[3] М. И. Фрейдлин, Функционал действия для одного класса случайных процессов, Теория вероят. и ее примен., XVII, 3 (1972), 536—541.
[4] А. Д. Вентцель, Теоремы, касающиеся функционала действия для гауссовских случайных функций, Теория вероят. и ее примен., XVII, 3 (1972), 542—545.
[5] А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, О малых возмущениях динамических систем, Успехи матем. наук, 25, 1 (1970), 3—55.
[6] И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, Вариационное исчисление, М., Физматгиз, 1961.

PROBABILITIES OF LARGE DEVIATIONS FOR RANDOMLY DISTURBED DYNAMIC SYSTEMS AND STOCHASTIC STABILITY

M. I. FREĬDLIN (MOSCOW)

(*Summary*)

Let x_t^ε be a solution of the differential equation $\dot{x}^\varepsilon = b(x^\varepsilon, \varepsilon\zeta)$, $x_0 = x \in R^r$. Here ζ_t is a Gaussian stochastic process, ε is a small parameter. Process x_t^ε may be thought of as a result of small stochastic perturbations of the system $\dot{x} = b(x, 0)$. Let O be a stable equilibrium point of the system, $O \in D$ (a domain in R^r) and $\tau_D^\varepsilon = \inf\{t\colon x_t^\varepsilon \notin D\}$.

In the paper, the main term of $\ln \mathbf{P}\{\tau_D^\varepsilon < T\}$ as $\varepsilon \to 0$ is calculated. This term characterizes stability of point O under perturbations $\varepsilon\zeta_t$ over time interval $[0, T]$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ПО ВАССЕРШТЕЙНУ МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА ПРЯМОЙ

С. С. ВАЛЛАНДЕР

В работах Вассерштейна [1] и Добрушина [2] была введена характеристика близости двух вероятностных мер, названная Добрушиным расстоянием Вассерштейна.

Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X. Расстояние Вассерштейна $R(P, Q)$ между вероятностными мерами P и Q на $(X, \mathfrak{B})$ определяется следующим образом:

$$R(P, Q) = \inf \mathrm{E}\rho(\xi, \eta), \tag{1}$$

где inf берется по всевозможным парам случайных величин ξ и η с распределениями P и Q соответственно.

В работе [2] показано, что для тех распределений, для которых правая часть (1) конечна, R является метрикой. В этой же работе доказано, что если метрика ρ дискретна, то R совпадает с расстоянием по вариации:

$$R(P, Q) = \sup_{B \in \mathfrak{B}} |P(B) - Q(B)|.$$

Настоящая заметка посвящена вычислению расстояния Вассерштейна в случае, когда $X = R^1$ с обычной евклидовой метрикой.

Теорема.

$$R(P, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)|\, dx, \tag{2}$$

где F и G — функции распределения (ф. р.) распределений P и Q соответственно. Формула (2) *справедлива независимо от конечности или бесконечности входящих в нее величин. В формуле* (1) *можно заменить* inf *на* min.

Доказательство. Предположим, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)-G(x)|\,dx<\infty$. Докажем, что левая часть (2) не превосходит правой. Для этого построим случайные величины ξ и η с ф. р. F и G соответственно, такие, что

$$\mathbf{E}\,|\xi-\eta| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)-G(x)|\,dx.$$

Лемма. *Пусть ζ — случайная величина, равномерно распределенная на интервале* $[0, 1]$, *F — произвольная ф.р. Определим функцию $F^{-1}(y)$ на интервале* $[0, 1]$ *следующим образом:*

а) *если для $y\in[0, 1]$ существует число x, такое, что $F(x)=y$, полагаем $F^{-1}(y) = x$ (если такое x не единственно, берем любое из этих чисел);*

б) *если же таких x нет, полагаем*

$$F^{-1}(y) = \inf_{z>y} F^{-1}(z),$$

где inf *берется по тем $z>y$, для которых $F^{-1}(z)$ определено в* а).

Тогда случайная величина $F^{-1}(\zeta)$ имеет ф. р. F.

Утверждение этой леммы хорошо известно.

Положим теперь $\xi=F^{-1}(\zeta)$, $\eta=G^{-1}(\zeta)$. Тогда

$$\mathbf{E}\,|\xi-\eta| = \int\limits_{0}^{1} |F^{-1}(y)-G^{-1}(y)|\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)-G(x)|\,dx.$$

Последнее равенство следует из очевидных геометрических соображений.

Предположим теперь, что $R(P, Q)<\infty$ и ξ и η — случайные величины с распределениями P и Q соответственно, такие, что $\mathbf{E}\,|\xi-\eta|<\infty$. Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$\mathbf{E}\,|\xi-\eta| \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)-G(x)|\,dx.$$

Определим случайные величины $\alpha=\max(\xi-\eta, 0)$, $\beta=\max(\eta-\xi, 0)$. Тогда $\mathbf{E}|\xi-\eta| = \mathbf{E}\alpha+\mathbf{E}\beta$. Далее, $\mathbf{E}\beta=\mathbf{E}\,[\mathbf{E}\,[\beta|\,\xi=x]]$, при этом $\mathbf{E}\,[\beta|\,\xi=x]<\infty$ для почти всех x по мере P. Для этих x

$$\mathbf{E}\,[\beta\,|\,\xi=x] = \int\limits_{+0}^{\infty} zP\{\beta\in dz\,|\,\xi=x\} = \int\limits_{+0}^{\infty} P\{\beta\geqslant z\,|\,\xi=x\}\,dz.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\beta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\{\xi\in dx\} \int\limits_{+0}^{\infty} P\{\eta-\xi\geqslant z\,|\,\xi=x\}\,dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\{\xi\in dx\}\times$$

$$\times\int\limits_{+0}^{\infty} P\{\eta\geqslant x+z\,|\,\xi=x\}\,dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\{\xi\in dx\}\int\limits_{x+0}^{\infty} P\{\eta\geqslant y\,|\,\xi=x\}\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\{y>x\}} P\{\xi\in dx, \eta\geqslant y\}\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\{\xi<y, \eta\geqslant y\}\,dy.$$

(мы сделали замену переменной $z = y - x$). Отсюда получаем:

$$\mathbf{E}\,|\xi - \eta| = \int_{-\infty}^{\infty} [P\{\xi < y, \eta \geqslant y\} + P\{\eta < y, \xi \geqslant y\}]\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [P\{\xi < y\} + P\{\eta < y\} - 2P\{\xi < y, \eta < y\}]\,dy \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\infty}^{\infty} [F(y) + G(y) - 2\min(F(y), G(y))]\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |F(y) - G(y)|\,dy,$$

и тем самым теорема доказана.

Замечание 1. Теорема мгновенно обобщается на случай $X = R^n$ с l^1-метрикой.

Замечание 2. Из доказанной теоремы легко выводятся явные формулы для расстояния Вассерштейна между мерами на любом конечном метрическом пространстве. К сожалению, эти формулы очень громоздки и зависят от метрики сложным образом (см. формулу (3)). Приведем формулу для $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Пусть точки пространства X занумерованы таким образом, что

$$\rho(x_1, x_3) + \rho(x_2, x_4) \geqslant \max[\rho(x_1, x_2) + \rho(x_3, x_4), \rho(x_1, x_4) + \rho(x_2, x_3)],$$

а $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ — две вероятностные меры на X. Тогда

$$\begin{aligned} 2R(P, Q) &= \rho(x_1, x_2)[|p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| - |p_1 + p_2 - q_1 - q_2|] + \rho(x_1, x_4)[|p_1 - \\ &- q_1| + |p_4 - q_4| - |p_1 + p_4 - q_1 - q_4|] + \rho(x_2, x_3)[|p_2 - q_2| + |p_3 - q_3| - \\ &- |p_2 + p_3 - q_2 - q_3|] + \rho(x_3, x_4)[|p_3 - q_3| + |p_4 - q_4| - |p_3 + p_4 - q_3 - q_4|] + \\ &+ \rho(x_1, x_3)[|p_1 + p_2 - q_1 - q_2| + |p_1 + p_4 - q_1 - q_4| - |p_2 - q_2| - |p_4 - q_4|] + \\ &+ \rho(x_2, x_4)[|p_1 + p_2 - q_1 - q_2| + |p_1 + p_4 - q_1 - q_4| - |p_1 - q_1| - |p_3 - q_3|]. \end{aligned} \tag{3}$$

В случае $p_4 = q_4 = 0$ эта формула переходит в формулу, приведенную в [3]. Для получения (3) нужно изометрически вложить X в пространство R^3 с l^1-метрикой и применить доказанную теорему.

Замечание 3. Добрушин ([2]) доказал неравенство

$$\pi(R, Q) \leqslant [R(P, Q)]^{1/2},$$

где π — расстояние Прохорова (см. [4]). Отсюда и из доказанной теоремы получаем следующую оценку расстояния Прохорова между распределениями в R^1:

$$\pi(P, Q) \leqslant \left[\int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)|\,dx\right]^{1/2}.$$

Об оценках расстояния Прохорова см. также [5].

Замечание 4. В работах [1], [2], [3] расстояние Вассерштейна используется в некоторых задачах, связанных со слабой зависимостью случайных величин, образующих случайное поле.

Автор благодарит И. А. Ибрагимова за постановку задачи и внимание к работе, а также Ю. А. Давыдова за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
5.4.72

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Н. Вассерштейн, Марковские процессы на счетном произведении пространств, описывающие большие системы автоматов, Проблемы передачи информации, 5, 3 (1969), 64—73.

[2] Р. Л. Добрушин, Задание системы случайных величин при помощи условных распределений, Теория вероят. и ее примен., XV, 3 (1970), 469—497.
[3] С. С. Валландер, Замечание к работам Р. Л. Добрушина и Г. Кестена, Теория вероят. и ее примен., XVIII, 2 (1973), 392—395.
[4] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., I, 2 (1956), 177—238.
[5] R. M. Dubley, Distances of Probability Measures and Random Variables, Ann. Math. Statist., 39, 5 (1968), 1563—1572.

CALCULATION OF THE WASSERSTEIN DISTANCE BETWEEN PROBABILITY DISTRIBUTIONS ON THE LINE

S. S. VALLANDER (LENINGRAD)

(*Summary*)

We prove that the Wasserstein distance between probability distributions on the line coincides with the L^1-distance between their distribution functions.

О ТОЧНОМ ВЫРАЖЕНИИ УРОВНЯ ЗНАЧИМОСТИ УСЕЧЕННОГО ОДНОСТОРОННЕГО КРИТЕРИЯ КОЛМОГОРОВА

В. А. ЕПАНЕЧНИКОВ

1. **Введение.** Пусть в результате n независимых наблюдений над случайной величиной ζ, имеющей непрерывное распределение $\mathbf{P}\,[\zeta < x] = F\,(x)$, получены n значений элементов выборки. Обозначим их после упорядочения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

Определим эмпирическую функцию распределения: $S_n\,(x) = 0$ при $x < x_1$, $S_n\,(x) = i/n$ при $x_i \leqslant x < x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $S_n\,(x) = 1$ при $x \geqslant x_n$; будем интересоваться распределением величины максимального уклонения Δ_n эмпирической функции распределения $S_n\,(x)$ от функции $F\,(x)$ в области $\theta_1 \leqslant F\,(x) \leqslant \theta_2$ $(0 \leqslant \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 1)$:

$$\Delta_n(\theta_1,\ \theta_2) = \max_{\theta_1 \leqslant F(x) \leqslant \theta_2} [F\,(x) - S_n\,(x)]. \tag{1}$$

Ниже получено точное выражение распределения случайной величины $\Delta_n\,(\theta_1, \theta_2)$, которое оказывается достаточно простым при небольших объемах выборок n.

2. **Вычисление распределения** $\Delta_n\,(\theta_1, \theta_2)$. Если случайная величина ζ обладает непрерывной функцией распределения $F\,(x)$, то вероятность $\beta_n\,(\varepsilon, \theta_1, \theta_2) = \mathbf{P}\,\{\Delta_n\,(\theta_1, \theta_2) \geqslant \varepsilon\}$ может быть записана в виде

$$\beta_n(\varepsilon,\ \theta_1,\ \theta_2) = 1 - n!\ \int\cdots\int_{G(\varepsilon,\ \theta_1,\ \theta_2)} dx_1\,dx_2\cdots dx_n, \tag{2}$$

где n-мерная область интегрирования $G\,(\varepsilon, \theta_1, \theta_2)$ задается условиями: $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1$, $x_i \leqslant \theta_1$, $x_p \leqslant \varepsilon + (p-1)/n$ $(i < p \leqslant k)$, $x_{k+1} \leqslant 1$, а целочисленные значения i и k определяются из условий: $n\,(\theta_1 - \varepsilon) < i \leqslant 1 + n\,(\theta_1 - \varepsilon)$, $n\,(\theta_2 -$