2.3.5 進んだ注: ソリトン解に潜む対称性

上記の n-ソリトン解 (の τ 関数) を構成するアプローチは幾つか知られています。

ここでは所謂「頂点演算子」による方法を簡単に紹介したいと思います。

まずは 2-soliton 解の τ 関数を眺めてみましょう。τ 関数は以下のように表します:

$$\tau = (1 + c_1\widehat{\exp}[k_1x - k_1^3t]) \cdot (1 + c_2\widehat{\exp}[k_2x - k_2^3t]) \cdot 1. \tag{1}$$

ここで

$$\widehat{\exp}[kx - k^{\,3}t]) \cdot 1 = \exp[kx - k^{\,3}t]) \tag{2}$$

$$1 \cdot \widehat{\exp}[kx - k^{\,3}t]) = \widehat{\exp}[kx - k^{\,3}t]) \tag{3}$$

$$\widehat{\exp}[k_1x - k_1^{\,3}t]) \cdot \widehat{\exp}[k_2x - k_2^{\,3}t] = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \exp[(k_1 + k_2)x - (k_1^3 + k_2^3)t] \tag{4}$$

と定義しました。以降、この $\widehat{\exp}$ をどうやって実現するか、について考えていきましょう。

まず式 (4) の右辺の係数をどうやって実現するか考えましょう。$|k_1| > |k_2|$ を仮定すると

$$\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 = \exp\left[-4\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{(2\ell - 1)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{2\ell-1}\right] \tag{5}$$

が得られ、exp の中の和について、k_1 の次数は $-1, -3, \ldots$ と無限に減っていき、一方で k_2 の次数は $1, 3, \ldots$ と増えていきます。

一方で、τ 関数に現れる exp の中身は、k_1 も k_2 も 1 次と 3 次のみです。よって、形式的な補助変数を無限個導入し、

$$k_2x - k_2^{\,3}t = \lim_{s_5, s_7, \cdots \to 0}\sum_{\ell \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} k_2^{\,\ell}s_\ell \tag{6}$$

として実現されているとみなしましょう。ただしここで $s_1 := x, s_3 := -t$ とおき、$\mathbb{N}_{\mathrm{odd}} := \{1, 3, 5, \ldots\}$ は正の奇数の集合です。各 s_ℓ の係数だけ取り出すには、各 s_ℓ 微分を書けるのが良さそうです。実際に、式 (4) は $e^Ae^B = e^{A+B}$ という式の形になっておらず、A と B は非可換である事が推察されます。

一方で、k_1 は負冪でした。なので再び無限個の変数 $s_{-1}, s_{-3}, \ldots$ を付け加えて、

$$\lim_{s_{-1}, s_{-3}, \cdots \to 0}\sum_{\ell \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} k_1^{\,-\ell}s_{-\ell} \tag{7}$$

を考えます。式 (5) で、k_1 の指数と k_2 の指数は、符号を除いて同じ事を思い出すと、先の推察より $s_{-\ell}$ は s_ℓ 微分である事が期待されます。

よって、exp の肩は

$$\left(\sum_{m \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}}\frac{c_m}{k^{\,m}}\frac{\partial}{\partial s_m}\right) + \left(\sum_{\ell \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} k^\ell s_\ell\right) \tag{8}$$

と置き換えられそうです。また係数 c_m は式 (5) より、$c_m \sim \dfrac{1}{m} \quad (m \to \infty)$ である事が期待されます。

さて、上の置き換えは本当にやっていいのでしょうか? 2 次の項を考えてみます。すると

$$\left(\sum_{m \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} \frac{c_m}{k^{\,m}} \frac{\partial}{\partial s_m} + \sum_{\ell \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} k^{\,\ell} s_\ell \right)^2 \tag{9}$$

の定数項を見てみると、$\displaystyle\sum_{m \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} c_m$ となります。ここで $c_m \sim \dfrac{1}{m}$ であったので、この定数項は発散します。[1]

これを避けるためには、

$$\exp \left(\sum_{m \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} \frac{c_m}{k^{\,m}} \frac{\partial}{\partial s_m} + \sum_{\ell \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} k^{\ell} s_\ell \right) \tag{10}$$

を

$$\exp \left(\sum_{\ell \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} k^{\ell} s_\ell \right) \cdot \exp \left(\sum_{m \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} \frac{c_m}{k^{\,m}} \frac{\partial}{\partial s_m} \right) \tag{11}$$

置き換えれば良さそうです。[2] さて、ここで2 つの非可換な演算子 A, B で、$[A, B]$ は A, B と可換、という条件を満たす時に成立する公式 $e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A$(BakerCampbellHausdorff 公式の最も簡単な場合) を用いると、

$$\begin{aligned} &\lim_{s_5, s_7, \cdots \to 0} \exp \left(\sum_{\ell \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} k_1^{\,\ell} s_\ell \right) \cdot \exp \left(\sum_{m \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} \frac{c_m}{k_1^m} \frac{\partial}{\partial s_m} \right) \cdot \exp \left(\sum_{\ell \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} k_2^{\,\ell} s_\ell \right) && (12) \\ &= \exp \left(\sum_{m \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} c_m \frac{k_2^{\,m}}{k_1^m} \right) \exp \left(\sum_{\ell = 1,3} (k_1^{\,\ell} + k_2^{\,\ell}) s_\ell \right) \exp \left(\sum_{m \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} \frac{c_m}{k_1^m} \frac{\partial}{\partial s_m} \right) && (13) \end{aligned}$$

を得ます。よって、式 (5) と比較して、$c_m = -\dfrac{4}{m}$ と決められます。

以上を整理しますと、2-soliton の相互作用部分を、無限個の補助変数と微分によって (無理矢理) 表現する事ができました。出てきた式も整理しましょう。

---

[1] “形式的” には $\displaystyle\sum_{m \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} \frac{1}{m} = \frac{1}{2}\zeta(1) = \infty$ です。

[2] これは正規順序積と呼ばれ、いわゆる場の量子論で言う所の「繰り込み処方」の一種です。先に $\zeta(1)$ が出てくる事を見ましたが、これの正則化は $zeta$-関数繰り込み、と呼ばれ、特に $\zeta(-1)$ の方は (ボゾン的) 弦理論の場合と密接に関わっています。具体的には、D を弦の動く時空の次元とすると、$\frac{D-2}{2}\zeta(-1)$ が弦上の真空の Casimir エネルギーとなり、この第1 励起が massless gauge 場になる要請から、$D = 26$ とボゾン弦の動く時空の次元が出てきます。

$$V_{\mathrm{KdV}}(k) := \exp\left(\sum_{\ell\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}} k^\ell s_\ell\right)\cdot\exp\left(-4\sum_{m\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}}\frac{1}{mk^m}\frac{\partial}{\partial s_m}\right) \tag{14}$$

を「 KdV 階層における頂点演算子」[3]と呼び、これは無限変数の関数環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots,]$ に作用するとしましょう。するとこれまでの議論は $\lim_{s_5,s_7,\cdots\to 0}(1+c_1V(k_1))\cdot(1+c_2V(k_2))\cdot 1$ が 2-ソリトン解を与える事が確認した事に相当します。

また先の計算から $V(k_1)^2 = \lim_{k_2\to k_1+0^+} V(k_2)\cdot V(k_1) = 0$ ですので、$1+c_1V(k) = e^{c_1V(k)}$ であり、より簡潔に

$$\tau^{(2)}(x,t) = \lim_{\substack{s_1\to x\\ s_3\to -t}}\lim_{s_5,s_7,\cdots\to 0}(1+c_1V(k_1))\cdot(1+c_2V(k_2))\cdot 1 \tag{15}$$

と表現できます。頂点演算子を指数の方に乗せた演算子 $e^{cV(k)}$ は "ソリトン生成演算子" とも呼ばれます。

実はこのソリトン生成演算子を用いると、n-ソリトン解は次のように構成できます:

$$\tau^{(n)}(x,t) = \lim_{s_5,s_7,\cdots\to 0}\tau^{(n)}(\{s\}) = \underbrace{e^{c_1V(k_1)}\cdot e^{c_2V(k_2)}\cdots e^{c_nV(k_n)}}_{n}\cdot 1. \tag{16}$$

ただしここで $k_1 > k_2 > \cdots k_n > 0$ です。

最後に、もう少し一般的な話をしましょう。$u = 2\log(\tau)_{xx}$ は x と t の微分に対し、u とその x 微分で構成される無限生成多項式 (微分多項式という) $\mathbb{K}[u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \ldots]$ でかけます。実際に、これは定義と KdV 方程式そのものです。

$$\frac{\partial}{\partial x}u = u_x \qquad -\frac{\partial}{\partial t}u = 6uu_x + u_{xxx}. \tag{17}$$

極限を取らずに、ここで導入した無限個の変数で微分するとどうでしょうか? まず $s := s_5 \neq 0$ としておいてみます。k のスケーリング次元を 1 とおく、あるいは数学的には微分多項式に $\mathbb{Z}_{(\geq 0)}$-graded だと思って k の掛け算作用素に $+1$ を割り当てると (この時 x 微分は +1、t 微分は +3、u は 2 次となる)、s 微分は 5 次だけ増やします。よって、もし微分多項式でかけるならば (k の掛け算は許されない事に注意)、u の s 微分を表す式は 7 次の微分多項式であり、これは u^2u_x、u_xu_{xx}、uu_{xxx}、u_{xxxxx} で生成されます。

さらに条件

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}u = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}u = -\frac{\partial}{\partial s}(6uu_x + u_{xxx}) \tag{18}$$

からこの多項式は

$$-\frac{\partial}{\partial s}u = 30u^2u_x + 20u_xu_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxxx} \tag{19}$$

となります。

同様に s_{2n+1} $(n = 3, 5, \ldots,)$ の微分を与える微分多項式もこのように計算できます。このようにして定まる無限個の偏微分方程式系を KdV 階層 (KdV hierarchy) と言います。

---

[3]この用語は弦理論に由来しています。$V(k)$ は弦上の座標 k(数学的には Riemann 面の正則座標) の、時空の位置 V を表しています。(数学的には Riemmann 面の、時空多様体への埋め込みを考える事に他なりません。) これは弦のソースとなっており、散乱振幅を記述しています。