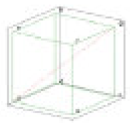


ch03 section 3.2 指数函数的导数

Table of Contents

> **Info**
>
> 指数函数 $f(x)=a^x$ 的导数一般形式表示为: $f'(x)=k\cdot a^x$, 因为在指数函数的导函数与原函数成一定比例关系.因此一旦我们获得了导函数, 也就可以可以得到原函数. 这是微分方程建模的最简单的原理.所以指数函数

指数函数导函数和 常数 e 的来历

代数计算 $g(x)=2^x$ 的导函数

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}(\frac{2^{x+h}-2^x}{h})=\lim_{h\to 0}2^x(\frac{2^h-1}{h})=\lim_{h\to 0}(\frac{2^h-1}{h})\cdot 2^x$$

令 $k=\lim_{h\to 0}(\frac{2^h-1}{h})$, 则 $g'(x)=k\cdot 2^x$ 这个极限值与指数函数的底数是由关系的. 这点很重要 下面看看h 取不同步长的极限值

	h	k
1	-0.1	0.66967
2	-0.01	0.69075
3	-0.001	0.692907
4	0.001	0.693387
5	0.01	0.695555
6	0.1	0.717735

$k = 0.693 \therefore g'(x) = 0.693 \cdot 2^x$

指数函数一般导函数定义为:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0}(\frac{a^h - 1}{h}) \cdot a^x$$

不同底数的指数函数k 值计算如下:

	a	k
1	2	0.693387
2	3	1.09922
3	4	1.38726
4	5	1.61073
5	6	1.79337
6	7	1.9478
7	8	2.08161
8	9	2.19964
9	10	2.30524

在上面表中可以观察到当$a=3$时, k似乎接近于 1, 由于 1 在数学中是一个很特别的数字, 那么我们来看看到底 $a=?$ 可以让k近似等于 1

$$k=\lim_{h\to 0}(\frac{a^h-1}{h})=1$$

$$\frac{a^h-1}{h}\approx 1$$

$$a^h-1\approx h \text{ 所以 } a\approx(1+h)^{1/h}$$

依照这个公式来计算$k=1$是a的近似值

	h	a
1	-0.1	2.86797
2	-0.01	2.732
3	-0.001	2.71964
4	-1.0e-5	2.7183
5	1.0e-5	2.71827
6	0.001	2.71692
7	0.01	2.70481
8	0.1	2.59374

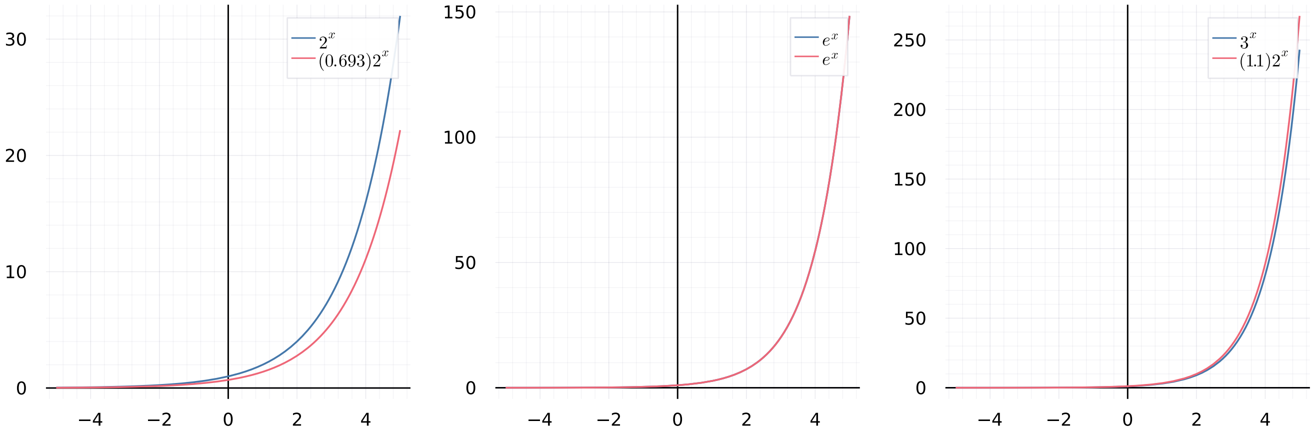
当 $a=2.718$ 时, k值近似等于 1

这个a 就是 欧拉常数: $\boldsymbol{e}$

以 e 为底数的指数函数的导数就是他自己

Note

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$



2^x
$(0.693)2^x$
e^x
e^x
3^x
$(1.1)2^x$