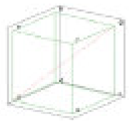


```julia
PlutoUI.Resource("https://tva1.sinaimg.cn/thumbnail/e6c9d24egy1h2alsw1tzxj20m80gomxn.jpg")
```

ch08 sec8.2 积分几何应用

Table of Contents

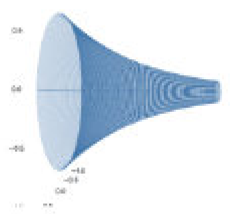

```julia
begin
        using PlutoUI    , Plots    ,DataFrames    ,HypertextLiteral    ,LaTeXStrings
,Symbolics
        plotly()
        theme(:bright)
        PlutoUI.TableOfContents()

    end
```

旋转体的体积

Example

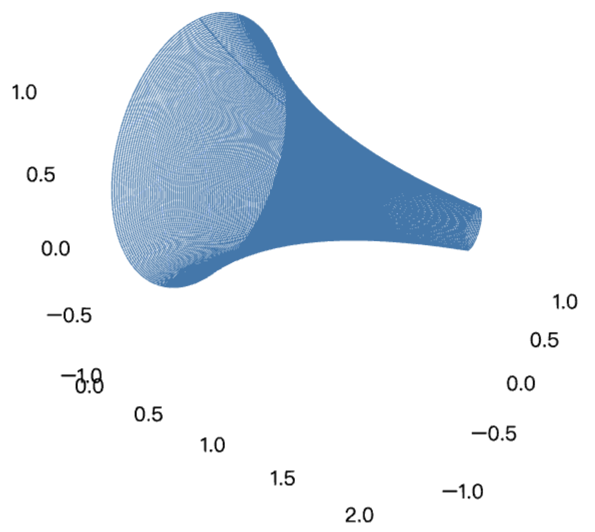
example1

旋转体如图 高度区间$x \in (0,1]$, 外形轮廓半径为$y=e^{-x}$,绕x轴旋转,求其实体的体积



下图可以拖动方法, 旋转角度(原意为实心体),绘图方法和积分解法里稍微有点不同, 绘图需要解决每一个切片的园盘上每一个点的坐标, 包括 y和z, 计算体积不用考虑圆盘上点的坐标问题

```
md"""
## 旋转体的体积

!!! example
    example1

    旋转体如图
    高度区间$x \in (0,1]$, 外形轮廓半径为$y=e^{-x}$,绕$x$轴旋转,求其实体的体积
    ![](https://tva1.sinaimg.cn/small/e6c9d24egy1h333rn3zzij20go0b4jrj.jpg)

    下图可以拖动方法, 旋转角度(原意为实心体),绘图方法和积分解法里稍微有点不同, 绘图需要解决每一个切片的园盘上每一个点的坐标, 包括 $y$和$z$, 计算体积不用考虑圆盘上点的坐标问题
"""
```




```julia
let
    radius(x)=ℯ^(-x)
    y(a)=sin(a)
    z(a)=cos(a)
    xspan=0:0.01:2
    cspan=-2pi:0.02:2pi
    xs=[]
    ys=[]
    zs=[]
    for x in xspan
        ra=radius(x)
        for a in cspan
            push!(ys,ra*y(a))
        end
    end

    for x in xspan
        ra=radius(x)
        for a in cspan
            push!(zs,ra*z(a))
        end
    end

    for x in xspan

        for a in cspan
            push!(xs,x)
        end
    end

    plot(xs,ys,zs,label=false)


end
```

沿着x轴,每Δx 高度把旋转体切开, 每个切片都是圆台

由于旋转体绕x轴旋转, 圆台半径即为y坐标. 当$\Delta x \to 0$ 时, 圆台近似为圆柱体,体积公式为:

$$Vol = \pi y^2 \Delta x$$

总体积为和:

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{i=1}^{n} \pi(y)^2\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi (e^{-x})^2\Delta x$$

替换y 后变形为:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi (e^{-x})^2\Delta x=\int_{0}^{1} \pi (e^{-x})^2\Delta x$$

用黎曼和公式求积分:

```
md"""
沿着$x$轴,每$Δx$ 高度把旋转体切开, 每个切片都是圆台

由于旋转体绕$x$轴旋转, 圆台半径即为$y$坐标. 当$Δx \to 0$ 时,  圆台近似为圆柱体,体积公式为:

$Vol=πy^2Δx$

总体积为和:

$\lim_{n \to \infty}\sum_{i=1}^{n} \pi(y)^2\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi (e^{-x})^2\Delta x$


替换$y$ 后变形为:

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi (e^{-x})^2\Delta x=\int_{0}^{1} \pi (e^{-x})^2\Delta x$

用黎曼和公式求积分:
"""
```

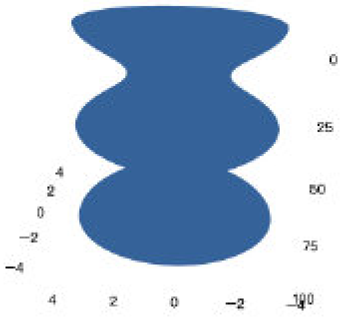
```
Dict("rightsums" => 1.3528, "leftsums" => 1.3637)
```

```
let
    a=0
    b=1
    n=250
    f(x)=π*(e^(-x))^2
    res=getRiemannSum(a,b,n,f)
    @show res
end
```

```
res = Dict("rightsums" => 1.3528, "leftsums" => 1.3637)
```

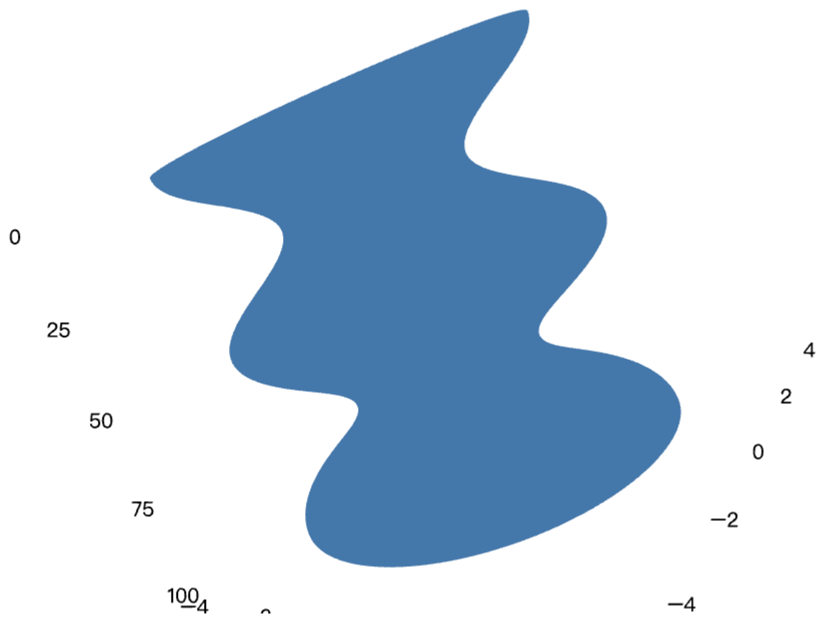
Example

example2 桌腿形旋转体, 绕z轴旋转, 半径为 $r = 3 + cos(\pi y/25)$,高度为 100



首先根据描述绘制一下图形,绘图方法和上面的喇叭形旋转体基本一样,除了半径的公式, 积分解法也完全一样

```
md"""
!!! example
    example2
    桌腿形旋转体, 绕$z$轴旋转, 半径为 $r=3+cos(\pi y/25)$,高度为 $100$

    ![](https://tva1.sinaimg.cn/small/e6c9d24egy1h335fgh0mpj20gq0g2aaa.jpg)

首先根据描述绘制一下图形,绘图方法和上面的喇叭形旋转体基本一样,除了半径的公式, 积分解法也完全一样
"""
```




```
let
    radius(z)=3+cos(3.1415*z/25)
    y(a)=sin(a)
    z(a)=cos(a)
    xspan=0:0.1:100
    cspan=-2pi:0.04:2pi
    xs=[]
    ys=[]
    zs=[]
    for x in xspan
        ra=radius(x)
        for a in cspan
            push!(ys,ra*y(a))
        end
    end

    for x in xspan
        ra=radius(x)
        for a in cspan
            push!(zs,ra*z(a))
        end
    end

    for x in xspan

        for a in cspan
            push!(xs,x)
        end
    end

    plot(xs,ys,zs,label=false)

end
```

轴的描述和书有差异, 解法一样

沿着x轴,每Δx 高度把旋转体切开, 每个切片都是圆台

由于旋转体绕x轴旋转, 圆台半径即为y坐标. 当$\Delta x \to 0$ 时, 圆台近似为圆柱体,体积公式为:

$$Vol=\pi(3+cos(\pi x/25))^2\Delta x$$

总体积为和:

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{i=1}^{n} \pi(y)^2\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi (3+cos(\pi x/25))^2\Delta x$$

替换y 后变形为:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi (3+cos(\pi x/25))^2\Delta x=\int_{0}^{100} \pi (3+cos(\pi x/25))^2\Delta x$$

用黎曼和公式求积分:

```
md"""
*轴的描述和书有差异, 解法一样*

沿着$x$轴,每$Δx$ 高度把旋转体切开, 每个切片都是圆台

由于旋转体绕$x$轴旋转, 圆台半径即为$y$坐标. 当$Δx \to 0$ 时,  圆台近似为圆柱体,体积公式为:

$Vol=π(3+cos(\pi x/25))^2Δx$

总体积为和:

$\lim_{n \to \infty}\sum_{i=1}^{n} \pi(y)^2\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi (3+cos(\pi x/25))^2\Delta x$


替换$y$ 后变形为:

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi (3+cos(\pi x/25))^2\Delta x=\int_{0}^{100} \pi (3+cos(\pi x/25))^2\Delta x$

用黎曼和公式求积分:
"""
```

```
Dict("rightsums" => 2984.51, "leftsums" => 2984.51)
```

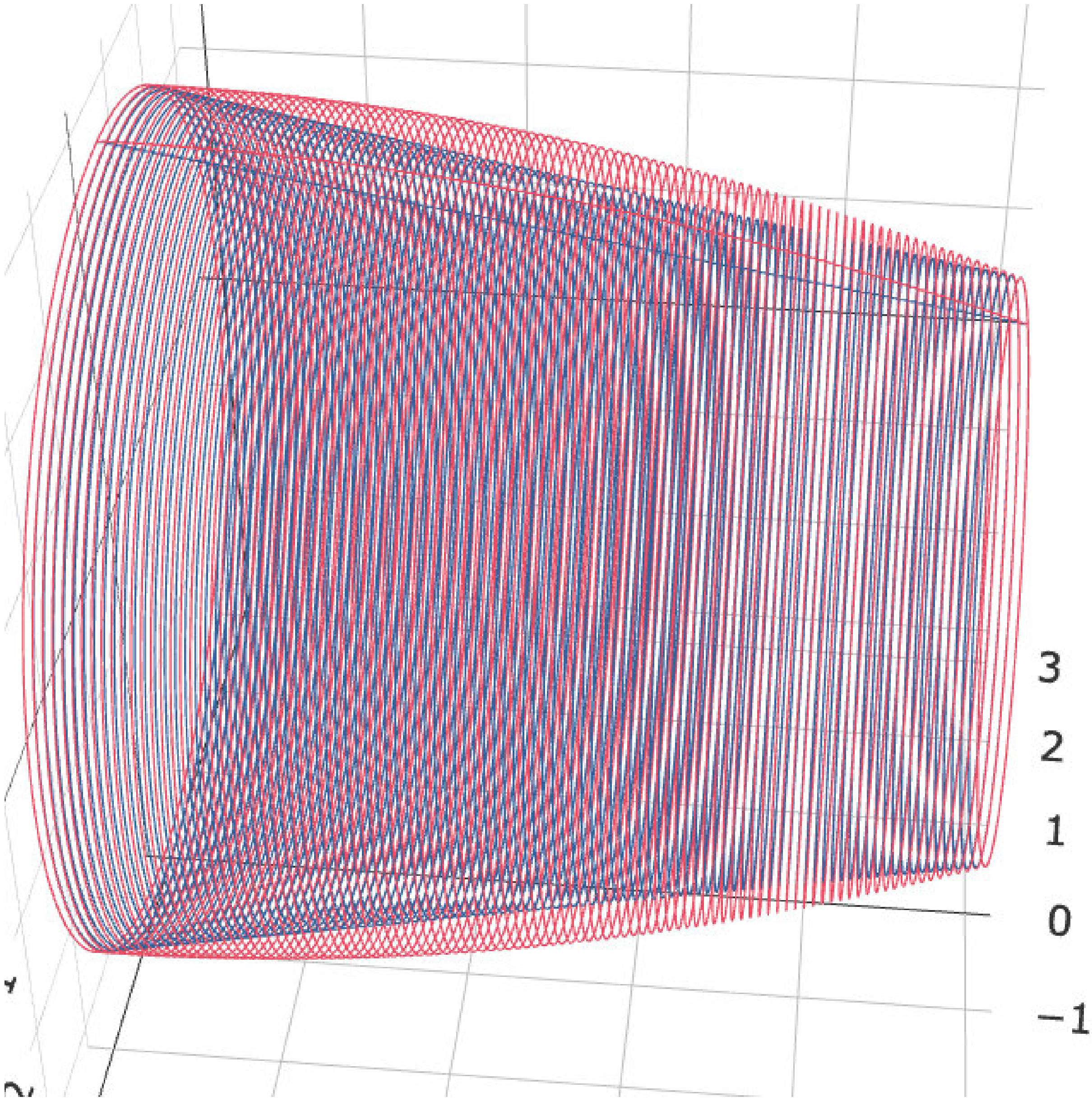
```
let
    a=0
    b=100
    n=250
    f(x)=pi*(3+cos(pi*x/25))^2
    res=getRiemannSum(a,b,n,f)
    @show res
end
```

```
res = Dict("rightsums" => 2984.513, "leftsums" => 2984.513)
```

Example

example3

该物体由曲线,$y=x$ 和$y=x^2$ 限定, 绕轴$y=3$旋转, 计算体积



根据描述绘图,见上, 实际图形像一个没有底的杯子, 杯体由两个半径不同的函数挤压成,在图中是内层的蓝色部分, 和外层的红色部分.

沿着x轴,每Δx 高度把旋转体切开, 内层半径为x,外层半径为x^2

外形为：

外侧有弧度, 内侧平直

当$\Delta x \to 0$时, 截面近似为矩形,类似一个钥匙环,如下图:

更详细的图见课本 page 436

这样的环的体积为:

$$\text{外半径的圆柱体积} - \text{内半径的圆柱体积}$$

所以切片的体积为:

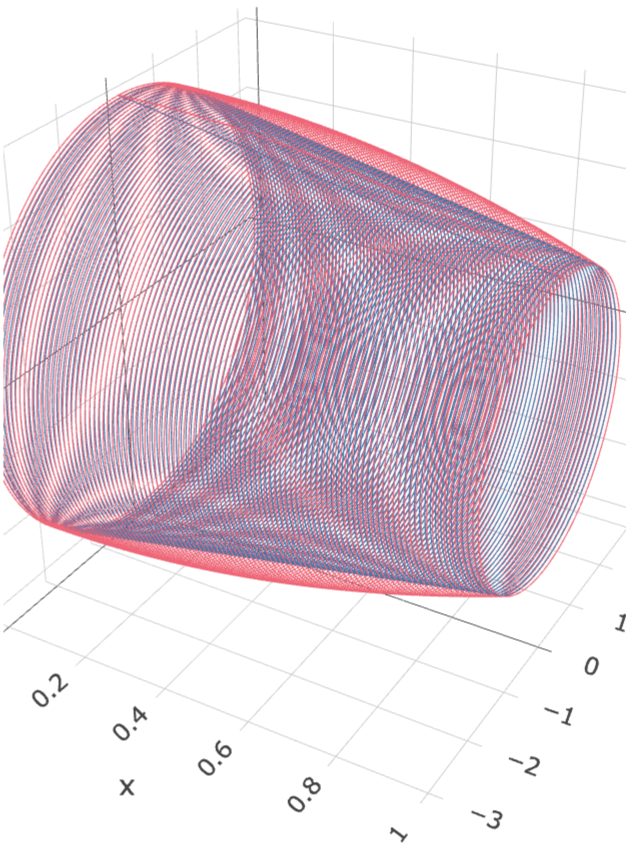
$$\pi(\text{半径}_{\text{外}})^2 - \pi(\text{半径}_{\text{内}})^2 = \pi(3 - x^2)^2 - \pi(3 - x)^2\Delta x$$

化简为:

$$Vol_{\text{切片}} = \pi(6x - 7x^2 + x^4)\Delta x$$

所以下面就可以用黎曼和公式求体积

```
md"""
!!! example
    example3

    该物体由曲线,$y=x$ 和$y=x^2$ 限定, 绕轴$y=3$旋转, 计算体积
    ![](https://tva1.sinaimg.cn/mw690/e6c9d24egy1h33e040oggj20j20hqtej.jpg)


根据描述绘图,见上, 实际图形像一个没有底的杯子, 杯体由两个半径不同的函数挤压成,在图中是内层的蓝色部分, 和外层的红色部分.

沿着$x$轴,每$Δx$ 高度把旋转体切开, 内层半径为$x$,外层半径为$x^2$

外形为 :![](https://tse1-mm.cn.bing.net/th/id/R-C.7915b37dc12cd8555362753c356b72cd?rik=jWL84c6HYnyu5w&riu=http%3a%2f%2fjbgm.com%2fupfile%2f2016%2f08%2f13%2f20160813161359_410.jpg&ehk=6MxZ9p4U2hG%2fEQobEAS4VhDSYcTGQbKEwwoT7m3sT%2b4%3d&risl=&pid=ImgRaw&r=0)
外侧有弧度, 内侧平直


当$Δx \to 0$  时, 截面近似为矩形,类似一个钥匙环,如下图:

![](https://img3.qjy168.com/provide/2015/12/02/6052287_20151202133929.jpg)

更详细的图见课本 page 436

这样的环的体积为:

$外半径的圆柱体积-内半径的圆柱体积$

所以切片的体积为:

$\pi (半径_{外})^2 -\pi (半径_{内})^2 =π(3-x^2)^2-π(3-x)^2 Δx$

化简为:

$Vol_{切片}=π(6x-7x^2+x^4) Δx$



所以下面就可以用黎曼和公式求体积

"""
```


0.2
0.4
0.6
0.8
1
x
1
0
−1
−2
−3

Dict("rightsums" ⇒ 2.7227, "leftsums" ⇒ 2.7227)

```
let
    a=0
    b=1
    n=250
    f(x)=pi*(6x-7x^2+x^4)
    res=getRiemannSum(a,b,n,f)
    @show res
end
```

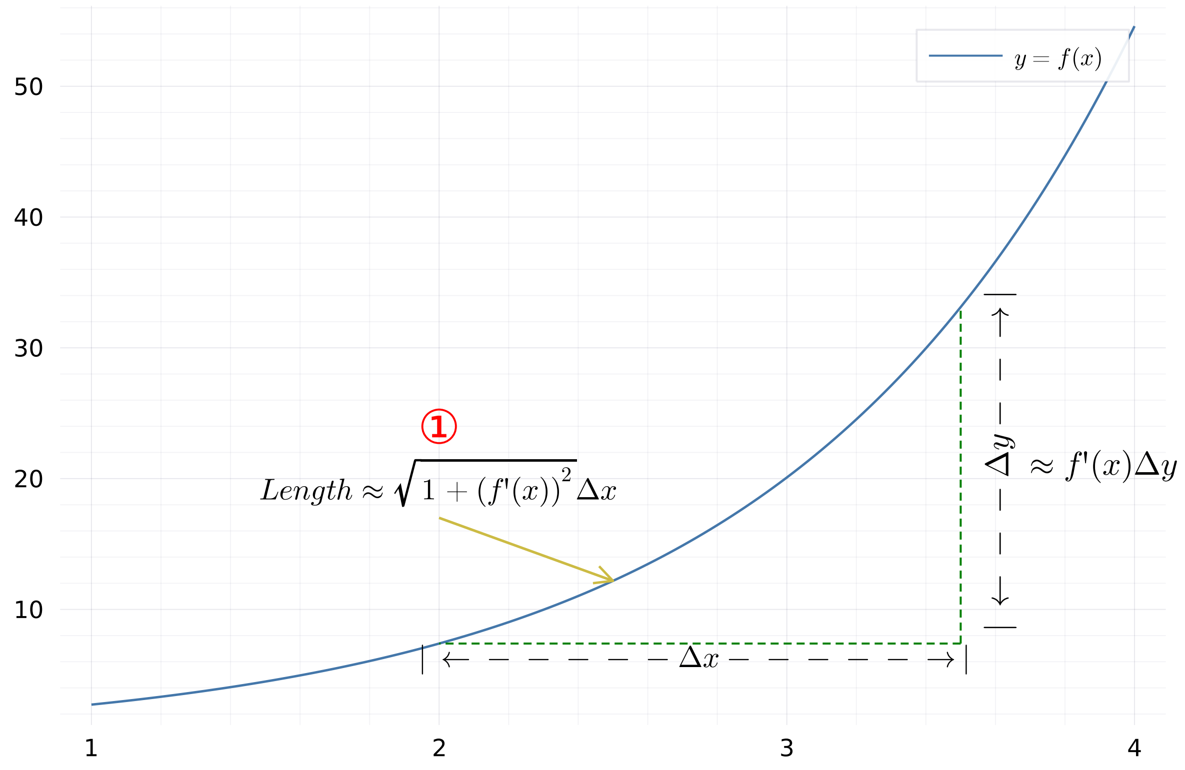
```
res = Dict("rightsums" => 2.7227, "leftsums" => 2.7227)
```

计算弧线长度

```
md"""
## 计算弧线长度
"""
```

在区间内,将弧线划分成小块, 每一块内的弧线近似为直线

```
md"""
在区间内,将弧线划分成小块, 每一块内的弧线近似为直线
"""
```




```julia
let
    md"""
    在区间内,将弧线划分成小块, 每一块内的弧线近似为直线
    """
    gr()
    xoffset=0.1
    yoffset=3
    f(x)=e^x
    tspan=1:0.02:4
    ann=[
        (2.75,f(2.25)-yoffset,text(L"|\leftarrow----- Δx -----\rightarrow
        |",pointsize=10,)),

        (3.5+xoffset,(f(3.5)-f(2.5))/2-1.9,text(L"|\leftarrow--Δy--\rightarrow
        |",pointsize=11,rotation=90,halign=:left)),
        (2,20,text(L" Length \approx \sqrt{1+(f'(x))^2} \Delta x",pointsize=10)),
        (2,24,text("①",pointsize=16,color=:red)),
        (3.5+4*xoffset,(f(3.5)-f(2.5))/2+f(2.5),text(L"\approx f'(x)Δy",pointsize=11,
        valign=:top))

    ]
    plot(f,tspan,label="$(L"y=f(x)")",ann=ann)
    plot!([3.5,2],[f(2),f(2)],ls=:dash, lw=1,color=:green,label=false)
    plot!([3.5,3.5],[f(2),f(3.5)],ls=:dash, lw=1,color=:green,label=false)
    plot!([2,2.5],[17,f(2.5)],arrow=0.5,label=false)



end
```

上图表示:

定义内一个极小的变化Δx ,相应的的有一个$\Delta y \approx f'(x) \Delta x$

当Δx 足够小, 曲线可以近似为直角三角形的斜边, 所以用勾股定理可得:

$$Length \approx \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \approx \sqrt{1+(f'(x))^2} \Delta x$$

所以区间内长度等于小的斜线长度的总和

$$\sum \sqrt{1+(f'(x))^2} \Delta x$$

在区间内,若有 $a<b$ 则积分可得:

$$\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

```
md"""
上图表示:

定义内一个极小的变化$\Delta x$ ,相应的的有一个$\Delta y \approx f'(x) \Delta x$

当$\Delta x$ 足够小, 曲线可以近似为直角三角形的斜边, 所以用勾股定理可得:

$Length \approx \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \approx \sqrt{1+(f'(x))^2} \Delta
x$

所以区间内长度等于小的斜线长度的总和

$\sum \sqrt{1+(f'(x))^2} \Delta x$

在区间内,若有 $a<b$ 则积分可得:

$\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$
"""
```

Example

example 5

当$x \in [0,5]$时，计算$y=x^3$ 的长度

如果 $f(x)=x^3$,则 $f'(x)=3x^2$

则区间内曲线长度为:

$$\int_{0}^{5}\sqrt{1+(3x^2)^2} dx$$

使用黎曼和公式计算如下:

```
md"""
!!! example

    example 5

    当$x \in [0,5]$时, 计算$y=x^3$ 的长度

如果 $f(x)=x^3$,则 $f'(x)=3x^2$

则区间内曲线长度为:

$\int_{0}^{5}\sqrt{1+(3x^2)^2} dx$

使用黎曼和公式计算如下:

"""
```

```
Dict("rightsums" ⇒ 125.865, "leftsums" ⇒ 125.495)
```

```
let
    a,b,n=0,5,1000
    df(x)=sqrt(1+(3x^2)^2)
    res=getRiemannSum(a,b,n,df)
    @show res
end
```

```
res = Dict("rightsums" => 125.8654, "leftsums" => 125.4953)
```

参数曲线上的距离和弧线长度

粒子在二维平面中的运动轨迹可以表示为时间t的参数方程,曲线上的点记作 $(f(t),g(t))$

$$dx/dt \text{ 表示在 } x \text{ 方向上的速度, 对应, } dy/dt \text{ 为粒子在 } y \text{ 轴方向的速度}$$

因此粒子的真实速度是三角形的斜边,表示为:

$$速度=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$$

通过对速度积分就可以得到离子沿着运动轨迹移动的距离.如下

> **Info**
>
> 如果离子在空间的位置是时间t的函数,那么在区间$[a,b]$ 内, 离子沿曲线运动的距离为:
>
> $$\int_{a}^{b} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt$$
>
> 如果粒子没有走回头路, 那么移动的距离就是弧线的长度

```
md"""
## 参数曲线上的距离和弧线长度

粒子在二维平面中的运动轨迹可以表示为时间$t$的参数方程,曲线上的点记作 $(f(t),g(t))$

$dx/dt 表示在 x 方向上的速度, 对应, dy/dt 为粒子在 y轴方向的速度$


因此粒子的真实速度是三角形的斜边,表示为:

$速度=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$


通过对速度积分就可以得到离子沿着运动轨迹移动的距离.如下

!!! info
    如果离子在空间的位置是时间$t$的函数,那么在区间$[a,b]$ 内, 离子沿曲线运动的距离为:

    $\int_{a}^{b} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt$

    如果粒子没有走回头路, 那么移动的距离就是弧线的长度

"""
```

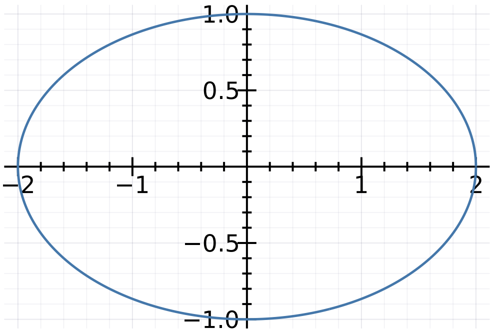
Example

example6 求椭圆形的长度, 参数方程如下:

$$x=2cost,y=sint,t\in[0,2\pi]$$

黎曼积分计算为:

```
md"""
!!! example
    example6
    求椭圆形的长度, 参数方程如下:

    $x=2cost,y=sint, t\in [0,2π]$

    黎曼积分计算为:

"""
```




```
let
    tspan=0:0.02:2pi
    xs=[2*cos(t) for t in tspan ]
    ys=[sin(t) for t in tspan]
    plot(xs,ys, frame=:origin,label=false,size=(300,200))
end
```

Dict("rightsums" ⇒ 9.6884, "leftsums" ⇒ 9.6884)

```
let
   a,b,n=0,2π,500
   df(t)=sqrt((-2sin(t))^2+(cos(t))^2)
   res=getRiemannSum(a,b,n,df)
end
```

Example

example7

粒子在 0 到 1时间内运动轨迹参数方程如下:

$$x=4(t-t^2),y=4(t-t^2), t\in [0,1]$$

运动轨迹如下图.

因为 $dx/dt=4(1-2t),dy/dt=4(1-2t)$ 积分得到在 $0\leq t \leq 1$ 时间内运动距离为$2\sqrt{2}$

```
md"""
!!! example
    example7

    粒子在 $0$ 到 $1$时间内运动轨迹参数方程如下:

    $x=4(t-t^2),y=4(t-t^2), t\in [0,1]$


运动轨迹如下图.

因为 $dx/dt=4(1-2t),dy/dt=4(1-2t)$ 积分得到在 $0\leq t \leq 1$ 时间内运动距离为
$2\sqrt{2}$


"""
```

选择时间区间：

0.5秒:1秒

两个时间区间运动方向相反, 实际位移为0, 运动最远的坐标为[1,1]


```julia
let
    ranger1=range(0, stop =0.5, length = 50)
    ranger2=range(0.5, stop = 1, length = 50)
    tspan=ranger == 1 ?  ranger1 : ranger2
    startx=ranger == 1 ?  0 : 1
    starty=ranger == 1 ?  0 : 1
    x(t)=4*(t-t^2)
    y(t)=4*(t-t^2)
    p = plot([startx],[starty], leg = false, xlims = (0, 1), ylims = (0, 1))
    anim = Animation()
    for t = tspan
        xs=x(t)
        ys=y(t)
        push!(p, [xs],[ys])
        frame(anim)
    end

gif(anim)
end
```

```
Saved animation to
fn:  "/var/folders/zz/r9mmphcx6nz_7kqlnx6wzgyw0000gn/T/jl_lwc8vz.gif"
```

```
getRiemannSum (generic function with 1 method)
```

```julia
 @htl("""<script src="https://cdn.bootcdn.net/ajax/libs/mathjax/3.2.0/es5/tex-svg-full.min.js"></script>
     <script src="http://127.0.0.1:8080/tex-svg-full.min.js"></script>
    """)
```