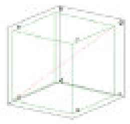


ch04 sec4.1 一阶导数和二阶导数的应用

Table of Contents

导数能告诉我们一些函数和图形的信息

导数反映的就是函数局部的一些变化性质,如果获取的导数数据足够多, 我们就能够推断出函数的整体特征来.

- 如果在区间内 $f' > 0$, 函数单调递增
- 如果在区间内 $f' < 0$, 函数单调递减
- 如果在区间内 $f'' > 0$ 则函数开口向上
- 如果在区间内 $f'' < 0$ 则函数开口向下

Example

example1:

利用一阶和二阶导数分析函数

$$f(x)=x^3-9x^2-48x+52$$

的情况

```
md"""
!!! example

    example1:

    利用一阶和二阶导数分析函数


    $$f(x)=x^3-9x^2-48x+52$$
    的情况


"""
```

函数的导函数为:

$$f'(x)=3x^2-18x-48$$

通过因式分解求根:

$$3(x+2)(x-8)=0 \text{ 所以 } x_1=-2,x_2=8$$

为了研究导数的变化, 我们在-2,0,8 划分的区间里看看导数的值

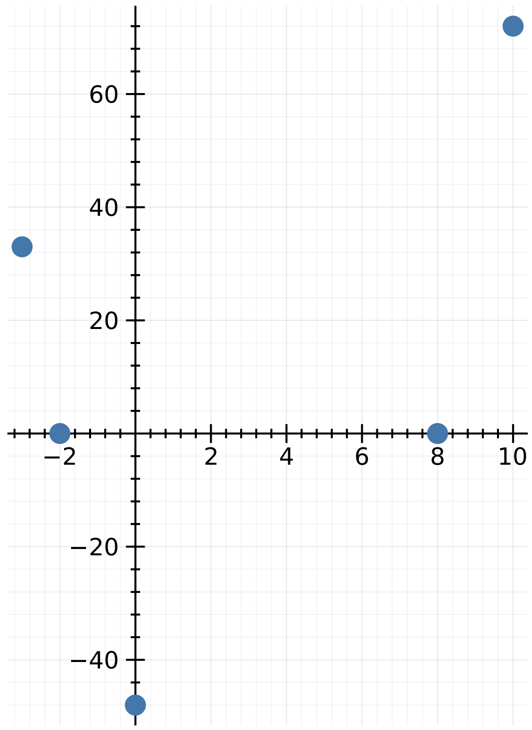
取 -3,-2,0,8,10

```
md"""
   函数的导函数为:

$$f'(x)=3x^2-18x-48$$
   通过因式分解求根:

$$3(x+2)(x-8)=0  所以 x_1=-2,x_2=8$$

为了研究导数的变化, 我们在-2,0,8 划分的区间里看看导数的值

取  -3,-2,0,8,10

"""
```

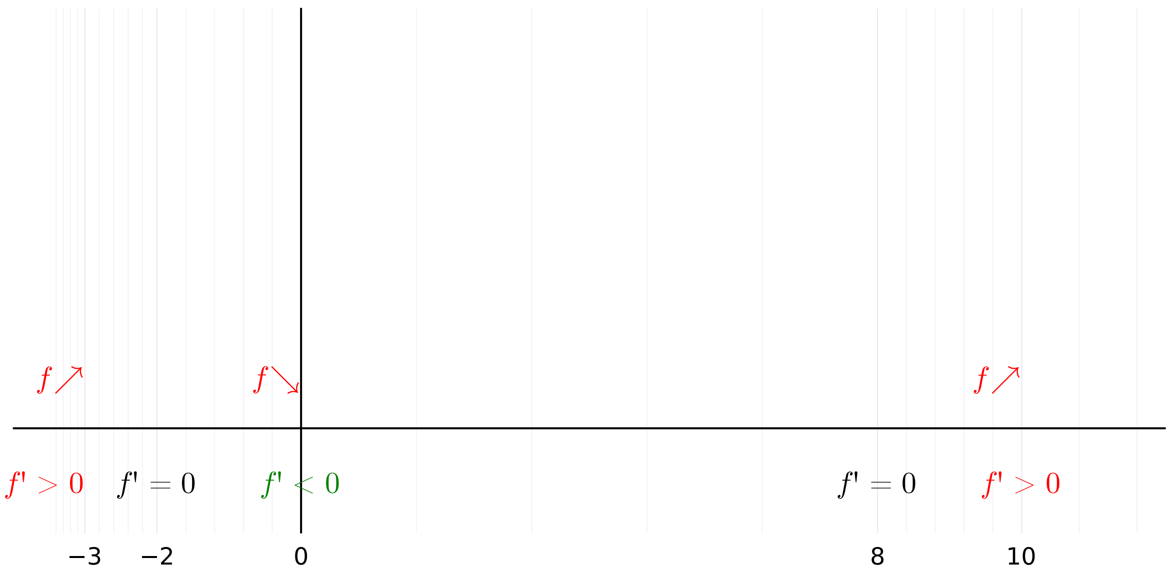
	x	value
1	-3	33
2	-2	0
3	0	-48
4	8	0
5	10	72

```
let

    y(x) =x^3-9x^2-48x+52
    dy(x)=3x^2-18x-48
    spots=[-3,-2,0,8,10]
    val=[dy(x) for x in spots]
    df=DataFrame(;x=spots,value=val)


end
```

	x	value
1	-3	33
2	-2	0
3	0	-48
4	8	0
5	10	72




```julia
let
    img =
    download("https://tva1.sinaimg.cn/mw690/e6c9d24egy1h2xq2o3crxj20800byaa1.jpg")
    pic=load(img);
    dy(x)=3x^2-18x-48
    spots=[-3,-2,0,8,10]
    val=[dy(x) for x in spots]
    p1= plot(pic,size=(300,300),xticks=:none,yticks=:none) # 表格图片最为绘图
    p2= scatter(spots,val,frame=:origin,label=false)
    plot!(p1,p2)

end
```



导数表示了变化率,

1. 当 $x=-3, f'>0$, 所以 f 递增
2. 当 $x=-2, f'=0$, 所以 f 停止增加
3. 当 $x=0, f'<0$, 所以 f 值处在减小过程中
4. 当 $x=8, f'=0$, 所以 f 值处在减小过程停止
5. 当 $x=10, f'>0$, 所以 f 值处在增加过程中

根据以上五点的文字描述, 我们已经可以大概描绘出函数的图形草图了, 这个变化趋势草图可能对任何满足这个模式的函数都管用, 如果我们有函数点的取值数据, 结合导数变化规律, 就可以画出确定的函数图. 微分方程中的初值问题就是这个解决办法.

```
md"""
 导数表示了变化率,
 1. 当 $x=-3,f'>0, 所以f 递增$
 2. 当 $x=-2,f'=0, 所以f 停止增加$
 3. 当 $x=0,f'<0, 所以f 值处在减小过程中$
 4. 当 $x=8,f'=0, 所以f 值处在减小过程停止$
 5. 当 $x=10,f'>0, 所以f 值处在增加过程中$

 根据以上五点的文字描述, 我们已经可以大概描绘出函数的图形草图了, 这个变化趋势草图可能对任何满足这个模式的函数都管用, 如果我们有函数点的取值数据, 结合导数变化规律,就可以画出确定的函数图. 微分方程中的初值问题就是这个解决办法.
"""
```

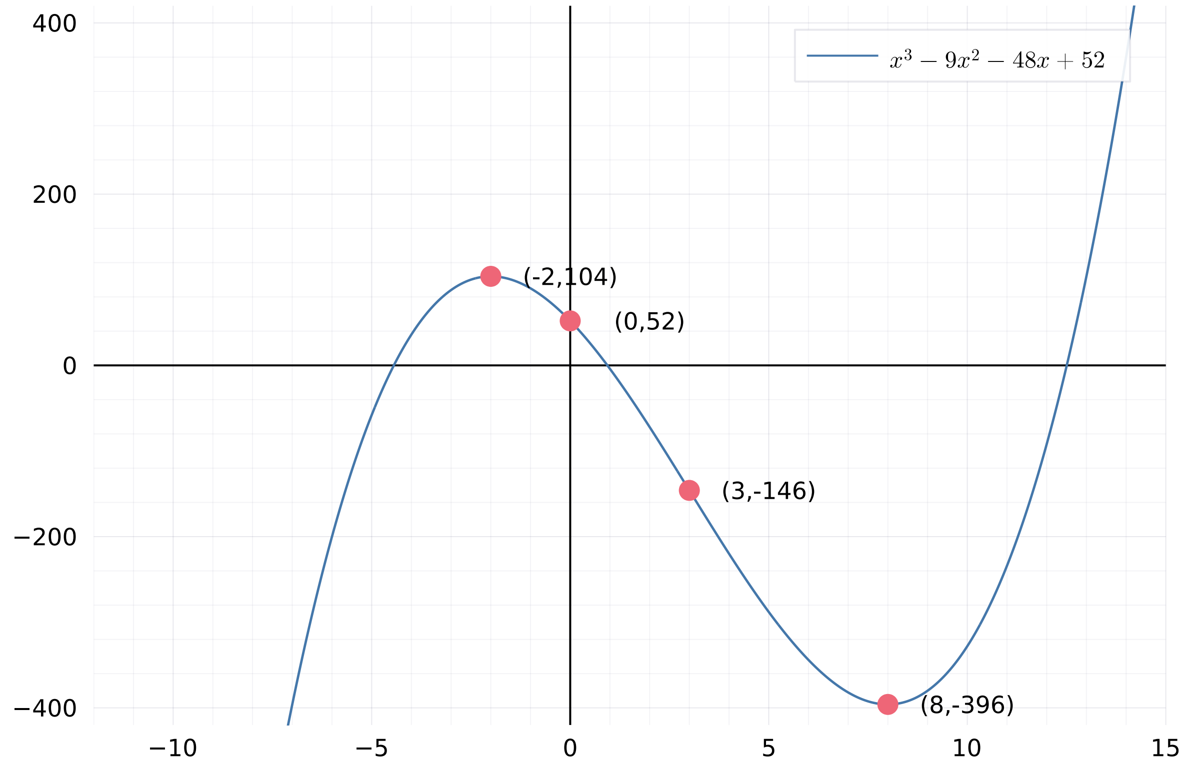
再来看看函数的凸凹性 二阶导数为

$$f''(x)=6x-18$$

当$x>3$ 时, $f''>0$, 当$x<3$ 时, f ”<0 ”

因此 $x<3$ 开口向下,x>3$ 开口向上 $x=3$ 是一个特殊的点,要给予特别关注

```
md"""
再来看看函数的凸凹性
二阶导数为

$$f''(x)=6x-18$$

当$x>3 时, f''>0$, 当$x<3 时, f"<0"$

因此 $x<3 开口向下, $x>3$ 开口向上 $x=3$ 是一个特殊的点,要给予特别关注

"""
```




```
let
    xoffset=2  #标注的偏移,目的不要和曲线重叠
    tspan=-10:0.02:20
    spots=[-2,0,3,8]
    f(x)=x^3-9x^2-48x+52
    val=[f(x) for x in spots]
    plot(f,tspan,frame=:zerolines,xlims=(-12,15),ylims=(-420,420),
     label=L"x^3-9x^2-48x+52")
    makeann(x)=(x+xoffset,f(x),text("($(x),$(f(x)))",pointsize=8)) #生成标注的方法
    ann=[makeann(x) for x in spots]
    scatter!(spots,val,ms=6,label=false,ann=ann)

end
```

局部最小值和最大值

Definition

假定p 位于f 的定义域:

- 如果在p 附近没有函数值比$f(p)$ 更小, 这个点的函数值就是局部最小
- 如果在p 附近没有函数值比$f(p)$ 更大, 这个点的函数值就是局部最大

这里讨论的是局部的问题, 不是全局问题, 现在我们仍然是在一个很小的区间内研究函数的性质.

两个值统称为极值.

```
md"""
## 局部最小值和最大值

!!! definition
    假定$p$ 位于$f$ 的定义域:

    - 如果在$p$ 附近没有函数值比$f(p)$ 更小, 这个点的函数值就是局部最小
    - 如果在$p$ 附近没有函数值比$f(p)$ 更大, 这个点的函数值就是局部最大

    这里讨论的是局部的问题, 不是全局问题, 现在我们仍然是在一个很小的区间内研究函数的性质.

    两个值统称为极值.

"""
```

如何寻找 局部最大和最小值?

在上面的实例函数 $x^3-9x^2-48x+52$的导数为 0 的位置时是寻找极值的关键

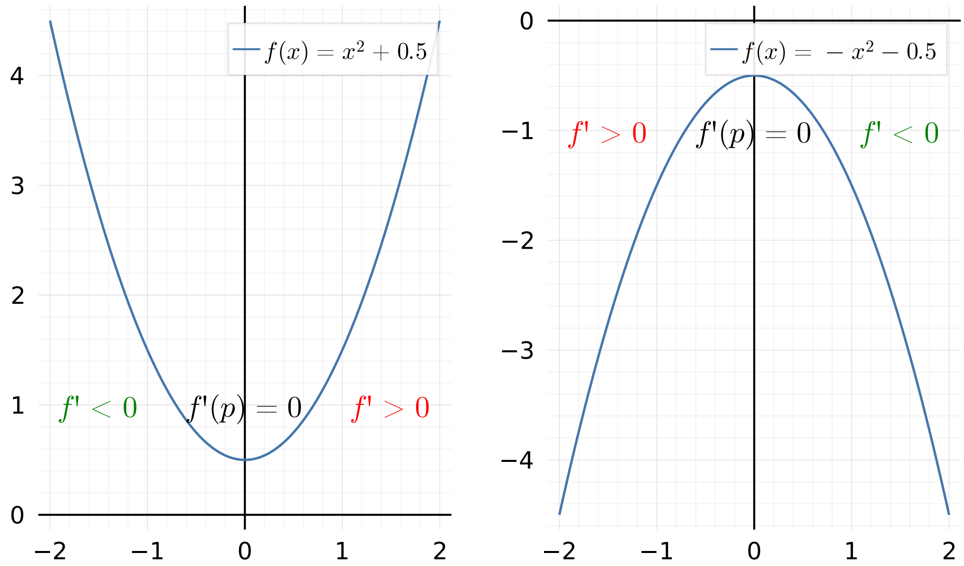
Definition

对于函数 定义域中对应f, $f'=0$,$f'=undefined$的点 称为函数的临界点(critical point)

检测临界点的极值

- 如果一阶导数在临界点从$+$ 变$-$, 在该临界点有最小值
- 如果一阶导数在临界点从$-$ 变$+$, 在该临界点有最大值

```
md"""
## 如何寻找 局部最大和最小值?

在上面的实例函数 $x^3-9x^2-48x+52$的导数为 $0$ 的位置时是寻找极值的关键

!!! definition
    对于函数 定义域中对应$f$, $f'=0$,$f'=undefined$的点 称为函数的临界点(critical point)


## 检测临界点的极值

 - 如果一阶导数在临界点从$+$ 变$-$, 在该临界点有最小值
 - 如果一阶导数在临界点从$-$ 变$+$, 在该临界点有最大值


"""
```




```
let
    tspan=-2:0.02:2
    f(x)=x^2+0.5
    g(x)=-f(x)
    ann1=[
        (-1.5,1,text(L"f'<0",pointsize=10,color=:green)),
        (0,1,text(L"f'(p)=0",pointsize=10,color=:black)),
        (1.5,1,text(L"f'>0",pointsize=10,color=:red))
        ]
    ann2=[
        (-1.5,-1,text(L"f'>0",pointsize=10,color=:red)),
        (0,-1,text(L"f'(p)=0",pointsize=10,color=:black)),
        (1.5,-1,text(L"f'<0",pointsize=10,color=:green))
    ]
    p1=plot(f,tspan ,label=L"f(x)=x^2+0.5",frame=:zerolines,ann=ann1,size=(500,300))
    p2=plot(g,tspan ,label=L"f(x)=-x^2-0.5",frame=:zerolines,ann=ann2,size=(500,300))
    plot(p1,p2)

end
```

上图中:左负有正,极小. 左正右负,极大.

```
md"""
上图中:左负有正,极小. 左正右负,极大.
"""
```

Example

example1 用绘图研究一下函数

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$$

的极值问题

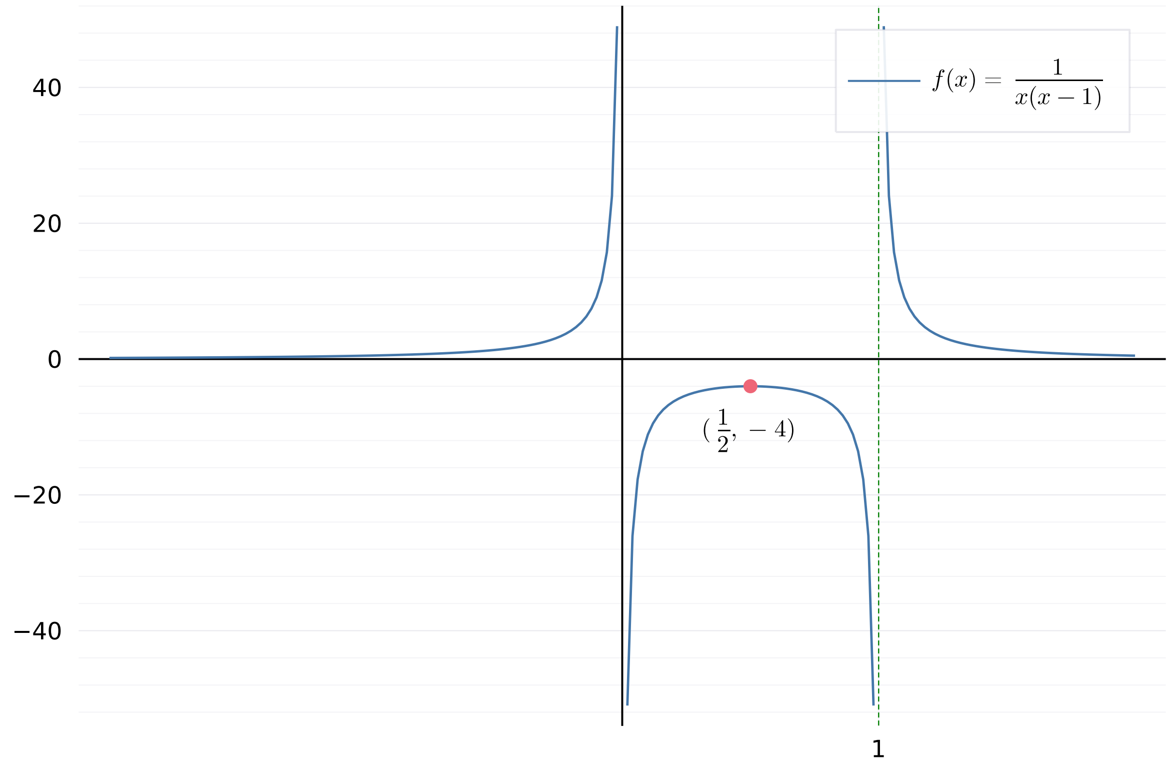
```
md"""
!!! example
    example1  用绘图研究一下函数

    $$f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$$ 的极值问题
"""
```

导数:

$$f'(x)=-\frac{2x-1}{(x^2-x)^2}$$

当$2x-1=0$ 时, $f'(p)=0$ 所以 $p=\frac{1}{2}$ 是临界点

```
md"""
 导数:

$f'(x)=-\frac{2x-1}{(x^2-x)^2}$

当$2x-1=0$ 时, $f'(p)=0$  所以  $p=\frac{1}{2}$ 是临界点

"""
```




```
let
    tspan=-2:0.02:2
    hspan=-45:0.02:45
    f(x)=1/(x*(x-1))
    ann=[
        (0.5,-10,text(L"(\frac{1}{2},-4)",pointsize=8))
    ]
    plot(f,tspan,label=L"f(x)=\frac{1}{x(x-1)}",frame=:zerolines)
    scatter!([0.5],[-4],label=false,ann=ann,ms=4)
    vline!([1],label=false,color=:green,lw=0.6,ls=:dash,xticks=[1])


end
```

从图像可知, 左侧 $f'(x)=2x-1<0$, 右侧 $f'(x)=2x-1>0$,所以函数在$(\frac{1}{2},-4)$ 是局部极大值

没有极小值(极值指的是一个确定的值),极值也是度量函数性质的一个指标,所以它是确定的

在数学中, 一个对象性质的度量, 在确定的度量空间下,获取的值是唯一的, 因为在一个时间点,对象的物理性质不会变, 这也就是函数的定义, 一个定义域的值对应一个值域中的值

```
md"""
从图像可知， 左侧 $f'(x)=2x-1 <0$,
右侧 $f'(x)=2x-1 >0$,所以函数在$(\frac{1}{2},-4)$ 是局部极大值

没有极小值(极值指的是一个确定的值),极值也是度量函数性质的一个指标,所以它是确定的

**在数学中, 一个对象性质的度量, 在确定的度量空间下,获取的值是唯一的, 因为在一个时间点,对象的物理性质不会变, 这也就是函数的定义, 一个定义域的值对应一个值域中的值**
"""
```

Example

example3 用绘图研究一下函数

$$f(x)=sinx+2 e^x$$

的极值问题

```
md"""
!!! example
    example3  用绘图研究一下函数

    $$f(x)=sinx+2 e^x$$ 的极值问题

"""
```

$$f(x)$$

导数为：

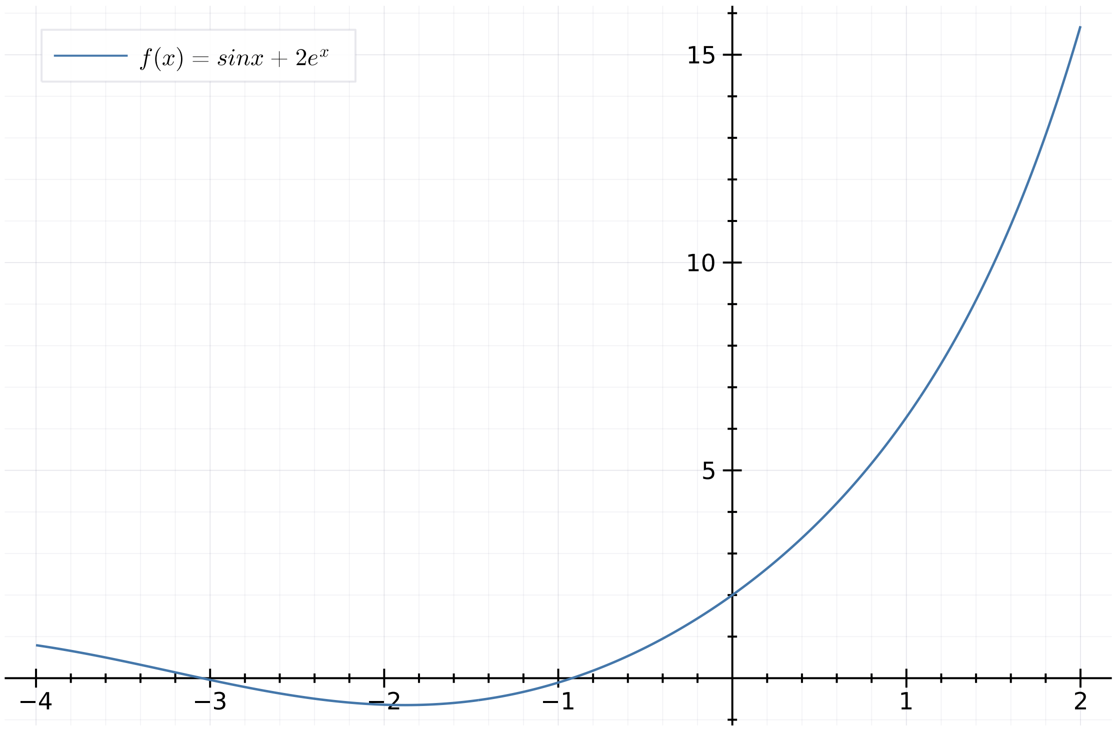
$$f'(x)=cosx+2 e^x$$

$cosx$ 的值域为$[-1,1]$, $2 e^x$ 的值 始终>2, 所以$f(x)' \neq 0$ 不存在临界点

```
md"""
$f(x)$  导数为 ：

$$f'(x)=cosx+2 e^x$$

 $cosx$ 的值域为$[-1,1]$, $2 e^x$ 的值 始终>2, 所以$f(x)' \neq 0$   不存在临界点
"""
```

-4

```
@bind lhs Slider(-15:-3,default=-4,show_value=true)
```




```
let
    tspan=lhs:0.02:2   #函数绘图的左边界从上面的Slider获得
    f(x)=sin(x)+2*e^x
    plot(f,tspan, label=L"f(x)=sinx+2e^x",frame=:origin,legend=:topleft)
end
```

用二阶导数判断极值

> Note
>
> - 如果 $f'(p)=0$,并且 $f''(p)>0$ 函数在p 点有局部最小值
> - 如果 $f'(p)=0$,并且 $f''(p)<0$ 函数在p 点有局部最大值
> - 如果 $f'(p)=0$,并且 $f''(p)=0$ 无法得出有用结论

```
md"""
## 用二阶导数判断极值

!!! note
    - 如果 $f'(p)=0$ ,并且 $f''(p)>0$  函数在p 点有局部最小值
    - 如果 $f'(p)=0$ ,并且 $f''(p)<0$  函数在p 点有局部最大值
    - 如果 $f'(p)=0$ ,并且 $f''(p)=0$  无法得出有用结论


"""
```