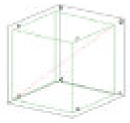


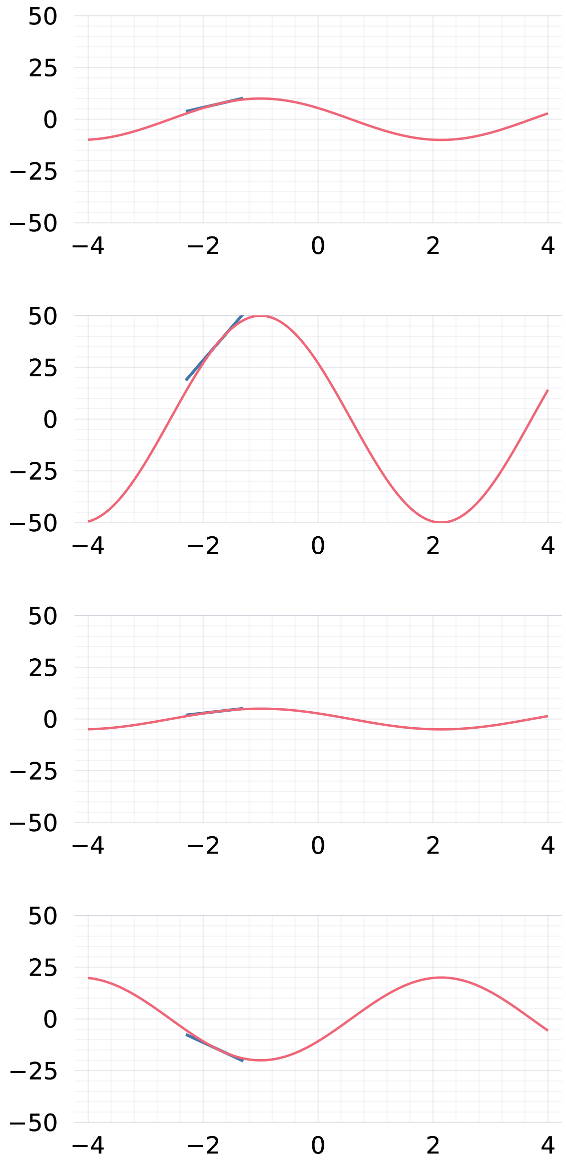
Table of Contents

ch03 sec3.1 幂函数和多项式

> 本章内容是在渗透函数的求导的各种变形方法

函数乘以一个常数的导数

```
md"# ch03 sec3.1 幂函数和多项式
  >本章内容是在渗透函数的求导的各种变形方法
  ## 函数乘以一个常数的导数
"
```



当一个函数乘以一个系数, 不改变定义域, 变化率会做相应的变换

Notice

常数倍乘的导数:

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

加减函数的导数

Notice

函数加减法的导数:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

幂函数的导数

Warning

幂函数的导数:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

所以归纳为一般形式:

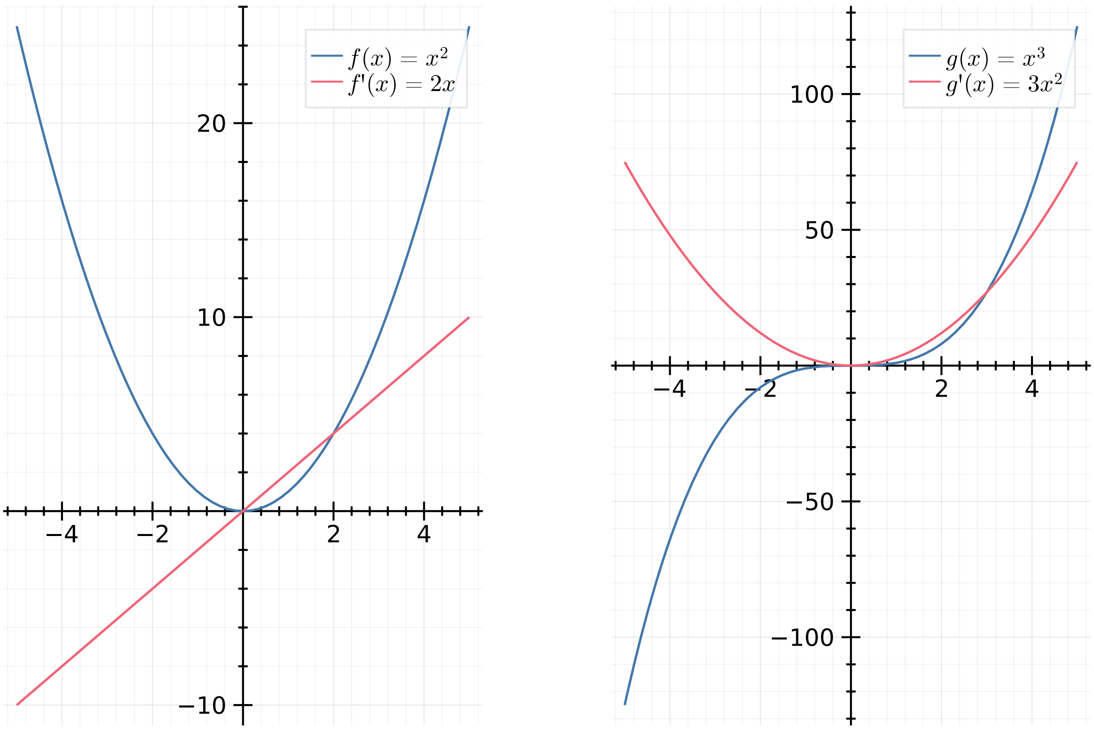
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

example 1 : $f(x) = \frac{1}{x^3}$ 的导数

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^3}) = \frac{d}{dx}(x^-3) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$f(x) = x^2 - > f'(x) = 2x$$

$$g(x) = x^3 - > g'(x) = 3x^2$$



多项式的导数

$$f(x) = 5x^2 + 3x + 2$$

$$\frac{d}{dx}(5x^2 + 3x + 2) = 5\frac{d}{dx}(x^2) + 3\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2)$$

$$= 5 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0$$

$$= 10x + 3$$

Example

example6: 物体的位移方程 :$s=-4.9t^2+5t+6$ 求速度和加速度

速度为位移的一阶导数:

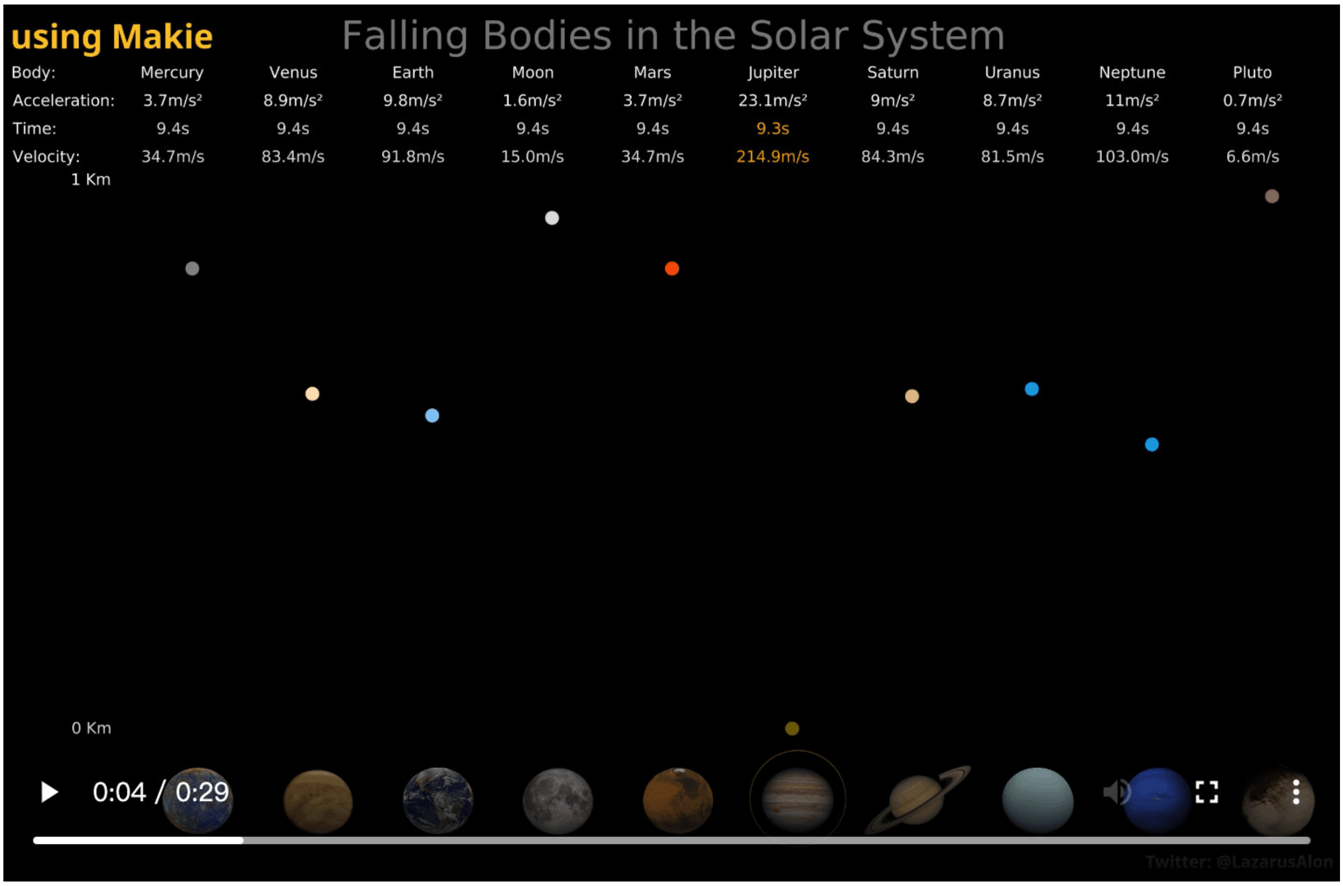
$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}(-4.9t^2+5t+6)=-9.8t+5$$

加速度为速度的导数, 也就是位移的二阶导数

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}(-9.8t+5)=-9.8$$

我们所做的工作在数学里就叫做分析, 分析就是一步一步的逐个分解和研究每个动作,理解复杂变化的方法就是如此 最后我们可以获取把物理想象映射为一个数字, 这个数字度量了重力场的一个物理性质.

这里有个关于重力非常有意思的可视化图,展示了在各种不同重力场中自由落体的情况, 我们在同一高度(相当于百米跑道,可以想象为一把长度为 100 米的尺子),度量落地的时间. 这里要用到微分方程的知识,后面会讲到微分方程. 在单位长度内, 度量的时间不同就反映了重力场的物理特性不同. 重力加速度度量值就是重力场的物理性质在实数域的一个映射点



<u>优美的重力场</u>

用切线近似幂函数

微积分主要的一个方法就是用仿射直线在某点近似表示非线性函数

主要算法: 从某个点a开始, 行进一小步h到达 $a+h$,进行测量, 获取在这段距离内的变化率, 也就是斜率,一般情况下 这是一条不经过原点的直线,所以是仿射直线,有一个解决b 作为参数

所以在经过从a到 $a+h$的仿射直线定义为:

$$y = f'(a)x + b$$

$$x \in [a, a+h]$$

注意: 在用微积分解决问题的时候每次移动的一小步h 都非常小, 初学微积分,总是会显得贪得无厌,希望一下子就解决问题, 这是不现实的. 在微积分中, 研究问题始终是一小步一小步递进和遍历. 近似的这条直线只有在$[a, a+h]$ 这个区间内离真实值才比较接近. 所以要反复的取多个不同的点来获取多条近似直线.

导数就是变化率, 上式直接写为经过 a点的近似直线斜率:

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{y - f(a)}{h}$$

移项后变形为:

$$y = f(a) + f'(a)(h)$$

Lineapprox

在 a点附近, 函数可以近似表示为:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Example

example7:风力发电机的功率(P)可以表示为风速的函数:

$$P = kv^3$$

其中k 为参数,是叶片的尺寸和气动外形因素

当 k=2 时计算一下:

1.当风速 $v = 10m/s$ 时的功率函数的近似

2.使用1得到的表达式计算 风速为$v = 12$,$v = 9.5$ 的功率

当 $k = 2$ 时函数为 $P(v) = 2v^3$,所以$\frac{dP}{dv} = 6v^2$

$$在\ v = 10\ 附近位置:\ P = 2 \cdot 10^3 = 2000,\ P' = 6 \cdot 10^2 = 600$$

$$线性近似为:\ P(v) \approx 2000 + 600(v - 10)$$

$$当\ v = 12,\ P \approx 2000 + 600(12 - 10) = 3200$$

$$当\ v = 9.5, P \approx 2000 + 600(9.5 - 10) = 1700$$

实际的计算值如下:

	windespeed	exact	lineapprox	speeddiff	powerdiff
1	10.0	2000.0	2000.0	0.0	0.0
2	12.0	3456.0	3200.0	2.0	256.0
3	9.5	1714.75	1700.0	0.5	14.75
4	9.9	1940.6	1940.0	0.1	0.598
5	10.2	2122.42	2120.0	0.2	2.416
6	10.1	2060.6	2060.0	0.1	0.602
7	10.05	2030.15	2030.0	0.05	0.15025
8	10.01	2006.01	2006.0	0.01	0.006002
9	20.0	16000.0	8000.0	10.0	8000.0
10	50.0	250000.0	26000.0	40.0	224000.0

可以看到风速越接近于 10 米/秒, 线性近似与实际方程计算结果越接近. 由于是连续函数, 在点的双侧都满足近似要求.

> **Note**
>
> 数学中计算可以很精确, 但是方法有时是近似的方法.