2.1.1 進んだ注: KdV 方程式と楕円積分・Riemann 面

周期境界条件を課した場合について少しだけ考えてみましょう。先に解いたのと同様の方法で、しかし境界条件の変更を行う事で

$$f_\xi^2 = \alpha f^3 + \beta f^2 + \gamma f + \delta \tag{1}$$

を得ます。ここで $\alpha = -2, \beta = v$ は KdV 方程式の係数から定まる定数ですが、γ, δ は境界条件より決まる定数です。さらに (複素) 定数 c, d を上手く選んで $X(\xi) := cf(\xi) + d$ を定義すると、

$$X_\xi^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3 \tag{2}$$

という、X^2 の項を消去した微分方程式を得ます。実はこの方程式を満たす F は、ξ が複素変数の時、Weierstraßの楕円関数または $\wp$(ペー) 関数と呼ばれており、種数 1 の Riemann 面 (位相幾何学的にはトーラスと呼ばれる) 上の有理正則関数です。実際、X_ξ を ξ と独立な変数 Y で置き換えると、これは $(X, Y) \in \mathbb{C}^2$ の中で、種数 1 の Riemann 面を代数曲線として実現します。

一方で、実変数の場合に元に戻ると、

$$\xi = \int \frac{df}{\sqrt{\alpha f^3 + \beta f^2 + \gamma f + \delta}} \tag{3}$$

であり、これは第1 種楕円積分と呼ばれる対象に他なりません。これは解析解ではないですが、それでもよく知られた数学的対象を用いて解を記述可能な事が分かりました。