2.4.1 余談：保存量の導出

さてこれらの保存量を体系的に導出する方法を紹介します。これには幾つか方法がありますが、今回は最もシンプルな、「パラメーター付き Bäcklund 変換に基づく方法」(私が勝手にこう呼んでます) を紹介します。[1] [2]

ステップ1：偏微分方程式の変換と“因数分解” 相も変わらず唐突ですが、まず u は別の関数 w の (非線形) 汎関数である、としましょう。すると u に関する KdV 方程式は w に対する非線形偏微分方程式に書き換えられます。この時、この偏微分方程式が、ある微分作用素 $D[w]$ と w の汎関数 $F[w]$ を用いて、

$$D[w] \cdot F[w] = 0 \tag{1}$$

と“因数分解”できたとします。すると $F[w] = 0$ を満たす w は自動的に元の微分方程式の解になる事が分かります。[3] よって u の解を、別の微分方程式 $F[w] = 0$ の解から構成する事ができます。

簡単な例を見てみましょう。$f = f(x)$ に関する微分方程式 $f_{xx} + 3ff_x + f^3 = 0$ があったとします。この微分方程式は $D[f] = f_x\frac{d}{dx} + f^2$ と $F[f] = f_x + f^2$ を用いて、$D[f]\cdot F[f] = (\frac{d}{dx} + f)(f_x + f^2) = 0$ と分解できます。よって $f_x + f^2 = 0$ の解 $f(x) = \frac{1}{x+c}$ は、元の微分方程式の解になっています。

さてこれと同様の事を u について行ってみます。具体的には、$a, b, c \in \mathbb{R}$ として、

$$u = aw + bw_x + cw^2 \tag{2}$$

という変換を考えてみましょう。これを u が従う KdV 方程式 $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ に代入してみます。

w について書き直した微分方程式の中で $a_t + bw_{xt} + 2cww_t$ と bw_{xxxx} という項がある事に着目すると、上記の因数分解で D は

$$a + b\frac{\partial}{\partial x} + 2cw \tag{3}$$

と書ける事が期待されます。この時、F には w_t と w_{xxx} が含まれるはずです。

残る項は

$$6\left[w(a+cw)(a+2cw)w_x + bw(a+cw)w_{xx} + b(a+2cw)w_x^2 + (b^2+c)w_xw_{xx}\right]$$

で、最高次数の項は $2c^2w^3w_x$ です。よって D を掛けてこの項を出すためには、cw^2w_x の項が F に必要です。

[1]現代的には擬微分作用素 (Lax 作用素) を用いて Lax 形式に書き換え、Lax 作用素の冪乗の「留数」を計算する事で計算が可能です。この定式化は一般的な“可積分方程式”(例えば KP 方程式) にも適用可能な普遍性を持ちます。(というより多くの場合、Lax 形式が可積分方程式の出発点とも言えます)

[2]他にも recursion operator による方法があり、こちらは正確には『進んだ注：ソリトン解に潜む対称性』で現れる無限個の変数それぞれの生成子を与えます。しかし実は、この無限個の生成子達は各々 KdV 方程式の同じ保存量を与えます。

[3]当然ですが、逆に任意の解は $F[w] = 0$ を満たすとは限りません。一般には $D[w]g = 0$ の解 $g[w]$ を用いて、$F[w] = g[w]$ を解く必要があります。もっとも実際にこれを実行するのは不可能であり、ここでは簡単のため $g[w] = 0$ の場合のみ考えています。

上の残る項から $D\cdot(6cw^2w_x)$ を引くと、次は

$$a(a+2cw)ww_x + abww_{xx} + abw_x^2 + (b^2+c)w_xw_{xx} \tag{4}$$

が残ります。同様に 3 次の項は、$D\cdot(6aww_x)$ より現れ、

$$(b^2+c)w_xw_{xx} \tag{5}$$

が最後に残ります。よって、$b^2+c=0$ を課すと、因数分解の結果は

$$D[w] = a + b\frac{\partial}{\partial x} - 2b^2w \tag{6}$$

$$F[w] = w_t + 6\left(-b^2w^2 + aw\right)w_x + w_{xxx} \tag{7}$$

です。特に $a \neq 0$ を仮定すると、$w \to \frac{1}{a}w$ と w を再定義する事ができます。また $\frac{b}{a} =: \lambda$ とおきます。

よって偏微分方程式 $F[w]=0$ は

$$w_t + 6\left(-\lambda^2w^2 + w\right)w_x + w_{xxx} = 0 \tag{8}$$

となりますが、これを Garner 方程式と呼びます。また対応して、u から w への変換 $u = w + \lambda w_x - \lambda^2w^2$ を Gardner 変換と呼ぶ事があります。

ここで一旦結果をまとめると、Gardner 方程式

$$w_t + 6\left(-\lambda^2w^2 + w\right)w_x + w_{xxx} = 0 \tag{9}$$

の解 w が得られたとすると、変換

$$u = w + \lambda w_x - \lambda^2w^2 \tag{10}$$

によって、KdV 方程式の解 u が手に入る事が分かりました。なお現代的には Gardner 変換は、KdV 方程式と Gardner 方程式を結びつける「Bäcklund 変換」である、と言えます。

ステップ２：Gardner 方程式の保存量と逆変換　Gardner 方程式は次のように書き換えられます:

$$w_t + \left(-2\lambda^2w^3 + 3w^2 + w_{xx}\right)_x = 0. \tag{11}$$

よって、「KdV 方程式の保存量」で行った議論より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ w \tag{12}$$

は保存量です。(w の境界条件は u と同じである事に注意)

ここで u の関数形を既知として Gardner 変換の式を w について形式的に解く事を考えてみましょう。すると $w = w[\lambda, u]$ と書けます。特に λ について Taylor 展開可能であ

るとすると (少なくとも有限の収束半径は持つと仮定します)、展開項の各項は電荷密度、すなわち x で $\mathbb{R}$ 上積分すると保存量である事が期待できます。[4]

よって

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n w_n \tag{13}$$

を代入すると、λ が任意の値で成立する事から、

$$u = w_0 \tag{14}$$
$$0 = w_1 + (w_0)_x = 0 \tag{15}$$
$$0 = w_k + (w_{k-1})_x - \sum_{\ell=0}^{k-2} w_\ell w_{k-2-\ell} = 0 \tag{16}$$

という漸化式が得られます。

これを λ の 10 次まで解いていった結果は以下のようになります:

$$\begin{aligned} w =& u + \lambda^1 \left(-u_x\right) + \lambda^2 \left(u^2 + u_{xx}\right) + \lambda^3 \left(-4uu_x - u_{xxx}\right) + \lambda^4 \left(2u^3 + 6uu_{xx} + 5u_x^2 + u_{xxxx}\right) \\ &+ \lambda^5 \left(-16u^2u_x - 8uu_{xxx} - 18u_xu_{xx} - u_{xxxxx}\right) + \lambda^6 \left(5u^4 + 30u^2u_{xx} + 50uu_x^2 + 10uu_{xxxx}\right. \\ &\left.+28u_xu_{xxx} + 19u_{xx}^2 + u_{xxxxxx}\right) + \lambda^7 \left(-64u^3u_x - 48u^2u_{xxx} - 216uu_xu_{xx} - 12uu_{xxxxx}\right. \\ &\left.-60u_x^3 - 40u_xu_{xxxx} - 68u_{xx}u_{xxx} - u_{xxxxxxx}\right) + \lambda^8 \left(14u^5 + 140u^3u_{xx} + 350u^2u_x^2\right. \\ &+ 70u^2u_{xxxx} + 392uu_xu_{xxx} + 266uu_{xx}^2 + 14uu_{xxxxxx} + 442u_x^2u_{xx} + 54u_xu_{xxxxx} \\ &\left.+110u_{xx}u_{xxxx} + 69u_{xxx}^2 + u_{xxxxxxxx}\right) + \lambda^9 \left(-256u^4u_x - 256u^3u_{xxx} - 1728u^2u_xu_{xx}\right. \\ &- 96u^2u_{xxxxx} - 960uu_x^3 - 640uu_xu_{xxxx} - 1088uu_{xx}u_{xxx} - 16uu_{xxxxxxx} - 900u_x^2u_{xxx} \\ &\left.-1224u_xu_{xx}^2 - 70u_xu_{xxxxxx} - 166u_{xx}u_{xxxxx} - 250u_{xxx}u_{xxxx} - u_{xxxxxxxxx}\right) \\ &+ \lambda^{10} \left(42u^6 + 630u^4u_{xx} + 2100u^3u_x^2 + 420u^3u_{xxxx} + 3528u^2u_xu_{xxx} + 2394u^2u_{xx}^2\right. \\ &+ 126u^2u_{xxxxxx} + 7956uu_x^2u_{xx} + 972uu_xu_{xxxxx} + 1980uu_{xx}u_{xxxx} + 1242uu_{xxx}^2 \\ &+ 18uu_{xxxxxxxx} + 1105u_x^4 + 1630u_x^2u_{xxxx} + 5564u_xu_{xx}u_{xxx} + 88u_xu_{xxxxxxx} + 1262u_{xx}^3 \\ &\left.+238u_{xx}u_{xxxxxx} + 418u_{xxx}u_{xxxxx} + 251u_{xxxx}^2 + u_{xxxxxxxxxx}\right) + \mathcal{O}(\lambda^{11}). \end{aligned} \tag{17}$$

よって各項の積分は保存量を与えます。最初の 4 項について見ていくと、

$$Q_0^{\mathrm{KdV}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ u \tag{18}$$
$$Q_1^{\mathrm{KdV}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx(-u_x) = -u(x=\infty) + u(x=-\infty) = 0 \tag{19}$$
$$Q_2^{\mathrm{KdV}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(u^2 + u_{xx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ u^2 \tag{20}$$
$$Q_3^{\mathrm{KdV}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(-4uu_x + u_{xxx}\right) = \left[-2u^2 + u_{xx}\right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{21}$$
$$Q_4^{\mathrm{KdV}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(2u^3 + 6uu_{xx} + 5u_x^2 + u_{xxxx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(2u^3 - u_x^2\right) \tag{22}$$

[4] 勿論、電荷密度が無限遠 ($x \to \pm\infty$) で 0 に収束する、という境界条件を満たす事を確認する必要があります。

となります。ここで Q_1^{KdV} と Q_3^{KdV} は意味のない保存量になっています。

実際に λ の奇数次項は、必ず u の微分多項式の x 微分で書ける事が確認できるので、偶数次のみ考えれば十分です。最後に、電荷密度が微分多項式の中で線形独立である事は (u を 2 次、x 微分を 1 次とした次数付けを考えると) 明らかであり、この意味で、保存量が無限個が存在する事を示せました。

2.4.2 進んだ注: Miura 変換を経て散乱問題へ

『余談: 保存量の導出』の時に見た Gardner 変換で、$a = 0$、$b = 1$ と置きましょう。すると $u = w_x - w^2$ という式を得ますが、この変換は Miura 変換と呼ばれています。またこの時の Gardner 方程式は変形 KdV 方程式と呼ばれています。

さて Miura 変換は、u が既知の時、w に関する非線形方程式になり、これは Riccati 方程式と呼ばれる微分方程式の特殊な場合です。ここである関数 $\psi(x, t)$ を用いて、その解が $w = -\frac{\partial}{\partial x} \log \psi(x, t)$ と表せると仮定します。すると Miura 変換は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t) \right) \psi(x, t) = 0 \tag{23}$$

と書き換えられます。ここで t を単なるパラメータだとみなすと、これはポテンシャルを $-u$ に持つ (時間非依存)Schrödinger 方程式と呼ばれる線形方程式に他なりません。実際にはエネルギー固有値の項が必要ですが、これは u のシフト変換と Gallilei 変換で表せます。

これで線形な方程式が顔を出したわけですが、実際には KdV 方程式の情報を一切使っていない事に注意してください。実は ψ が t の1 階微分を含む別の線形偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = - \left(4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + 3u_x(x, t) \right) \psi(x, t) \tag{24}$$

に従う事を要求してみます。ややこしいですが、t は Schrödinger 方程式の時間とは何も関係がない別のパラメータである事を再度強調しておきます。

特に

$$L := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \qquad\qquad B := 4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial}{\partial x} + 3u_x \tag{25}$$

とおくと、これの微分方程式が両立するための条件として、

$$[L, \frac{\partial}{\partial t} + B] := L \left(\frac{\partial}{\partial t} + B \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + B \right) L = L_t - BL + LB = 0 \tag{26}$$

があるのですが (Lax 形式)、実はこれは KdV 方程式に他ならない事が分かります。[5]

ちなみに (x の) 微分演算子 ∂_x を擬微分作用素と呼ばれる、微分の逆演算 (∂_x^{-1}) を許した対象に埋め込み、その中で 3/2 乗して再び通常の微分作用素の空間 (関数空間と ∂_x のなす非可換環) に射影すると、B が得られる事が知られています。なお 1/2 乗して

[5] $L_t = u_t$ に注意してください。量子力学の言葉では、B が変数 t の共役な物理量の演算子に対応しており、両立条件は Heisenberg 方程式の形をしています。

射影した場合は通常の x 微分です。さらに "留数"という ∂^{-1} の係数は電荷密度を与えます。

では話を Schrödinger 方程式に戻します。先に u は既知だとしましたが、逆に、先にこの線形方程式の固有値や固有ベクトル $\psi(x,t)$ の $x \to \pm\infty$ での振る舞いが分かったとしましょう。この時、これらの情報から元の $u(x,t)$ を復元できる事が知られており、これを逆散乱問題と言います。そしてこの散乱情報を Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式という積分方程式に埋め込むと、元のポテンシャル u が従う方程式が得られます。さらに無反射条件という条件を課しつつ、元の KdV 方程式の情報を用いると、最終的に $u(x,t)$ を構成できる事が知られています。なお、n-ソリトン解は、(離散) エネルギー固有値が n 個存在する事に対応し、パラメータ p_i はその固有値の値に、θ_i は線型結合の係数に対応しています。

最後に先ほどの τ 関数の行列式表示との関係について一言コメントしておきます。これは線形微分方程式を無限次元行列と見なし、Fourier 変換によって有限次元部分に還元した際有限次元行列部分の行列式が τ 関数に相当します。詳細は非自明なので、例えば『非線形波動』(和達三樹著) などを参照してください。このように、KdV 方程式の解が τ 関数を経て解析解を持つのには、数学的な背景が存在するから、という事実の雰囲気がお分かり頂けたかと思います。