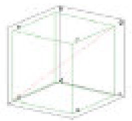


```
PlutoUI.Resource("https://tva1.sinaimg.cn/thumbnail/e6c9d24egy1h2alsw1tzxj20m80gomxn.jpg")
```

ch05 sec5.3 基础定理和解释

```
md"""
# ch05 sec5.3    基础定理和解释
"""
```

Table of Contents

$$\int_a^b f(x)dx$$

积分符号表示在某点的函数值$f(x)$ 乘以一小段距离dx.

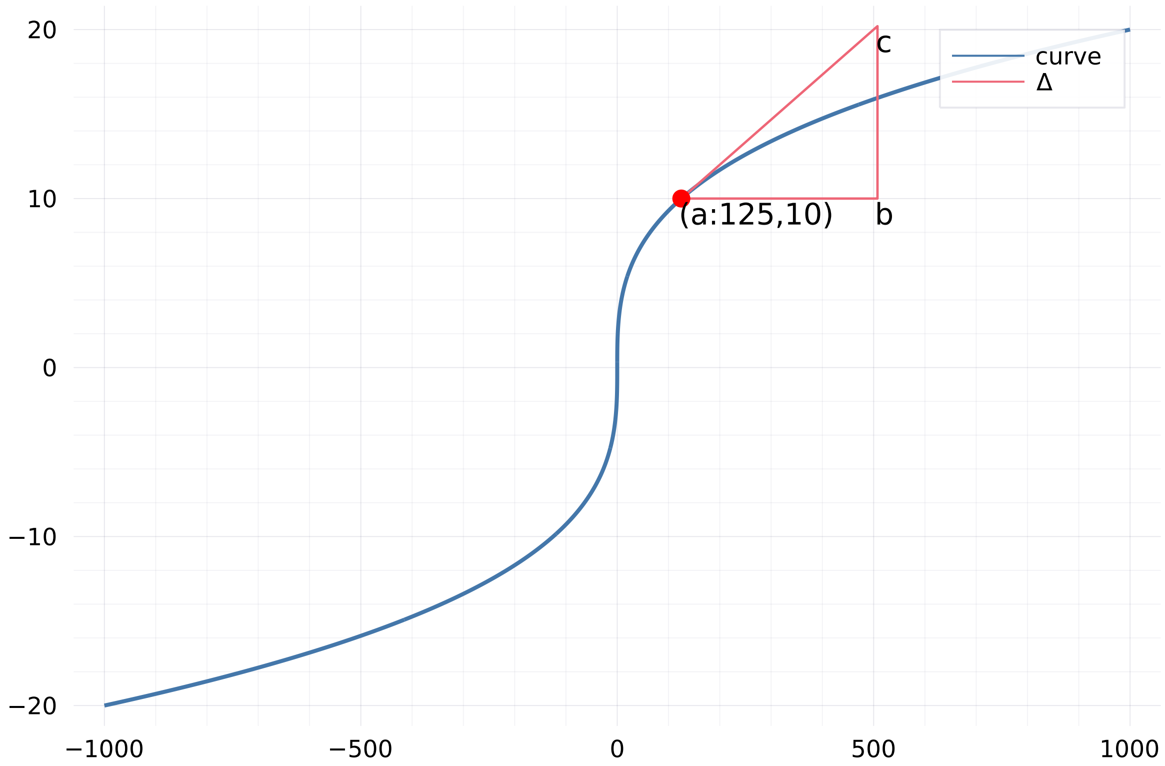
下图中在运动轨迹中,每一点都有一个速度$f(t)$, 定义一个Δt, 两者乘积就是在这一小段时间内距离的变化 所有时间段Δt 上的距离加起来就是 $a \to b$ 这段时间内位移的净变化值 $\int_a^b f(t)dt$

速度的单位是$\frac{米}{秒}$ 乘以 Δt, 单位是$秒$, $\frac{米}{秒} \cdot 秒$ 得到 单位$米$. 意义就是位移的变化

对于 $\int_a^b f(x)dx$, $y = f(x)$ 单位是$米$, dx 单位也是$米$ 所以 $f(x) \cdot dx$ 单位是$米^2$. 这就是积分的面积

在数学中不同的单位度量的是不同的物理性质, 这一点要清楚 在微积分中对不同的函数进行积分度量的也是不同性质的变化

运动时间点 5


curve
Δ
(a:125,10)
b
c
20
10
0
−10
−20
−1000
−500
0
500
1000

微积分基本定理

定义$v=f(t)$,速度为时间的函数, $f(t)$ 就是运动轨迹中某点的导数, 如果位移用函数F 表示 那么在一段时间 $a \rightarrow b$ 内 ,位移的变化是 $F(b)-F(a)$, 轨迹中某点的速度就是$F'(t)=f(t)$

由此 积分和导数就联系在一起了:

$$\int_a^b f(t)dt = \underset{t=a \rightarrow t=b}{位置变化} = F(b)-F(a)$$

这就是微积分的基本定理

Theorem

微积分基本定理

如果f是区间$[a,b]$ 内的连续函数,且$f(t)=F'(t)$,那么有:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$$

再继续分解看看

为了计算$ta \rightarrow tb$ 的变化 $F(b)-F(a)$, 将时间段划分为n段, 每一小段时间为:$\Delta t=\frac{b-a}{n}$

$\Delta F = F的变化 \times \Delta t$,$F的变化$ 就是在该时间段内的导数$F'(t)$

当 $n=0$ 时

$$\Delta F \approx F'(t_0)\Delta t$$

当 $n=1$ 时

$$\Delta F \approx F'(t_1)\Delta t$$

求和得到

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta F \approx \sum_{i=0}^{n-1} F'(t)\Delta t$$

所以总的变化为:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(t)\Delta t$$

Info

变化率的积分等于总的变化

$$F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}F'(t)\Delta t$$

```
md"""
## 微积分基本定理

定义$v=f(t)$ ,速度为时间的函数, $f(t)$ 就是运动轨迹中某点的导数, 如果位移用函数$F$ 表示
那么在一段时间 $a \to b$ 内 ,位移的变化是 $F(b)-F(a)$, 轨迹中某点的速度就是$F'(t)=f(t)$

由此 积分和导数就联系在一起了:


$$\int_{a}^{b}f(t)dt =\underset{t=a  \to t=b}{位置变化}=F(b)-F(a)$$

这就是微积分的基本定理

!!! theorem
    **微积分基本定理**

    如果$f$是区间$[a,b]$ 内的连续函数,且$f(t)=F'(t)$,那么有:

    $$\int_{a}^{b}f(t)dt=F(b)-F(a)$$

再继续分解看看

为了计算$ta \to tb$ 的变化 $F(b)-F(a)$, 将时间段划分为$n$段, 每一小段时间为:$Δt=\frac{b-a}{n}$

 $ΔF=F的变化 \times Δt$  ,$F的变化$ 就是在该时间段内的导数$F'(t)$

当 $n=0$ 时

$ΔF \approx F'(t_0)Δt$

当 $n=1$ 时

$ΔF \approx F'(t_1)Δt$

求和得到

$\sum_{i=0}^{n-1}ΔF \approx \sum_{i=0}^{n-1}F'(t)Δt$

所以总的变化为:

$F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}F'(t)Δt$

!!! info
    变化率的积分等于总的变化

    $F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}F'(t)Δt$
"""
```

Example

example1

如果$F'(t)=f(t)$,单位是 km/hour, $\int_{a}^{b}f(t)dt$ 和$F(b)-F(a)$ 的单位是什么?

因为 $f(t)$ 单位是$\frac{km}{hour}$,时间 t单位是$hour$, 乘积单位为km ,表示在时间端内距离的变化.

$F(b)-F(a)$ 单位也是 km 也是距离的变化,两者单位相同.

同一种单位度量同一种性质

```
md"""
!!! example
    example1

    如果$F'(t)=f(t)$,单位是 km/hour, $\int_{a}^{b}f(t)dt$ 和$F(b)-F(a)$ 的单位是什么?

因为 $f(t)$ 单位是$\frac{km}{hour}$,时间 t单位是$hour$, 乘积单位为$km$ ,表示在时间端内距离的变化.

  $F(b)-F(a)$ 单位也是 $km$  也是距离的变化,两者单位相同.

同一种单位度量同一种性质

"""
```

积分基本定理的应用

Example

example2

$F(t)$ 表示细菌的数量, $t=0时, F(t)=5单位为百万个$,细菌的瞬时增长速度为2^t,估计一下当$t=1$ 时的细菌数量

根据积分基本定理有:

$$F(1)-F(0)=\int_{0}^{1}2^tdt$$

所以当 $t=1$时的细菌数量为:

$$F(1)=F(0)+\int_{0}^{1}2^tdt$$

计算结果如下, 使用黎曼和方法计算

```
md"""
## 积分基本定理的应用
!!! example
    example2

     $F(t)$ 表示细菌的数量, $t=0 时, F(t)=5 单位为百万个$,细菌的瞬时增长速度为$2^t$,估计一下当 $t=1$ 时的细菌数量

根据积分基本定理有:

$F(1)-F(0)=\int_{0}^{1}2^tdt$

所以当 $t=1$时的细菌数量为:

$F(1)=F(0)+\int_{0}^{1}2^tdt$

计算结果如下, 使用黎曼和方法计算

"""
```

```
6.4407
```

```julia
let
    f(t)=2^t  #增长率
    t0=0
    t1=1
    n=250
    F0=5
    ΔF=getRiemannSum(t0,t1,n,f)  # 黎曼和求定积分
    F1=F0+ΔF["leftsum"]
    @show F1

end
```

```
F1 = 6.4407
```

结论: 当$t=1$时, 细菌的数量为 6.4407 , 单位为百万个

这里用单位百万个来度量细菌的生长特性, 在数学学习中要反复的理解度量的意义

```
getRiemannSum (generic function with 1 method)
```

```julia
begin
    function getRiemannSum(a,b,n,func)
            a=a
            b=b
            n=n
            Δt=(b-a)/n
            tspan=a:Δt:b
            f=func
            len=size(tspan)[1]
            getnewarr(arr)=[f(t)*Δt for t in arr]    #计算每一个Δt 的值
            getsums(arr)=sum(arr)                    #求和
            get4digits(num)=round(num,digits=4)      #保留小数
            pipeline(arr)=arr|>getnewarr|> getsums|> get4digits  # 拼接管道操作
            res= Dict(
                "leftsum"=>pipeline(tspan[1:len-1]),
                "rightsums"=>pipeline(tspan[2:len]),

            )
            #@show res
            return res
     end
end
```