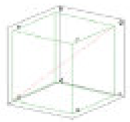

```
PlutoUI.Resource("https://tva1.sinaimg.cn/thumbnail/e6c9d24egy1h2alsw1tzxj20m80gomxn.jpg")
```

ch09 sec9.2 几何级数

```
md"""
# ch09 sec9.2 几何级数
"""
```

Table of Contents

read (generic function with 1 method)

```
begin
    datacollection=Dict()

    function save(key::String, dict::Dict)
        return merge!(datacollection,Dict(key=>dict))
    end

    function read(key::String)
        return  datacollection[key]
    end
end
```

序列的各项相加就得到级数(series)

反复用药的剂量问题

耳部感染的病人遵医嘱, 需要在治疗期间多次服药, 在两次服药期间,部分药物会被身体排出体外, 如何计算某个时刻体内的药物浓度?

来看实例, 假设服用的氨苄西林, 一天要服四次, 每次$250mg$.经过实验已经知道了,经过 6 小时, 体内还有4%的药物,问题: 服用第 10 剂的时候,体内药物还有多少, 第14剂药物还有多少?

假设用Q_n 代表药物的服用第n 剂药物时体内药物的量

$$Q_1 = 250mg$$

$$Q_2 = \overbrace{\text{第 1 剂}}^{250(0.04)} + \overbrace{\text{新服用的药物}}^{250} = 260mg$$

$$Q_3 = Q_1(0.04)^2 + Q_2(0.04) + 250 = \overbrace{\text{第 1,2 剂的剩余量}}^{250(0.04)^2+250(0.04)} + \overbrace{\text{新服用的药物}}^{250} = 260.4mg$$

$$Q_4 = \overbrace{\text{第 1,2,3 剂的剩余量}}^{250(0.04)^3+250(0.04)^2+250(0.04)} + \overbrace{\text{新服用的药物}}^{250} = 260.416mg$$

可以看到模式为:

$$Q_{10} = 250(0.04)^9 + 250(0.04)^8 + \ldots + 250(0.04)^2 + 250(0.04) + 250$$

每片药物进入身体的时间点不同, 各个药片是独立随着时间演进被身体排出体外的, 所以总的药物剂量是各个不同时间点服药药物的线性组合. 这也是线性组合的意义, 每个药片之间是线性无关的.

下面是一点代数技巧.

当等式两边同乘以0.04时得到:

$$Q_{10} = 250(0.04)^9 + 250(0.04)^8 + \ldots + 250(0.04)^2 + 250(0.04) + 250$$

$$(0.04)Q_{10} = 250(0.04)^{10} + 250(0.04)^9 + \ldots + 250(0.04)^3 + 250(0.04)^2 + 250(0.04)$$

两式相减得到:

$$Q_{10} - 0.04Q_{10} = 250 - 250(0.04)^{10}$$

移项化简得:

$$Q_{10} = \frac{250(1-0.04^{10})}{1-0.04}$$

所以Q_{40} 为:

$$Q_{40}=\frac{250(1-0.04^{40})}{1-0.04}$$

Q_n通项式为:

$$Q_n=\frac{250(1-0.04^{n})}{1-0.04}$$

当$n\rightarrow +\infty$时 计算如下

```
md"""
 序列的各项相加就得到级数(series)

## 反复用药的剂量问题

耳部感染的病人遵医嘱, 需要在治疗期间多次服药, 在两次服药期间,部分药物会被身体排出体外, 如何计算某个时刻体内的药物浓度?

来看实例, 假设服用的氨苄西林, 一天要服四次, 每次$250mg$.经过实验已经知道了,经过 $6$ 小时, 体内还有$4\%$的药物,问题: 服用第 $10$ 剂的时候,体内药物还有多少, 第$14$剂药物还有多少?


假设用$Q_n$ 代表药物的服用第$n$ 剂药物时体内药物的量

$\begin{align*}
Q_1 &=  250mg
\end{align*}$

$Q_2=\begin{align*}
\overset{\underbrace{250(0.04)}}{第1剂}+\overset{\underbrace{250}}{新服用的药物} &= 260 mg
\end{align*}$

$Q_3=\begin{align*}
Q_1(0.04)^2+Q_2(0.04)+250
&
= \overset{\underbrace{250(0.04)^2+250(0.04)}}{第1,2剂的剩余量}+\overset{\underbrace{250}}{新服用的药物}=260.4mg
\end{align*}$


$Q_4=\begin{align*}
\overset{\underbrace{250(0.04)^3+250(0.04)^2+250(0.04)}}{第 1,2,3剂的剩余量}+\overset{\underbrace{250}}{新服用的药物}
&
= 260.416mg
\end{align*}$

可以看到模式为:

$Q_{10}=250(0.04)^9+250(0.04)^8+...+250(0.04)^2+250(0.04)+250$


每片药物进入身体的时间点不同, 各个药片是独立随着时间演进被身体排出体外的, 所以总的药物剂量是各个不同时间点服药药物的线性组合. 这也是线性组合的意义, 每个药片之间是线性无关的.

```

- 下面是一点代数技巧.
-
- 当等式两边同乘以0.04时得到:
-
- $Q_{10}=250(0.04)^9+250(0.04)^8+...+250(0.04)^2+250(0.04)+250$
-
- $(0.04)Q_{10}=250(0.04)^{10}+250(0.04)^9+...+250(0.04)^3+250(0.04)^2+250(0.04)$
-
- 两式相减得到:
-
- $Q_{10}-0.04Q_{10}=250-250(0.04)^{10}$
-
- 移项化简得:
-
- $Q_{10}=\frac{250(1-0.04^{10})}{1-0.04}$
-
- 所以Q_{40} 为:
-
- $Q_{40}=\frac{250(1-0.04^{40})}{1-0.04}$
-
-
- Q_{n}通项式为:
-
- $Q_{n}=\frac{250(1-0.04^{n})}{1-0.04}$
-
-
-
- 当$n \to +\infty$ 时 计算如下
- """

	day	dosage
1	KeySet(["dosage at 1th day"])	ValueIterator for a Dict{String, Float 250.0
2	KeySet(["dosage at 2th day"])	ValueIterator for a Dict{String, Float 260.0
3	KeySet(["dosage at 5th day"])	ValueIterator for a Dict{String, Float 260.417
4	KeySet(["dosage at 10th day"])	ValueIterator for a Dict{String, Float 260.417
5	KeySet(["dosage at 100th day"])	ValueIterator for a Dict{String, Float 260.417
6	KeySet(["dosage at 1000th day"])	ValueIterator for a Dict{String, Float 260.417
7	KeySet(["dosage at 10000th day"])	ValueIterator for a Dict{String, Float 260.417

```
let
    data=datacollection["几何级数1"]
    key=keys.(data["res1"])
    vals= values.(data["res1"])
    df=DataFrame(day=key,dosage=vals)
end
```

```
Dict("几何级数1" ⇒ Dict("res1" ⇒ [Dict(   more), Dict(   more), Dict(   more), Dict(   m
```

```
let
    daycollection=[1,2,5,10,100,1000,10000]
    tablet=250
    rate=0.04
    function  dosgewith(tablet,rate)
        r=rate
        t=tablet
      return (d)->Dict(
       "dosage at $(d)th day"=>t*(1-r^(d))/(1-r)
      )
    end
    getdosage=dosgewith(tablet,rate)

    res1=[ getdosage(d) for d in daycollection ]
    save("几何级数1",Dict("res1"=>res1))

end
```

有限几何级数的和

与药物剂量的实例一样, 有限几何级数通过代数化简可以得到:

$$S_n=ax+ax^2+...+an^{n-1}=\frac{a(1-n^n)}{1-x} \ , x \neq 1$$

无限几何级数的和

$n \to +\infty$时, 只有在$|x|<0$时,序列才会收敛

$$\lim_{n \to +\infty}S_n=\lim_{n \to +\infty} \frac{a(1-x^n)}{1-x}=\frac{a(1-0)}{1-x}=\frac{a}{1-x}$$

Definition

如果$|x|<0$,无限几何级数的和可以表示为:

$$S=a+ax+ax^2+...+ax^{n-1}+ax^{n}+...=\frac{a}{1-x}$$

```
md"""
## 有限几何级数的和

与药物剂量的实例一样，有限几何级数通过代数化简可以得到：

$S_n=ax+ax^2+...+an^{n-1}=\frac{a(1-n^n)}{1-x} \ , x \neq 1$



## 无限几何级数的和

 $n \to +\infty$时，只有在$|x|<0$时,序列才会收敛

$\lim_{n \to +\infty}S_n=\lim_{n \to +\infty} \frac{a(1-x^n)}{1-x}=\frac{a(1-0)}{1-x}=\frac{a}{1-x}$


!!! definition

    如果$|x|<0$,无限几何级数的和可以表示为:

    $S=a+ax+ax^2+...+ax^{n-1}+ax^{n}+...=\frac{a}{1-x}$
"""
```

定期在存款到账户的问题

和药物实验一样, 在每个时间点存入的钱都会随着时间线的独立的变化, 只不过在储蓄账户里是吸入新的利息而不是排出. 每一笔存款之间都是线性无关的

假设每年存入 1000块,复合年利率为5%,计算n年之后账户余额

和药物实验同样列出前几项, 看看规律:

$$B_1=1000$$

$$B_2=B_1(1.05)+1000=\overset{\underbrace{1000(1.05)}}{第一年存的钱}+\overset{\underbrace{1000}}{新存入存款}$$

$$B_3=1000(1.05)^2+1000(1.05)+1000=\overset{\underbrace{1000(1.05)^2}}{第一年存的钱}+\overset{\underbrace{1000(1.05)}}{第二年存的钱}+\overset{\underbrace{1000}}{新存入存款}$$

可以看到模式为:

$$B_n=1000(1.05)^{n-1}+1000(1.05)^{n-2}+...+1000(1.05)+1000$$

由此,根据有限级数的通项公式可得到:

$$B_n=\frac{1000(1-(1.05)^n)}{1-1.05}$$

移项变换为:

$$B_n=\frac{1000((1.05)^n-1)}{1.05-1}$$

如果我们能够永生, 那么每年存入 1000 块, 账户的钱会无穷大, 所以存款的无限级数没有收敛

```
md"""
## 定期在存款到账户的问题

和药物实验一样，在每个时间点存入的钱都会随着时间线的独立的变化，只不过在储蓄账户里是吸入新的利息而不是排出. 每一笔存款之间都是线性无关的

假设每年存入 $1000$块,复合年利率为$5\%$,计算$n$年之后账户余额

和药物实验同样列出前几项, 看看规律:

$B_1=1000$

$B_2=B_1(1.05)+1000=\overset{\underbrace{1000(1.05)}}{第一年存的钱}+\overset{\underbrace{1000}}{新存入存款}$


$B_3=1000(1.05)^2+1000(1.05)+1000=\overset{\underbrace{1000(1.05)^2}}{第一年存的钱}+\overset{\underbrace{1000(1.05)}}{第二年存的钱}+\overset{\underbrace{1000}}{新存入存款}$
```

```
可以看到模式为:

$B_n=1000(1.05)^{n-1}+1000(1.05)^{n-2}+...+1000(1.05)+1000$


由此,根据有限级数的通项公式可得到:

$B_n=\frac{1000(1-(1.05)^n)}{1-1.05}$

移项变换为:

$$B_n=\frac{1000((1.05)^n-1)}{1.05-1}$$


如果我们能够永生, 那么每年存入 1000 块, 账户的钱会无穷大, 所以存款的无限级数没有收敛

"""
```

```
 @htl("""<script src="https://cdn.bootcdn.net/ajax/libs/mathjax/3.2.0/es5/tex-svg-full.min.js"></script>
    """)
```