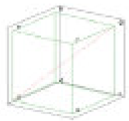


```julia
PlutoUI.Resource("https://tva1.sinaimg.cn/thumbnail/e6c9d24egy1h2alsw1tzxj20m80gomxn.jpg")
```

Table of Contents

ch08 sec8.1 积分求面积和体积

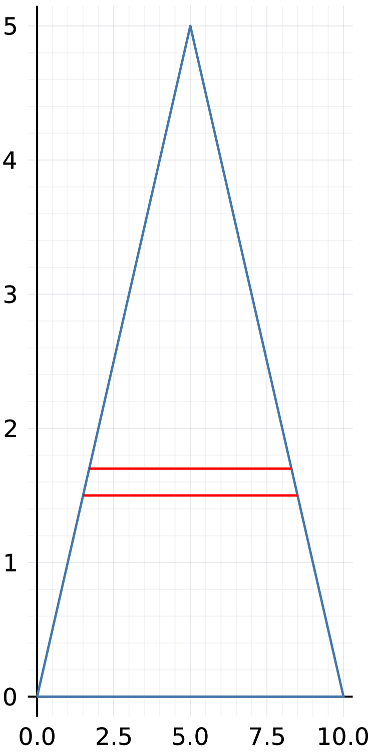
```julia
begin
        using PlutoUI    , Plots    ,DataFrames    ,HypertextLiteral    ,LaTeXStrings ,Symbolics
        gr()
        theme(:bright)

        PlutoUI.TableOfContents()

    end
```

ch08 sec8.1 积分求面积和体积

```julia
md"# ch08 sec8.1  积分求面积和体积"
```

1.5

```julia
@bind  hval Slider(0.0:0.3:4.8,show_value=true, default=4)
```




```
let
    tspan=0:12
    pa=[0 0]
    pb=[10 0]
    pc=[5 5]
    matrix=[pa;pb;pc;pa]
    h=hval
    Δh=0.2
    ang=tan((1/3)*pi)

    function  affinline(a,b) #获取两点间直线斜率
            m= (b[1,2]-a[1,2])/(b[1,1]-a[1,1])  #y 轴坐标通过方程获取
            return
             (x)->m*x-m*a[1,1]+a[1,1]
    end
    #lca=affinline(pc,pa)
    #lcb=affinline(pc,pb)
    function slice(delta)
        return  function (h)

                p1=plot!([h,10-h],[h,h],label=false,color=:red)
                p2=plot!([h+Δh,10-h-Δh],[h+Δh,h+Δh],label=false,color=:red)
                return  [p1,p2]
            end
    end
    plotfunc=slice(Δh)
    plot(matrix[:,1],matrix[:,2],frame=[:zerolines :semi],label=false,size=
(400,400))
    plot!(plotfunc(h)...)


end
```

Example

example1 用切片的方法计算上图的等腰三角形的面积, 底边为 10, 高为 5

三角形面积为 :

$$三角形面积=\frac{1}{2}底\times 高$$

计算结果为:

```
md"""
!!! example
    example1
    用切片的方法计算上图的等腰三角形的面积, 底边为 10, 高为 5


三角形面积为 :

$三角形面积=\frac{1}{2}底\times 高$
计算结果为:
"""
```

area = 25.0

```
area=0.5*10*5
```

用小的Δh 将三角形水平切成小片段,每个小片段近似于矩形, 累积片段得到面积 利用相似三角形,可以到的片段的宽度:

$$w_i=10-2h_i$$

小片段的面积近似为:

$$(10-2h_i)\Delta h$$

求和得：

$$Area \approx \sum_{i=1}^{n}(10-2h_i)\Delta h$$

求极限, 用黎曼和公式求得面积:

$$\int_{0}^{5}(10-2h)dh$$

```
md"""
用小的$Δh$ 将三角形水平切成小片段,每个小片段近似于矩形, 累积片段得到面积
利用相似三角形,可以到的片段的宽度:

$w_i=10-2h_i$

小片段的面积近似为:

$$(10-2h_i)Δh$$

求和得 :

$Area \approx \sum_{i=1}^{n}(10-2h_i)Δh$

求极限, 用黎曼和公式求得面积:

$\int_{0}^{5}(10-2h)dh$

"""
```

```
Dict("rightsums" ⇒ 24.9, "leftsums" ⇒ 25.1)
```

```
let
    a=0
    b=5
    n=250
    f(h)=10-2h
    res=getRiemannSum(0,5,250,f)
    @show   res

end
```

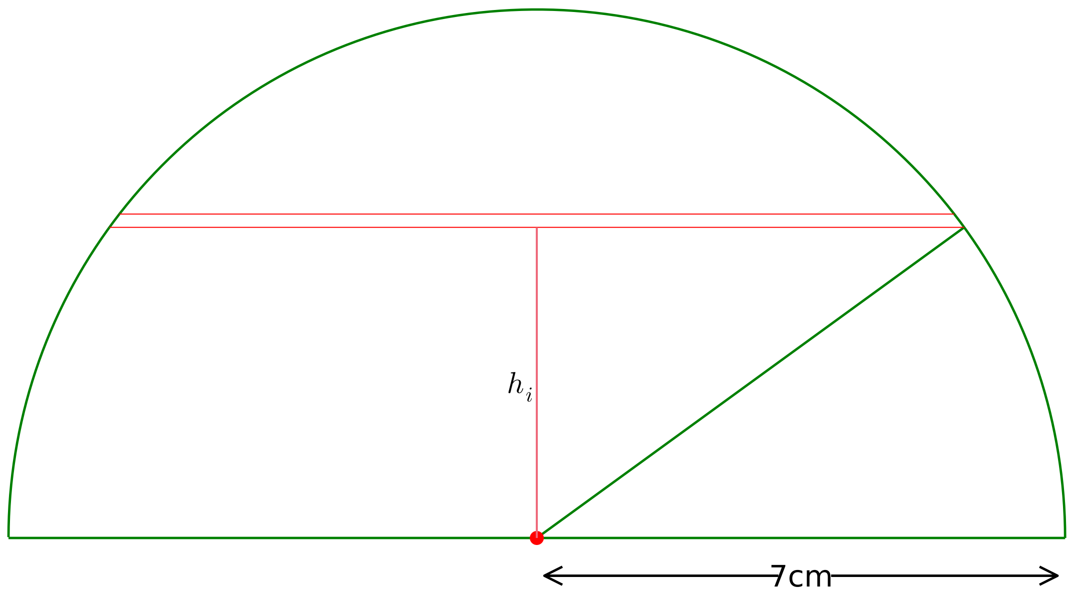
```
res = Dict("rightsums" => 24.9, "leftsums" => 25.1)
```

Example

example2

用切片法计算半径为 7 的的半圆形的面积

```
md"""
!!! example
    example2

    用切片法计算半径为 $7$ 的的半圆形的面积
"""
```




```
let
    Δh=0.01pi
    tspan=0:0.02:pi
    x(t)=7*cos(t)
    y(t)=7*sin(t)
    θ1=(1/5)pi
    θ2=(4/5)pi
    ann=[
        (3.5,-0.5,text("7cm",pointsize=10)),
        (-0.2,0.5*y(θ1),text(L"h_i",pointsize=10,color=:black))
    ]
    p1=plot(x.(tspan),y.(tspan),ratio=1,
    frame=:none,label=false,color=:green,ann=ann)
    p2=plot!([-7,7],[0,0],color=:green,label=false)
    p3=plot!([0,x(θ1)],[0,y(θ1)],color=:green, label=false)
    p4=scatter!([0],[0],ms=4,mc=:red,label=false)
    p5=plot!([3.2,0.1],[-0.5,-0.5], arrow=0.5,label=false,color=:black)
    p6=plot!([3.9,6.9],[-0.5,-0.5], arrow=0.5,label=false,color=:black)
    p7=plot!([x(θ1),x(θ2)],[y(θ1),y(θ2)],color=:red,lw=0.5,label=false)
    p8=plot!([x(θ1+Δh),x(θ2-Δh)],[y(θ1+Δh),y(θ2-Δh)],color=:red,lw=0.5,label=false)
    p9=plot!([0,0],[0,y(θ1)],label=false,lw=1)

end
```

与三角形面积计算一样,中间切片的面积为:

$$Area \approx w_i \Delta h$$

根据勾股定律取得宽度 $w_i=2\sqrt{49-h_i^2}$

所以半圆形的面积近似为:

$$Area \approx \sum_{i=1}^{n}(w_i)\Delta h=\sum_{i=1}^{n}2\sqrt{49-h_i^2}\Delta h$$

仍然求极限,积分得:

$$2\int_{0}^{7}(\sqrt{49-h^2})dh$$

用黎曼和公式计算

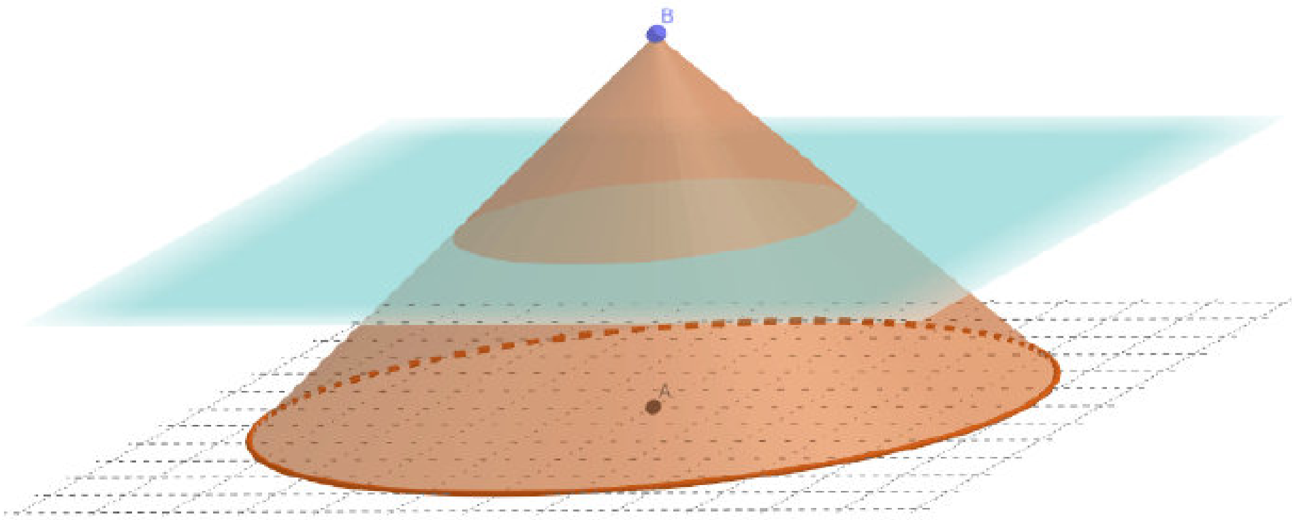
```
md"""
与三角形面积计算一样,中间切片的面积为:

$Area \approx w_i Δh$

根据勾股定律取得宽度
$w_i=2\sqrt{49-h_i^2}$

所以半圆形的面积近似为:

$Area \approx \sum_{i=1}^{n}(w_i)Δh=\sum_{i=1}^{n}2\sqrt{49-h_i^2}Δh$

仍然求极限,积分得:

$2\int_{0}^{7}(\sqrt{49-h^2})dh$

用黎曼和公式计算
"""
```

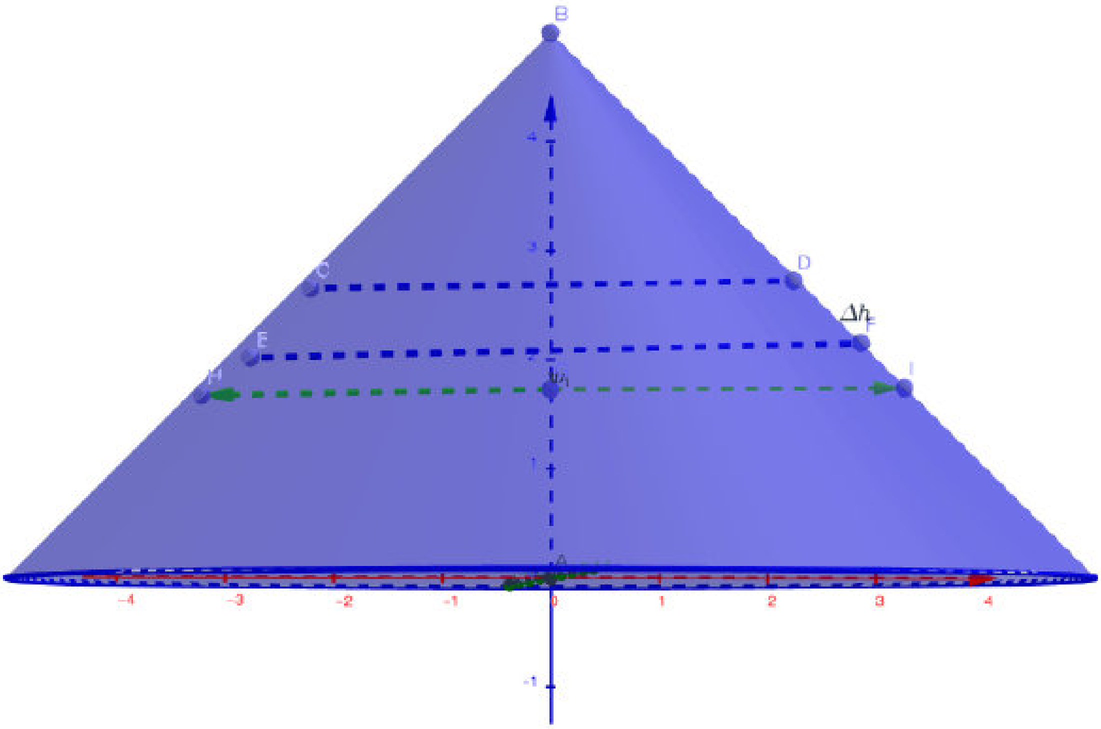
```
Dict("rightsums" ⇒ 76.9192, "leftsums" ⇒ 77.0172)
```

```
let
    a=0
    b=7
    n=1000
    f(h)=sqrt(49-h^2)
    res=getRiemannSum(a,b,n,f)
    finalres=Dict(
        "rightsums"=>res["rightsums"]*2,
         "leftsums"=>res["leftsums"]*2,
    )
end
```

Example

example3 用水平切片方法计算圆锥的体积





底面直径为 10, 高为5

根据前一个实例的计算,小圆盘的宽度为$10-2h_i$,所以半径为$5-h_i$,每个高度为Δh的圆台,近似为一个圆柱体,所以体积表示为:

$$Vol \approx \pi r_i^2 h_i \Delta h=\pi(5-h_i)^2\Delta h$$

当 $n \to \infty$,$\Delta h \to 0$:

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{i=1}^{n} \pi(5-h_i)^2\Delta h=\int_{0}^{5} \pi(5-h_i)^2dh$$

下面仍然使用黎曼和公式计算

注:书上page 428 用了积分代换,这是本书第七章的内容,考虑到用编程方法实现, 这些手工计算方法没有必要,都是文本内容和在草稿纸上进行验算没区别,这也是传统微积分教学的重点,但是有了计算机程序,以前最重要的内容一行代码就可以解决, 微积分教学的重点已经发生了很大的变化.用手工计算一个积分变换花费的时间,我们可以学习更多的模型.

```
md"""
!!! example
    example3
    用水平切片方法计算圆锥的体积
    ![](https://tva1.sinaimg.cn/mw690/e6c9d24egy1h32sybtt4sj217s0u00v9.jpg)
    ![](https://tva1.sinaimg.cn/mw690/e6c9d24egy1h32tpy66i9j217s0u0gnn.jpg)

    底面直径为 $10$, 高为$5$



根据前一个实例的计算,小圆盘的宽度为$10-2h_i$,所以半径为$5-h_i$,每个高度为$Δh$的圆台,近似为一个圆柱体,所以体积表示为:

$Vol \approx πr_i^2h_iΔh=π(5-h_i)^2Δh$

当 $n \to \infty$ ,$Δh \to 0$:

$\lim_{n \to \infty}\sum_{i=1}^{n} \pi(5-h_i)^2\Delta h=\int_{0}^{5} \pi(5-h_i)^2dh$

下面仍然使用黎曼和公式计算

**注:书上page 428 用了积分代换,这是本书第七章的内容,考虑到用编程方法实现, 这些手工计算方法没有必要,都是文本内容和在草稿纸上进行验算没区别,这也是传统微积分教学的重点,但是有了计算机程序,以前最重要的内容一行代码就可以解决, 微积分教学的重点已经发生了很大的变化.用手工计算一个积分变换花费的时间,我们可以学习更多的模型.**
"""
```

1000切片

```
@bind  slice Select([100=>"100切片",250=>"250切片",500=>"500切片",1000=>"1000切片"])
```

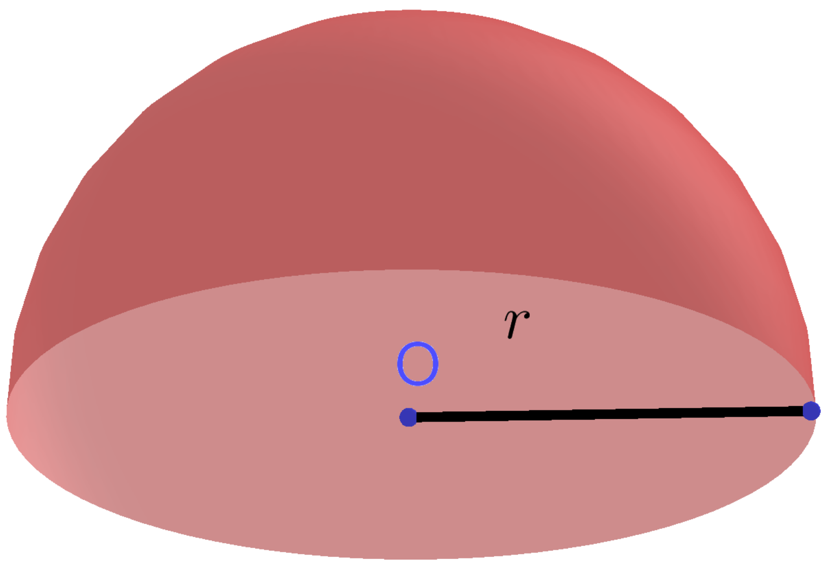
125.1876

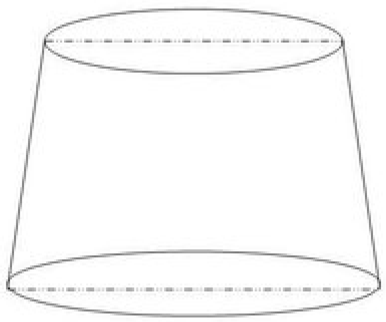
```
let
    a=0
    b=5
    n=slice    #上面菜单获取的切片数量,
    f(h)=pi*(5-h)^2
    res=getRiemannSum(a,b,n,f)
    @show res  #似乎结果和书上不一致,表示方法不同
    factor=pi/3
    @show finalres=round(res["leftsums"]/factor ,digits=4) #因为书上用了符号表示,结果基本一致
end
```

```
res = Dict("rightsums" => 130.7034, "leftsums" => 131.0961)
finalres = round(res["leftsums"] / factor, digits = 4) = 125.1876
```

Example

example4 用切片法计算半球的体积,半径为7





当Δh很小的时候, 圆台近似为圆柱体

在例2中我们已经求出了高度为h时的圆台半径:$r = \sqrt{49 - h^2}$

所以圆台的体积表示为:$Vol(h) = \pi(7^2 - h^2)\Delta h$

当 $n \to \infty$,$\Delta h \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi(7^2 - h^2)\Delta h = \int_0^7 \pi(7^2 - h^2)dh$$

用黎曼和公式计算:

```
md"""
!!! example
```

```
    example4
    用切片法计算半球的体积,半径为$7$
    ![](https://ncalculators.com/formula-images/geometry/hemisphere.png)
    ![](https://p1.ssl.qhmsg.com/dr/270_500_/t01cd00bd13617ef54f.jpg?size=523x345)

当$Δh$很小的时候, 圆台近似为圆柱体

在例2中我们已经求出了高度为$h$时的圆台半径:$r=\sqrt{49-h^2}$

所以圆台的体积表示为:$Vol(h)=\pi(7^2-h^2)Δh$

当 $n \to \infty$ ,$Δh \to 0$:

$\lim_{n \to \infty}\sum_{i=1}^{n} \pi(7^2-h^2)Δh=\int_{0}^{7} \pi(7^2-h^2)dh$


用黎曼和公式计算:

"""
```

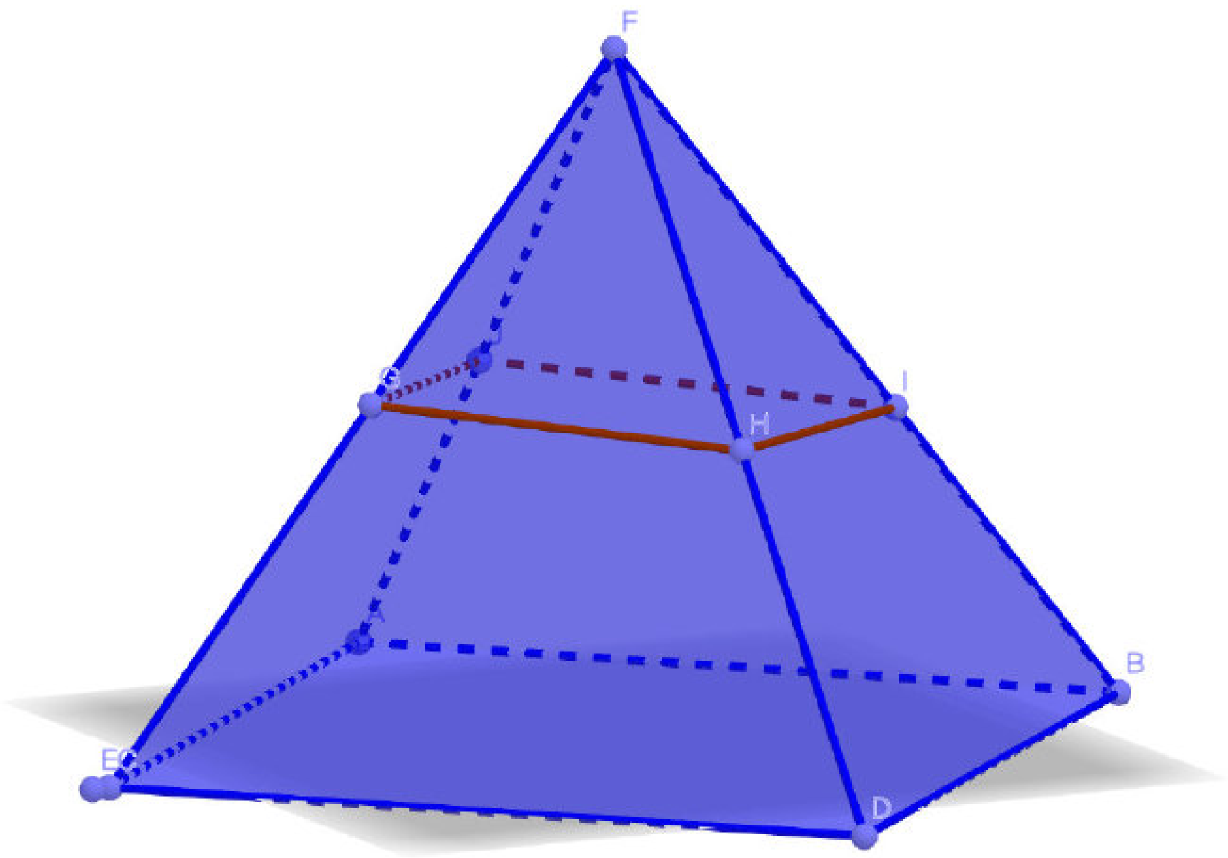
```
Dict("rightsums" ⇒ 717.839, "leftsums" ⇒ 718.916)
```

```
let
    a=0
    b=7
    n=slice    #上面菜单获取的切片数量,
    f(h)=pi*(7^2-h^2)
    res=getRiemannSum(a,b,n,f)
    @show res   #似乎结果和书上不一致,表示方法不同

end
```

```
res = Dict("rightsums" => 717.8386, "leftsums" => 718.9161)
```

Example

example 5



计算一下金字塔(四棱锥)的体积,高度为481,底边为正方形,宽度为756

中间的切片棱台底是正方形, 高度$\Delta h \to 0$时, 近似为长方体

切片底面积表示为高度的函数:$s = (\frac{756}{481})(481 - h)$

所以切片体积表示为:

$$Vol(h) \approx s^2 \Delta h$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} s^2 \Delta h = \int_0^{481} s^2 dh$$

用黎曼和公式计算如下

```
md"""
!!! example
    example 5
    ![](https://tva1.sinaimg.cn/mw690/e6c9d24egy1h32wjnmhqrj20u40u0myt.jpg)

    计算一下金字塔(四棱锥)的体积,高度为$481$,底边为正方形,宽度为$756$


中间的切片棱台底是正方形, 高度$Δh \to 0$ 时, 近似为长方体

切片底面积表示为高度的函数:$s=(\frac{756}{481})(481-h)$

所以切片体积表示为:

$Vol(h) \approx s^2Δh$

$\lim_{n \to \infty}\sum_{i=1}^{n} s^2Δh=\int_{0}^{481} s^2dh$


用黎曼和公式计算如下

"""
```

Dict("rightsums" ⇒ 9.13615e7, "leftsums" ⇒ 9.19114e7)

```
let
    a=0
    b=481
    n=500 # 从上面 select 获取
    basearea(h)=((756/481)*(481-h))^2
    res=getRiemannSum(a,b,n,basearea)
    @show res


end
```

```
res = Dict("rightsums" => 9.13615464565e7, "leftsums" => 9.19113640885e7)
```

```
getRiemannSum (generic function with 1 method)
```

```julia
begin   function getRiemannSum(a,b,n,func)
            a=a
            b=b
            n=n
            Δt=(b-a)/n
            tspan=a:Δt:b
            f=func
            len=size(tspan)[1]
            getnewarr(arr)=[f(t)*Δt for t in arr]    #计算每一个Δt 的值
            getsums(arr)=sum(arr)                    #求和
            get4digits(num)=round(num,digits=4)      #保留小数
            pipeline(arr)=arr|>getnewarr|> getsums|> get4digits  # 拼接管道操作
            res= Dict(
                "leftsums"=>pipeline(tspan[1:len-1]),
                "rightsums"=>pipeline(tspan[2:len]),

            )
            #@show res
            return res
       end
end
```

```julia
 @htl("""<script src="https://cdn.bootcdn.net/ajax/libs/mathjax/3.2.0/es5/tex-svg-full.min.js"></script>
    """)
```