

t-检验介绍

ch09 t-检验

set 9.1 t 分布

sec9.2 t-检验的假设

聪明药假设检验步骤

ch09 t-检验

从 t-检验开始, 正式进入到推断统计. 推断统计是利用样本的信息对总体参数的一个推断. 样本信息对于总体的忠实程度决定了推断结论的把握性. 有十分有把握的下结论, 满足两个条件之一: (一). 总体标准差已知, 由此可以对样本数据的离散程度进行判断. (二) 样本容量非常大, 这样样本对总体的忠实程度会非常高.

但在实际情况中, 如果已经知道了总体的标准差, 似乎统计的意义体现不出来. 样本数据有时候受限制, 不可能取很多个体的数据. 因此抽样统计陷入困境. 统计学家为了解决这些问题, 发明了 t 分布.

Info

t-检验就是以 t 分布为基础的. t-分布和正态分布很类似, 不同点在于 t-分布考虑了采样个体的数值.

估算了因为样本数据差异而造成的对标准差估计的误差.

set 9.1 t 分布

t分布以标准正态分布($\mu = 0, \sigma = 1$)为基础扩展而来. 需要考虑样本容量, 即自由度为:

$$\text{自由度} = df = n - 1$$

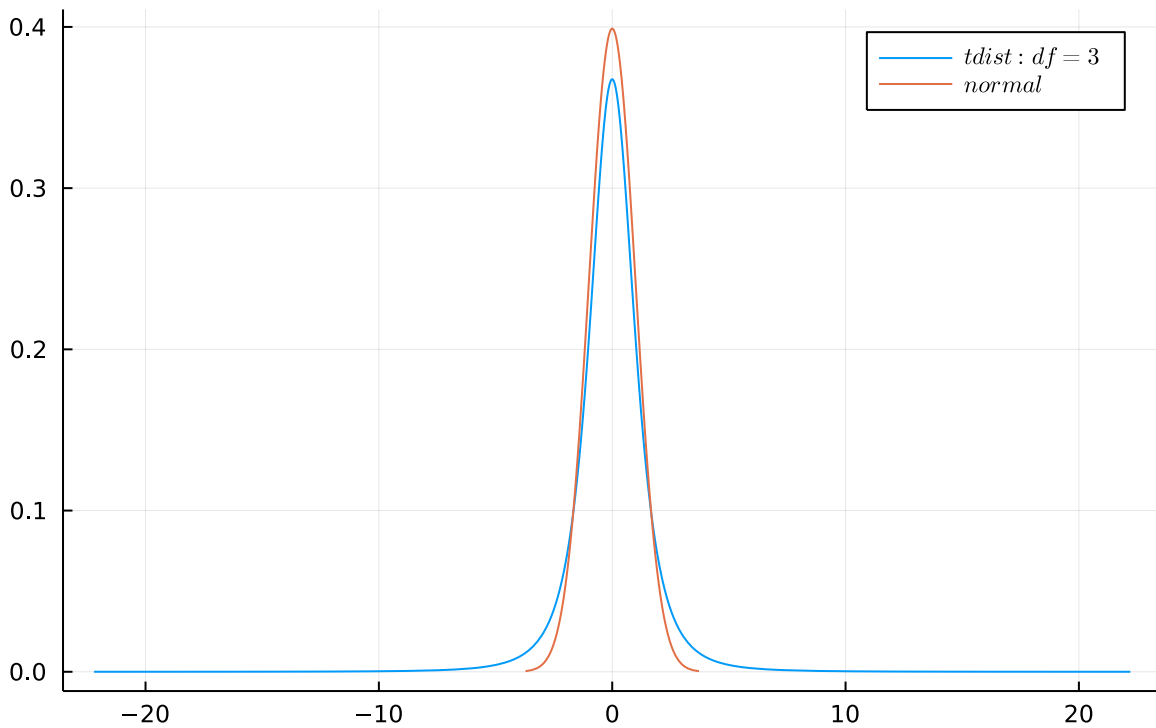
TDist(df) 自由度作为参数

Info

关于自由度问题. 因为根据样本个体的测量值计算均值, 均值固定, 样本中有一个个体的测量值就是固定的, 这就是 自由度=样本数-1 的原因. 自由度越大, 样本方差就能更好的代替总体方差.

```
• md"""
• ## set 9.1 t 分布
•
• t分布以标准正态分布$(\mu=0, \sigma=1)$为基础扩展而来. 需要考虑样本容量, 即自由度为:
•
• $自由度=df=n-1$
•
•
• `TDist(df)` 自由度作为参数
•
•
• !!! info
•     关于自由度问题. 因为根据样本个体的测量值计算均值, 均值固定, 样本中有一个个体的测量值就是固定
•     的, 这就是 自由度=样本数-1 的原因. 自由度越大, 样本方差就能更好的代替总体方差.
• """
```

t - distribution

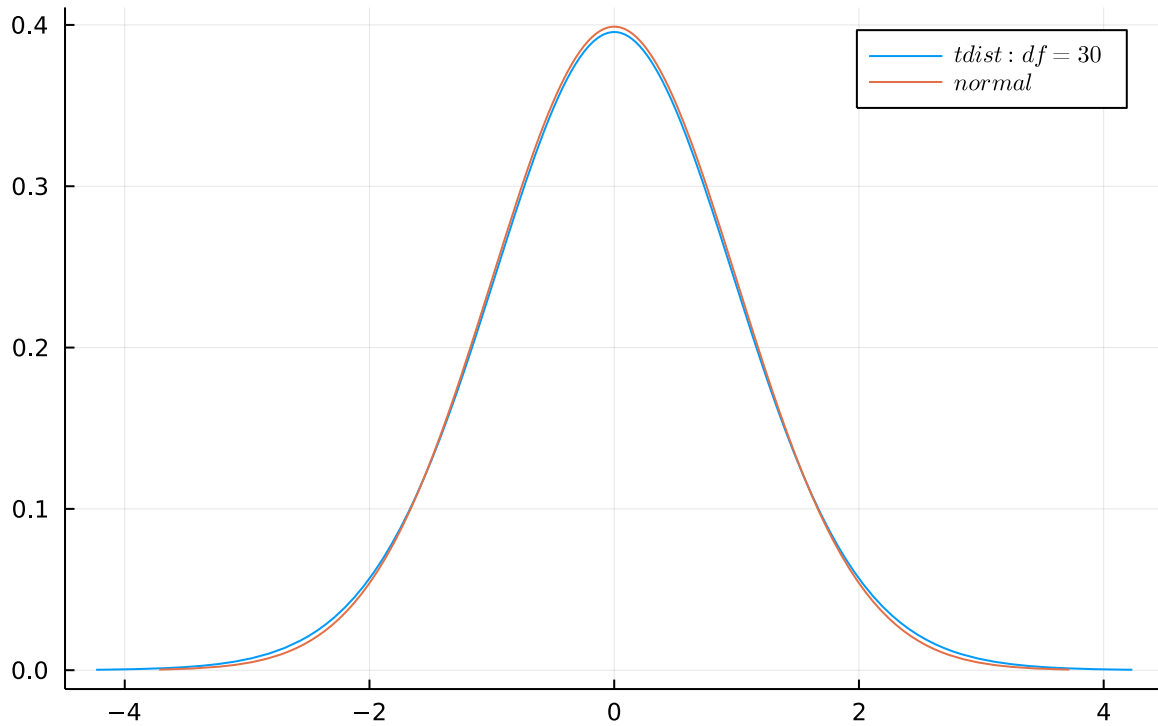


```
• begin
•   df_arr=[3,10,30]
•   dist_arr=df_arr.|>(d->TDist(d)) #生成三组 T 分布, TDist
•   d=Normal() #正态分布
•   plot(dist_arr[1], label=[L"tdist:df=3" L"tdist:df=10" L"tdist:df=30"],title=L"t-
•     distribution")
•   plot!(d, label=L"normal")
• end
```

从 $df = 3$ 的概率密度曲线看, 高度比标准正态分布低, 因为曲线下面积都为1, 高度降低, 中央的数据相应的较少, 曲线的尾部更长, 数据离散程度更大. 如果增加样本容量, t 分布会趋近于正态分布

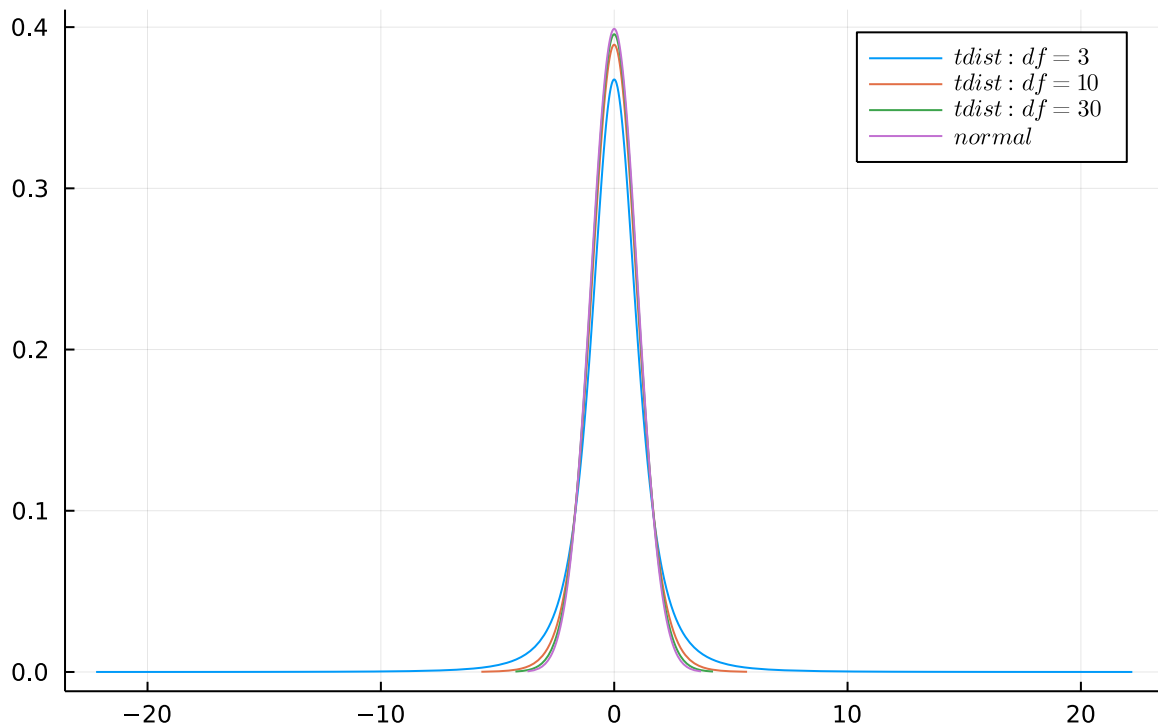
```
• md"""
• 从$df=3$ 的 概率密度曲线看, 高度比标准正态分布低, 因为曲线下面积都为$1$, 高度降低, 中央的数据相
• 应的较少, 曲线的尾部更长, 数据离散程度更大. 如果增加样本容量,  $t$  分布会趋近于正态分布
• """
```

t - distribution



```
• let
•   plot(dist_arr[3], label=L"tdist:df=30",title=L"t-distribution")
•   plot!(d, label=L"normal")
• end
```

t - distribution



```
• let
•   plot(dist_arr, label=[L"tdist:df=3" L"tdist:df=10" L"tdist:df=30"],title=L"t-
distribution")
•   plot!(d, label=L"normal")
• end
```

sec9.2 t-检验的假设

和其他统计方法一样, 现在用软件计算 t-统计量只需要几行代码. 关键是要理解其中的原理. t-检验 也分为四步.

总体可能在历经较长的时间间隔以后, 某些内在特征发生质变, 有地导致一些统计参数发生变化, 例如经过几十年, 人口的平均寿命因为医疗和营养方面的改善而增加.

有些总体的参数发生变化可能在短期内. 一般的科学实验是这样的方法, 例如药物实验, 新研制的感冒药可能对缓解感冒症状有明显的效果. 那么总体对感冒的反应参数就会发生改变.

我们现在注意力放在第二种情况下.

一般性的问题就是: 总体的参数发生改变是否明显, 以至于用方差都不能解释数据之间的差异.

统计假设依此来实现, t-检验方法为我们提供量化数据.

- `md"""`
- `## sec9.2 t-检验的假设`
-
- 和其他统计方法一样, 现在用软件计算 t-统计量只需要几行代码. 关键是要理解其中的原理. t-检验 也分为四步.
-
- 总体可能在历经较长的时间间隔以后, 某些内在特征发生质变, 有地导致一些统计参数发生变化, 例如经过几十年, 人口的平均寿命因为医疗和营养方面的改善而增加.
-
- 有些总体的参数发生变化可能在短期内. 一般的科学实验是这样的方法, 例如药物实验, 新研制的感冒药可能对缓解感冒症状有明显的效果. 那么总体对感冒的反应参数就会发生改变.
-
- 我们现在注意力放在第二种情况下.
-
- 一般性的问题就是: 总体的参数发生改变是否明显, 以至于用方差都不能解释数据之间的差异.
-
- 统计假设依此来实现, t-检验方法为我们提供量化数据.
- `"""`

在第二中情况下, 从总体抽取一下样本进行处理, 处理之后看看样本的均值是否发生明显变化, 以确立处理效果是否存在.

零假设为:没有处理效果, 度量为处理前后样本实验组的均值没有明显变化.

t 统计量的计算为:

$$t = \frac{\begin{array}{cc} \text{样本均值} - \text{总体均值} \\ \text{(来自数据)} & \text{(零假设)} \end{array}}{\begin{array}{c} \text{估计标准误} \\ \text{(根据样本数据计算)} \end{array}}$$

t 统计量 的分子计算了样本数据和假设总体的均值之间的差异, 分母测量了由于抽样随机性造成的均值差异.

均值差异较大时得到的 t 值较大, 作为判断依据确定数据代表的总体均值和假设总体的均值不同, 数据不会来自假设总体, 结论决绝零假设.

- `md"""`
- 在第二中情况下，从总体抽取一下样本进行处理，处理之后看看样本的均值是否发生明显变化，以确立处理效果是否存在。
-
- 零假设为:没有处理效果，度量为处理前后样本实验组的均值没有明显变化。
-
- t 统计量的计算为:
-
- $t = \frac{\underset{\text{(来自数据)}}{\text{样本均值}} - \underset{\text{(零假设)}}{\text{总体均值}}}{\underset{\text{(根据样本数据计算)}}{\text{估计标准误}}}$
-
- t 统计量 的分子计算了样本数据和假设总体的均值之间的差异，分母测量了由于抽样随机性造成的均值差异。
-
- 均值差异较大时得到的 t 值较大，作为判断依据确定数据代表的总体均值和假设总体的均值不同，数据不会来自假设总体，结论决绝零假设。
- `"""`

Example

example 1

药物公司开发了一种药物治疗方法, 目的是可以显著提高智商值(IQ), 普通人群总体的 IQ 均值为 $\mu = 100$. 使用下面的一组被测数据,推断药物是否能提高智商均值

- `md"""`
- `!!! example`
- `example 1`
-
- 药物公司开发了一种药物治疗方法，目的是可以显著提高智商值(IQ)，普通人群总体的 IQ均值为 $\mu=100$ 。
- 使用下面的一组被测数据,推断药物是否能提高智商均值
-
- `"""`

```
IQ_test_data =
```

```
[88, 92, 94, 94, 96, 97, 97, 97, 99, 99, 105, 109, 109, 109, 110, 112, 112, 113, 114, 115]
```

```
• IQ_test_data=[88, 92, 94, 94, 96, 97, 97, 97, 99, 99,  
• 105, 109, 109, 109, 110, 112, 112, 113, 114, 115]
```

聪明药假设检验步骤

1. 建立零假设, 并确定 α 水平, 因为在计算统计结果之前, 我们并不是到药物治疗组代表的总体智商是否比普通人总体的 IQ 分数高, 那么就假设接受药物实验的人仍然属于普通人群组.

零假设为:

$$H_0 : \mu_{\text{药物}} = 100$$

备择假设为:

$$H_0 : \mu_{\text{药物}} \neq 100$$

2. 定义拒绝域:

总体方差未知, 只能使用 t 统计量进行检测, 根据样本中个体数量计算出自由度. 假设以显著性 $\alpha = 0.05$

$$df = n - 1 = 20 - 1 = 19$$

$$\alpha_{\text{level}} = 0.05$$

查表确定拒绝域. 确定拒绝水平为**2.093**

注: 现在用计算机这一步不需要做, 但是查表画出接受域和拒绝域的草图对后面的分析有直观的帮助作用

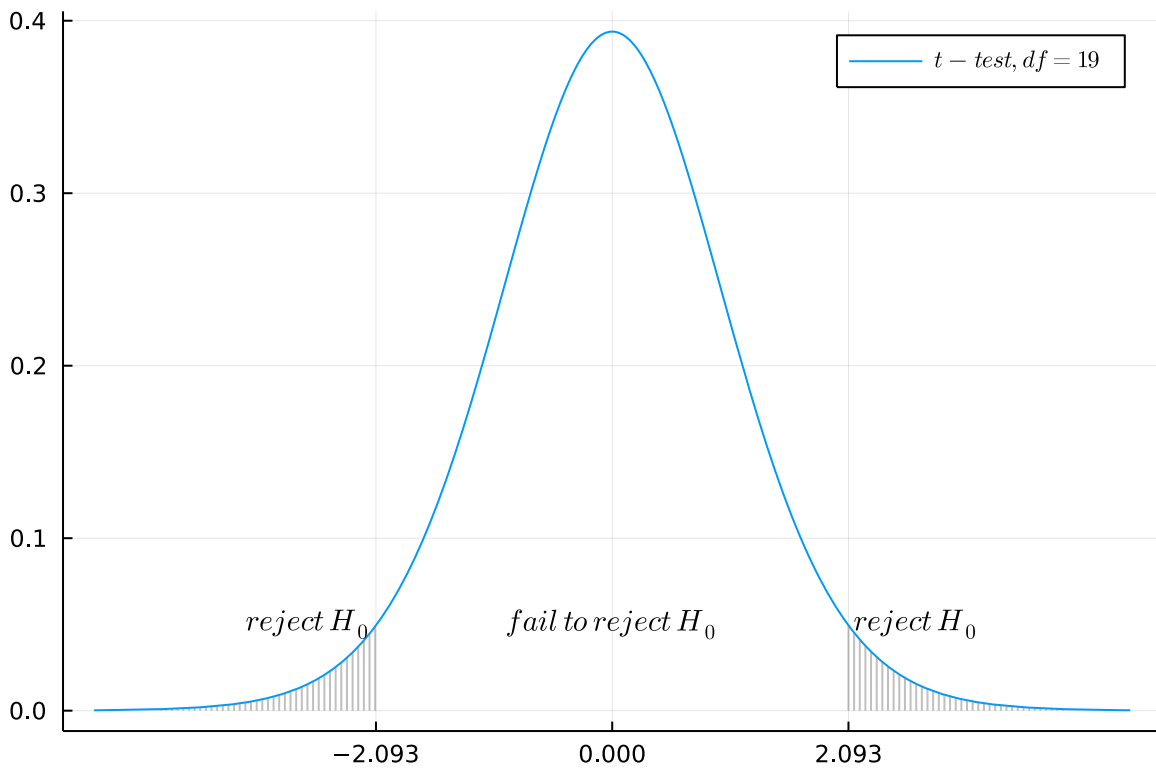
用 R 语言的函数可以根据 α 水平找到关键值, 例如执行 $\alpha = 0.05$ 的双尾检测

```
get_criticalvalue (generic function with 2 methods)
```

```
• function get_criticalvalue(df,alpha=0.05)  
•   @rput df alpha  
•   R""  
•   res<-qt(p=alpha/2, df=df, lower.tail=FALSE)  
•   ""  
•   return @rget res  
• end
```

```
2.0930240544083096
```

```
• get_criticalvalue(19)
```



```

• begin
•   x_offset,y_position=0.6,0.05
•   alpha_level=0.05
•   df=IQ_test_data|>length|>n->n-1
•   iq_tdist=TDist(df)
•   criticalval_005=get_criticalvalue(df,alpha_level)|>x->round(x,digits=3)
•   range1,range2=-4:0.05:-criticalval_005,criticalval_005:0.05:4
•
•   plot(iq_tdist,label=L"t-test, df=%$(df)",xticks=[-
criticalval_005,0,criticalval_005])
•   plot!(repeat(range1', 2),[zeros(1, length(range1));(pdf.(iq_tdist,range1))'],label
= "", color = :grey, alpha = 0.5)
•   plot!(repeat(range2', 2),[zeros(1, length(range2));(pdf.(iq_tdist,range2))'],label
= "", color = :grey, alpha = 0.5)
•   plot_reject_region(criticalval_005,y_position,x_offset)
• end

```

plot_reject_region (generic function with 3 methods)

```

• function plot_reject_region(criticalval,y_position=0.05, x_offset=0.5)
•   ann = [(-criticalval-x_offset,y_position,text(L"reject \: H_0",
•   pointsize=10)),
•   (criticalval+x_offset,y_position,text(L"reject \: H_0", pointsize=10)),
•   (0,y_position,text(L"fail \: to \: reject \: H_0", pointsize=10))
•   ]
•   return plot!(ann=ann)
end

```


3. 计算检验统计量

- 计算样本方差
- 根据样本方差和样本中个体数计算估计标准误
- 计算样本的 t 值

在 Julia 中使用 HypothesisTests.jl 的 t 检验方法

```
OneSampleTTest(v::AbstractVector{T<:Real},  $\mu_0$ ::Real = 0)
```

其中 v 为样本数据集, μ_0 为假设总体均值

```
• begin  
• iq_ttest=OneSampleTTest(IQ_test_data,100)  
• iq_ttest_pvalue=pvalue(iq_ttest; tail = :both)  
• iq_ttest|>println  
• end
```

```
One sample t-test  
-----  
Population details:  
  parameter of interest:   Mean  
  value under h_0:         100  
  point estimate:          103.05  
  95% confidence interval: (99.05, 107.0)  
  
Test summary:  
  outcome with 95% confidence: fail to reject h_0  
  two-sided p-value:         0.1266  
  
Details:  
  number of observations:   20  
  t-statistic:              1.5976240527147705  
  degrees of freedom:       19  
  empirical standard error: 1.9090849282202966
```

4. 结论

因为该药物治疗效果的

$p\text{-value}=0.12662462536124375$ 大于

$\alpha_{level} = 0.05$ 根据 p 值, 无法拒绝零假设, 因此结论是:

该 IQ 药物对智商测试得分没有明显显著提高效果

- `md`"""
- 4. 结论
-
- 因为该药物治疗效果的
-
- `p-value=$(iq_ttest_pvalue)`
- 大于
-
- `$\alpha_{level}=0.05$`
- 根据 p 值, 无法拒绝零假设, 因此结论是:
-
- 该 IQ 药物对智商测试得分没有明显显著提高效果
-
- """