1.1 ソリトンの夜明けまでの簡単な歴史

ここではソリトンの簡単な歴史を紹介します。[1]

1834 年 8 月某日にスコットランドの流体の研究者であり造船技師でもあった John Scott Russell (1808-1882) は、エディンバラ (Edinburgh) 郊外の運河で、2 頭の馬に引かれた船が急に止まる事でできた波が、船を離れても形を変えることなく、一定の速度 (10 ∼ 15 km/h 程度) を保ちながら 1 つの波の塊 (孤立波) として突き進むのを目にしました。彼はそれを馬に乗って追いかけたようですが、2 ∼ 3km 進んだところで見失ってしまいました。この現象に魅せられた彼は、浅い水槽での実験を繰り返し、この孤立波の速度が水底からの高さの平方根に比例する実験式を得ました。ここでせっかくなので彼の言葉を引用しておきます:

> I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation.

なお Russel 技師は Doppler 効果を最初に実験的に確かめたとも言われており、後に Christian Doppler (1803-1853) がそれを理論的に整備した事で、彼の名前が冠されたようです。また Russel は造船技師として、Great Eastern と呼ばれる当時最大級の蒸気船建造の、主任を任されていたなど、科学以外の分野でも大きな貢献をしています。

しかしながら当時流体力学の権威であった George Gabriel Stokes 準男爵 (1819-1903) や、英国科学に影響力を持っていた George Biddell Airy 王室天文官 (1801-1892) らはそれまでの物理理論からは説明できないとして、この現象に否定的でした。そのため 1871 年から 72 年にかけて、Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929) によって初めて理論的に扱われ、その数年後の 1876 年に John William Rayleigh 卿 (1842-1919) が数学的的説明を与えるまで、その存在がなかなか認められませんでした。それは彼がエディンバラ郊外の運河でソリトンに出会ってから、およそ 40 年後の歳月が経過した後でした。

しかしながらこれはソリトンの歴史の始まりに過ぎません。1895 年に、オランダ人数学者であった Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) と Gustav de Vries (1866-1934) によって、孤立波を記述する最も基礎的な非線形微分方程式が提案されました。これは現在 KdV 方程式と呼ばれ、今回扱う対象でもありますが、当時あまり注目される事もなく、しばらくの間忘れ去られていました。

[1] スペルや生年没年は基本的に Wikipedia の情報に基づいている事を予めお断りしておきます。

それから約半世紀が経ち、電子計算機が登場し始めた頃、Enrico Fermi (イタリア出身のアメリカ物理学者, 1901-1954), John Pasta　(アメリカ人計算機物理学者, 1918-1984), Stanislaw Ulam(ポーランド出身のアメリカ数学者, 1909-1984) 達は早速この計算機 (具体的には Los Alamos 国立研究所の MANIAC I) を活用し、当時信じられていた、エルゴード仮説へ数値的にアプローチしました。これは非線形項がある格子モデルの場合、初期状態で非平衡であったとしても、十分時間が経過した際には、熱平衡状態に収束するであろう、という期待があり、それを確かめようとしたわけです。しかしながら蓋を開けてみると、結果は否定的なもので、少数のモード (エネルギー) 間にのみエネルギーが分配され、再び初期状態に回帰するという現象が観察されてしまいました。[2]

彼らの結果に興味を持った Norman J.Zabusky (1929-) と Martin David Kruskal (1925-2006) 達[3] は非線形格子を連続体近似で扱い、数値計算を行いました。そこでソリトン現象に出くわしたのです。[4][5]

せっかくなので非線形項がある格子モデルからどのようにして KdV 方程式が導かれるか見てみましょう。

まずここでの格子モデルとは $t \in \mathbb{R}$ を時間、$n \in \mathbb{Z}$ を格子のラベル (番号)、$y_n(t)$ ($\mathbb{R}$ 上の関数) を n 番目の格子の位置とした時、その時間発展が

$$\frac{d^2}{dt^2}y_n(t) = -\phi'(y_n - y_{n-1}) + \phi'(y_{n+1} - y_n) \tag{1}$$

と書けるものです。ϕ はポテンシャルと呼ばれ、$\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数です。また ϕ' は ϕ の微分を表します。

ここで非調和振動子ポテンシャル、すなわち $\phi(r) = \alpha\frac{r^2}{2} + \beta\frac{r^3}{3}$ (r^3 項は非線形項と呼ばれる) の場合を考え、さらに連続極限として、各 t について $y_n(t) \to y(nh, t)$ (h は十分小さく、ただし $h \to 0$ で $y(x,t)$ は解析的とする) を考えると

$$\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}y + \frac{\alpha h^2}{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4}y + 4\beta h\frac{\partial}{\partial x}y\frac{\partial^2}{\partial x^2}y + \mathcal{O}(h^3) \tag{2}$$

となり、右辺の h^3 項を無視し、$w(x,t) := \dfrac{\partial}{\partial x}y(x,t)$ として適当な変数変換を施すと、浅水波を記述する Boussinesq 方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}w = \frac{\partial^2}{\partial x^2}w + A\frac{\partial^4}{\partial x^4}w + Bw\frac{\partial}{\partial x}w \tag{3}$$

[2]誤解のないように述べておきますと、この結果はエルゴード仮説を全面否定するものでも、ましてや統計力学を否定するものでもありません。実際、数学的に厳密にエルゴード定理などが示されていたりします。また単にエルゴード仮説は (その真偽はさておき) 現代の統計力学に於いては本質的でないと考えられています。

[3]Zabusky や kruskal の逸話は数理科学'85-2『ソリトンとは』戸田盛和記や『波動と非線形問題 30 講』戸田盛和著の Coffee break など参照。

[4]彼らの原論文は "IINTERACTION OF "SOLITONS" IN A COLLISIONLESS PLASMA AND THE RECCURRENCE OF INITIAL STATE" (PRL15,pp.240-243) であり、題から分かる通り、プラズマの研究と密接に関わっています。実際、Kruskal さんの所属は Princeton 大学プラズマ研究所となっていますし、Zabusky さんは Bell 電話研究所になっています。

[5]本当は solitary-wave pulses からソリトロン (solitron) と命名するつもりだったけど、既にそれは商標として使われていたために soliton となったそうです。

を得ます。

一方で、$\frac{\beta}{h\alpha} =: A \sim \mathcal{O}(1)$(同程度)とし、$X := x - h\alpha^{1/2}t$、$T := \frac{2\beta h}{\alpha}t$ と変数変換 (Gallilei 変換かつスケール変換) を行うと、

$$W_T + WW_X + \tfrac{1}{24A}W_{XXX} + \mathcal{O}(h) = 0 \qquad W := \frac{\partial}{\partial X}y \tag{4}$$

となり、$\mathcal{O}(h)$ を無視したものが、KdV 方程式です。

以上、とてもざっくりしていますが、非線形格子から物理的議論により KdV 方程式が現れる事が分かりました。また途中で Boussinesq 方程式が顔を出す事もみました。標語的には "Boussineq 方程式" = "KdV 方程式" + "波動方程式"となっています。[6]

この結果に触発され、1967 年に Princeton のプラズマ研究所の Clifford Spear Gardner (1924-2013), John Morgan Greene (1928-2007), M.D.Kruskal, Robert Mitsuru Miura (1938-) [7] により KdV 方程式に逆散乱法が適用され、解を閉じた形で表現することが可能になりました。これにより、ソリトンの研究は爆発的に加速しました。

ここで日本での可積分系の発展についてすごく簡単ですが、述べておきます。まず 1967 年に戸田和盛 (1917-2010) により今日、戸田格子と呼ばれるモデルにソリトン解が存在するが発見されました。これは KdV 方程式の離散版になっており、とても重要な対象です。

一方で、広田良吾 (1932-2015) により、広田の直接法と呼ばれるソリトン方程式からソリトン解を構成する手法が開発されました。これにより様々なソリトン方程式とソリトン解との関係が調べられるようになりました。そして最終的には佐藤幹夫 (1928-) により、KdV 方程式の背後に潜む無限次元の Grassmann 多様体構造 (Sato-Grassmanian や普遍 Grassmanian などとも呼ばれます) が明らかにされ、さらにその門下生らにより fermion を用いた記述などが発展しました。[8]

[6]実は『余談: ソリトン解に潜む対称性』で簡単に見る KdV 階層と呼ばれる無限個の微分方程式群 (数学的な群ではなく、単なる集まり、の意) をさらに拡張した KP 階層というものがあり、そこから 3-簡約という操作で Boussineq 方程式 (の階層) が姿を表します。一方で、2-簡約すると KdV 方程式 (の階層) が得られます。つまり数学的にも Boussineq 方程式と KdV 方程式は兄弟姉妹の関係にあるのです。

[7]日本人っぽい名前ですが、実際は日系 3 世です。なお彼によって、13 個の保存量が存在する事が調べられ、最終的に無限個の保存量が存在する事が示されました。彼の名を冠した Miura 変換については『余談: 保存量の導出』を参照。

[8]佐藤理論を現在の定式化にしたのは、おそらく Graeme Bryce Segal (1941-) と George Wilson (??-??) です。