон) Докажите, что для произвольной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  выполнена ровно одна из альтернатив:

(а) существует такой вектор  $x \in \mathbb{R}^m$ , что  $Ax < \mathbf{0}$ ;

(б) существует такой ненулевой вектор  $y \in \mathbb{R}^n$ , что  $A^T y = \mathbf{0}$  и  $y \geq \mathbf{0}$ .

15. Пусть  $P = (p_{ij})_{i,j=1}^n$  — стохастическая (слева) матрица, т.е. матрица с неотрицательными элементами  $p_{ij} \geq 0$  и для всех  $j$  от 1 до  $n$  выполнено равенство  $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$  (другими словами, в каждом столбце сумма стоящих в нём элементов равна 1). Используя лемму Фаркаша, докажите, что существует такой вектор  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$ , что  $Py = y$  и  $\sum_{i=1}^n y_i = 1$ .

16. Докажите, что для того чтобы точка  $x^* \in X$  была точкой минимума выпуклой дифференцируемой функции  $f$  на множестве  $X = \{x: a_j^T x \leq b_j\}$  необходимо и достаточно существование таких чисел  $y_j \geq 0$ , что

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{j \in I(x^*)} y_j a_j.$$