ch04 sec3.3 优化和建模

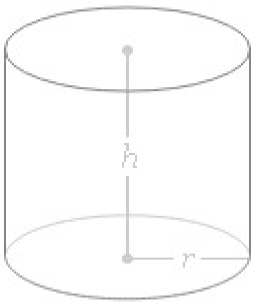
Table of Contents

数学建模的过程就是把实际问题转化为函数的过程. 在建模过程中就要知道所有获得函数的各种特性,了解函数的极值和边界是必须要完成的任务 .

Note

example1

假设要建造一个容积为 40 立方英寸的金属铝水罐,要使用最少的材料.




```
md"""
数学建模的过程就是把实际问题转化为函数的过程. 在建模过程中就要知道所有获得函数的各种特性,了解函数的极值和边界是必须要完成的任务 .

!!! note
    example1

    假设要建造一个容积为 40 立方英寸的金属铝水罐,要使用最少的材料.

    ![](https://tse1-mm.cn.bing.net/th/id/R-C.6230d2c2aa43695d68b708def2d38127?rik=F835FYh4DDpYmQ&riu=http%3a%2f%2fwww.yunsuan.org%2fstatic%2fupload%2fb0%2fb0710cc0-e180-11e4-aca9-00163e022551.jpg&ehk=OhyNTJdy06RgYT5kRp4s1ipLwZ1txgoyIM3wCGa5We4%3d&risl=&pid=ImgRaw&r=0)

"""
```

建造材料需要地面和侧面

$$bottom(r) = 2\pi r^2$$

体积限制为40 ,因此 $\pi(r^2)h = 40$ 所以 $h = \frac{40}{(\pi r^2)}$

$side(h,r) = 2\pi r\frac{40}{(\pi r^2)}$ 所以 $side(r) = \frac{80}{r}$

体积为 40 的材料面积为公式为:

$$m(r) = 2\pi r^2 + \frac{80}{r}$$

求导得: $\frac{dM}{dr} = 4\pi r - \frac{80}{r^2} = 0$ 所以临界点为:$4\pi r = \frac{80}{r^2}$

所以 $\pi r^3 = 20$,$r = 1.85 inches$

材料用量为:$m(1.85) = 2\pi(1.85)^2 + \frac{80}{1.85} = 64.7 in^2$

```
md"""

建造材料需要地面和侧面

$bottom(r)= 2πr^2$

体积限制为40 ,因此 $π(r^2)h=40$  所以 $h=\frac{40}{(πr^2)}$

  $side(h,r)=2πr\frac{40}{(πr^2)}$  所以  $side(r)=\frac{80}{r}$

体积为 40 的材料面积为公式为:

$m(r)=2πr^2+\frac{80}{r}$

求导得: $\frac{dM}{dr}=4πr-\frac{80}{r^2}=0$  所以临界点为:$4πr=\frac{80}{r^2}$

所以 $πr^3=20$   ,$r=1.85 inches$


材料用量为:$m(1.85)=2π(1.85)^2+\frac{80}{1.85}=64.7 in^2$
"""
```

Tips

建模优化实践中的几个提示:

1.理解函数和数值关系是前提

2.如有可能,画出几张草图大致了解一下问题

3.从之前获取的信息尽可能得到用于构造函数的方程,消减不必要的变量

4.找到临界点, 在区间和临界点调用函数, 找到最大值和最小值

```
md"""
!!! tips
		建模优化实践中的几个提示:

	1.理解函数和数值关系是前提

	2.如有可能,画出几张草图大致了解一下问题

	3.从之前获取的信息尽可能得到用于构造函数的方程,消减不必要的变量

	4.找到临界点, 在区间和临界点调用函数, 找到最大值和最小值
"""
```

Example

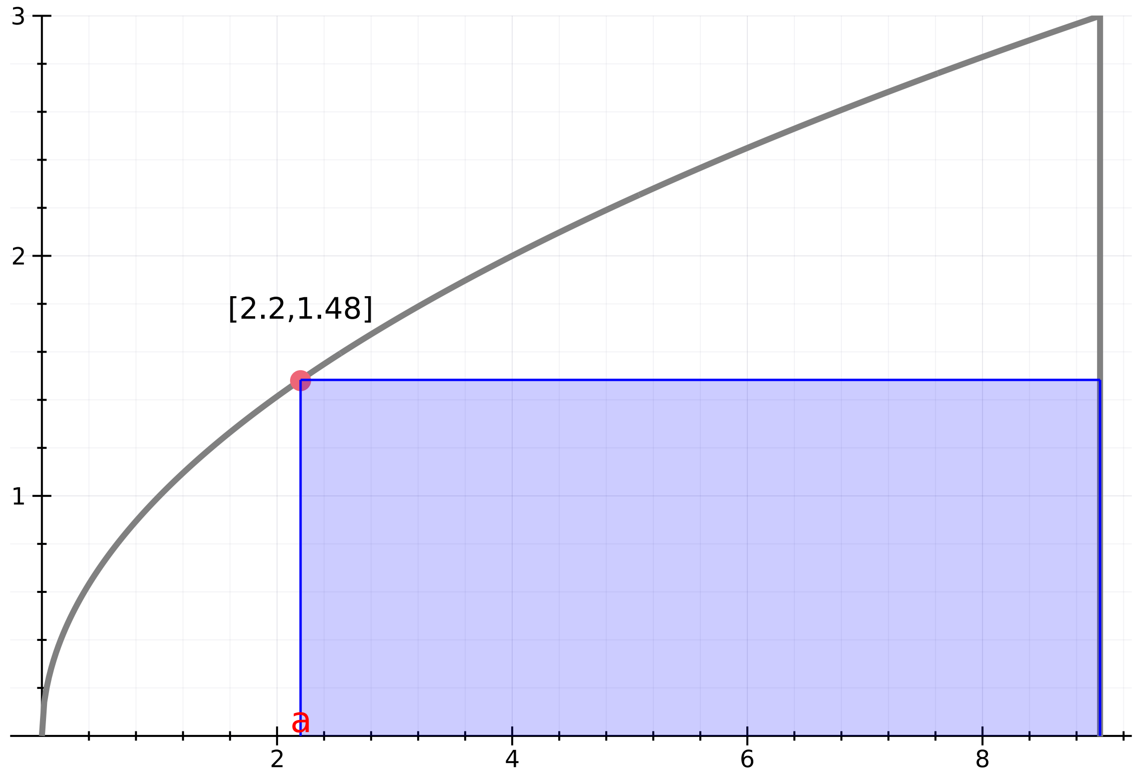
example3: 由 $y=\sqrt{x}, x=9, y=0$ 围成的区域, 在 $y=\sqrt{x}$ 上找到一个点, 使其到$x=9$ 和$y=0$的距离围成的矩形面积最大化

也就是求下图中蓝色区域最大值

```
md"""
!!! example

	example3:
	由 $y=\sqrt{x} , x=9, y=0$  围成的区域, 在 $y=\sqrt{x}$ 上找到一个点, 使其到$x=9$ 和 $y=0$的距离围成的矩形面积最大化

也就是求下图中蓝色区域最大值

"""
```

2.2

```
@bind apoint Slider(0.2:0.2:8.8,default=2,show_value=true)
```




```
let
    a=apoint
    yoffset=0.30
    y(x)=sqrt(x)
    xspan=0:0.02:9
    ann=[
        (a,y(a)+yoffset,text("[$(a),$(round(y(a),digits=2))]",pointsize=10)),
         (a,0.07,text("a",pointsize=12,color=:red))
    ]
    plot(y, xspan,label=false,frame=:origin,color=:gray,lw=3,ann=ann)
    scatter!([a],[round(y(a),digits=2)],label=false,ms=6)
    vline!([9],label=false,color=:gray,lw=3,ylims=(0,y(9)))
    areaplot!([a,a,9,9],[0,y(a),y(a),0],label=false,seriescolor = [:blue],fillalpha
    = [0.2],
)
end
```

矩形的高度由$y(x)=\sqrt{a}$ 求出, 所以高度为 $\sqrt{a}$

矩形的宽度为$9-a$

因此矩形面积为:

$$R(a)=\sqrt{a}\cdot(9-a)$$

展开后求导

$$\frac{dR}{da}=\frac{9}{2}a^{-1/2}-\frac{3}{2}a^{1/2}=0$$

经过化简得:

$$18=6a \text{ 所以 } a=3$$

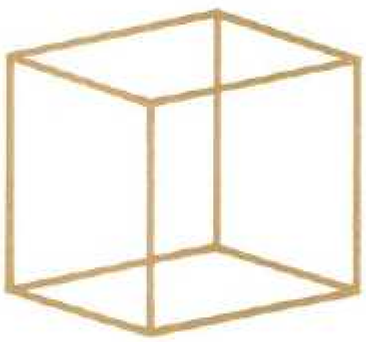
这里不用考虑两个边界值, 因为在边界处面积都为 0

所以矩形的 宽度为6 高度为$\sqrt{3}$ 的时候, 围成的面积最大化

```
md"""
矩形的高度由$y(x)=\sqrt{a}$ 求出, 所以高度为 $\sqrt{a}$

矩形的宽度为$9-a$

因此矩形面积为:

$R(a)=\sqrt{a}\cdot(9-a)$

展开后求导

$\frac{dR}{da}=\frac{9}{2}a^{-1/2}-\frac{3}{2}a^{1/2}=0$

经过化简得:

$18=6a 所以  a=3$

这里不用考虑两个边界值, 因为在边界处面积都为 $0$

所以矩形的 宽度为$6$ 高度为$\sqrt{3}$ 的时候, 围成的面积最大化
"""
```

Example

example4



底面封闭的盒子, 表面积为定值A,底边为正方形,宽度为a

a. 求盒子体积的公式, 因变量为底边宽度x, 体积的值域范围是多少

b. 画出 a 得到的函数图像

c. 求出盒子体积的最大值

```
md"""
!!! example
    example4

    ![](https://tva1.sinaimg.cn/small/e6c9d24egy1h2yqc35mnsj20ex0ee0ss.jpg)

    底面封闭的盒子, 表面积为定值$A$,底边为正方形,宽度为$a$

    a. 求盒子体积的公式, 因变量为底边宽度$x$, 体积的值域范围是多少

    b. 画出 a 得到的函数图像

    c. 求出盒子体积的最大值
"""
```

表面积表达式为:

$$A=4xh+2x^2$$

所以

$$h=\frac{A-2x^2}{4x}$$

带入体积公式:

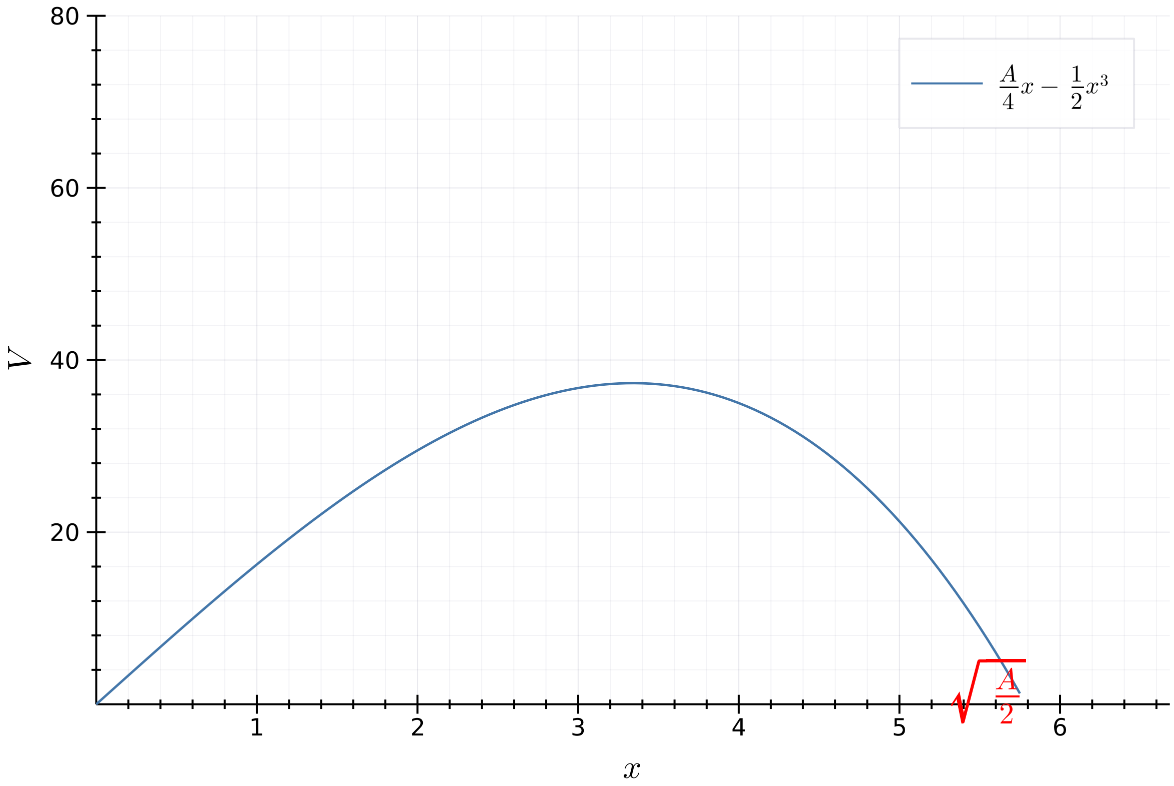
$$V=x^2h=x^2(\frac{A-2x^2}{4x})=\frac{A}{4}x-\frac{1}{2}x^3$$

当$h->0$ 时, $A=2x^2$ 所以 x 定义域为: $[0,\sqrt{\frac{A}{2}}]$

```
md"""
表面积表达式为:

$A=4xh+2x^2$

所以

$h=\frac{A-2x^2}{4x}$

带入体积公式:

$V=x^2h=x^2(\frac{A-2x^2}{4x})=\frac{A}{4}x-\frac{1}{2}x^3$

当$h->0$ 时, $A=2x^2$  所以 $x 定义域为: [0,\sqrt{\frac{A}{2}}]$


"""
```

67

```
@bind  Aval Slider(40:100,show_value=true)
```




```
let
    A=Aval
    xspan=0:0.05:sqrt(A/2)
    f(x)=(A/4)x-(1/2)*x^3
    ann=[
        (sqrt(A/2),2,text(L"\sqrt{\frac{A}
        {2}}",pointsize=10,color=:red,halign=:right))
    ]
    plot(f,xspan, label=L"\frac{A}{4}x-\frac{1}{2}x^3",frame=:origin,ylims=(0,80),
    xlabel=L"x",ylabel=L"V",ann=ann,xlims=(0,sqrt((2A)/3))
    )
end
```

求体积最大值, 对函数求导得到:

$$x=\pm \sqrt{\frac{A}{6}} ,取正值$$

带入体积公式的得 :

$$V_{max}=(\frac{A}{6})^{3/2}$$

```
md"""
求体积最大值, 对函数求导得到:

$x=\pm \sqrt{\frac{A}{6}} ,取正值$

带入体积公式的得 :

$V_{max}=(\frac{A}{6})^{3/2}$


"""
```