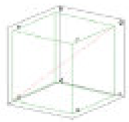


ch04 sec4.4 函数簇和建模的关系

Table of Contents

对于简单的幂函数

$$y = x^2$$

可以经过一定的变形, 一般的形式为:

$$y = a(x+b)^2 + c, a, b, c \text{ 称为参数}$$

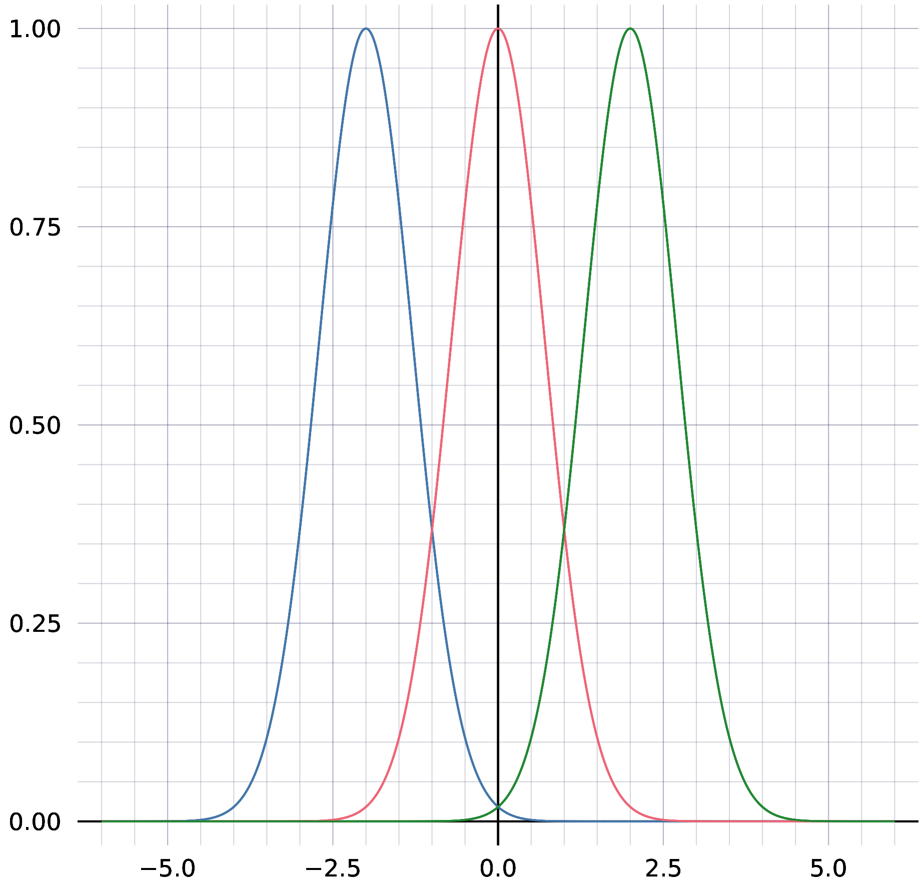
变形后的函数图形与初始函数很类似.

```
md"""
对于简单的幂函数

$y=x^2$
可以经过一定的变形，一般的形式为：

$y=a(x+b)^2+c ,a,b,c 称为参数$

变形后的函数图形与初始函数很类似.

"""
```

钟形曲线的家族:$y=e^{-(x-a)^2/b}$

钟形曲线的家族包括了概率统计中使用的正态分布密度函数.

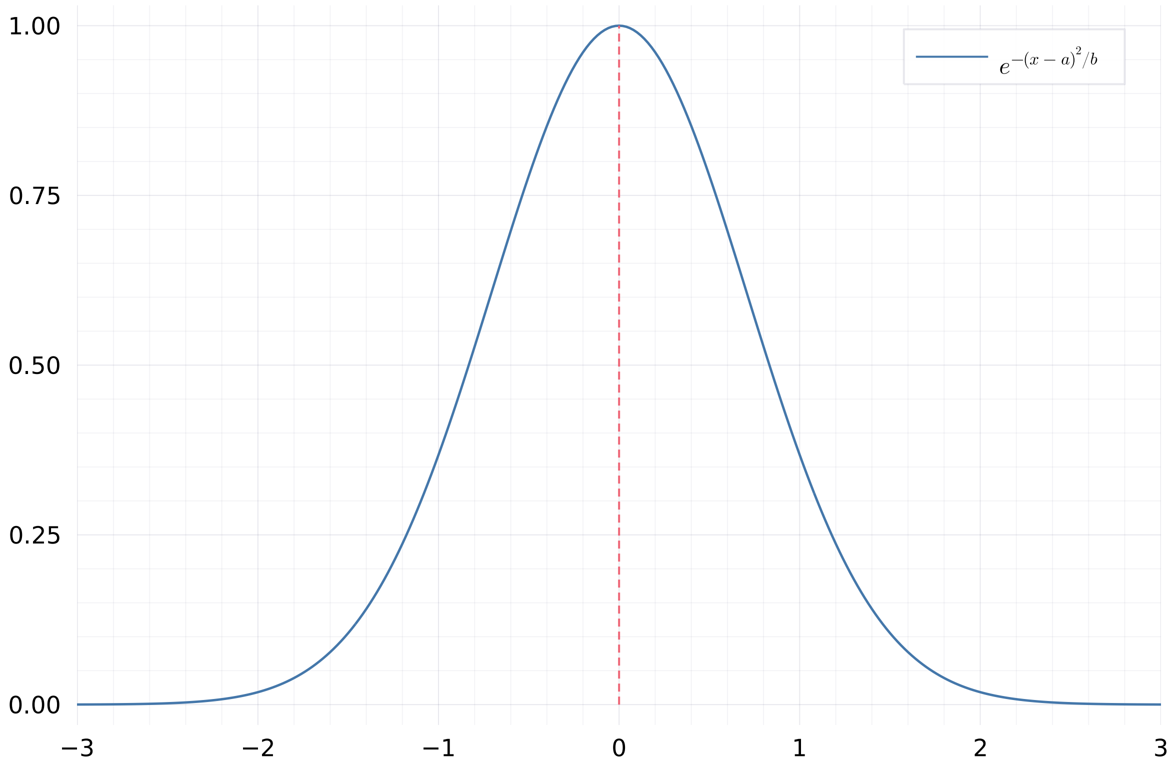
```
md"""
## 钟形曲线的家族:$y=e^{-(x-a)^2/b}$
钟形曲线的家族包括了概率统计中使用的正态分布密度函数.
"""
```




```
let
    acollection=[-2,0,2]
    xspan=-6:0.02:6


    p1=plot()
    plotarr=[p1]

    for a in acollection
        y(x)=e^(-(x-a)^2)

        p=plot!(y,xspan,lw=1)
        push!(plotarr,p)

    end


    plot!(plotarr...,frame=:zerolines,size=(600,600))




end
```

参数a 的取值 0 改变临界点位置

参数b 的取值 1.0 改变曲线的发散程度




```
let
    tspan=-4:0.02:4
    a=aval
    b=bval
    f(x)=ℯ^((-(x-a)^2)/b)
    plot(f,tspan,label=L"e^{-(x-a)^2/b}",xlims=(-3,3))
    plot!([a,a],[0,f(a)],label=false,ls=:dash,lw=1)

end
```

使用函数簇来建模

数学建模里最关键的一步是:能找到拟合数据的函数簇.

重力场中的运动方式:$\boldsymbol{y} = -4.9t^2+v_{0}t+y_{0}$

运动方程:

$$\boldsymbol{y} = -4.9t^2+v_{0}t+y_{0}$$

有两个参数:v_{0}和y_{0}

当$t=0$ 时刻, $y=y_0$, 这是物体的初始位置

方程的导数为

$$\frac{dy}{dt}=-9.8t+v_{0}$$

当$t=0$ 时刻 v_0 表示物体的初始速度

当 $\frac{dy}{dt}=0$ 时,可以得出$t=\frac{v_0}{9.8}$ 也就是临界点

方程的二阶导数为:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-9.8t$$

对于所有 $t>0$,二阶导数为负值,所以临界点是全局最大值. 含义是物体能够上升的最大高度

```
md"""
## 使用函数簇来建模
数学建模里最关键的一步是:能找到拟合数据的函数簇.


### 重力场中的运动方式:$y = -4.9t^2+v_{0}t+y_{0}$



运动方程:

$y = -4.9t^2+v_{0}t+y_{0}$

有两个参数:$v_{0}$和$y_{0}$


当$t=0$ 时刻, $y=y_0$, 这是物体的初始位置

方程的导数为

$\frac{dy}{dt}=-9.8t+v_{0}$

```

```
当$t=0$ 时刻  $v_{0}$  表示物体的初始速度


当 $\frac{dy}{dt}=0$ 时,可以得出$t=\frac{v_{0}}{9.8}$  也就是临界点

方程的二阶导数为:


$\frac{d^2y}{dt^2}=-9.8t$

 对于所有 $t>0$ ,二阶导数为负值,所以临界点是全局最大值. 含义是物体能够上升的最大高度


"""
```

Example

example3 从地面发射的火箭,初始速度为$v_0 = 50m/sec$,求它上升的最大高度

从地面发射所以$y_0 = 0$

运动方程变为:

$$y(t) = -4.9t^2 + 50t$$

临界点的时刻为:

$$t = \frac{v_0}{9.8} = 5.1s$$

所以上升高度为:

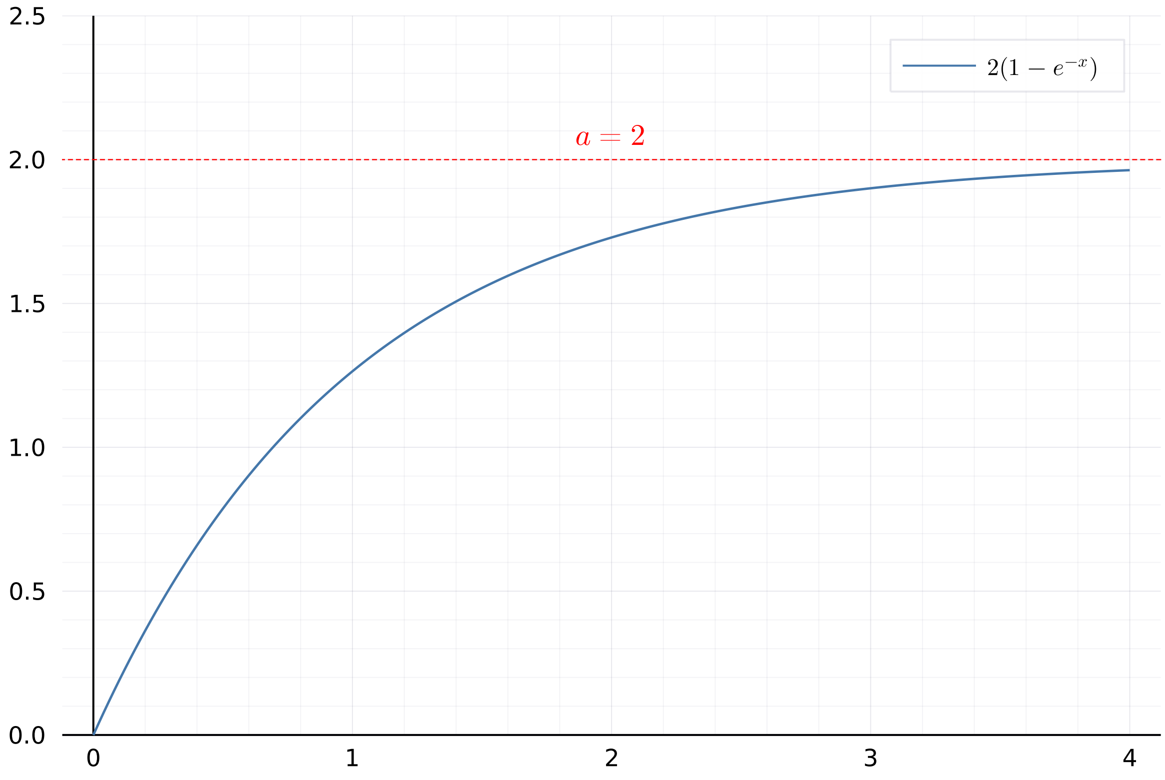
127.55

```
round(-4.9*(5.1)^2+50*5.1,digits=2)
```

有限制条件的指数函数模型:$y = a(1 - e^{-bx})$

当 $a = 2, b = 1$ 时

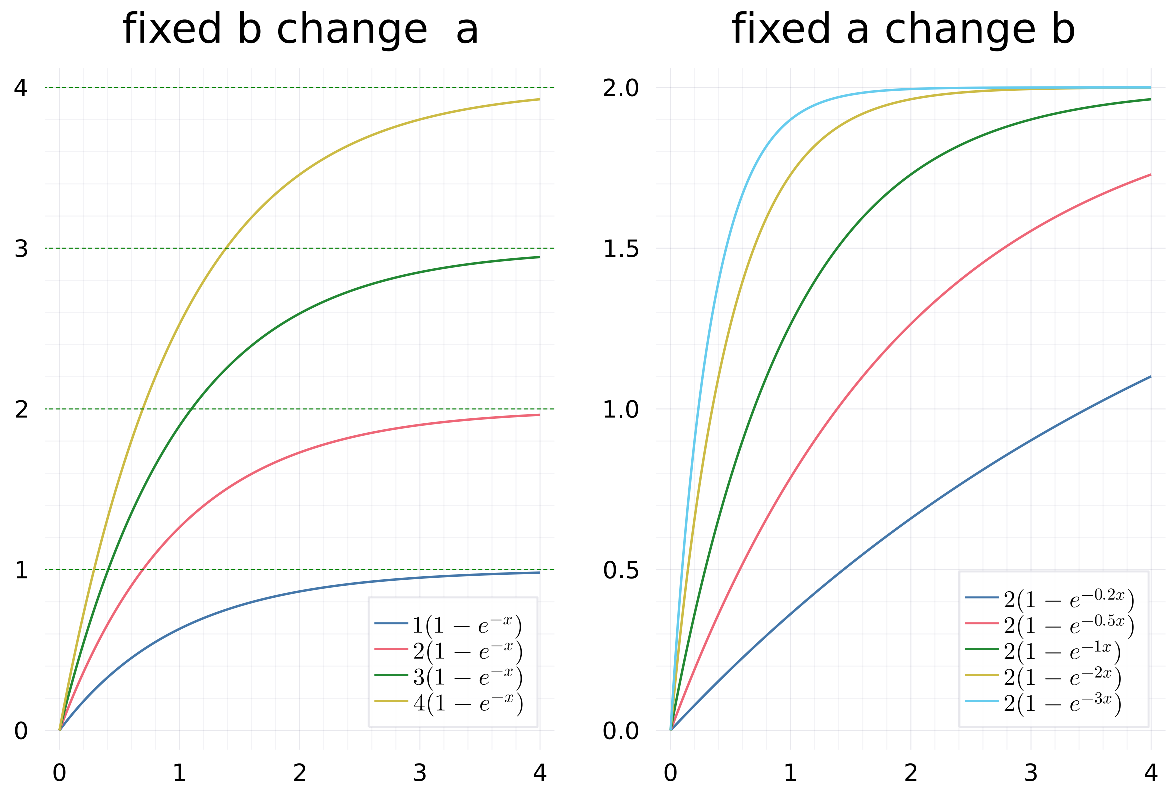
```
md"""
### 有限制条件的指数函数模型:$y=a(1-e^{-bx})$

当 $a=2, b=1$ 时
"""
```




```
let
    tspan=0:0.02:4
    f(x)=2(1-ℯ^(-x))
    ann=[
        (2,2.1,text(L"a=2",pointsize=10,color=:red))
    ]
    plot(f,tspan,label=L"2(1-e^{-x})",frame=:zerolines,ylims=(0,2.5))
    hline!([2],ls=:dash, lw=0.6,color=:red,label=false,ann=ann)
end
```

不同参数a和b对曲线的影响

```
md"""
不同参数a和b对曲线的影响
"""
```




```julia
let
    tspan=0:0.02:4
    ac=1:4
    bc=[0.2,0.5,1,2,3]
    #使用参数返回一个函数
    function fa(a)
        return function (x)
            return  a*(1-e^(-x))
            end
    end

    function fb(b)
        return function (x)
            return  2*(1-e^(-b*x))
            end
    end

    function la(a)
        return  latexstring("$(a)(1-e^{-x})")
     end

    function lb(b)
        return  latexstring("2(1-e^{-$(b)x})")
     end

    funarra= [fa(a) for a in ac]
    funarrb= [fb(b) for b in bc]

    p1=plot(funarra,tspan,label=[la(1) la(2) la(3) la(4)])

    p2=plot(funarrb,tspan,label=[lb(0.2) lb(0.5) lb(1) lb(2) lb(3)])

    plot!(p1,p2,legend=:bottomright,title=["fixed b change  a" "fixed a change b "])
    aline=hline!([ac...],ls=:dash,color=:green, lw=0.5,label=false)
```

```
end
```

$$y(x)=a(1-e^{-bx})\ 参数变化$$

a **变化**, b**固定**	a **固定** b **变化**
每条曲线都接近$y=a$ 的 水平渐近线	b 值越大曲线越陡峭
$x\to +\infty$, $e^{-bx}\to 0$	a 固定,曲线渐近线不变

函数$y(x)=a(1-e^{-bx})$ 的分析:

函数的导函数为:

$$y'(x)=abe^{-bx}$$

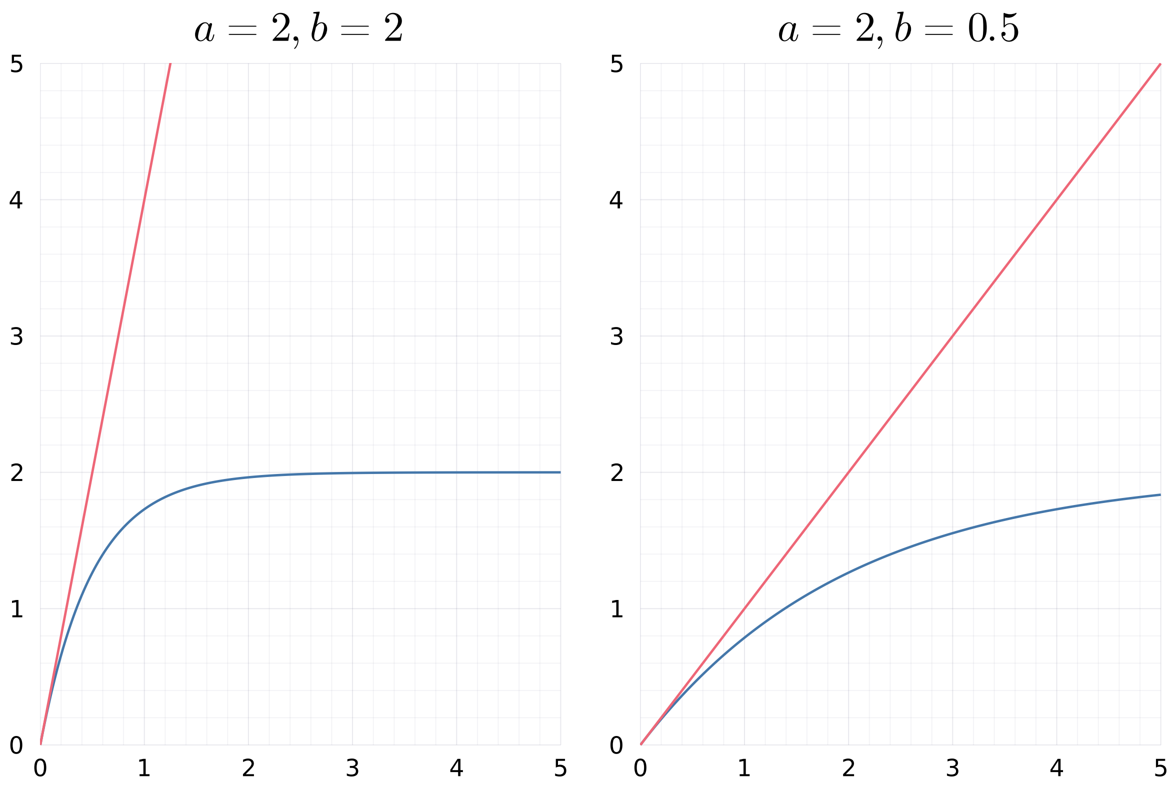
$$当\ x=0时, -bx=0,e^0=1,所以在\ x=0处, y'(0)=ab$$

$$固定a,b\ 值越大, 导数越大,切线斜率越大, 函数变化速率越快$$

$$这就是右边图的表达的含义$$

$$如果\ y(x)=\frac{a}{2},因此a(1-e^{-bx})=\frac{a}{2}\ ,则\ x=\frac{ln2}{b},b\ 越大, 到达\ \frac{a}{2}\ 的时间越早$$

```
md"""
$y(x)=a(1-e^{-bx}) 参数变化$

| $a$ 变化, $b$固定 | $a$ 固定  $b$ 变化 |
|:--|:--|
|每条曲线都接近$y=a$ 的
水平渐近线 | $b$ 值越大曲线越陡峭    |
|$x\to +\infty$, $e^{-bx}\to 0$ | $a$ 固定,曲线渐近线不变    |


函数$y(x)=a(1-e^{-bx})$ 的分析:

  函数的导函数为:

$y'(x)=abe^{-bx}$

$当 x=0时, -bx=0 ,e^0=1,所以在 x=0处, y'(0)=ab$
$固定a,b 值越大, 导数越大,切线斜率越大, 函数变化速率越快$
$这就是右边图的表达的含义$
$如果 y(x)=\frac{a}{2},因此a(1-e^{-bx})=\frac{a}{2} ,则 x=\frac{ln2}{b},b 越大, 到达 \frac{a}{2} 的时间越早$
"""
```




```
let
    tspan=0:0.02:5

    function fb(b)
        return Dict(
            "func"=>(x)->2*(1-e^(-(b)*x)),
            "affineline"=>(x)->2*b*x,

        )
    end

    fb1=fb(2)
    fb2=fb(0.5)

    p1=plot([fb1["func"],fb1["affineline"]],tspan,label=false)
    p2=plot([fb2["func"],fb2["affineline"]],tspan,label=false)
    plot!(p1,p2,xlims=(0,5),ylims=(0,5),title=[L"a=2,b=2" L"a=2,b=0.5"])

end
```

逻辑斯蒂模型(Logistic Model)

logistic 函数簇是针对受环境制约的种群数量增长问题的模型

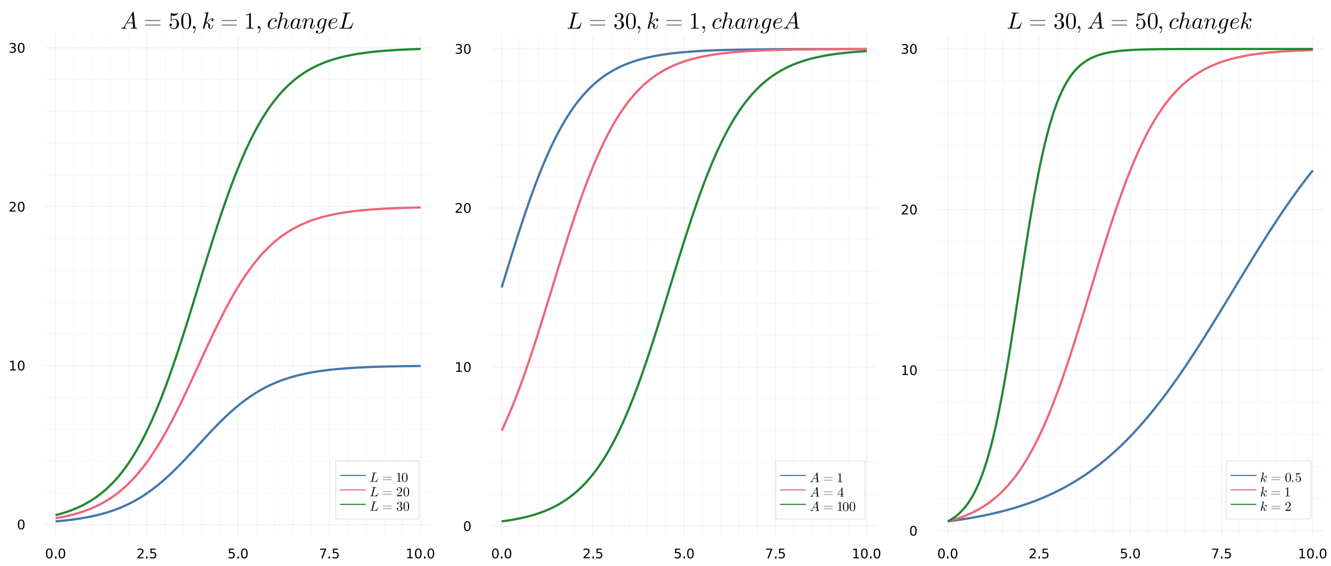
表达式为:

$$y=L/(1+Ae^{-kt})$$

有三个参数 分别是 L,A 和k

我们来看看固定两个参数, 改变一个参数的函数变化情况

```
md"""
## 逻辑斯蒂模型(Logistic Model)

*logistic* 函数簇是针对受环境制约的种群数量增长问题的模型

表达式为:

$y=L/(1+Ae^{-kt})$

有三个参数 分别是 $L$,$A$ 和$k$

我们来看看固定两个参数，改变一个参数的函数变化情况


"""
```




```julia
let
    tspan=0:0.02:10
    L=10
    A=50
    k=1
    lrange=[10,20,30]
    arange=[1,4,100]
    krange=[0.5,1,2]
    function y1(L)
         A=50
         k=1
         return (t)->L/(1+A*e^(-k*t))
    end

     function y2(A)
         L=30
         k=1
         return (t)->L/(1+A*e^(-k*t))
     end
     function y3(k)
         L=30
         A=50
         return (t)->L/(1+A*e^(-k*t))
     end

     larr=[y1(r) for r in lrange]
     aarr=[y2(a) for a in arange]
     karr=[y3(k) for k in krange]
     p1=plot(larr,tspan,title=L"A=50,k=1,change L",label=[L"L=10" L"L=20" L"L=30"])
     p2=plot(aarr,tspan,title=L"L=30,k=1,change A",label=[L"A=1" L"A=4" L"A=100"])
     p3=plot(karr,tspan,title=L"L=30,A=50,change k",label=[L"k=0.5" L"k=1" L"k=2"])

     plot!(p1,p2,p3,layout=(1,3),legend=:bottomright,size=(1200,500),lw=2)

end
```

改变 L	改变 A	改变 k
当 $t \to +\infty, Ae^{-kt} \to 0$	A 决定了 $t=0$ 时刻的 y_{0} 值	$t=0, y'(0)=LAk/(1+A)^2$
所以当 t 增加, $y \to L$	增加A,减小了 y_0 的值	所以初始t_0的增长率由k 值决定
L 称为环境容量		

```
md"""

|$改变 L$|$改变 A$|$改变 k$|
|:--|--:--|--:|
|$当t \to +\infty,Ae^{-kt} \to 0$  |$A决定了 t=0时刻的 y_{0}值$|$t=0,
y'(0)=LAk/(1+A)^2$|
|$所以 当t 增加 , y \to L$  |增加$A$,减小了 $y_0$ 的值|所以初始$t_0$的增长率由$k$ 值决定
|$L 称为环境容量$  |||
"""
```

逻辑斯蒂模型(Logistic Model) 的分析

对逻辑斯蒂表达式

$$y=L/(1+Ae^{-kt})$$

一阶导数为:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{LAk^{-kt}}{(1+Ae^{-kt})^2}$$

分子,分母都为正值, 所以 $f'(t)$ 在任何时刻都大于 0, 函数没有临界值

二阶导数为:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{LAk^2e^{-kt}(-1+Ae^{-kt})}{(1+Ae^{-kt})^3}$$

因为L, A, k, e^{kt} 以及分母 $(1+Ae^{-kt})^3$ 都大于 0,二阶导数的符号由 $(-1+Ae^{-kt})$决定.

函数凸性发生改变在 $\frac{d^2y}{dt^2}=0$ 所以有 $Ae^{-kt}=1$ 由此的函数值为 $y=\frac{L}{2}$

所以当 种群数量达到 $\frac{L}{2}$ 的时候, 数量还会增加, 但是增长的幅度会减少 (二阶导数小于 0)

凸性改变的反射点时间可由二阶导数为0的条件求出

$$\text{因为 } Ae^{-kt}=1, \text{所以 } t=\frac{ln(1/A)}{-k}=\frac{lnA}{k}$$

```
md"""
### 逻辑斯蒂模型(Logistic Model) 的分析


对逻辑斯蒂表达式

$y=L/(1+Ae^{-kt})$

一阶导数为:

$\frac{dy}{dt}=\frac{LAk^{-kt}}{(1+Ae^{-kt})^2}$
分子,分母都为正值, 所以 $f'(t) 在任何时刻都大于 0,函数没有临界值$

二阶导数为:

$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{LAk^2e^{-kt}(-1+Ae^{-kt})}{(1+Ae^{-kt})^3}$

因为$L, A, k, e^{kt} 以及分母 (1+Ae^{-kt})^3$  都大于 $0$,二阶导数的符号由 $(-1+Ae^{-kt})$决定.

函数凸性发生改变在 $\frac{d^2y}{dt^2}=0$ 所以有 $Ae^{-kt}=1$ 由此的函数值为 $y=\frac{L}{2}$


所以当 $种群数量达到 \frac{L}{2}的时候,数量还会增加,但是增长的幅度会减少(二阶导数小于 0)$
```

```
凸性改变的反射点时间可由二阶导数为$0$的条件求出

$因为 Ae^{-kt}=1,所以 t=\frac{ln(1/A)}{-k}=\frac{lnA}{k}$

"""

```

```
@htl("""<script src="https://cdn.bootcdn.net/ajax/libs/mathjax/3.1.2/es5/tex-svg-full.js"></script>
    """)
```