ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:
Заключается в изучении методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ:
1. Решить обыкновенное дифференциальное уравнение аналитически. Построить задачу Коши (тестовую). Проверить выполняется ли условие существования и единственности решения задачи.
2. Решить задачу Коши численно (двумя методами).
3. Сравнить результаты.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА:
1. Краткая постановка задачи.
2. Краткое описание выполнения задания.
3. Графики и результаты вычисления по всем заданиям.
4. Листинг программного кода и результатов работы программы.
5. Выводы. Уделить внимание сравнению погрешности при решении различными методами.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ:

Постановка задачи. Пусть поставлена следующая задача Коши:

$$\frac{du}{dx} = f(x,u), \quad x > 0, \quad u(0) = u_0, \qquad (1)$$

где *x*- аргумент неизвестной (искомой) функции *u*.

Мы будем заранее предполагать, что условия теоремы существования и единственности (функция *f*непрерывна по своим аргументам в замкнутой области, кроме того, функция в данной области удовлетворяет условию Липшица по переменной *u*), тогда через каждую точку (x_0,u_0) области проходит единственное решение задачи (1).

Необходимо ввести сетку по переменной x : $\varpi_\tau = \{x_n = n\tau, \ n = 0,1,2,\ldots\}$, часто сетка является равномерной, а $\tau > 0$ - шаг сетки (задается пользователем).

Функция *u(x)* – точное решение задачи (1), через $y_n = y(x_n)$ обозначается приближенное решение задачи. Приближенное решение является сеточной функцией, то есть определено только в точках сетки ϖ_τ.

Численные методы решения задачи Коши можно разделить на одношаговые (требуют "хранения" информации только на предыдущем шаге) и многошаговые (требуют "хранения" информации на нескольких предыдущих шагах).

Одношаговые разностные методы.

Определение. *Метод Эйлера (метод ломаных)* – один из самых простых (одношаговых) методов решения задачи (1). Для решения уравнения в задаче (1) заменяется на разностное:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} - f(x_n, y_n), \;\; n=0{,}1{,}2\ldots, \;\; y_0 = u_0 . \qquad (2)$$

Решение этого уравнения находится явным образом по рекуррентной формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(x_n, y_n), \;\; n=0{,}1{,}2\ldots, \;\; y_0 = u_0 .$$

Таким образом, получаем сеточную функцию являющуюся приближенным решением задачи (1).

В численных методах одним из основных является вопрос о сходимости решения. Под сходимостью приближенного метода решения для разностных методов понимают сходимость при $\tau \to 0$. Говорят, что метод сходится в точке *x*, если $|y_n - u(x_n)| \to 0$ при $\tau \to 0$ $(n \to \infty)$, $x_n = x$, где $x_n = \tau n = x$, ϖ_τ - последовательность сеток.

Определение. Метод сходится на отрезке, если он сходится в каждой точке этого отрезка. Метод имеет *p* - порядок точности, если существует такое *p*>0 такое, что $|y_n - u(x_n)| = O(\tau^p)$ при $\tau \to 0$. Погрешность метода $z_n = y_n - u(x_n)$, выражая y_n из этой формулы и подставляя в формулу (2), получим

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau} = f(x_n, u_n + z_n) - \frac{u_{n+1}-u_n}{\tau},$$

где правую часть можно представить в виде суммы двух функций:

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} + f(x_n, u_n) \quad \text{и} \quad \psi_n^{(2)} = f(x_n, u_n + z_n) - f(x_n, u_n).$$

Определение. Функция $\psi_n^{(1)}$ называется невязкой или погрешностью аппроксимации разностного уравнения (2) на решении исходного уравнения (1). Невязка - результат подстановки точного решения в левую часть разностного уравнения (2).

Определение. Разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если невязка стремится к нулю при $\tau \to 0$. Разностный метод имеет *p*-й порядок аппроксимации, если $\psi_n^{(1)} = O(\tau^p)$.

Метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации, что определяет большую погрешность при решении задачи, однако он является простым и наименее ресурсозатратным.

Определение. *Симметричная схема* может использоваться для повышения точности получаемого результата (в сравнении с методом Эйлера). Уравнение (1) заменяется разностным уравнением:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}-0.5\{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\}=0,\ \ n=0,1,2...,\ \ y_0=u_0.$$

Симметричная схема несколько сложнее в реализации, так как новое значение y_{n+1} определяется из уравнения:

$$y_{n+1}-0.5\tau\cdot f(x_{n+1},y_{n+1})=F_n,\ \ F_n=y_n+0.5\tau\cdot f(x_n,y_n).$$

Определение. Метод называется неявным. Даже если уравнение линейное и метод сводится к решению линейного алгебраического уравнения, вычисление решения требует больше ресурсов, чем метод Эйлера. Однако этот метод имеет второй порядок аппроксимации, поэтому его целесообразно применять, несмотря на то, что он сложнее.

Методы Рунге-Кутта позволяют повысить порядок точности аппроксимации и отличаются от разностных тем, что в них функции в правых частях (1) могут вычисляться не только в точках сетки, но и в некоторых промежуточных точках. Чаще всего рассматриваются методы второго, третьего и четвертого порядка аппроксимации.

Определение. Методы Рунге-Кутта обобщенно могут быть представлены следующим образом. Явный m-этапный метод основан на предположении, что решение $y_n=y(x_n)$ на предыдущем этапе уже известно. Задаются числовые коэффициенты a_i, b_{ij}, $i=2,3,\ldots,m,$ $j=1,2,\ldots,m-1$, σ_i, $i=1,2,\ldots,m$ и последовательно вычисляются значения функции:

$$k_1=f(x_n,y_n),\ \ k_2=f(x_n+a_2\tau,y_n+b_{21}\tau k_1),$$

$$k_3=f(x_n+a_3\tau,y_n+b_{31}\tau k_1+b_{32}\tau k_2),\ \ldots,$$

$$k_m=f(x_n+a_m\tau,y_n+b_{m1}\tau k_1+b_{m2}\tau k_2+\ldots+b_{m,m-1}\tau k_{m-1}),$$

а затем из формулы $\dfrac{y_{n+1}-y_n}{\tau}=\sum\limits_{i=1}\sigma_i k_i$ находится новое значение $y_{n+1}=f(x_{n+1})$. Коэффициенты a_i, b_{ij}, σ_i влияют на точность и соответствующим образом выбираются.

Формулу для двухэтапного метода Рунге-Кутта второго порядка аппроксимации можно записать следующим образом:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}=(1-\sigma)f(x_n,y_n)+\sigma f(x_n+a\tau,y_n+a\tau f(x_n,y_n)),\ \ где\ \sigma a=0.5.$$

Например, если взять $\sigma=1,$ $a=0{,}5$ получим, так называемый метод *предиктор-корректор* - метод второго порядка точности.

Формулы для метода Рунге-Кутта третьего порядка аппроксимации (один из вариантов) записываются в виде:

$$k_1 = f(x_n, y_n),\ \ k_2 = f(x_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1),$$

$$k_3 = f(x_n + \tau, y_n - \tau k_1 + 2\tau k_2),\ \ \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3).$$

Возможен и другой вариант:

$$k_1 = f(x_n, y_n),\ \ k_2 = f(x_n + \frac{\tau}{3}, y_n + \frac{\tau}{3}k_1),$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{2}{3}\tau, y_n + \frac{2\tau k_2}{3}),\ \ \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3).$$

Формулы для метода Рунге-Кутта четвертого порядка аппроксимации (один из вариантов) представляются:

$$k_1 = f(x_n, y_n),\ \ k_2 = f(x_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1),\ \ k_3 = f(x_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + \tau, y_n + \tau k_3),\ \ \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Возможен и другой вариант:

$$k_1 = f(x_n, y_n),\ \ k_2 = f(x_n + \frac{\tau}{4}, y_n + \frac{\tau}{4}k_1),\ \ k_3 = f(x_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + \tau, y_n + \tau k_1 - 2\tau k_2 + 2\tau k_3),\ \ \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4).$$

Доказано, что порядок аппроксимации для методов Рунге-Кутта совпадает с порядком точности. Таким образом методы Рунге-Кутта позволяют численно решать задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно простым способом.

Многошаговые разностные методы.

Рассматривается задача (1.2.1), вводится сетка $\varpi_\tau = \{x_n = n\tau,\ \ n = 0,1,2,\ldots\}$ с постоянным шагом $\tau > 0$, $y_n = y(x_n)$, $f_n = f(x_n, y_n)$. Линейным m-шаговым разностным методом называется система разностных уравнений

$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_m y_{n-m}}{\tau} = b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + \ldots + b_m f_{n-m},\ \ n = m, m+1, \ldots$$

,

где a_k, b_k - числовые коэффициенты не зависящие от n, k=0,1,...,m, причем $a_0 \neq 0$. Последнее уравнение нужно рассматривать как рекуррентное соотношение, выражающее новое значение через найденные ранее значения сеточной функции. Расчет начинается с номера n=m. Одно из значений y_0 задано в (1), остальные - y_1, $y_2, \ldots$, y_{m-1}-можно вычислить другими методами, например, методом Рунге-Кутта. многошаговые разностные методы допускают вычисление правых частей только в точках сетки.

Метод является явным, если $b_0 = 0$, следовательно, искомое значение y_n выражается явным образом через y_{n-1}, $y_{n-2}, \dots$, y_{n-m}. Иначе метод является неявным и для поиска искомого значения необходимо решать нелинейное уравнение. Это уравнение обычно решают методом Ньютона.

Частный случай многошаговых методов - методы Адамса, получившие широкое распространение на практике, имеют вид:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \sum_{k=0}^{m} b_k f_{n-k} \,.$$

Наивысший порядок аппроксимации линейного m-шагового метода Адамса равен $m+1$, для явного метода Адамса - m.

Таким образом, для получения решения задачи Коши для ОДУ существует несколько численных методов, позволяющих получить сеточную функцию. Методы отличаются порядком точности получаемого решения: для повышения порядка точности могут быть использованы неявные схемы, увеличивать количество шагов при вычислении результата.

Выше были описаны обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. При необходимости численно решать задачу Коши для ОДУ более высокого порядка задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1). При этом решение ведется последовательно по всем уравнениям, входящим в систему и поэтапно для выбранного метода решения.

СПИСОК ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ КОШИ:

1. $xy' + x^2 + xy - y = 0$
2. $2xy' + y^2 = 1$
3. $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$
4. $(xy' + y)^2 = x^2 y'$
5. $y - y' = y^2 + xy'$
6. $(x + 2y^3)y' = y$
7. $y'^3 - y'e^{2x} = 0$
8. $x^2 y' = y(x + y)$
9. $(1 - x^2)dy + xydx = 0$
10. $y'^2 + 2(x - 1)y' - 2y = 0$
11. $y + y' \ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$
12. $x^2 y' - 2xy = 3y$
13. $x + yy' = y^2(1 + y'^2)$
14. $y = (xy' + 2y)^2$

15. $y' = \dfrac{1}{x - y^2}$

16. $y'^3 + (3x - 6)y' = 3y$

17. $x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2}{y}$

18. $2y'^3 - 3y'^2 + x = y$

19. $(x + y)^2 y' = 1$

20. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 7 = 0$

21. $\dfrac{dx}{x} = \left(\dfrac{1}{y} - 2x\right)dy$

22. $xy' = e^y + 2y'$

23. $2(x - y^2)dy = ydx$

24. $x^2 y'^2 + y^2 = 2x(2 - yy')$

25. $dy + (xy - xy^3)dx = 0$

26. $2x^2 y' = y^2(2xy' - y)$

27. $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2$

28. $x(x-1)y' + 2xy = 1$

29. $xy(xy' - y)^2 + 2y' = 0$

30. $(1 - x^2)y' - 2xy^2 = xy$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Дайте определение численного метода решения ОДУ.
2. Сравните различные методы решения поставленной задачи с точки зрения оценки накапливаемой погрешности.
3. Проверьте, будет ли вторым порядок аппроксимации в симметричной схеме.
4. Приведите примеры явных и неявных методов решения поставленной задачи, укажите достоинства и недостатки.