Часть 1.

Вычисление определенных интегралов.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:
Изучение возможных путей для вычисления определенных интегралов с помощью компьютера.

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ:
1. Реализовать численное нахождение определённых интегралов от произвольной функции (квадратурные формулы треугольников, трапеций, Симпсона).
2. Выполнить тестирование на 8 различных тестовых интегралах. Сравнить погрешности полученных результатов. (Интегралы для точной оценки можно вычислить в ручную)
3. Построить графики функций и квадратур. Сравнить погрешности полученных для различного числа точек, разбивающих отрезок.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА:
1. Краткая постановка задачи.
2. Краткое описание выполнения задания.
3. Графики и результаты вычисления по всем заданиям.
4. Листинг программного кода и результатов работы программы.
5. Выполняемый exe файл, скомпилированный для запуска на неподготовленном компьютере. Инструкция пользователя.
6. Выводы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ:

Квадратурные формулы

Пусть на отрезке $\lfloor a,\ b \rfloor$ задана непрерывная функция *f(x)*. Разобьем отрезок $\lfloor a,\ b \rfloor$ на *n* частей: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Обозначим: $\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ldots$ В каждом из отрезков $\left[x_{i-1},\ x_i\right]$ возьмем по точке $\xi_i \in \left[x_{i-1},\ x_i\right]$.

Составим сумму:

$$S_n = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i .$$

Определение. Геометрически S_n есть алгебраическая сумма площадей прямоугольников, имеющих основания Δx_i и высоты $f(\xi_i)$. S_n называют *интегральной суммой* для *f(x)* на отрезке $\lfloor a,\ b \rfloor$. Если при любых разбиениях отрезка $\lfloor a,\ b \rfloor$ таких, что $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$, и при любом выборе точек ξ_i

интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ стремится к одному пределу *S*, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции *f(x)* на отрезке $\lfloor a,\ b \rfloor$ и $\int_a^b f(x)dx$.

Широко используемым методом приближенного вычисления определенного интеграла $J = \int_a^b f(x)dx$, является аппроксимация функции $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x) \cdot f(x_i) + r(x)$, где $r(x)$ – есть погрешность аппроксимации, с последующим интегрированием:

$$J = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot f(x_i) + R,\ C_i = \int_a^b \alpha_i(x)dx,\ \ R = \int_a^b r(x)dx.$$

Определение. Тогда $J = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot f(x_i)$ называется квадратурной формулой, которая называется точной, если ее остаточный член (погрешность) равен нулю.

Для построения квадратурной формулы вычисления определенного интеграла будем аппроксимировать функцию *f(x)* интерполяционным полиномом Лагранжа: $f(x) \sim L_n(x)$. При *n*=0, т.е. без разбиения исходного отрезка на части, полином Лагранжа имеет вид: $L_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),\ \ x \in [a,\ b]$, и $S = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ – формула серединных прямоугольников. Остаток при этом может быть найден как $R = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$.

Для повышения точности вычисления определенного интеграла следует разбить отрезок $\lfloor a,\ b \rfloor$ на *m* частей, длина каждой из которых $h = \frac{b-a}{m}$, тогда к каждой части применяем формулу серединных прямоугольников, и получаем: $S = \frac{b-a}{m}\left(f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + \ldots + f\left(a + \frac{2m-1}{2} \cdot h\right)\right)$ – *составная квадратурная формула прямоугольника*.

Погрешность которой имеет вид: $R = \frac{(b-a)^3}{24m^2} f''(\eta)$, откуда можно найти оценку погрешности $R \le \frac{(b-a)^3}{24} \cdot M \cdot h^2,\ \ M = \sup_{x \in [a,\ b]} |f''(x)|$ и сделать вывод, что при малых *h* формула имеет погрешность порядка $O(h^2)$.

Аналогично при n=1, можно получить *квадратурную формулу трапеции* $S=\frac{(b-a)}{2}\cdot\left(f(a)+f(b)\right)$ с погрешностью $R=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$, а *составная квадратурная формула трапеции* примет вид:

$$S=\frac{b-a}{2m}\left(f_0+2f_1+\ldots+2f_{m-1}+f_m\right),$$

а погрешность $R=-\frac{(b-a)^3}{12m^2}f''(\eta)$ и имеет порядок $O\left(h^2\right)$.

При n=2 функция на каждом промежутке аппроксимируется параболой , что приводит к *квадратурной формуле Симпсона*:

$$S=\frac{(b-a)}{6}\cdot\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right),$$

с погрешностью $R=-\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\cdot\frac{f^{IV}(\eta)}{90}$.

Делим отрезок на 2m частей, к каждой части применяем квадратурную формулу Симпсона, суммируем и получаем составную квадратурную формулу Симпсона:

$S=\frac{b-a}{6m}\left(f_0+f_{2m}+2\left(f_2+f_4+\ldots+f_{2m-2}\right)+4\left(f_1+f_3+\ldots+f_{2m-1}\right)\right)$ с погрешностью $R=-\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\cdot\frac{f^{IV}(\eta)}{90m^4}$ порядка $O\left(h^4\right)$, что на два порядка точнее более простых формул.