# ch06 sec6.2 用分析方法构造反导函数

## Table of Contents



问题: $f(x)=0$ 的反导函数是什么?

如果一个函数的导数为0,表示函数在**区间内**没有变化, 所以返回值是一个常量,所有返回常量的函数导数都为 0

$$\text{如果 } F'(x)=0, \text{则 } F(x)=C$$

微积分总是在考虑局部为, 所以注意区间问题, 对于一个分段函数在一个区间内返回常数, 可能在其他区间是变化的.

例如行驶的汽车, 在某段时间停下来, 速度没有变化,$F'(x)=0$,在这段时间内行驶的距离为 $F(x)=0$.但是在其他时间段速度会有变化.

不同区间函数表达式可能会不同,变化率会不同, 导数也不同,对应的反导函数也不同

反导函数的通解

如果两个函数($F(x), G(x)$)在同区间内导数相同, 可以表示为:

$$G(x) = F(x) + C$$

不定积分的定义:

所有的$f(x)$ 的反导函数形式都是$F(x) + C$,符号表示为:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

不定积分和定积分表达的意义不同, 定积分表示的函数在区间内的变化率, 而不定积分表达的是一组函数.

**这里可以看到,我们可以用不定积分来度量函数簇的性质, 度量物理性质是数学的出发点**

**f(x)=k** 的反导函数

如果$k$ 是一个常数,则有:

$$\int kdx = kx + C$$

由于$C \in R$, 斜率为$k$ 的直线铺满了整个平面, 因为这里有两个变量$x$和$C$,因此我们可以把$F(x) = kx + C$ 写成线性列组合的形式,如下:

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ C \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} + C \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = kx + C$$

**两种方法结果是一样的, 但是计算机非常擅长做乘法, 因此线性组合的形式对提高计算性能有帮助,同时也利于对概念的理解.**

# 求反导函数

若 $F'(x)=x^n$ 则反导函数为:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int cosxdx = sinx + C$$

$$\int sinxdx = -cosx + C$$

**Theorem**

反导数定理:加法和倍乘

$$1. \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$2. \int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$