2.4.1　余談：保存量の導出

さてこれらの保存量を体系的に導出する方法を紹介します。これには幾つか方法がありますが、今回は最もシンプルな、「パラメーター付き Bäcklund 変換に基づく方法」(私が勝手にこう呼んでます) を紹介します。[1] [2]

ステップ1：偏微分方程式の変換と "因数分解"　相も変わらず唐突ですが、まず u は別の関数 w の (非線形) 汎関数である、としましょう。すると u に関する KdV 方程式は w に対する非線形偏微分方程式に書き換えられます。この時、この偏微分方程式が、ある微分作用素 $D[w]$ と w の汎関数 $F[w]$ を用いて、

$$D[w] \cdot F[w] = 0 \tag{1}$$

と "因数分解" できたとします。すると $F[w] = 0$ を満たす w は自動的に元の微分方程式の解になる事が分かります。[3] よって u の解を、別の微分方程式 $F[w] = 0$ の解から構成する事ができます。

簡単な例を見てみましょう。$f = f(x)$ に関する微分方程式 $f_{xx} + 3ff_x + f^3 = 0$ があったとします。この微分方程式は $D[f] = f_x \frac{d}{dx} + f^2$ と $F[f] = f_x + f^2$ を用いて、$D[f] \cdot F[f] = (\frac{d}{dx} + f)(f_x + f^2) = 0$ と分解できます。よって $f_x + f^2 = 0$ の解 $f(x) = \frac{1}{x+c}$ は、元の微分方程式の解になっています。

さてこれと同様の事を u について行ってみます。具体的には、$a, b, c \in \mathbb{R}$ として、

$$u = aw + bw_x + cw^2 \tag{2}$$

という変換を考えてみましょう。これを u が従う KdV 方程式 $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ に代入してみます。

w について書き直した微分方程式の中で $a_t + bw_{xt} + 2cww_t$ と bw_{xxxx} という項がある事に着目すると、上記の因数分解で D は

$$a + b\frac{\partial}{\partial x} + 2cw \tag{3}$$

と書ける事が期待されます。この時、F には w_t と w_{xxx} が含まれるはずです。

残る項は

$$6\left[w(a + cw)(a + 2cw)w_x + bw(a + cw)w_{xx} + b(a + 2cw)w_x^2 + (b^2 + c)w_x w_{xx}\right]$$

で、最高次数の項は $2c^2w^3w_x$ です。よって D を掛けてこの項を出すためには、cw^2w_x の項が F に必要です。

[1] 現代的には擬微分作用素 (Lax 作用素) を用いて Lax 形式に書き換え、Lax 作用素の冪乗の「留数」を計算する事で計算が可能です。この定式化は一般的な "可積分方程式"(例えば KP 方程式) にも適用可能な普遍性を持ちます。(というより多くの場合、Lax 形式が可積分方程式の出発点とも言えます)

[2] 他にも recursion operator による方法があり、こちらは正確には『進んだ注：ソリトン解に潜む対称性』で現れる無限個の変数それぞれの生成子を与えます。しかし実は、この無限個の生成子達は各々KdV 方程式の同じ保存量を与えます。

[3] 当然ですが、逆に任意の解は $F[w] = 0$ を満たすとは限りません。一般には $D[w]g = 0$ の解 $g[w]$ を用いて、$F[w] = g[w]$ を解く必要があります。もっとも実際にこれを実行するのは不可能であり、ここでは簡単のため $g[w] = 0$ の場合のみ考えています。

上の残る項から $D\cdot(6cw^2w_x)$ を引くと、次は

$$a(a+2cw)ww_x + abww_{xx} + abw_x^2 + (b^2+c)w_xw_{xx} \tag{4}$$

が残ります。同様に 3 次の項は、$D\cdot(6aww_x)$ より現れ、

$$(b^2+c)w_xw_{xx} \tag{5}$$

が最後に残ります。よって、$b^2+c=0$ を課すと、因数分解の結果は

$$D[w] = a + b\frac{\partial}{\partial x} - 2b^2w \tag{6}$$
$$F[w] = w_t + 6\left(-b^2w^2 + aw\right)w_x + w_{xxx} \tag{7}$$

です。特に $a \neq 0$ を仮定すると、$w \to \frac{1}{a}w$ と w を再定義する事ができます。また $\frac{b}{a} =: \lambda$ とおきます。

よって偏微分方程式 $F[w]=0$ は

$$w_t + 6\left(-\lambda^2w^2 + w\right)w_x + w_{xxx} = 0 \tag{8}$$

となりますが、これを Garner 方程式と呼びます。また対応して、u から w への変換 $u = w + \lambda w_x - \lambda^2w^2$ を Gardner 変換と呼ぶ事があります。

ここで一旦結果をまとめると、Gardner 方程式

$$w_t + 6\left(-\lambda^2w^2 + w\right)w_x + w_{xxx} = 0 \tag{9}$$

の解 w が得られたとすると、変換

$$u = w + \lambda w_x - \lambda^2w^2 \tag{10}$$

によって、KdV 方程式の解 u が手に入る事が分かりました。なお現代的には Gardner 変換は、KdV 方程式と Gardner 方程式を結びつける「Bäcklund 変換」である、と言えます。

ステップ2： Gardner 方程式の保存量と逆変換　Gardner 方程式は次のように書き換えられます:

$$w_t + \left(-2\lambda^2w^3 + 3w^2 + w_{xx}\right)_x = 0. \tag{11}$$

よって、「KdV 方程式の保存量」で行った議論より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ w \tag{12}$$

は保存量です。(w の境界条件は u と同じである事に注意)

ここで u の関数形を既知として Gardner 変換の式を w について形式的に解く事を考えてみましょう。すると $w = w[\lambda, u]$ と書けます。特に λ について Taylor 展開可能であ

るとすると (少なくとも有限の収束半径は持つと仮定します)、展開項の各項は電荷密度、すなわち x で $\mathbb{R}$ 上積分すると保存量である事が期待できます。[4]

よって

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n w_n \tag{13}$$

を代入すると、λ が任意の値で成立する事から、

$$u = w_0 \tag{14}$$
$$0 = w_1 + (w_0)_x = 0 \tag{15}$$
$$0 = w_k + (w_{k-1})_x - \sum_{\ell=0}^{k-2} w_\ell w_{k-2-\ell} = 0 \tag{16}$$

という漸化式が得られます。

これを λ の 10 次まで解いていった結果は以下のようになります:

$$\begin{aligned}
w =& u + \lambda^1 (-u_x) + \lambda^2 \left(u^2 + u_{xx}\right) + \lambda^3 (-4uu_x - u_{xxx}) + \lambda^4 \left(2u^3 + 6uu_{xx} + 5u_x^2 + u_{xxxx}\right) \\
&+ \lambda^5 \left(-16u^2u_x - 8uu_{xxx} - 18u_xu_{xx} - u_{xxxxx}\right) + \lambda^6 \left(5u^4 + 30u^2u_{xx} + 50uu_x^2 + 10uu_{xxxx}\right. \\
&\left.+28u_xu_{xxx} + 19u_{xx}^2 + u_{xxxxxx}\right) + \lambda^7 \left(-64u^3u_x - 48u^2u_{xxx} - 216uu_xu_{xx} - 12uu_{xxxxx}\right. \\
&\left.-60u_x^3 - 40u_xu_{xxxx} - 68u_{xx}u_{xxx} - u_{xxxxxxx}\right) + \lambda^8 \left(14u^5 + 140u^3u_{xx} + 350u^2u_x^2\right. \\
&+ 70u^2u_{xxxx} + 392uu_xu_{xxx} + 266uu_{xx}^2 + 14uu_{xxxxxx} + 442u_x^2u_{xx} + 54u_xu_{xxxxx} \\
&\left.+110u_{xx}u_{xxxx} + 69u_{xxx}^2 + u_{xxxxxxxx}\right) + \lambda^9 \left(-256u^4u_x - 256u^3u_{xxx} - 1728u^2u_xu_{xx}\right. \\
&- 96u^2u_{xxxxx} - 960uu_x^3 - 640uu_xu_{xxxx} - 1088uu_{xx}u_{xxx} - 16uu_{xxxxxxx} - 900u_x^2u_{xxx} \\
&\left.-1224u_xu_{xx}^2 - 70u_xu_{xxxxxx} - 166u_{xx}u_{xxxxx} - 250u_{xxx}u_{xxxx} - u_{xxxxxxxxx}\right) \\
&+ \lambda^{10} \left(42u^6 + 630u^4u_{xx} + 2100u^3u_x^2 + 420u^3u_{xxxx} + 3528u^2u_xu_{xxx} + 2394u^2u_{xx}^2\right. \\
&+ 126u^2u_{xxxxxx} + 7956uu_x^2u_{xx} + 972uu_xu_{xxxxx} + 1980uu_{xx}u_{xxxx} + 1242uu_{xxx}^2 \\
&+ 18uu_{xxxxxxxx} + 1105u_x^4 + 1630u_x^2u_{xxxx} + 5564u_xu_{xx}u_{xxx} + 88u_xu_{xxxxxxx} + 1262u_{xx}^3 \\
&\left.+238u_{xx}u_{xxxxxx} + 418u_{xxx}u_{xxxxx} + 251u_{xxxx}^2 + u_{xxxxxxxxxx}\right) + \mathcal{O}(\lambda^{11}).
\end{aligned} \tag{17}$$

よって各項の積分は保存量を与えます。最初の 4 項について見ていくと、

$$Q_0^{\mathrm{KdV}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ u \tag{18}$$
$$Q_1^{\mathrm{KdV}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx(-u_x) = -u(x=\infty) + u(x=-\infty) = 0 \tag{19}$$
$$Q_2^{\mathrm{KdV}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(u^2 + u_{xx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ u^2 \tag{20}$$
$$Q_3^{\mathrm{KdV}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(-4uu_x + u_{xxx}\right) = \left[-2u^2 + u_{xx}\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{21}$$
$$Q_4^{\mathrm{KdV}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(2u^3 + 6uu_{xx} + 5u_x^2 + u_{xxxx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(2u^3 - u_x^2\right) \tag{22}$$

[4] 勿論、電荷密度が無限遠 ($x \to \pm\infty$) で 0 に収束する、という境界条件を満たす事を確認する必要があります。

となります。ここで Q_1^{KdV} と Q_3^{KdV} は意味のない保存量になっています。

実際に λ の奇数次項は、必ず u の微分多項式の x 微分で書ける事が確認できるので、偶数次のみ考えれば十分です。最後に、電荷密度が微分多項式の中で線形独立である事は (uを 2 次、x 微分を 1 次とした次数付けを考えると) 明らかであり、この意味で、保存量が無限個が存在する事を示せました。

2.4.2 進んだ注: Miura 変換を経て散乱問題へ

『余談: 保存量の導出』の時に見た Gardner 変換で、$a = 0$、$b = 1$ と置きましょう。すると $u = w_x - w^2$ という式を得ますが、この変換は Miura 変換と呼ばれています。またこの時の Gardner 方程式は変形 KdV 方程式と呼ばれています。

さて Miura 変換は、u が既知の時、w に関する非線形方程式になり、これは Riccati 方程式と呼ばれる微分方程式の特殊な場合です。ここである関数 $\psi(x,t)$ を用いて、その解が $w = -\frac{\partial}{\partial x}\log\psi(x,t)$ と表せると仮定します。すると Miura 変換は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t)\right)\psi(x,t) = 0 \tag{23}$$

と書き換えられます。ここで t を単なるパラメータだとみなすと、これはポテンシャルを $-u$ に持つ (時間非依存)Schrödinger 方程式と呼ばれる線形方程式に他なりません。実際にはエネルギー固有値の項が必要ですが、これは u のシフト変換と Gallilei 変換で表せます。

これで線形な方程式が顔を出したわけですが、実際には KdV 方程式の情報を一切使っていない事に注意してください。実は ψ が t の1 階微分を含む別の線形偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\left(4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x(x,t)\right)\psi(x,t) \tag{24}$$

に従う事を要求してみます。ややこしいですが、t は Schrödinger 方程式の時間とは何も関係がない別のパラメータである事を再度強調しておきます。

特に

$$L := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \qquad\qquad B := 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x \tag{25}$$

とおくと、これの微分方程式が両立するための条件として、

$$[L, \frac{\partial}{\partial t} + B] := L\left(\frac{\partial}{\partial t} + B\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + B\right)L = L_t - BL + LB = 0 \tag{26}$$

があるのですが (Lax 形式)、実はこれは KdV 方程式に他ならない事が分かります。[5]

ちなみに (x の) 微分演算子 ∂_x を擬微分作用素と呼ばれる、微分の逆演算 (∂_x^{-1}) を許した対象に埋め込み、その中で 3/2 乗して再び通常の微分作用素の空間 (関数空間と ∂_x のなす非可換環) に射影すると、B が得られる事が知られています。なお 1/2 乗して射

[5] $L_t = u_t$ に注意してください。量子力学の言葉では、B が変数 t の共役な物理量の演算子に対応しており、両立条件は Heisenberg 方程式の形をしています。

影した場合は通常の x 微分です。さらに "留数"という ∂^{-1} の係数は電荷密度を与えるので、保存量はこの方法でも求まります。

では話を Schrödinger 方程式に戻します。先に u は既知だとしましたが、逆に、先にこの線形方程式の固有値や固有ベクトル $\psi(x,t)$ の $x\to\pm\infty$ での振る舞いが分かったとしましょう。この時、これらの情報から元の $u(x,t)$ を復元できる事が知られており、これを逆散乱問題と言います。そしてこの散乱情報を Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式という積分方程式に埋め込むと、元のポテンシャル u が従う方程式が得られます。さらに無反射条件という条件を課しつつ、元の KdV 方程式の情報を用いると、最終的に $u(x,t)$ を構成できる事が知られています。なお、n-ソリトン解は、(離散) エネルギー固有値が n 個存在する事に対応し、パラメータ p_i はその固有値の値に、θ_i は線型結合の係数 (ただし p_i にも依存) に対応しています。

最後に先ほどの τ 関数の行列式表示との関係について一言コメントしておきます。これは線形微分方程式を無限次元行列と見なし、Fourier 変換によって有限次元部分に着目 (還元) した際、その有限次元行列部分の行列式が τ 関数に相当します。詳細は非自明なので、例えば『非線形波動』(和達三樹著) などを参照してください。このように、KdV 方程式の解が τ 関数を経て解析解を持つのには、数学的な背景が存在するから、という事実の雰囲気がお分かり頂けたかと思います。