q & Q

数学について話す会@9/22, 2018

nw@math_phys

Agenda

1. Introduction
    - モチベーションとか
2. Physics++
    - 物理学の言葉：場の量子論
3. ようこそ q の世界へ
    - 無限と無限が握手する世界

Notation

以下、$q \in \mathbb{C}$で、$|q| < 1$とする。

- q**-Pochhammer symbol :** $(x;q)_n := \prod_{i=0}^{n-1}(1-xq^i)$
  - **特に今回は**$(x;q)_\infty$**を用いる。**
- q**-number :** $[n]_q := \frac{q^{n/2}-q^{-n/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}$ **for** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ **and** $[0]_q := 1$
  - q**-解析で一般にも用いられる記法と異なる事に注意**
- q**-factorial（階乗）:** $[n]_q! := \prod_{i=0}^{n} [i]_q$ **for** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- q**-binomial（二項係数）:** $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$
- **character（**A_{N-1}**型指標）:** $\chi_{(n_1,\ldots,n_N)}(a) := \frac{\det_{1\leq i,j\leq N}\left(a_i^{n_j+N-j}\right)}{\det_{1\leq i,j\leq N}\left(a_i^{N-j}\right)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[a_1,\ldots,a_N]$

  where $a := (a_1, a_2, \ldots, a_N),\ \ \prod_{i=1}^{N} a_i = 1,\ \ n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_N, n_i \in \mathbb{Z}$

Introduction

モチベーションとか

qとQ, 数学と物理学

❓ タイトルのqとQって? 🤔

- q : 数学における変形パラメータ(非可換、"量子化")・モジュラー変数
  - 分野:Kac-Moody代数や量子群の表現論・結び目理論・組み合わせ論
- Q : 物理学における超対称性電荷・(場の)量子論
  - 分野:場の量子論(CFT, TQFT, SQFT)・超弦理論

❓ 物理学視点が数学にとってなぜ有益なの? 😺

- 物理学でときどき起こること:
  - 同じ対象を別のフレームワーク(理論)で記述可能
- その結果、数学へもたらされるもの:
  - 式から理論に至る様々なレベルで示唆される、異なる対象間の非自明な関係性

もちろん、数学的に面白い問題やセットアップの提供といった、これ以外の関係性や、物理学の発展に数学が貢献するといった、逆の関係性もある 👬

物理学における非自明な対応の例

「同じ対象を別のフレームワーク(理論)で記述可能」の具体例👽

- 電磁双対性＆Montonen-Olive-Langlands双対性
  - 電場・クォークの理論と磁場・モノポールの理論の等価性
- Kramers-Wannier双対性
  - Ising模型とループ気体モデルの等価性(または高温展開と低温展開の間の関係）
- 正準量子化と経路積分量子化
  - 演算子とその表現による定式化とバンドルの切断上の積分による定式化の等価性
- boson-fermion対応
  - 2次元系における、ボゾンの自由度とフェルミオンの自由度の間の対応
- 場の理論・弦理論対応
  - M-QCD(ブレーン構成)、CYコンパクト化構成、プローブブレーン構成、AdS/CFT対応
- (2次元)ミラー対称性
  - 異なるCalabi-Yau多様体をターゲットを持つ2つの2D SCFTの等価性

これらは全て物理の"命題"であり、数学的命題ではない！
しかしながら非自明な数学的事実や予想を導く事がある
（もちろん物理学の方が恩恵を受ける事も多い）

数学的帰結の分類と例

では物理学における様々な"命題"は、数学の言葉に翻訳した際にどのように定式化されるのだろうか？その性質を勝手に大別してみると...

- 恒等式：今回見る例も含め、多くはこれ
  - 分配関数(物理量)間の等式...
- 解や代数の構成
  - 可解模型からのYang-Baxter方程式の解、結び目の不変量...
- 演算子や代数の作用・表現の構成
  - 多様体不変量に付随する重み付き和の保型性、インスタントンモジュライの同変コホモロジーへのW代数の作用...
- 数学的対象間の写像
  - ホモロジカルミラー対称性における量子幾何学に関する圏同値
- 数学的に非自明なセットアップの提供
  - Hitchin系...

必ずしも先に物理学で発見されたとは限らないが(特殊な場合が数学において先に知られていた、という事はよくある)、何らかの新しい視点を提供しているのもまた事実である

物理的解釈可能な恒等式の例

boson-fermion対応から**Jacobiの三重積恒等式**が導かれる:

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n q^{\frac{n^2}{2}} = (-q^{\frac{1}{2}}x;q)_\infty(-q^{\frac{1}{2}}x^{-1};q)_\infty$$

これは**無限和**と**無限積**が関係しているという衝撃的な式である ‼️

そして、より複雑な恒等式(※一般化ではない)が次に述べる物理学の主張から現れる事を以降見ていく

ℹ️ Remark

- 左辺が2次元bosonの分配関数("n"はspining mode)、右辺が2つの2次元fermion系の分配関数
- 歴史的には、boson-fermion対応から導かれた恒等式ではなく、その150年近く前から知られていた
- "有限"バージョンはVandermonde行列式と差積間の恒等式に対応するが、これは$\mathfrak{su}(n)$代数のWeyl指標公式に付随するものと見なせる
  - これを無限次元(affine Lie代数$\tilde{A}_1$)に拡張したものが、上の恒等式とも言える
  - 一般のaffine Lie代数に対しては、Macdonald恒等式という名前がついている

4次元-2次元対応(class S/CFT対応)

焦点を当てる物理学的主張[Gadde-Rastelli-Razamat-Yan '11]:

『2次元-G対称q変形-位相的Yang-Mills理論のn点相関関数』と『4次元$\mathcal{N}=2$超共形対称性+高々G^nフレーバー対称性を持つ理論の超共形指標の特殊化』が一致

❓ 😶 ❓ 😅 ❓ 😐 ❓ 😕 ❓ 😞 ❓ 👽 ❓ 😴 ❓ 😩 ❓

以降、これを"なるべく"数学に近い言葉で述べたい 🚄 🚄 🚄

ℹ️ **Remark**

- この主張は、元々Alday-Gaiotto-Tachikawa関係式と呼ばれているものの変種であり、これらを統一したものを「4次元-2次元対応」あるいは「class S/CFT対応」(※勝手な造語)とここでは呼んでいる
- 実はこれ以外にも4次元-2次元対応と呼ぶべき物理学的主張は複数存在し、ややこしい事にお互いに関係しあっている

Physics++

物理学の言葉:場の量子論

物理学の言葉:場の量子論

- **位相的場の量子論(TQFT)**
- 超共形場理論(SCFT)

2次元位相的Yang-Mills理論の定義

- 2次元位相的Yang-Mills理論
  - 2次元位相的場の量子論の一例
    - 2次元コボルディズム圏からベクトル空間の圏への(対称モノイダル)関手
  - 以下、G をコンパクトLie群、$\hat{G}$をその有限次元既約表現のなす同値類とする
  - S^1に対し、G上の共役関数のなす$\mathbb{C}$上のベクトル空間$\mathcal{H}(S^1)$を割り当て
    - これを状態空間と呼ぶ
  - 直交和 $\sqcup_{i=1}^{n} S^1$に対し、$\mathcal{H}(S^1)^{\otimes n}$を割り当て(対称かつモノイダル)
  - 空集合については、$\mathcal{H}(\phi) = \mathbb{C}$を割り当て
  - n個のS^1を境界に持つRiemann面Cに対して、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(S^1)^{\otimes n}, \mathbb{C})$の元$Z_C$を割り当て
    - 1次元の閉多様体はS^1のみだけなので1点に潰してもよく、以後n点つきRiemann面と同一視し、この多重線形写像をn点相関関数と呼ぶ
    - 特に0点付き相関関数は分配関数と呼ばれる

状態空間

Cの境界成分S^1にGの元U(ホロノミー)が付随しているとする。この時、ある基点(S^1上の1点)にもGの元V(gauge変換)が住んでおり、ホロノミーUと$V^{-1}UV$を同一視している。すなわちGの随伴作用(内部自己同形、共役作用)のもとで不変なG上の関数全体が$\mathcal{H}(S^1)$である。

Peter-Weylの定理から完備化された状態空間 $\mathcal{H}(S^1)$は$\hat{G}$の指標を正規直交基底とするHilbert空間となる。すなわち

$$\mathcal{H}(S^1) \ni \psi(U) = \sum_{R \in \hat{G}} c_R \chi_R(U).$$

と展開される。ここで$\hat{G}$はGの既約表現の集合(同値類)である。

Remark

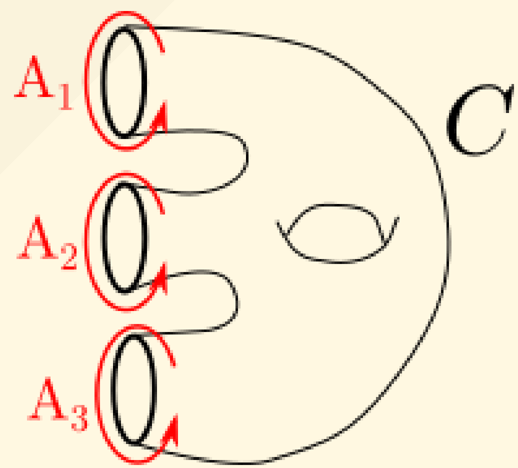
- 内積はHaar測度により定義されるG上の積分で与えられる。
- 量子力学の言葉では、ホロノミー$[U]$が位置、表現Rが運動量に対応

相関関数

2次元-G対称-位相的Yang-Mills理論のn点相関関数Z_Cは

$$\sum_{R\in\hat{G}} \frac{\prod_{i=1}^{n}\chi_R(A_i)}{(\dim R)^{2g_C-2+n}} \in \mathbb{Z}[[\{A_{i,a}\}_{i=1,\dots,n}^{a=1,\dots,N}]]^{(\mathcal{S}_N)^n} \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{H}^{\otimes n},\mathbb{C})$$

で与えられる。ここでg_CはCの種数、$A_i \in G$は i 番目のS^1に付随したホロノミー。



2次元q変形位相的Yang-Mills理論

これまではGとしてコンパクトLie群を考えていたが、コンパクト(行列)量子群G_qに置き換える事ができる。

この時、n点相関関数は次式で与えられる[Buffnoir-Roche '94]:

$$\sum_{R\in\hat{G}} \frac{\prod_{i=1}^{n}\chi_R(A_i)}{(\dim_{\mathbf{q}} R)^{2g_C-2+n}} \in \mathbb{Z}[q^{1/2}]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\left[\{A_{i,a}\}_{i=1,\dots,n}^{a=1,\dots,N}\right]^{(\mathcal{S}_N)^n}$$

すなわち表現の次元$\dim R$を量子次元$\dim_q R$に置き換えただけである。
また$A_i\in\mathbb{T}\subset G$に選ぶことが可能である。

ℹ️ **Remark:**

- より正しくは、指標を量子トレースに置き換えたものになる
- 各S^1は孤立しているので、量子群の要素としても可換であり、対称性は保たれる。

物理学の言葉:場の量子論

- 位相的場の量子論(TQFT)
- **超共形場理論(SCFT)**

超Lie代数超ショートコース

超Li代数の定義･記法について簡単に確認する

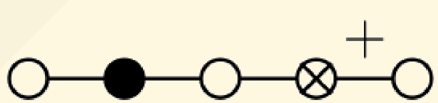
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$次数つきベクトル空間：$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$
  - 次数を保つ積構造として次の超交換子をもつ：
    - $[X_{\bar{0}} + X_{\bar{1}}, Y_{\bar{0}} + Y_{\bar{1}}\} := [X_{\bar{0}}, Y_{\bar{0}}] + [X_{\bar{0}}, Y_{\bar{1}}] + [X_{\bar{1}}, Y_{\bar{0}}] + \{X_{\bar{1}}, Y_{\bar{1}}\}$
    - ここで$[X, Y] = -[Y, X], \{X, Y\} = \{Y, X\}$を満たす
  - 超交換子は超Jacobi恒等式を満たす
- 超行列表示
  - $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix} = X_{\bar{0}} + X_{\bar{1}}$
  - 超トレース：$\mathrm{Str}[X] := \mathrm{Tr}[A] - \mathrm{Tr}[D]$
  - 自然に誘導される行列積演算を用いて、$[X, Y] := XY - YX$ かつ $\{X, Y\} := XY + YX$ と定義して良い
  - 特に$A \in \mathfrak{su}(p, q)$, $D \in \mathfrak{su}(n)$ ($p + q \neq n$)の時、$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p, q|n)$とおく

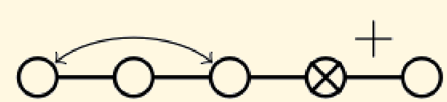
4次元$\mathcal{N}=2$超共形対称性

- 4次元$\mathcal{N}=2$超共形場理論
  - 出発点としては通常Minkowski空間 $\mathbb{R}^{1,3}$上で考える
  - 系の超共形対称性$\mathfrak{su}(2,2|2)$あるいは超Lie群が"理論"に作用
    - 共形対称性 $\mathfrak{su}(2,2)\simeq\mathfrak{so}(4,2)$ が $\mathbb{R}^{1,3}\hookrightarrow\mathbb{R}^{4,2}$ へ作用
    - $\mathfrak{su}(2)$はR-対称性と呼ばれ、twistと呼ばれる操作が定義するために重要な対称性である

Remark

- 正確にはWick回転と呼ばれる操作で、$\mathbb{R}^{1,3}$から$\mathbb{R}^4\simeq\mathbb{C}^2$上に"写して"考察するため、対称性は$\mathfrak{su}^*(4|2)$とでも書くべきものになる

$su(2,2|2)$ 

$su^*(4|2)$ 

超共形対称性の"指標":超共形指数

この理論は数学的に定義できていないが、考察したい物理量は数学的に定義可能な量に落ちる事がしばしばある。ここでは特に、**超共形指数**と呼ばれる量を考える。
これは大雑把に言うと、超Lie代数(より正確には以下で述べる系の対称性)の特殊な表現に付随する(超トレースで定義される)指標である。

- 系の全対称性 $\mathfrak{s} = \mathfrak{su}(2,2|2) \oplus \mathfrak{f}$ あるいはその超Lie群
  - (単純)超Lie代数$\mathfrak{su}(2,2|2)$ (超共形対称性)にコンパクトな簡約Lie代数 $\mathfrak{f}$ (フレーバー対称性)を直和したもの
  - $\mathfrak{su}(2,2|2) \supset \mathfrak{su}(2,2) \oplus \mathfrak{u}(2) \supset \mathfrak{u}(1)^{\oplus 5}$が成り立ち、ウェイト空間は$5$次元であるが、物理的に興味あるのは$3$次元分のみである

Schur指数

- Schur指数
  - 詳細は説明しないが、さらにウェイト空間内のある1次元方向へ射影し、対応する"極大トーラス"の元をqとおく
    - この時の超共形指数を**Schur指数**と呼ぶ
  - $\mathfrak{f}$ の指標は通常のLie代数の指標そのもの
  - Schur指数は、$\mathfrak{f}$ の指標をqで重み付けして和を取った級数となる
    - qの指数は正の半整数($\frac{1}{2}\mathbb{Z}$)である事が知られている

ℹ Remark

- 超共形指数が計算可能なのはLagrangianで記述される系(=自由場でかける)のみ
- qの指数が負の数や有理数になる場合もあるが、今回は対象外

4次元-2次元再掲(まとめ)

- 登場人物:
  - 2次元-G対称q変形-位相的Yang-Mills理論のn点相関関数
    - コンパクト行列量子群G_q上の"共役な"関数のなすベクトル空間$\mathcal{H}$に対し、2次元のn点付きRiemann面に対して与えられる$\mathrm{Hom}(\mathcal{H}^{\otimes n}, \mathbb{C}[[q]])$の元
  - 4次元$\mathcal{N}=2$超共形対称性+高々G^nフレーバー対称性を持つ理論の超共形指標の特殊化
    - 超Lie代数$\mathfrak{su}(2,2|2)\oplus\mathfrak{f}$ (ただし$\mathfrak{f}\subset\mathfrak{g}^{\oplus n}$)の指標の特殊化で、簡約Lie代数 $\mathfrak{f}$ の指標を $q^{1/2}$で重み付けしたもので与えられる
- この主張は、次の2つのデータが与えられると定まる事に注意:
  - 装飾点つきRiemann面C (装飾データの詳細は省略)
  - コンパクト simply-laced 単純Lie代数$\mathfrak{g}$ (A, D, E型)

ようこそ q の世界へ

無限と無限が握手する世界

"最も簡単な"4次元-2次元対応の具体例

データ:3点球面, $A_1 = \mathfrak{su}(2)$

- 2次元 q-変形位相的Yang-Mills理論
  - ゲージ対称性：$G = SU(2)$
  - 球面上3点相関関数：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_{(n,0)}(a)\chi_{(n,0)}(b)\chi_{(n,0)}(c)}{[n+1]_q}$
    - a, b, cは各点(S^1)周りのホロノミー(の固有値)に対応する
    - 一般の閉Riemann面に置き換えると、4次元側の対称性やその表現などが変わる
- 4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論
  - 対称性 $\mathfrak{s} = \mathfrak{su}(2,2|2) \oplus \mathfrak{su}(2)^{\oplus 3}$または$F = (SU(2) \times SU(2) \times SU(2))/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
  - 実際は(半)ハイパー多重項のなす自由場理論
  - Schur指数：$\exp\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{n/2}(a^n + a^{-n})(b^n + b^{-n})(c^n + c^{-n})}{1 - q^n}\right]$
    - a, b, cは$\mathfrak{su}(2)^{\oplus 3} \supset u(1)^3$のLie群に対応する

"最も簡単な"恒等式

さて、4次元-2次元対応の結果、具体的に得られる恒等式は以下で与えられる:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_{(n,0)}(a)\chi_{(n,0)}(b)\chi_{(n,0)}(c)}{[n+1]_q} = \frac{(q;q)_\infty^3 \prod_{x=a,b,c} (qx^2;q)_\infty (qx^{-2};q)_\infty}{(q^2;q)_\infty \prod_{\alpha,\beta,\gamma=\pm} (q^{1/2} a^\alpha b^\beta c^\gamma;q)_\infty}$$

ここでも(左辺)=**無限和**、(右辺)=**無限積**、の構造である。

Remark

- 歴史的にはこの恒等式の右辺から左辺が導かれ、対応する位相的場の量子論が同定された。が、現在では"物理的に導出可能"なので発見の歴史的順序は気にしない事にする。
- Schur指数はq-Pochhammer記号を用いて書き換えた。また恒等式を得る際に、overallの補正項をかけている。

展開してみよう

q^5まで両辺を展開した結果は以下である。ここで$\chi_{[n]} := \chi_{(n,0)}$

$$
\begin{aligned}
&1+\\
&q^{1/2}(\chi_{[1]}(c)\chi_{[1]}(a)\chi_{[1]}(b))\\
&q^{1}(\chi_{[2]}(c)\chi_{[2]}(a)\chi_{[2]}(b)+\\
&q^{3/2}((-1)\chi_{[1]}(c)\chi_{[1]}(a)\chi_{[1]}(b)+\chi_{[3]}(c)\chi_{[3]}(a)\chi_{[3]}(b))\\
&q^{2}((-1)\chi_{[2]}(c)\chi_{[2]}(a)\chi_{[2]}(b)+\chi_{[4]}(c)\chi_{[4]}(a)\chi_{[4]}(b))\\
&q^{5/2}(\chi_{[1]}(c)\chi_{[1]}(a)\chi_{[1]}(b)+(-1)\chi_{[3]}(c)\chi_{[3]}(a)\chi_{[3]}(b)+\chi_{[5]}(c)\chi_{[5]}(a)\chi_{[5]}(b))\\
&q^{3}((-1)\chi_{[4]}(c)\chi_{[4]}(a)\chi_{[4]}(b)+\chi_{[6]}(c)\chi_{[6]}(a)\chi_{[6]}(b))\\
&q^{7/2}((-1)\chi_{[1]}(c)\chi_{[1]}(a)\chi_{[1]}(b)+(-1)\chi_{[5]}(c)\chi_{[5]}(a)\chi_{[5]}(b)+\chi_{[7]}(c)\chi_{[7]}(a)\chi_{[7]}(b))\\
&q^{4}(\chi_{[2]}(c)\chi_{[2]}(a)\chi_{[2]}(b)+(-1)\chi_{[6]}(c)\chi_{[6]}(a)\chi_{[6]}(b)+\chi_{[8]}(c)\chi_{[8]}(a)\chi_{[8]}(b))\\
&q^{9/2}(\chi_{[1]}(c)\chi_{[1]}(a)\chi_{[1]}(b)+(-1)\chi_{[7]}(c)\chi_{[7]}(a)\chi_{[7]}(b)+\chi_{[9]}(c)\chi_{[9]}(a)\chi_{[9]}(b))\\
&q^{5}((-1)\chi_{[2]}(c)\chi_{[2]}(a)\chi_{[2]}(b)+(-1)\chi_{[8]}(c)\chi_{[8]}(a)\chi_{[8]}(b)+\chi_{[10]}(c)\chi_{[10]}(a)\chi_{[10]}(b))
\end{aligned}
$$

負レベルKac-Moody代数との関係

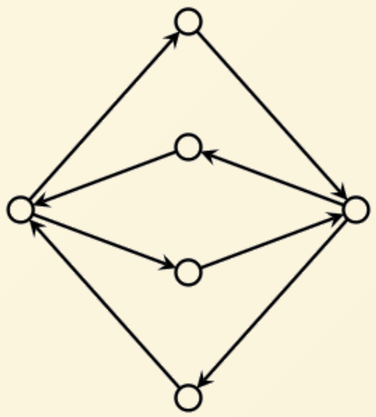
今回は説明を省くが、4次元$\mathcal{N}=2$超共形場理論から頂点代数への写像が知られている。特に、$\mathfrak{g}=A_1$, 4点球面の場合は$\hat{\mathfrak{so}}(8)_{-2}$が得られる。この時の2次元$q$変形Yang-Mills理論の$4$点相関関数は、$\hat{\mathfrak{so}}(8)_{-2}$の"真空表現"の指標で与えられる[Beem et al '13]:

$$\frac{(q^2;q)_\infty^2}{(q;q)_\infty^4 \prod_{x=a,b,c,d}(qx;q)_\infty(qx^{-1};q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi_{(n,0)}(a)\chi_{(n,0)}(b)\chi_{(n,0)}(c)\chi_{(n,0)}(d)}{[n+1]_q^2}=\chi_{[-20000]}^{\hat{\mathfrak{so}}(8)_{-2}}(f)$$

ℹ️ **Remark:**

- $\hat{\mathfrak{so}}(8)_{-2}$の指標は、$\mathfrak{so}(8)$の指標を$q$で重み付けしたものである
- 真空表現は許容表現であるので、モジュラー不変性との関係が期待されている

Kontsevich-Soibelman演算子との関係



左のquiver図形から構成される非可換代数(Kontsevich-Soibeilman演算子)を用いて、"量子モノドロミー"を計算してトレースを取るとSchur指数が計算できる事が知られている[Cordova-Gaiotto-Shao '16]

具体的には幾らかの計算の後、下式のように表せる:

$$(q;q)_\infty^2 \sum_{\vec{v}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{24}} \sum_{C\vec{v}=\vec{0}} \frac{q^{\frac{1}{2}|v|_1+\vec{v}^T A\vec{v}}}{\prod_{i=1}^{24}(q;q)_{v_i}} f^{Fv}$$

ここでAは各成分が$\frac{1}{4}\mathbb{Z}$に値を持つ 24×24 対称行列、Cは各成分が$0,\pm 1$に値を取る 2×24 行列、Fは各成分が$\frac{1}{4}\mathbb{Z}$に値を持つ 4×24 行列。

結び目とq

以下、私が発見した(と思っている)恒等式をちょっとだけ紹介

⚠️ ただし結び目は陽に出てきません

その1 : q-number間の恒等式

q-二項係数 : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q := \dfrac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$

を用いて、以下の恒等式が成り立つ:

$$\sum_{p=0}^{K}(-1)^p \prod_{i=1}^{K-1}[p+b_i]_q \begin{pmatrix} K \\ p \end{pmatrix}_q = 0$$

where $K \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $b_{i=1,2,\ldots,K-1} \in \mathbb{Z}$.

ℹ️ **Remark**

- $q = 1$の時は、二項定理の微分を用いて証明可能
- 一般的な証明があるかは不明

より具体的に

- $K=2$ の時
  - $[b+1]_q[2]_q=[b]_q+[b+2]_q$
    - これは $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ の表現の既約分解 $V_{b/2}\otimes V_{1/2}\simeq V_{\frac{b-1}{2}}\oplus V_{\frac{b+1}{2}}$ から従う量子次元の公式に他ならない
- $K=3$ の時
  - $[b_1]_q[b_2]_q-[3]_q[b_1+1]_q[b_2+1]_q+[3]_q[b_1+2]_q[b_2+2]_q-[b_1+3]_q[b_2+3]_q=0$
  - 分かりにくいので、$b_1=1, b_2=3$ とおいてさらに簡単化してみる
    - $1-[3]_q[2]_q^2+[3]_q^3-[4]_q^2=0$
    - これは次の2つの等式から正しいことが分かる
      - 等式1 : $[3]_q^2-[2]_q^2=[5]_q$
      - 等式2 : $1-[4]_q^2=-([3]_q+[5]_q+[7]_q)=-[3]_q[5]_q$

その2：指標を含んだ複雑な恒等式

さらに複雑な等式を見てみよう👀

$$\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}\chi_{(1,1,0,0)}(c_{[2,2]})+\frac{1}{[5]_q}\chi_{(2,0,0,0)}(c_{[2,2]})=\frac{1}{[4]_q}\chi_{(1,0)}(c')\chi_{(1,0,0,0)}(c_{[2,2]})+\frac{1}{[3]_q[5]_q}\chi_{(2,1,1,0)}(c_{[2,2]})$$

ここで $c_{[2,2]}=(q^{1/2}c, q^{-1/2}c, q^{1/2}c^{-1}, q^{-1/2}c^{-1})$, $c'=(c,c^{-1})$.

上の式はやや複雑なので、$c_{[2,2]}$ を含む式を展開すると

$$\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}\left([3]_q+(c^2+c^{-2}+1)\right)+\frac{1}{[5]_q}\left([3]_q(c^2+c^{-2}+1)+1\right)=\frac{[2]_q}{[4]_q}(c+c^{-1})^2+\frac{1}{[3]_q[5]_q}\left([2]_q^2(c+c^{-1})^2-1\right)$$

が得られる。さらに例えば、c^2 または c^{-2} の項に着目すると、

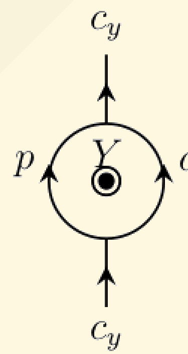
$$\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}+\frac{[3]_q}{[5]_q}=\frac{[2]_q}{[4]_q}+\frac{[2]_q^2}{[3]_q[5]_q}$$

の恒等式が得られる。

参考:一般化skein関係式

先に述べた恒等式は、結び目を一般化したMOY結び目における、次の"一般化skein関係式"の特殊な場合として導かれる[nw '17]:

$$DSR^{Y}_{\{b\},\beta} \;:\; \sum_{p=0}^{c_y}(-1)^p \prod_{i=1}^{\ell_y-1}[p+b_i]_q \widetilde{X}^{U(d_{f_y})}_{p\omega_1+\omega_{g_y}+\beta}(x)$$



$$= 0$$

Yは$SL(N,\mathbb{C})$の冪零軌道(すなわちNの分割)で点付きRiemann面の点に付随、yは対応するN次元表現分解が入った際の基底の1つ、p, c_yは$SU(N)$の自明表現または基本表現(すなわち$\{0,1,\ldots,N-1\}$)で指定される。

またあらわには書いていないが、ある$SU(N)$既約表現のペアに関する情報が存在する。

1つ目の恒等式は、分割$[N]$で指定される際に導かれる恒等式。その他の情報は必要ない。2つ目の恒等式は、$N=4$で分割$[2,2]$で指定され、さらに表現(ウェイト)のペア$([1000],[1010])$と選んだ時のものである。

結論

- qは偉大
- 無限の世界は面白い

参考文献

- スライド中で引用した文献についてはここで再掲しない
- 4D/2D対応について
  - 立川さんのレビュー:A brief review of the 2d/4d correspondences
  - Rastelliさんらのレビュー:The superconformal index of theories of class S
- TQFT
  - 2次元Yang-Mills理論のレクチャー:Lectures on 2D Yang-Mills Theory, Equivariant Cohomology and Topological Field Theories
  - Atiyah先生に依る原典:Topological quantum field theory
- 超共形代数
  - Kac先生の原典:A sketch of Lie superalgebra theory
  - 物理の文脈でunitary表現論を扱ったまとまった文献はないが、Multiplets of Superconformal Symmetry in Diverse Dimensionsとそこの参考文献を挙げておく
  - 脇本先生の本:無限次元リー環
- その他
  - boson-fermion対応からJacobiの三重積公式への雰囲気については、土屋先生の無限を数えるがまとまっている

終

YOBI

位相的場の量子論(TQFT)の定義

まず代表的な位相的不変量として(コ)ホモロジー群と比較してみる:

- (コ)ホモロジー = 位相空間のなす圏(あるいはチェイン複体のなす圏)から適当な加群のなす圏への関手
- **Aityah流位相的場の量子論 = コボルディズム圏$\mathbf{Cor}$から$\mathbb{C}$上のベクトル空間のなす圏$\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$への(対象モノイダル)関手**

両方とも"空間"を"代数的な対象"へ写している点では共通だが、その実現方法はかなり異なる。

以降、多様体の計量に依らない議論を行う。

Remark

- 結び目理論に影響を与えた(3次元)Chern-Simons理論が最も有名だが、今回は扱わない

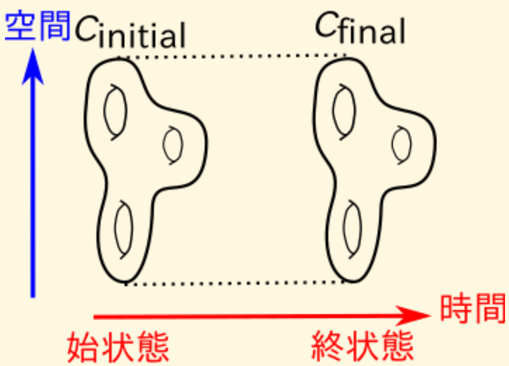
コボルディズム🍊

2つの$(d-1)$次元向き付け閉多様体C_IとC_Fに対し、$\partial M = C_I \sqcup C_F$を満たす$d$次元向き付け多様体$M$を、$(C_I, C_F)$の**コボルディズム**と呼ぶ。

コボルディズム圏は、C_I, C_Fを対象、MをC_IからC_Fへの射とみなしたものである。射の合成は、2つの多様体の境界での貼り合わせで定義される。

ここで、コボルディズムを次のように捉える:

- ある時刻で与えられた多様体C_Iが、時間経過によってその"形"が変化していき、ある時刻でC_Fになったとする。この変化の軌跡を記述したものがMである。



コボルディズムからベクトル空間へ🍊

境界の$(d-1)$次元多様体Cにベクトル空間$\mathcal{H}(C)$を割り当てると、各コボルディズム(d次元多様体) Mはその間のある線形写像とみなす事ができる。すなわちベクトル空間の圏が構成される。このコボルディズムへのベクトル空間構造の割り当て(関手)$\mathcal{H}$の事を、位相的場の量子論と呼ぶ。

コボルディズム

ベクトル空間

$$
\begin{tikzcd}
C_I \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\mathcal{H}"'] \arrow[dr, phantom, "\downarrow"] & C_F \arrow[d, "\mathcal{H}"] \\
\mathcal{H}(C_I) \arrow[r, "\mathcal{H}(M)"] \arrow[dr, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \mathcal{H}(C_F) \\
\psi_I \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \arrow[r, mapsto, "U"] & \psi_F \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"]
\end{tikzcd}
$$

- $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$の対象を状態空間、射を時間発展と呼ぶ
    - $C_{I/F}$に対する状態空間の元$\psi_{I/F}$をそれぞれ始状態/終状態と呼ぶ
    - 時間発展$\mathcal{H}(C_F, C_I)$の元U_Mを時間発展演算子(遷移振幅)と呼ぶ

⚠️ 発散する分配関数🍊

実は2次元位相的Yang-Mills理論の分配関数は、物理的にもill-definedと言える

というのも正則化に相当するパラメーター(場の量子論のくりこみに用いる正則化とは異なる)を消す極限を取っているためである

言い換えると、本来TQFTは、場の量子論でいうところのIR limit(赤外極限or低エネルギー極限)を取って励起状態に落とす必要があるが、この理論はUV limit(紫外極限or高エネルギー極限)を取っている。
そのため無限個の状態が寄与しているためである。

ただし、十分高次の相関関数は、高エネルギー状態Eでの結合定数がE^{-a}で減衰するためにwell-definedになる。