ch05 sec5.4 定积分定理

Table of Contents

Theorem

积分极限的定理5.2:

$$1. \int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$2. \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Theorem

积分极限的定理5.3:

加法和常数倍乘特性

$$1. \int_{a}^{b}(f(x)\pm g(x))dx=\int_{a}^{b}f(x)dx \pm \int_{a}^{b}g(x)dx$$

$$2. \int_{a}^{c}cf(x)dx=c\int_{a}^{b}f(x)dx$$

```
md"""
!!! theorem
    积分极限的定理5.3:

    加法和常数倍乘特性

    $1. \int_{a}^{b}(f(x)\pm g(x))dx=\int_{a}^{b}f(x)dx \pm \int_{a}^{b}g(x)dx$

    $2.  \int_{a}^{c}cf(x)dx=c\int_{a}^{b}f(x)dx$

"""
```

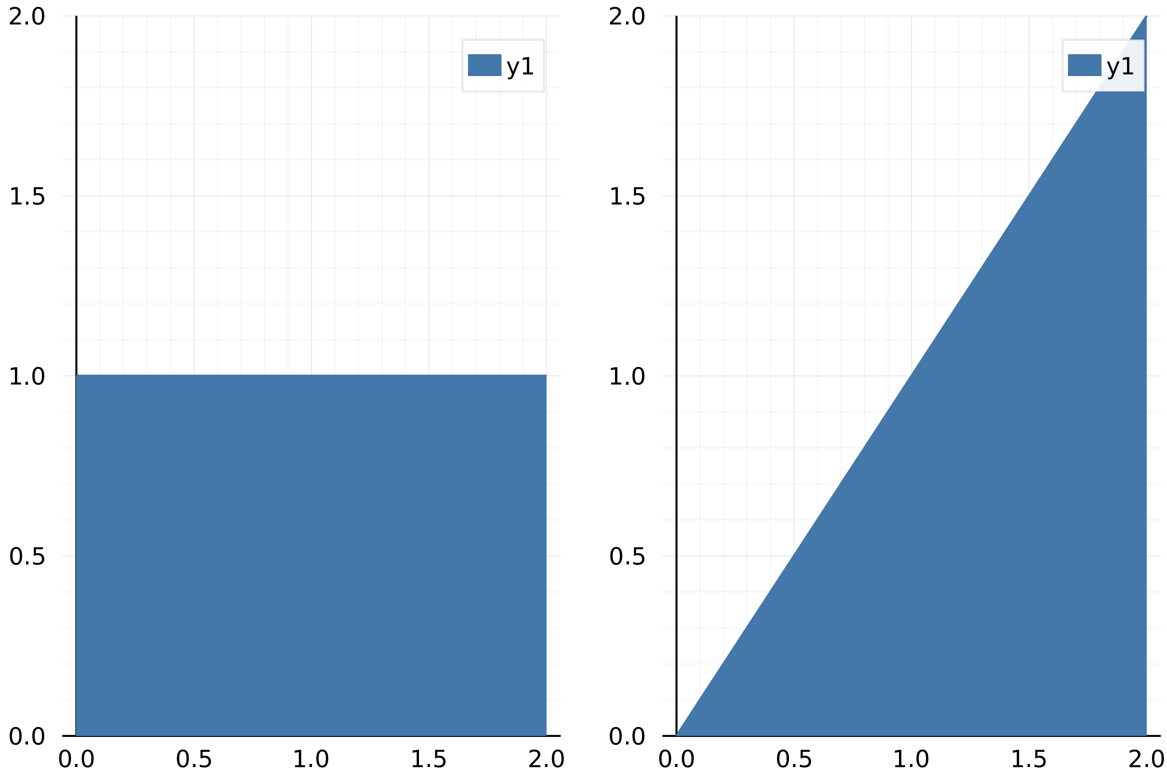
Example

example1 :估计 $\int_{0}^{2}(1+3x)dx$ 的值

利用加法和乘法定理:

$$\int_{0}^{2}(1+3x)dx=\int_{0}^{2}1dx+3\int_{0}^{2}xdx$$

```
md"""
!!! example
    example1 :估计 $\int_{0}^{2}(1+3x)dx$ 的值

利用加法和乘法定理:

$\int_{0}^{2}(1+3x)dx=\int_{0}^{2}1dx+3\int_{0}^{2}xdx$

"""
```




```
let
     f1(x)=1
     f2(x)=x
     f(x)=f1+f2
     tspan=0:0.02:2
      p1=areaplot(f1,tspan, lable=L"f(x)=1",frame=:semi)
      p2=areaplot(f2,tspan, lable=L"f(x)=x",frame=:semi)
      plot!(p1,p2,frame=:zerolines,ylims=(0,2))
end
```

8.012

```
let
    f1(x)=1
    f2(x)=x
    a=0
    b=2
    n=500
    sum1=getRiemannSum(a,b,n,f1)

    sum2=getRiemannSum(a,b,n,f2)

    total=sum1["rightsums"]+3*sum2["rightsums"]
    @show total
end
```

```
total = 8.012
```

曲线之间的面积

Note

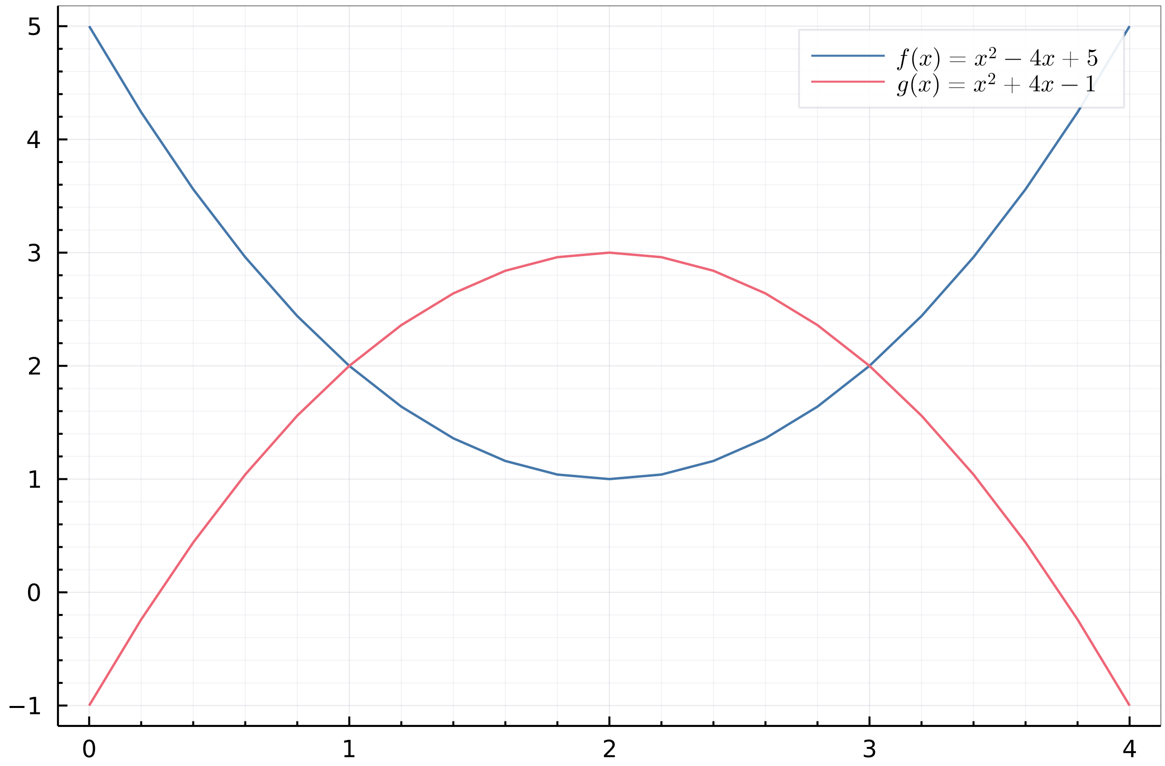
曲线之间的面积是积分之差 对于 $x \in [a,b], f和g之间的面积表示为:$

$$AD=\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))dx$$

Example

example3 找面积差异

```
md"""
## 曲线之间的面积

!!! note
    曲线之间的面积是积分之差
    对于 $x \in [a,b], f 和 g 之间的面积表示为:$

    $AD=\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))dx$

!!! example
    example3
    找面积差异
"""
```




```julia
let
    f(x)=x^2-4x+5
    g(x)=-x^2+4x-1

    tspan=0:0.2:4
    tspan2=1:0.1:3
    #low=[[t f(t)] for t in tspan2]
    #upper=[[t g(t)] for t in tspan2]
    plot([f,g],tspan,label=[L"f(x)=x^2-4x+5" L"g(x)=x^2+4x-1"],frame=:semi)


end
```

```
Dict("rightsums" ⇒ 2.6666, "leftsum" ⇒ 2.6666)
```

```julia
let
    a=1  #由两个函数相等求出
    b=3  #由两个函数相等求出
    n=250
    f1(x)=x^2-4x+5
    f2(x)=-x^2+4x-1
    diff(x)=f2(x)-f1(x)
    sum=getRiemannSum(a,b,250,diff)
    @show sum
end
```

```
sum = Dict("rightsums" => 2.6666, "leftsum" => 2.6666)
```

用函数对称性求积分

Note

如果函数是偶函数, 关于y轴对称, 那么有:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

如果函数是奇函数, 关于原点对称,那么有:

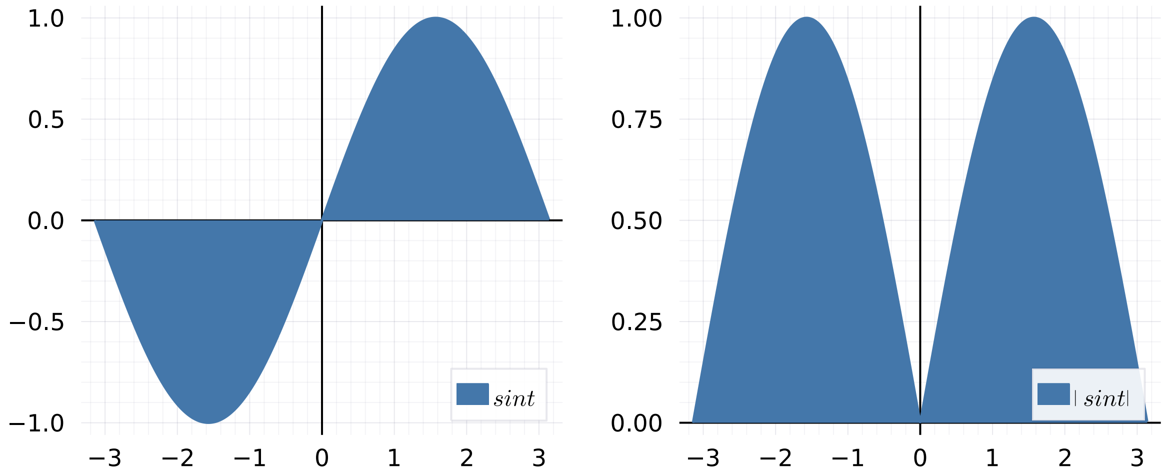
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Example

example 4

$\int_{0}^{\pi} sin(t)dt = 2$,求$\int_{-\pi}^{\pi} sin(t)dt$,$\int_{-\pi}^{\pi} \left| sint \right| dt$

```
md"""
## 用函数对称性求积分

!!! note
    如果函数是偶函数, 关于$y$轴对称, 那么有:

    $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$
    如果函数是奇函数, 关于原点对称,那么有:

    $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$


!!! example
    example 4

     $\int_{0}^{π}sin(t)dt=2$,求$\int_{-π}^{π}sin(t)dt$,$\int_{-π}^{π}\left | sint \right |dt$

"""
```




```
let
    tspan=-π:0.02:π
    f1(t)=sin(t)
    f2(t)=abs(sin(t))
    areaplot([f1,f2],tspan, layout=(1,2), label=[L"sint" L"\left|sint
    \right|"],frame=:zerolines,size=(600,250),legend=:bottomright)
end
```

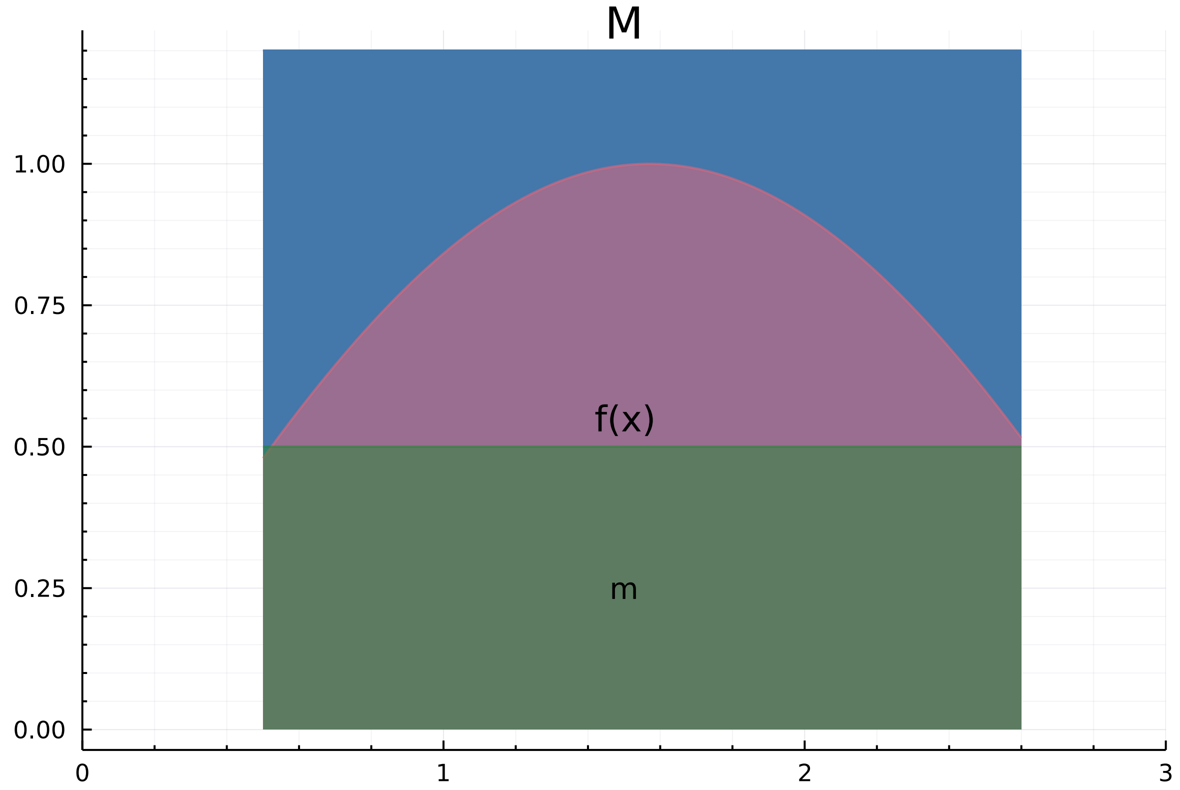
可以看到 $\int_{-\pi}^{\pi} sin(t)dt = 0$

而 $\int_{-\pi}^{\pi} |sint|dt = 2\int_0^{\pi} sin(t)dt = 4$

比较积分

有时会对于复杂的函数变化, 我们可以简单的变化形式设定上界和下界来估计它的积分.

```
md"""
## 比较积分

有时会对于复杂的函数变化， 我们可以简单的变化形式设定上界和下界来估计它的积分.
"""
```



上图中, 红色部分的积分面积比 m 大, 比 M 小

```
getRiemannSum (generic function with 1 method)
```

```
begin
    function getRiemannSum(a,b,n,func)
            a=a
            b=b
            n=n
            Δt=(b-a)/n
            tspan=a:Δt:b
            f=func
            len=size(tspan)[1]
            getnewarr(arr)=[f(t)*Δt for t in arr]     #计算每一个Δt 的值
            getsums(arr)=sum(arr)                     #求和
            get4digits(num)=round(num,digits=4)       #保留小数
            pipeline(arr)=arr|>getnewarr|> getsums|> get4digits  # 拼接管道操作
            res= Dict(
                "leftsum"=>pipeline(tspan[1:len-1]),
                "rightsums"=>pipeline(tspan[2:len]),

            )
            #@show res
            return res
     end
end
```